CULEGERE DE PROBLEME

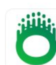
PENTRU ADMITEREA ÎN ÎNVĂȚĂMÎNTUL SUPERIOR



Editura Științifică și Enciclopedică

COLECTIVUL DE COORDONARE

MATEMATICĂ	Octavian Stănăşilă
FIZICĂ	Ion M. Popescu
CHIMIE	Felicia Cornea



Vasile BRÎNZĂNESCU
Stere IANUŞ
Bucur B. IONESCU
Octavian STĂNĂŞILĂ
Ion M. POPESCU
Dan IORDACHE
Constantin CRISTESCU
Paul STERIAN
Ion CĂPLĂNUŞ
Felicia CORNEA
Ion BACIU
Cornel PADINA

CULEGERE DE PROBLEME REZOLVATE

pentru admiterea în învăţămîntul superior

Matematică-Fizică-Chimie

- Probleme date la concursurile de admitere în învăţămîntul superior, 1984—1987

●● Probleme propuse



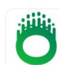
EDITURA ŞTIINŢIFICĂ ŞI ENCICLOPEDICĂ
Bucureşti, 1989

COPERTA DE GEORGE MĂLUȘEL

Redactori: Maria BORICEAN (Matematică)
Virgil SPULBER (Fizică)
Carmen ZGĂVÎRDICI (Chimie)

Tehnoredactor: Olimpiu Popa

ISBN 973-29-0059-8



PREFAȚĂ

Lucrarea pe care o prezentăm cuprinde subiectele date la concursurile de admitere în învățămîntul superior, din anii 1984—1987, la probele de matematică, fizică și chimie. Toate problemele respective sînt însoțite de soluții, indicații sau răspunsuri, acestea fiind prezente inclusiv pentru întrebările sau subiectele cu aspect teoretic.

Pentru fiecare disciplină s-a adăugat cîte un breviar teoretic, precum și seturi de probleme propuse de autori, majoritatea originale, și pentru care sînt date — după caz — soluții, răspunsuri sau numai indicații asupra modului de rezolvare.

Breviarele teoretice sintetizează principalele noțiuni, legi, teoreme și formule învățate în școală, urmărind îndeaproape manualele de liceu și programele analitice pentru admitere. Astfel, la matematică sînt prezentate — în mod unitar, fără demonstrații — noțiunile esențiale și teoremele de bază de algebră, geometrie, trigonometrie și analiză matematică, cu exemple concrete de aplicare a acestora. La fizică sînt date definițiile mărimilor și unităților lor de măsură, legile, teoremele și formulele principale din mecanică, fizică moleculară, electricitate și magnetism, optică, fizică atomică și nucleară, cu accent pe explicarea și înțelegerea fenomenelor fizice, a semnificației fizice a mărimilor, precum și pe aplicațiile tehnice ale acestora. La chimie, odată cu prezentarea principalelor aspecte teoretice de chimie anorganică și organică, s-a insistat pe aprofundarea aplicațiilor în realizarea reacțiilor chimice, în rezolvarea problemelor de chimie.

Prezentarea unor soluții complete ale unor probleme, precum și tratarea integrală a subiectelor teoretice s-a făcut în ideea că este necesar ca orice candidat la concursul de admitere în învățămîntul superior să știe și cum să-și redacteze lucrările, cu atît mai mult cu cît acestea trebuie realizate într-un barem de timp. Mai mult, la un concurs cu probe de matematică, fizică sau chimie nu este suficient să se urmărească numai obținerea rezultatului unei probleme, ci contează foarte mult modul de prezentare logic, ordonat și justificat al raționamentului, pînă la concluziile finale. De asemenea, chestiunile teoretice trebuie să fie prezentate argumentat, cu explicații, cu justificarea semnificațiilor, cu interpretările și cu concluziile care se impun.

În anii trecuți, au mai apărut două lucrări similare, cu subiectele date la concursurile de admitere organizate pe plan central. Acelea se refereau la anii 1978—1979 și, respectiv, 1980—1983. Volumul de față are un conținut în întregime nou, păstrîndu-se numai modul de organizare a materialului, pe anii de concurs, cu respectarea structurii probelor pe discipline, specializări, profiluri sau grupe de profiluri. În acest fel, orice elev sau absolvent de liceu care dorește să devină student poate să realizeze o autoverificare a cunoștințelor sale, în condiții apropiate de cele din concurs.

Bineînțeles, există unele modificări în timp ale programelor analitice și cititorul trebuie să se situeze în condițiile cerințelor din anii corespunzători de concurs, cunoscîndu-se că sînt valabile acele manuale și programe după care au studiat, în

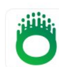
timpul liceului, absolvenţii promoţiei din anul în care se organizează concursul de admitere.

Elaborarea celor mai multe probleme este de fapt rodul activităţii a numeroase cadre didactice din învăţămîntul superior, care au contribuit la realizarea portofoliului larg de probleme utilizat la selecţionarea şi redactarea celor pentru probele de concurs. Soluţiile aparţin, cu precădere, autorilor prezentei lucrări, ca şi problemele pe care le-au propus, în conformitate cu manualele şi programele promoţiei de absolvenţi din 1988.

Sperăm că această lucrare va constitui un sprijin real pentru elevii din toate clasele de liceu, cu deosebire pentru cei din clasele terminale şi pentru absolvenţii care se pregătesc pentru concursul de admitere în învăţămîntul superior. Există şi alte categorii de cititori interesaţi pentru care aprofundarea cunoştinţelor în domeniul matematicii, fizicii şi chimiei constituie o preocupare permanentă. De asemenea, lucrarea poate fi utilă profesorilor de specialitate, în vederea acţiunilor complexe de pregătire a elevilor pentru examenele de bacalaureat, pentru olimpiade şi pentru concursurile de admitere în învăţămîntul superior.

AUTORII

MATEMATICĂ



A. BREVIAR

§ 1. ALGEBRĂ

1. IDENTITĂŢI IMPORTANTE

Multe consideraţii de matematică se referă la numerele reale. Presupunem cunoscute proprietăţile de calcul în mulţimea $\mathbf{R}$ şi în submulţimile sale $\mathbf{N}$, $\mathbf{Z}$, $\mathbf{Q}$. În unele consideraţii se folosesc şi numerele complexe ($\mathbf{C} = \mathbf{R} \times \mathbf{R}$).

Pentru orice a, $b \in \mathbf{C}$ avem:

$$(a \pm b)^2 = a^2 \pm 2ab + b^2; \quad a^2 - b^2 = (a + b)(a - b);$$

$$(a \pm b)^3 = a^3 \pm 3a^2b + 3ab^2 \pm b^3,$$

şi, pentru orice întreg $n \geqslant 1$:

$$(a + b)^n = a^n + C_n^1 a^{n-1}b + \dots + C_n^k a^{n-k}b^k + \dots + b^n,$$

sau echivalent:

$$(a + b)^n = \sum_{k=0}^{n} T_{k+1}, \text{ unde } T_{k+1} = C_n^k a^{n-k} b^k.$$

Dacă a, b, $c \in \mathbf{C}$ atunci:

$$(a + b + c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2bc + 2ca;$$

$$(a + b + c)^3 = a^3 + b^3 + c^3 + 3(a + b)(b + c)(c + a);$$

$$a^3 + b^3 + c^3 - 3abc = (a + b + c)(a^2 + b^2 + c^2 - ab - bc - ca).$$

Pentru orice $x \in \mathbf{C}$, $x \neq 1$, avem: $1 + x + x^2 + \dots + x^n = \dfrac{1 - x^{n+1}}{1 - x}$.

Dacă a, b, c, x, y, $z \in \mathbf{R}$, atunci:

$$(a^2 + b^2 + c^2)(x^2 + y^2 + z^2) = (ax + by + cz)^2 + (bz - cy)^2 + (cx - az)^2 + (ay - bx)^2.$$

(*identitatea lui Lagrange*)

De aici rezultă că:

$$(ax + by + cz)^2 \leqslant (a^2 + b^2 + c^2)(x^2 + y^2 + z^2).$$

Mai general,

$$\left(\sum_{i=1}^{n} a_i x_i\right)^2 \leqslant \left(\sum_{i=1}^{n} a_i^2\right)\left(\sum_{i=1}^{n} x_i^2\right).$$

(*inegalitatea lui Cauchy*)

Reamintim că $(\forall) x \in \mathbf{R}$, $x^2 \geqslant 0$, şi că dacă x, $y \in \mathbf{R}$, $x^2 + y^2 = 0$, atunci $x = y = 0$.

Inegalităţile anterioare nu au loc şi pentru numere complexe.

Notăm $x_1 + x_2 = S$ şi $x_1x_2 = P$. Atunci:

$$x_1^2 + x_2^2 = (x_1 + x_2)^2 - 2x_1x_2 = S^2 - 2P;$$

$$x_1^3 + x_2^3 = (x_1 + x_2)^3 - 3x_1x_2(x_1 + x_2) = S^3 - 3PS;$$

$$x_1^4 + x_2^4 = (x_1^2 + x_2^2)^2 - 2x_1^2x_2^2;$$

$$|x_1 - x_2| = \sqrt{(x_1 - x_2)^2} = \sqrt{(x_1 + x_2)^2 - 4x_1x_2} = \sqrt{S^2 - 4P};$$

$$\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} = \frac{S}{P} \text{ etc.}$$

În mod similar, dacă $x_1 + x_2 + x_3 = S_1$, $x_1x_2 + x_2x_3 + x_3x_1 = S_2$, $x_1x_2x_3 = S_3$, atunci:

$$x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = S_1^2 - 2S_2;$$

$$x_1^3 + x_2^3 + x_3^3 = 3S_3 + S_1(S_1^2 - 3S_2);$$

$$x_1^2x_2^2 + x_2^2x_3^2 + x_3^2x_1^2 = (x_1x_2 + x_2x_3 + x_3x_1)^2 - 2x_1x_2x_3(x_1 + x_2 + x_3) = S_2^2 - 2S_1S_3;$$

$$\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \frac{1}{x_3} = \frac{S_2}{S_3} \text{ etc.}$$

În general, orice polinom simetric $P(x_1, x_2, ..., x_n)$ se poate exprima polinomial în funcţie de polinoamele simetrice fundamentale: $S_1 = x_1 + x_2 + ... + x_n$; $S_2 = x_1x_2 + x_2x_3 + ... + x_{n-1}x_n$; ... ; $S_n = x_1x_2 ... x_n$.

Exemple. 1) *Presupunem că $a, b, c \in \mathbf{Z}$ şi că suma $a + b + c$ este divizibilă cu* 6. *Să se arate că numărul $a^3 + b^3 + c^3$ este divizibil cu* 6. Aşadar $a + b + c = 6k$ cu $k \in \mathbf{Z}$ şi rezultă că $a^3 + b^3 + c^3 = M6 + 3abc$. Este suficient să observăm că unul din numerele a, b, c este par, deci $3abc = M6$.

2) *Să se arate că dacă $a, b, c \in \mathbf{R}$ şi $a^2 + b^2 + c^2 = 1$, atunci $|a + b + c| \leq \sqrt{3}$.* Folosim identitatea lui Lagrange pentru $x = y = z = 1$.

2. FUNCŢII ŞI ECUAŢII DE GRADUL I ŞI II

Funcţiile de gradul I sînt de forma $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, $f(x) = ax + b$ cu a, b constante reale. Semnul lui f este constant dacă şi numai dacă $a = 0$. Dacă $a \neq 0$, $f(x)$ are semn contrar semnului lui a pentru $x < -\frac{b}{a}$ şi acelaşi semn cu a pentru $x > -\frac{b}{a}$. Funcţia f este strict crescătoare $\leftrightarrow$ $a > 0$ şi strict descrescătoare $\leftrightarrow$ $a < 0$.

Funcţiile de gradul II sînt de forma $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, $f(x) = ax^2 + bx + c$ cu a, b, c constante reale şi $a \neq 0$.

Evident,

$$f(x) = a\left[\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{\Delta}{4a^2}\right],$$

unde $\Delta = b^2 - 4ac$. Atunci:

$$f(x) = 0 \leftrightarrow \left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 = \frac{\Delta}{4a^2} \leftrightarrow x + \frac{b}{2a} = \pm\frac{\sqrt{\Delta}}{2a},$$

adică $x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}$. Reamintim *relaţiile lui Viète*:

$$x_1 + x_2 = -\frac{b}{a}, \quad x_1 \cdot x_2 = \frac{c}{a}.$$

Reamintim că o ecuație de gradul II cu soluțiile α, β date este $(x-\alpha)(x-\beta)=0$, adică $x^2-(\alpha+\beta)x+\alpha\beta=0$. De asemenea, remarcăm că ecuațiile $ax^2+bx+c=0$ și $a'x^2+b'x+c'=0$ au aceleași soluții dacă și numai dacă $\frac{a}{a'}=\frac{b}{b'}=\frac{c}{c'}$.

O funcție f ca mai sus este strict monotonă pe fiecare din intervalele $\left(-\infty, -\frac{b}{2a}\right]$, $\left[-\frac{b}{2a}, +\infty\right)$. Dacă $a>0$, atunci f admite un minim în punctul $-\frac{b}{2a}$ și $f(x)\geqslant f\left(-\frac{b}{2a}\right)=-\frac{\Delta}{4a}$ pentru orice $x\in\mathbf{R}$. Dacă $a<0$, atunci f admite un maxim în punctul $-\frac{b}{2a}$ și $(\forall)x\in\mathbf{R}$, $f(x)\leqslant f\left(-\frac{b}{2a}\right)=-\frac{\Delta}{4a}$.

Graficul lui f este o parabolă cu axa paralelă cu Oy, avînd vîrful $V\left(-\frac{b}{2a}, -\frac{\Delta}{4a}\right)$.

Dacă $\Delta\leqslant 0$, atunci:

$$f(x)=a\left[\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2+\frac{-\Delta}{4a^2}\right]=a\cdot\text{„+"},$$

deci $f(x)$ are semn constant (semnul lui a); dacă $\Delta>0$, atunci ecuația $f(x)=0$ are rădăcini reale și distincte $x_1<x_2$ și $f(x)$ are semnul lui a pe intervalele $(-\infty, x_1)$ și (x_2, ∞) și semn contrar lui a pe intervalul (x_1, x_2).

Exemple. 1) *Să se afle parametrul real m astfel încît* $\frac{mx^2+x+2}{x^2+1}>1$ *pentru orice* $x\in\mathbf{R}$. Echivalent, $(\forall)x\in\mathbf{R}$, $(m-1)x^2+x+1>0$. Condițiile sînt $m-1>0$, $\Delta<0$; rezultă $m>\frac{5}{4}$.

2) *Să se afle m astfel încît ecuațiile* $x^2+x+m=0$, $x^2+mx+1=0$ *să aibă cel puțin o soluție comună.* Fie α o soluție comună, deci $\alpha^2+\alpha+m=0$, $\alpha^2+m\alpha+1=0$; prin scădere, $(m-1)(\alpha-1)=0$. Pentru $m=1$ cele două ecuații au aceleași soluții; pentru $\alpha=1$ se obține $m=-2$. Valorile cerute sînt $m=1$, $m=-2$.

3. REZOLVAREA UNOR SISTEME DE ECUAȚII

Prin *soluție* a unui sistem de forma:

$$\begin{cases} P(x, y)=0; \\ Q(x, y)=0, \end{cases}$$

se înțelege orice pereche de numere din $\mathbf{R}$ (sau din $\mathbf{C}$) verificînd cele două ecuații. Așadar, mulțimea soluțiilor este o submulțime a lui $\mathbf{R}\times\mathbf{R}$ (sau, eventual, $\mathbf{C}\times\mathbf{C}$); ecuațiile sau sistemele de tip polinomial se rezolvă în cadrul complex.

a) Fie un sistem de forma:

$$\begin{cases} ax+by+c=0; \\ a_{11}x^2+a_{12}xy+a_{22}y^2+b_1x+b_2y+c_0=0, \end{cases}$$

cu coeficienți reali sau complecși. Se rezolvă prima ecuație în raport cu y (presupunînd $b\neq 0$); înlocuind în ecuația secundă, se obține o ecuație de gradul II în x care admite în general soluțiile x_1, x_2. Determinînd valorile y_1, y_2 corespunzătoare, soluțiile sistemului vor fi (x_1, y_1), (x_2, y_2).

În mod similar se rezolvă sisteme de forma:

$$ax + by + c = 0, \quad P(x, y) = 0.$$

b) Fie un sistem omogen:

$$\begin{cases} a_{11}x^2 + a_{12}xy + a_{22}y^2 = a_3; \\ b_{11}x^2 + b_{12}xy + b_{22}y^2 = b_3, \end{cases}$$

punînd $y = tx$, ecuațiile vor deveni $x^2P(t) = a_3$, $x^2Q(t) = b_3$ cu P, Q polinoame de grad cel mult doi. Se obține o ecuație în t (anume $a_3Q(t) - b_3P(t) = 0$) avînd în general două soluții t_1, t_2. Înlocuind $y = t_1x$ într-una din ecuațiile inițiale, se obțin două soluții ale sistemului; alte două se obțin înlocuind $y = t_2x$. Trebuie atenție pentru a nu se pierde eventual soluția $x = 0$.

c) Sistemele simetrice polinomiale de forma:

$$\begin{cases} P(x, y) = 0; \\ Q(x, y) = 0, \end{cases}$$

unde $P(x, y) = P(y, x)$, $Q(x, y) = Q(y, x)$ pentru orice x, y, se rezolvă notînd $x + y = u$, $xy = v$, transformîndu-le în sisteme de forma $P_1(u, v) = 0$, $Q_1(u, v) = 0$. În general, polinoamele P_1, Q_1 au forme mai simple decît P și Q. Pentru orice soluție (u_0, v_0) se formează ecuația de gradul doi $z^2 - u_0z + v_0 = 0$ și dacă z_1, z_2 sînt soluțiile ei, rezultă soluțiile (z_1, z_2) și (z_2, z_1) ale sistemului inițial.

d) Soluțiile sistemelor de forma: $f(x, y, z) = 0$, $g(x, y, z) = 0$, $h(x, y, z) = 0$, sînt triplete de numere reale (sau complexe). Dacă primele două ecuații sînt de gradul I, atunci se „scot" x și y în funcție de z, iar ecuația a treia devine o ecuație în z. Un caz special îl constituie sistemele de forma:

$$\begin{cases} \dfrac{x - a_1}{b_1} = \dfrac{y - a_2}{b_2} = \dfrac{z - a_3}{b_3}; \\ h(x, y, z) = 0, \end{cases}$$

egalînd cu t rapoartele egale, rezultă $x = a_1 + tb_1$, $y = a_2 + tb_2$, $z = a_3 + tb_3$ și ultima ecuație devine o ecuație în t.

Nu discutăm aici sistemele care se rezolvă cu „artificii".

4. NUMERE COMPLEXE

Orice $z \in \mathbf{C}$ se scrie sub forma $z = a + bi$ cu a, b reali („forma algebrică"); remarcăm că egalitatea a două numere complexe revine la două egalități în $\mathbf{R}$:

$$a + bi = a' + b'i \longleftrightarrow a = a' \text{ și } b = b' \quad (a, b, a', b' \in \mathbf{R}).$$

Adunarea, scăderea și înmulțirea numerelor complexe se fac după regulile obișnuite, adăugînd $i^2 = -1$. Reamintim că orice număr real x se identifică prin numărul complex $x + 0i$. Cîtul $\dfrac{a + bi}{c + di}$ se calculează prin amplificare cu conjugatul numitorului: $\dfrac{a + bi}{c + di} = \dfrac{(a + bi)(c - di)}{c^2 + d^2}$.

Conjugatul complex al unui număr complex $z = a + bi$ $(a, b \in \mathbf{R})$ este $\bar{z} = a - bi$. Avem: $\overline{z_1 \pm z_2} = \bar{z}_1 \pm \bar{z}_2$; $\overline{z_1z_2} = \bar{z}_1 \cdot \bar{z}_2$; $\overline{z_1/z_2} = \bar{z}_1/\bar{z}_2$ (pentru $z_2 \neq 0$). În plus, $z \in \mathbf{C}$ este real dacă și numai dacă $z = \bar{z}$.

Dacă P este un polinom cu coeficienți reali, atunci $\overline{P(z)} = P(\bar{z})$. Se observă atunci că dacă $a + bi$ este o rădăcină a lui P, atunci $a - bi$ este de asemenea o rădăcină.

Orice număr complex $z = a + bi$ se identifică prin punctul $(a, b) \in \mathbf{R} \times \mathbf{R}$. Fixăm un sistem ortogonal de axe $x0y$ (fig. M.A.1). Modulul $r = |z|$ este bine determinat și $r \geqslant 0$. Dacă $z \neq 0$, atunci $r > 0$ și argumentul $\theta = \arg z$ este determinat pînă la un multiplu întreg de 2π; valoarea din $[0, 2\pi)$ a argumentului se numește *determinarea principală*. Din relațiile $a = r \cos \theta$, $b = r \sin \theta$, rezultă:

$$z = a + bi = r \cos \theta + i\, r \sin \theta = r(\cos \theta + i \sin \theta)$$

(„forma trigonometrică").

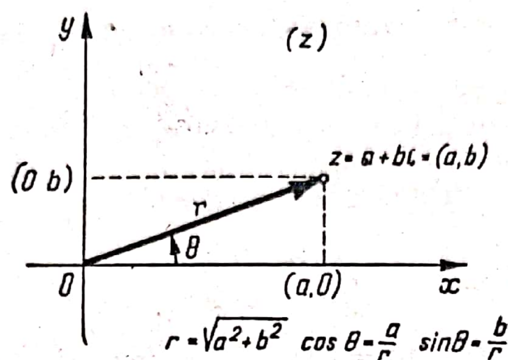


Fig. M.A.1

Exemple. Avem $1 + i = \sqrt{2}\left(\cos \frac{\pi}{4} + i \sin \frac{\pi}{4}\right)$, $-1 - i\sqrt{3} = 2\left(\cos \frac{4\pi}{3} + i \sin \frac{4\pi}{3}\right)$, $-2i = 2\left(\cos \frac{3\pi}{2} + i \sin \frac{3\pi}{2}\right)$ și $7 = 7(\cos 0 + i \sin 0)$.

Pentru orice $z_1, z_2 \in \mathbf{C}$ avem $|z_1 + z_2| \leqslant |z_1| + |z_2|$, $|z_1 \cdot z_2| = |z_1| \cdot |z_2|$ și dacă $z_2 \neq 0$, $|z_1/z_2| = |z_1| / |z_2|$. Dacă $z_1, z_2 \in \mathbf{C} \setminus \{0\}$, atunci:

$$\arg z_1 z_2 = \arg z_1 + \arg z_2 \bmod 2\pi; \quad \arg(z_1/z_2) = \arg z_1 - \arg z_2 \bmod 2\pi.$$

[Prin convenție, $a = b \bmod 2\pi$ înseamnă că există $k \in \mathbf{Z}$ astfel încît $a - b = 2k\pi$].

Un rezultat important îl constituie *formula lui Moivre*: pentru orice $\alpha \in \mathbf{R}$, $n \in \mathbf{Z}$,

$$(\cos \alpha + i \sin \alpha)^n = \cos n\alpha + i \sin n\alpha.$$

Ecuația binomă $z^n = A$ cu $A = r(\cos \theta + i \sin \theta)$ nenul admite n soluții distincte, anume:

$$z_k = \sqrt[n]{r}\left(\cos \frac{\theta + 2k\pi}{n} + i \sin \frac{\theta + 2k\pi}{n}\right)$$

$$k = 0, 1, \ldots, n - 1;$$

aici $\sqrt[n]{r}$ este radicalul aritmetic, deci unicul număr real și pozitiv u astfel încît $u^n = r$. Numerele complexe $z_0, z_1, \ldots, z_{n-1}$ sînt vîrfurile unui poligon convex regulat cu n laturi, înscris în cercul cu centrul în origine de rază $\sqrt[n]{r}$.

Exemple. 1) Determinăm $n \in \mathbf{Z}$ astfel încît numărul complex $z = \left(\frac{1 + i}{1 - i}\right)^n$ să fie real. Avem $1 + i = \sqrt{2}\left(\cos \frac{\pi}{4} + i \sin \frac{\pi}{4}\right)$ și $1 - i = \sqrt{2}\left(\cos\left(-\frac{\pi}{4}\right) + i \sin\left(-\frac{\pi}{4}\right)\right)$, deci:

$$z = \left(\cos \frac{\pi}{2} + i \sin \frac{\pi}{2}\right)^n = \cos \frac{n\pi}{2} + i \sin \frac{n\pi}{2},$$

z este real $\longleftrightarrow \sin \frac{n\pi}{2} = 0 \longleftrightarrow \frac{n\pi}{2} = k\pi$ cu $k \in \mathbf{Z} \longleftrightarrow n$ este par.

2) *Cîte soluții ale ecuației $z^{1988} = -i$ sînt situate în primul cadran?* Ecuația se scrie $z^{1988} = 1 \cdot \left(\cos \frac{3\pi}{2} + i \sin \frac{3\pi}{2}\right)$ și are soluțiile:

$$z_k = \cos \frac{\frac{3\pi}{2} + 2k\pi}{1988} + i \sin \frac{\frac{3\pi}{2} + 2k\pi}{1988},$$

$0 \leqslant k \leqslant 1987$; dintre acestea, sînt situate în primul cadran cele pentru care $0 < \frac{\frac{3\pi}{2} + 2k\pi}{1988} < \frac{\pi}{2}$ și sînt în număr de 497.

5. INEGALITĂȚI, INECUAȚII

De la început trebuie spus că inegalitățile se consideră numai între numere reale (și nu complexe). Reamintim că dacă $a, b \in \mathbf{R}$, atunci:

$a < b \longleftrightarrow$ există $m > 0$ astfel încît $a + m = b$;

$a \leqslant b \longleftrightarrow$ există $m \geqslant 0$ astfel încît $a + m = b$.

Deoarece inegalitățile trebuie mînuite cu atenție și pun în dificultate pe candidați, reamintim proprietățile lor de bază.

1) Dacă $a < b$, atunci $a - b = -m$, deci $a - b < 0$ (trecerea dintr-un membru în altul cu semn schimbat).

2) Dacă $a < b$, atunci $-a > -b$ (într-adevăr, există $m > 0$ astfel încît $a + m = b$, deci $-b + m = -a$, adică $-b < -a$).

3) Inegalitățile de același sens se pot aduna membru cu membru:

$$a_1 \leqslant b_1, \quad a_2 \leqslant b_2 \Rightarrow a_1 + a_2 \leqslant b_1 + b_2.$$

4) Inegalitățile între numere pozitive se pot înmulți:

$$0 \leqslant a_1 \leqslant b_1, \quad 0 \leqslant a_2 \leqslant b_2 \Rightarrow 0 \leqslant a_1a_2 \leqslant b_1b_2.$$

Inegalitățile între numere pozitive se pot ridica la pătrat iar cele între numere negative se înmulțesc în prealabil cu -1 (cu schimbarea semnului).

5) Pentru orice $x, y \in \mathbf{R}$, avem:

$$|x + y| \leqslant |x| + |y|; \quad |x - y| \geqslant |x| - |y|.$$

Dacă $\varepsilon > 0$, atunci relația $|x - a| < \varepsilon$ este echivalentă cu $-\varepsilon < x - a < \varepsilon$, adică $x \in (a - \varepsilon, a + \varepsilon)$; iar relația $|x - a| > \varepsilon$ este echivalentă cu $x \in (-\infty, a - \varepsilon) \cup (a + \varepsilon, \infty)$.

Dacă $\varepsilon < 0$, inegalitatea $|x - a| < \varepsilon$ este falsă oricare ar fi $x, a \in \mathbf{R}$ iar $|x - a| > \varepsilon$ este adevărată oricare ar fi $x, a \in \mathbf{R}$.

Semnul numerelor 7, $\sqrt{3} - \sqrt{2}$, $a^2 + 1 (a \in \mathbf{R})$ este evident „+". Dar semnul expresiei $x - 1 (x \in \mathbf{R})$ nu este constant, depinzînd de x. Rezolvarea inecuațiilor revine la stabilirea semnului anumitor expresii (adică la precizarea cazurilor cînd expresiile respective au valori pozitive sau negative). În rezolvarea inecuațiilor se produc uneori greșeli care pot fi evitate. Astfel, o inegalitate de forma $\frac{a}{b} < c$ nu este echivalentă cu $a < bc$ $\left(\text{corect: } \frac{a}{b} - c < 0, \frac{a - bc}{b} < 0\right)$, după cum din ipoteza că $\frac{a}{b} < \frac{c}{d}$ este greșit să se deducă $ad < bc$ $\left(\text{corect: } \frac{a}{b} - \frac{c}{d} < 0, \frac{ad - bc}{bd} < 0, \text{ studiind și semnul numitorului}\right)$. Este util să reamintim că semnul unui cît $\frac{a}{b}$ este același cu semnul produsului ab $\left(\text{deoarece } \frac{a}{b} = \frac{ab}{b^2} \text{ și } b^2 > 0\right)$.

(O inecuaţie de forma $\frac{E_1E_2}{E_3} > 0$ este echivalentă cu $E_1E_2E_3 > 0$, după cum $\frac{E_1}{E_3E_4} \leqslant 0$ este echivalentă cu $E_1E_3E_4 \leqslant 0$ punînd însă condiţia $E_3 \neq 0$, $E_4 \neq 0$).

Exemple. 1) Aflăm $x \in \mathbf{R}$ astfel încît $x^2 \leqslant \frac{2}{x}$. Aşadar, $x^2 - \frac{2}{x} \leqslant 0$, $\frac{x^3-2}{x} \leqslant 0$ şi $x(x^3-2) \leqslant 0$ cu $x \neq 0$ (era greşit $x^3 \leqslant 2$). Rezultă $x(x-\sqrt[3]{2})(x^2+x\sqrt[3]{2}+\sqrt[3]{4}) \leqslant 0$ şi trinomul de gradul II fiind pozitiv, rezultă $x(x-\sqrt[3]{2}) \leqslant 0$ cu $x \neq 0$. În concluzie, $x \in (0, \sqrt[3]{2}]$.

2) Rezolvăm inecuaţia cu parametrul real $m \neq -1$: $\frac{x-1}{x+1} \leqslant \frac{m-1}{m+1}$. Trebuie făcută totodată discuţie după m. Inecuaţia se scrie echivalent:

$$\frac{x-1}{x+1} - \frac{m-1}{m+1} \leqslant 0; \quad \frac{(m+1)(x-1)-(m-1)(x+1)}{(m+1)(x+1)} \leqslant 0,$$

adică $\frac{2x-2m}{(m+1)(x+1)} \leqslant 0$.

Dacă $m+1 > 0$, atunci inecuaţia este echivalentă cu $(x-m)(x+1) \leqslant 0$, $x \neq -1$ şi rezultă $x \in (-1, m]$.

Dacă $m+1 < 0$, inecuaţia este echivalentă cu $(x-m)(x+1) \geqslant 0$, $x \neq -1$ şi rezultă $x \in (-\infty, m] \cup (-1, \infty)$.

3) Inecuaţiile exponenţiale, logaritmice şi trigonometrice au unele particularităţi care ţin de înţelegerea de fond a funcţiilor respective. De exemplu, pentru a rezolva:

$$(\sqrt{2}-1)^x + (3-2\sqrt{2})^x < 6,$$

se pune $u = (\sqrt{2}-1)^x$; deoarece $3-2\sqrt{2} = (\sqrt{2}-1)^2$, rezultă $u + u^2 < 6$, deci $-3 < u < 2$. Dar $u > 0$, deci rezultă $(\sqrt{2}-1)^x < 2$ şi logaritmînd în baza e, rezultă $x \ln(\sqrt{2}-1) < \ln 2$. Ţinînd cont că $\ln(\sqrt{2}-1)$ este negativ, rezultă $x > \frac{\ln 2}{\ln(\sqrt{2}-1)}$.

Este util să reamintim de asemenea cîteva inegalităţi clasice.

1°. *Inegalitatea lui Cauchy*: pentru orice $a_1, \ldots, a_n, b_1, \ldots, b_n \in \mathbf{R}$,
$$\left(\sum_{i=1}^{n} a_ib_i\right)^2 \leqslant \left(\sum_{i=1}^{n} a_i^2\right)\left(\sum_{i=1}^{n} b_i^2\right).$$

2°. *Inegalitatea mediilor*: dacă $a, b, c \in \mathbf{R}_+$, atunci

$$\frac{a+b}{2} \geqslant \sqrt{ab}; \quad \frac{a+b+c}{3} \geqslant \sqrt[3]{abc},$$

şi, mai general, pentru orice numere reale pozitive $a_1, a_2, \ldots, a_n$,

$$\frac{a_1+a_2+\ldots+a_n}{n} \geqslant \sqrt[n]{a_1a_2\ldots a_n}.$$

Acestea pot fi aplicate fără demonstraţie (alte inegalităţi mai puţin cunoscute trebuie nu numai afirmate, ci şi demonstrate la eventualele examene).

6. RADICALI, PUTERI, LOGARITMI

Fixăm un întreg $n \geqslant 2$. Dacă n este par şi $a \geqslant 0$, atunci se defineşte radicalul aritmetic $\sqrt[n]{a} = a^{1/n}$ ca fiind unicul număr real şi pozitiv u astfel încît $u^n = a$. Dacă n este par şi $a < 0$, atunci $\sqrt[n]{a}$ nu există (în cadrul numerelor reale). Pentru

orice n impar și $a \in \mathbf{R}$, $\sqrt[n]{a}$ este unicul număr real u (avînd același semn cu a) astfel încît $u^n = a$. Reamintim că:

$$\sqrt[n]{a^n} = \begin{cases} a & \text{dacă } n \text{ este impar,} \\ |a| & \text{dacă } n \text{ este par.} \end{cases}$$

Dacă $a \geqslant 0$, $b \geqslant 0$, atunci $\sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{ab}$ și pentru $b > 0$, $\sqrt[n]{a/b} = (\sqrt[n]{a})/(\sqrt[n]{b})$. De asemenea, $\sqrt[m]{\sqrt[n]{a}} = \sqrt[mn]{a}$ și, în particular, $\sqrt[4]{a^2} = \sqrt{|a|}$ (aceasta din urmă pentru orice $a \in \mathbf{R}$).

Reamintim de asemenea *formula radicalilor dubli*: dacă A, B sînt numere reale, atunci:

$$\sqrt{A \pm \sqrt{B}} = \sqrt{\frac{A+C}{2}} \pm \sqrt{\frac{A-C}{2}}, \text{ unde } C = \sqrt{A^2 - B}$$

(presupunînd că radicalii există).

Exemplu. Ne propunem să simplificăm expresia:

$$E = \sqrt{x + 2\sqrt{x-1}} + \sqrt{x - 2\sqrt{x-1}}, \quad x \geqslant 1.$$

Pentru primul radical avem $A = x$, $B = 4(x-1)$, deci $C = \sqrt{A^2 - B} = \sqrt{x^2 - 4x + 4} = \sqrt{(x-2)^2} = |x-2|$. Atunci $\sqrt{x + 2\sqrt{x-1}} = \sqrt{\frac{x + |x-2|}{2}} + \sqrt{\frac{x - |x-2|}{2}}$; în mod similar se prelucrează al doilea termen și ca atare:

$$E = 2\sqrt{\frac{x + |x-2|}{2}} = \begin{cases} 2\sqrt{x-1} & \text{dacă } x > 2, \\ 2 & \text{dacă } 1 \leqslant x \leqslant 2. \end{cases}$$

Se putea raționa și astfel: se observă că

$$E^2 = x + 2\sqrt{x-1} + x - 2\sqrt{x-1} + 2\sqrt{x^2 - 4(x-1)} = 2x + 2|x-2|$$

și deoarece $E \geqslant 0$, avem $E = \sqrt{E^2} = \sqrt{2x + 2|x-2|}$.

Prin convenție, un număr real a se numește *bază* (de logaritmi) dacă $a > 0$ și $a \neq 1$. În acest caz se definește, oricare ar fi $x \in \mathbf{R}$, *exponențiala* a^x în baza a. Anume:

$$a^x = \begin{cases} a^n = \underbrace{a \ldots a}_{n \text{ ori}} & \text{dacă } x = n \in \mathbf{N}^*, \\ 1 & \text{dacă } x = 0, \\ \dfrac{1}{a^n} & \text{dacă } x = -n \text{ cu } n \in \mathbf{N}^*, \\ \sqrt[q]{a^p} & \text{dacă } x = \dfrac{p}{q} \in \mathbf{Q} \ (q \geqslant 2 \text{ întreg}). \end{cases}$$

(În cazul cînd $x \in \mathbf{R} \setminus \mathbf{Q}$, a^x se definește cu ajutorul noțiunii de limită. De exemplu, $3^{\sqrt{2}} = \lim\limits_{n \to \infty} 3^{r_n}$, unde r_n este un șir de numere raționale convergent către $\sqrt{2}$.)

Reamintim proprietățile principale ale funcției exponențiale în baza a,

$$f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}, \quad f(x) = a^x.$$

1) $a^x > 0$ pentru orice $x \in \mathbf{R}$; de exemplu, $a^{-1/3} = \frac{1}{\sqrt[3]{a}} > 0$.

2) f este injectivă (dacă $a^x = a^y$, atunci $x = y$; aceasta se folosește la ecuații exponențiale, care se reduc astfel la ecuațiile studiate anterior). Menționăm că din relația $a^x = a^y$ rezultă în general $x = y$ sau $a = 1$; cazul $a = 1$ fusese exclus prin convenția făcută asupra bazei a.

3) Pentru orice x, $y \in \mathbf{R}$,

$$a^{x+y} = a^x \cdot a^y, \qquad a^{x-y} = a^x/a^y, \qquad a^{xy} = (a^x)^y.$$

4) Dacă $a > 1$, atunci funcția exponențială în baza a este strict crescătoare, deci

$$x_1 < x_2 \leftrightarrow a^{x_1} < a^{x_2}.$$

Dacă $0 < a < 1$, atunci

$$x_1 < x_2 \leftrightarrow a^{x_1} > a^{x_2}.$$

Acest fapt stă la baza rezolvării inecuațiilor exponențiale.

Dacă $a > 1$, atunci $\lim\limits_{x\to\infty} a^x = \infty$, $\lim\limits_{x\to-\infty} a^x = 0$ (se mai scrie simbolic $a^\infty = \infty$, $a^{-\infty} = 0$). Dacă $0 < a < 1$, atunci $\lim\limits_{x\to\infty} a^x = 0$, $\lim\limits_{x\to-\infty} a^x = \infty$. Dacă $P(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + \ldots + a_n (a_0 \neq 0)$ este o funcție polinomială și $a > 1$, atunci $\lim\limits_{x\to-\infty} P(x)a^x = 0$ și $\lim\limits_{x\to\infty} P(x)a^x = +\infty$ (dacă $a_0 > 0$) și $-\infty$ (dacă $a_0 < 0$); în particular, $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{P(x)}{e^x} = 0$.

Funcția exponențială

$$f : \mathbf{R} \to (0, \infty), \quad f(x) = a^x \quad (a > 0,\ a \neq 1 \text{ fixat})$$

este bijectivă și inversa ei este

$$f^{-1}: (0, \infty) \to \mathbf{R}, \quad f^{-1}(y) = \log_a y.$$

Egalitatea $\log_a x = r$ este echivalentă cu $\{x > 0,\ a^r = x\}$.
Reținem că numărul $\log_u v$ este definit dacă

$$u > 0, \quad u \neq 1, \quad v > 0.$$

Proprietățile principale ale logaritmilor sînt următoarele:

1) $\log_a 1 = 0$, $\log_a a = 1$ pentru orice $a > 0$, $a \neq 1$.

2) $\log_a xy = \log_a x + \log_a y$ și $\log_a \frac{x}{y} = \log_a x - \log_a y$, pentru orice $a > 0$, $a \neq 1$; $x > 0$, $y > 0$.

3) Dacă $\alpha \in \mathbf{R}$, atunci $\log_a(x^\alpha) = \alpha \log_a x$ pentru orice $a > 0$, $a \neq 1$, $x > 0$; de remarcat că $\log_a x^2 = 2 \log_a |x|$ pentru orice $x \neq 0$.

4) *Schimbarea bazei:*

$$\log_a x = \frac{\log_b x}{\log_b a}$$

pentru orice a, b strict pozitive și diferite de 1 și pentru orice $x > 0$.

Reamintim notațiile uzuale: $\log_{10} = \lg$; $\log_e = \ln$.

Exemplu. $\log_a x = \frac{\ln x}{\ln a}$; $\log_2 7 = \frac{\lg 7}{\lg 2}$.

5) Dacă $a > 1$, atunci funcția $h : (0, \infty) \to \mathbf{R}$, $h(x) = \log_a x$, este strict crescătoare (deci $x_1 < x_2 \leftrightarrow \log_a x_1 < \log_a x_2$). Iar dacă $0 < a < 1$, funcția h este strict descrescătoare. Acest fapt este folosit la rezolvarea inecuațiilor logaritmice.

Exemple. 1) Rezolvăm inecuația $x^{\lg x} \leqslant 10$. Condiția inițială este $x > 0$. Logaritmînd în baza 10, inecuația devine $\lg(x^{\lg x}) \leqslant \lg 10 = 1$, adică $(\lg x)^2 \leqslant 1$, de unde $-1 \leqslant \lg x \leqslant 1$ și, în final, $x \in [10^{-1}, 10]$.

2) Fie $a > 0$, $a \neq 1$ un parametru. Discutăm și rezolvăm inecuația $\log_x ax \leqslant \log_a x + 1$. Se recomandă folosirea bazelor constante, deci trecem în baza a: $\frac{\log_a(ax)}{\log_a x} \leqslant \log_a x + 1$. Notînd $\log_a x = y$, rezultă $\frac{1+y}{y} \leqslant y+1$, de unde $y \in [-1, 0) \cup [1, \infty)$. Dacă $a > 1$, atunci $x \in \left[\frac{1}{a}, 1\right) \cup [a, \infty)$ și dacă $0 < a < 1$, atunci $x \in (0, a] \cup \left(1, \frac{1}{a}\right]$.

7. ANALIZĂ COMBINATORIE

Pentru orice întreg $n \geqslant 1$ notăm $I_n = \{1, 2, ..., n\}$, care este un prototip al mulțimilor cu n elemente. Se numește *permutare* a mulțimii I_n orice aplicație bijectivă $f: I_n \to I_n$. Numărul P_n al acestora este $n!$ (prin convenție, se pune de asemenea $0! = 1$).

Dacă $1 \leqslant m \leqslant n$, orice aplicație injectivă $I_m \to I_n$ se numește o *aranjare* a numerelor $1, 2, ..., n$ luate cîte m. Numărul A_n^m al lor este dat de formula:

$$A_n^m = \frac{n!}{(n-m)!} = \underbrace{n(n-1)\ldots(n-m+1)}_{m \text{ factori}}.$$

Evident, $P_n = A_n^n$.

Se numește *combinare* a numerelor $1, 2, ..., n$ luate cîte m $(0 \leqslant m \leqslant n)$ orice submulțime a lui I_n, avînd m elemente distincte. Numărul C_n^m al acestora este dat de formula:

$$C_n^m = \frac{A_n^m}{P_m} = \frac{n(n-1)\ldots(n-m+1)}{1\cdot 2\cdot\ldots\cdot m} = \frac{n!}{m!(n-m)!}.$$

Reținem:

$$C_x^0 = 1, \quad C_x^1 = x, \quad C_x^2 = \frac{x(x-1)}{2}, \quad C_x^3 = \frac{x(x-1)(x-2)}{6} \text{ etc.}$$

Reamintim de asemenea formulele:

$$C_n^m = C_n^{n-m} \quad (0 \leqslant m \leqslant n); \qquad C_n^m = C_{n-1}^m + C_{n-1}^{m-1} \quad (1 \leqslant m \leqslant n-1).$$

O formulă extrem de utilă o constituie *formula lui Newton* a binomului:

$$(x+y)^n = x^n + C_n^1 x^{n-1} y + \ldots + C_n^m x^{n-m} y^m + \ldots + C_n^1 x y^{n-1} + y^n,$$

pentru orice $x, y \in \mathbf{C}$ și $n \geqslant 1$ întreg. Mai concis, ea se scrie sub forma:

$$(x+y)^n = \sum_{k=0}^{n} T_{k+1}, \text{ unde } T_{k+1} = C_n^k x^{n-k} y^k.$$

Bineînțeles,

$$(x-y)^n = [x+(-y)]^n = \sum_{k=0}^{n} T_{k+1}, \text{ unde } T_{k+1} = (-1)^k C_n^k x^{n-k} y^k.$$

Reținem că dezvoltarea binomială $(x+y)^n$ admite $n+1$ termeni, coeficienții binomiali fiind: $1, C_n^1, ..., C_n^m, ..., C_n^{n-1} = C_n^1, C_n^n = 1$. Suma acestor coeficienți este 2^n.

Exemple. 1) *Să se descompună în factori expresia:*

$E = (x+y)^5 - x^5 - y^5$. Avem $C_5^1 = 5$, $C_5^2 = \frac{5 \cdot 4}{1 \cdot 2} = 10$, $C_5^3 = \frac{5 \cdot 4 \cdot 3}{1 \cdot 2 \cdot 3} = 10$,

$$C_5^4 = C_5^1 = 5, \text{ deci: } E = 5x^4y + 10x^3y^2 + 10x^2y^3 + 5xy^4 =$$
$$= 5xy(x^3 + 2x^2y + 2xy^2 + y^3) = 5xy(x+y)(x^2+xy+y^2).$$

2) *Pentru ce* $n \in \mathbb{N}$ *dezvoltarea* $\left(\sqrt[3]{x} + \frac{1}{x^2}\right)^n$ *conține termeni independenți de* x?

Termenul general este:

$$T_{k+1} = C_n^k \cdot (\sqrt[3]{x})^{n-k}\left(\frac{1}{x^2}\right)^k = C_n^k \cdot x^{\frac{n-k}{3} - 2k} = C_n^k x^{\frac{n-7k}{3}} \quad (0 \leqslant k \leqslant n).$$

Termenii independenți de x sînt cei care conțin x^0, deci $\frac{n-7k}{3} = 0$, adică n este divizibil cu 7.

8. ELEMENTE DE TEORIA NUMERELOR

Cadrul numeric al teoriei numerelor îl constituie mulțimea $\mathbf{Z}$. Reamintim că se spune că a este *divizibil* cu b ($a, b \in \mathbf{Z}$, $b \neq 0$) dacă există $c \in \mathbf{Z}$ astfel încît $a = bc$. Se mai scrie $a \vdots b$ sau $b \mid a$. Dacă a este divizibil cu b și b este divizibil cu c, atunci a este divizibil cu c (tranzitivitate). Dacă a este divizibil cu b și b este divizibil cu a, atunci $b = \pm a$.

Dacă $a, b \in \mathbf{N}$ și $b \neq 0$, atunci există și sînt unice numerele naturale q, r astfel încît $a = bq + r$ și $0 \leqslant r < b$ (*teorema împărțirii cu rest*). De exemplu, pentru $b = 2$ rezultă că orice $a \in \mathbf{N}$ este de forma $2q$ sau $2q+1$; similar, pentru $b = 3$ rezultă că orice număr natural este de forma $3q$, $3q+1$ sau $3q+2$ etc. Un număr întreg $p \geqslant 2$ se numește *prim* dacă singurele numere naturale divizori ai săi sînt 1 și p. Se știe că orice $a \in \mathbf{N}$ se descompune în factori primi, $a = p_1^{r_1} \dots p_k^{r_k}$ cu $r_i \geqslant 1$.

Dacă $a, b \in \mathbf{N}^*$, *cel mai mare divizor comun* al lor este acel unic $d \in \mathbf{N}$ astfel $a \vdots d$, $b \vdots d$ și dacă $d_1 \in \mathbf{N}$, $a \vdots d_1$, $b \vdots d_1$, atunci $d \vdots d_1$. În mod dual se definește *cel mai mic multiplu comun* m. Avem $m = \frac{a \cdot b}{d}$. Dacă descompunerile în factori primi sînt $a = p_1^{r_1} \dots p_k^{r_k}$ și $b = p_1^{s_1} \dots p_k^{s_k}$ ($r_i \geqslant 0$, $s_i \geqslant 0$), atunci $d = p_1^{\min(r_1, s_1)} \dots$ $\dots p_k^{\min(r_k, s_k)}$ și $m = p_1^{\max(r_1, s_1)} \dots p_k^{\max(r_k, s_k)}$. Se poate arăta că există $u, v \in \mathbf{Z}$ astfel încît $d = ua + vb$; în particular, dacă a, b sînt prime între ele (adică $d = 1$), atunci $1 = ua + vb$ cu $u, v \in \mathbf{Z}$.

Dacă $a \in \mathbf{Z}$, orice multiplu al lui a se notează simbolic Ma. Conform formulei binomului lui Newton rezultă că $(Ma + b)^n = Ma + b^n$ pentru orice $a, b \in \mathbf{Z}$ și $n \geqslant 1$ natural. De exemplu, $102^5 = (M100 + 2)^5 = M100 + 2^5 = M100 + 32$; în particular, ultimele două cifre ale lui 102^5 sînt 32.

Un rezultat clasic îl constituie *mica teoremă a lui Fermat:* pentru orice $a \in \mathbf{Z}$ și pentru orice $p \geqslant 2$ prim, $a^p - a$ este divizibil cu p. De exemplu, $3^{11} - 3 \vdots 11$ și $4^7 - 4 \vdots 7$.

Fie $q \geqslant 2$ un întreg fixat, numit *ad-hoc bază de numerație*. Numerele $0, 1, \dots, q-1$ se numesc atunci *cifre în baza* q; notăm mulțimea lor cu $C_q = \{0, 1, \dots, q-1\}$. De exemplu, cifrele binare sînt $C_2 = \{0, 1\}$ iar cifrele octale, $C_8 = \{0, 1, \dots, 7\}$.

Dacă $a \in \mathbf{N}$ și $a = a_1 \cdot q^{p-1} + a_2 \cdot q^{p-2} + \dots + a_p$, cu $a_1, \dots, a_p \in C_q$, atunci se scrie $a = \overline{a_1 \dots a_p}$ (reprezentarea lui a în baza q).

De exemplu, pentru $q = 2$, $a = 27$ şi $b = 141$ putem scrie:

$$a = 2^4 + 2^3 + 2 + 1 = 1 \cdot 2^4 + 1 \cdot 2^3 + 0 \cdot 2^2 + 1 \cdot 2^1 + 1 \cdot 2^0 = \overline{11011} \text{ (baza 2)};$$

$$b = 2^7 + 2^3 + 2^2 + 1 = 1 \cdot 2^7 + 0 \cdot 2^6 + 0 \cdot 2^5 + 0 \cdot 2^4 + 1 \cdot 2^3 + 1 \cdot 2^2 + 0 \cdot 2 + 1 = \overline{10001101} \text{ (baza 2)}.$$

Pentru $q = 8$ avem: $141 = 2 \cdot 8^2 + 1 \cdot 8 + 5 = \overline{215}$ (baza 8).

9. PROGRESII

Reamintim că un şir $a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots$ de numere reale (sau complexe) se numeşte *progresie aritmetică* de raţie r dacă pentru orice $n \geqslant 2$, $a_n = a_{n-1} + r$. Rezultă $a_n = a_1 + (n-1)r$. A determina o progresie revine la a afla a_1, r. Notînd $S_n = a_1 + \ldots + a_n$, rezultă $S_n = \frac{(a_1 + a_n)n}{2}$, pentru orice întreg $n \geqslant 1$.

Progresia (în cadrul real) este crescătoare dacă $r \geqslant 0$ şi descrescătoare dacă $r \leqslant 0$. Orice termen este medie aritmetică între termenul precedent şi cel următor, ceea ce justifică denumirea. Trei numere a, b, c sînt în progresie aritmetică dacă $b = \frac{a+c}{2}$, iar patru numere a, b, c, d formează o progresie aritmetică dacă şi numai dacă $b = \frac{a+c}{2}$, $c = \frac{b+d}{2}$ (condiţia $a + d = b + c$ este doar necesară). Trei numere necunoscute în progresie aritmetică se pot scrie $a - r$, a, $a + r$ iar patru $a - 3r$, $a - r$, $a + r$, $a + 3r$.

Un şir $(a_n)_{n \geqslant 1}$ este o *progresie geometrică* de raţie q dacă $a_n = a_{n-1} \cdot q$ pentru orice $n \geqslant 2$. Rezultă $a_n = a_1 q^{n-1}$ şi pentru $q \neq 1$, $S_n = a_1 + \ldots + a_n = \frac{a_1 q^n - a_1}{q - 1} = \frac{a_n q - a_1}{q - 1}$ (în cazul $q = 1$, rezultă $S_n = na_1$). În particular,

$$1 + q + q^2 + \ldots + q^n = \frac{q^{n+1} - 1}{q - 1} \text{ pentru } q \neq 1.$$

Dacă $-1 < q < 1$, atunci $\lim\limits_{n \to \infty} q^n = 0$, deci $\lim\limits_{n \to \infty} a_n = 0$ şi $\lim\limits_{n \to \infty} S_n = \frac{a_1}{1 - q}$.

De exemplu:

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \ldots + \frac{1}{2^n} + \ldots = \lim_{n \to \infty} \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \ldots + \frac{1}{2^n}\right) = \frac{1}{1 - \frac{1}{2}} = 2.$$

Trei numere a, b, c sînt în progresie geometrică dacă $b^2 = ac$; trei numere necunoscute aflate în progresie geometrică pot fi reprezentate astfel: a, aq, aq^2.

Un exemplu tipic de progresie aritmetică se obţine astfel: se consideră un interval $[a, b]$, $a < b$, care se împarte în n subintervale congruente, de lungime $h = \frac{b - a}{n}$. Notînd $x_0 = a$, $x_1' = a + h$, ..., rezultă $x_{n+1} = a + n \cdot \frac{b - a}{n} = b$, deci $\{x_0, x_1, \ldots, x_n\}$ formează o diviziune echidistantă a intervalului considerat (progresie aritmetică de raţie h).

Să considerăm acum un interval de lungime 1 cm. Considerînd progresia geometrică cu $a_1 = 1$ şi raţie $q = 2$ (deci dublînd succesiv lungimea intervalului), după 60 de paşi se depăşesc dimensiunile universului observabil, al cărui diametru este mai mic decît 2^{60} cm; în mod similar, considerînd progresia geometrică cu $a_1 = 1$, $q = \frac{1}{2}$ (înjumătăţind succesiv lungimea intervalului iniţial), după 30 de paşi se „coboară" sub dimensiunile particulelor elementare!

Exemple. 1) *Să se determine termenii comuni ai progresiilor* 2, 5, 8, ...; 3, 7, 11,... În primul caz $a_1 = 2$, $r = 3$, deci $a_m = a_1 + (m-1)r = 3m - 1$; pentru cea de a doua progresie, $b_1 = 3$ și $r = 4$, deci $b_n = b_1 + (n-1)r = 4n - 1$. Punem condiția $a_m = b_n$, deci $3m - 1 = 4n - 1$, de unde rezultă că m este divizibil cu 4, adică termenii comuni sînt $a_{4k} = 12k - 1$, adică 11, 23, 35, ...

2) *Să se calculeze suma* $S_n = 1 + \overline{11} + \overline{111} + ... + \underbrace{\overline{11 \, ... \, 1}}_{n \text{ ori}}$. Deci:

$$S_n = 1 + (10 + 1) + (10^2 + 10 + 1) + ... + (10^{n-1} + 10^{n-2} + ... + 1) =$$
$$= (1 + 10 + ... + 10^{n-1}) + (1 + 10 + ... + 10^{n-2}) + ... + (1 + 10) + 1 =$$
$$= \frac{10^n - 1}{10 - 1} + \frac{10^{n-1} - 1}{10 - 1} + ... + \frac{10^2 - 1}{10 - 1} + \frac{10 - 1}{10 - 1} =$$
$$= \frac{(10^n + 10^{n-1} + ... + 10) - n}{9} = \frac{\frac{10^{n+1} - 10}{9} - n}{9} = \frac{10^{n+1} - 9n - 10}{81}.$$

10. POLINOAME ȘI ECUAȚII ALGEBRICE

Un polinom de grad $n(n \geqslant 1)$ cu coeficienți complecși este de forma:

$$P(X) = a_0X^n + a_1X^{n-1} + ... + a_{n-1}X + a_n, \text{ cu } a_0 \neq 0.$$

Se consideră și polinomul nul (avînd toți coeficienții nuli). Polinoamele de grad zero sînt, prin convenție, constantele. A determina un polinom de grad n înseamnă a determina cei $n + 1$ coeficienți ai lui. Mulțimea (inelul) polinoamelor cu coeficienți complecși se notează $\mathbf{C}[X]$. În mod similar se definesc $\mathbf{R}[X]$ sau $\mathbf{Z}[X]$.

Dacă $P, Q \in \mathbf{C}[X]$, atunci există, și sînt unice, polinoame C, R cu coeficienți complecși astfel încît $P(X) = C(X) \cdot Q(X) + R(X)$ și $\{R = 0$ *sau* gr $R <$ gr $Q\}$. În cazul cînd $Q(X) = X - a$ $(a \in \mathbf{C})$, rezultă $P(X) = (X - a)C(X) + R$, deci $R = P(a)$. Cîtul $C(X)$ se poate obține prin schema lui Horner.

Un număr $a \in \mathbf{C}$ se numește *rădăcină* a lui P dacă $P(a) = 0$; în acest caz, restul împărțirii lui P cu $X - a$ este nul, deci P este divizibil cu $X - a$.

Un polinom de grad $n \geqslant 1$ cu coeficienții într-un inel comutativ A se numește *ireductibil* dacă el nu se poate descompune într-un produs de polinoame de grad strict mai mic decît n. De exemplu, $X^2 - 2$ este ireductibil în $\mathbf{Z}[X]$, iar $X + 5$, $X^2 + 4$ sînt ireductibile în $\mathbf{R}[X]$. *Teorema fundamentală a algebrei* afirmă că orice polinom din $\mathbf{C}[X]$ de grad $n \geqslant 1$ admite cel puțin o rădăcină $a \in \mathbf{C}$. De aici rezultă că polinoamele ireductibile din $\mathbf{C}[X]$ sînt exact cele de gradul I. Polinoamele ireductibile din $\mathbf{R}[X]$ sînt polinoamele de gradul I și cele de gradul II care au rădăcini complexe nereale (de forma $a \pm bi$ cu $b \neq 0$).

Presupunem $P \in \mathbf{R}[X]$, $P = a_0X^n + a_1X^{n-1} + ... + a_n$ identificat, bineînțeles, cu funcția reală $P : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, $P(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + ... + a_n$.

Un număr α se numește rădăcină *simplă* pentru P dacă P este divizibil cu $X - \alpha$ și P nu este divizibil cu $(X - \alpha)^2$; aceasta revine la faptul că $P(\alpha) = 0$, $P'(\alpha) \neq 0$. Similar, α este rădăcină *dublă* pentru P dacă P este divizibil cu $(X - \alpha)^2$ dar nu cu $(X - \alpha)^3$; ceea ce este echivalent cu $P(\alpha) = 0$, $P'(\alpha) = 0$, $P''(\alpha) \neq 0$. Numărul α este rădăcină *multiplă* dacă P este divizibil cu $(X - \alpha)^2$, adică $P(\alpha) = P'(\alpha) = 0$. În general, α este rădăcină de ordin $k(k \geqslant 1)$ dacă $P(\alpha) = 0$, $P'(\alpha) = 0, ..., P^{(k-1)}(\alpha) = 0$, $P^{(k)}(\alpha) \neq 0$. În cele de mai sus, $P^{(k)}$ este derivata de ordin k a funcției reale polinomiale P.

Se cunosc relațiile lui Viète între rădăcinile unui polinom $P(X) = a_0X^n + a_1X^{n-1} + \dots + a_{n-1}X + a_n$ din $\mathbb{C}[X]$, $a_0 \neq 0$, și rădăcinile $x_1, \dots, x_n$ ale lui P:

$$S_1 = x_1 + \dots + x_n = -\frac{a_1}{a_0}; \quad S_2 = x_1 \cdot x_2 + \dots + x_{n-1} \cdot x_n = \frac{a_2}{a_0};$$

$$S_n = x_1 \dots x_n = (-1)^n \frac{a_n}{a_0}.$$

Pentru $n = 3$, $P(X) = a_0X^3 + a_1X^2 + a_2X + a_3$, $(a_0 \neq 0)$, avem:

$$S_1 = x_1 + x_2 + x_3 = -\frac{a_1}{a_0}; \quad S_2 = x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3 = \frac{a_2}{a_0};$$

$S_3 = x_1x_2x_3 = -\frac{a_3}{a_0}$. Rezultă:

$$x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = S_1^2 - 2S_2 = \frac{a_1^2}{a_0^2} - 2\frac{a_2}{a_0};$$

$$x_1^2x_2^2 + x_1^2x_3^2 + x_2^2x_3^2 = (x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3)^2 - 2x_1x_2x_3(x_1 + x_2 + x_3) = (S_2)^2 - 2S_1S_3.$$

Scriind că x_1, x_2, x_3 sînt efectiv rădăcini, rezultă:

$$a_0x_1^3 + a_1x_1^2 + a_2x_1 + a_3 = 0; \quad a_0x_2^3 + a_1x_2^2 + a_2x_2 + a_3 = 0;$$

$$a_0x_3^3 + a_1x_3^2 + a_2x_3 + a_3 = 0;$$

adunînd aceste relații, se obține suma $x_1^3 + x_2^3 + x_3^3$ în funcție de coeficienți. Înmulțind cu X, scriind că x_1, x_2, x_3 sînt rădăcini pentru $XP(X)$ și adunînd relațiile obținute, se obține suma $x_1^4 + x_2^4 + x_3^4$ etc.

Pentru $n = 4$, $P(X) = a_0X^4 + a_1X^3 + a_2X^2 + a_3X + a_4 (a_0 \neq 0)$, relațiile lui Viète se pot scrie astfel:

$$S_1 = (x_1 + x_2) + (x_3 + x_4) = -\frac{a_1}{a_0};$$

$$S_2 = (x_1 + x_2) \cdot (x_3 + x_4) + x_1x_2 + x_3x_4 = \frac{a_2}{a_0};$$

$$S_3 = x_1x_2(x_3 + x_4) + x_3x_4(x_1 + x_2) = -\frac{a_3}{a_0};$$

$$S_4 = (x_1x_2)(x_3x_4) = \frac{a_4}{a_0} \text{ etc.}$$

Dacă P este un polinom din $\mathbb{R}[X]$ și admite rădăcina complexă $\alpha + \beta i$ de ordin k, atunci el admite și rădăcina $\alpha - \beta i$ (tot de ordin k). Dacă P are toți coeficienții raționali și rădăcina $\alpha + \sqrt{\beta}$ (cu α, β raționali și $\sqrt{\beta}$ irațional), atunci P are și rădăcina $\alpha - \sqrt{\beta}$. În fine, reamintim că dacă $P = a_0X^n + a_1X^{n-1} + \dots + a_{n-1}X + a_n$ are toți coeficienții întregi (deci $P \in \mathbb{Z}[X]$), atunci toate rădăcinile întregi eventuale ale lui P sînt printre divizorii termenului liber a_n. Dacă $a_0 = 1$ (se spune atunci că P este monic) și dacă P nu are rădăcini întregi, atunci el nu are nici rădăcini raționale.

Exemple. 1) *Să se determine parametrul $m \in \mathbb{R}$ dacă polinomul $P(X) = X^3 + 6X^2 + m$ admite rădăcini multiple.* Dacă $\alpha \in \mathbb{C}$ este o astfel de rădăcină, atunci $P(\alpha) = 0$ și $P'(\alpha) = 0$, adică $\alpha^3 + 6\alpha^2 + m = 0$, $3\alpha^2 + 12\alpha = 0$; rezultă $\alpha_1 = 0$, deci $m_1 = 0$ și $\alpha_2 = -4$, $m_2 = -32$.

2) *Pentru ce* $m \in \mathbf{Z}$ *polinomul* $X^3 + mX + 2$ *admite rădăcini întregi?* Rădăcinile întregi posibile sînt ± 1, ± 2. Scriind că acestea sînt efectiv rădăcini, se obţin trei valori posibile ale lui m.

3) Fie x_1, x_2, x_3 rădăcinile polinomului $P(X) = X^3 + X^2 + 2$. Calculăm suma $S_5 = x_1^5 + x_2^5 + x_3^5$. Notăm $S_k = x_1^k + x_2^k + x_3^k$ ($k \geqslant 1$). Avem $x_1 + x_2 + x_3 = -1$, $x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3 = 0$, $x_1x_2x_3 = -2$, deci $S_1 = -1$, $S_2 = 1$. Scriind că x_1, x_2, x_3 sînt rădăcini şi adunînd relaţiile obţinute, rezultă:

$S_3 + S_2 + 6 = 0$, deci $S_3 = -7$. Apoi, x_1, x_2, x_3 sînt şi rădăcini pentru $X^4 + X^3 + 2X$, de unde $S_4 + S_3 + 2S_1 = 0$, deci $S_4 = -S_3 - 2S_1 = 9$. Similar, $S_5 + S_4 + 2S_2 = 0$, de unde $S_5 = -11$.

4) Aflăm $m \in \mathbf{C}$ dacă polinomul $X^3 + X + m$ are rădăcina $x_1 = 3 - \mathrm{i}$. Este greşit să considerăm că $x_2 = 3 + \mathrm{i}$ (coeficienţii polinomului nu sînt reali). Corect este să punem condiţia că x_1 este efectiv rădăcină, deci $(3 - \mathrm{i})^3 + 3 - \mathrm{i} + m = 0$; se află m şi celelalte rădăcini se obţin împărţind polinomul cu $X - 3 + \mathrm{i}$.

11. MATRICI ŞI DETERMINANŢI

O matrice cu m linii şi n coloane ($m \geqslant 1$, $n \geqslant 1$) este de forma:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots & \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} = (a_{ij})_{\substack{1 \leqslant i \leqslant m \\ 1 \leqslant j \leqslant n}}; \quad a_{ij} \in \mathbf{R}.$$

Mulţimea acestor matrici se notează cu $M_{m,n}(\mathbf{R})$. Dacă $m = n$ se obţin matricile pătratice de ordin n. Se pot considera matrici cu coeficienţi complecşi, întregi etc.

Două matrici $A \in M_{m,n}(\mathbf{R})$, $B \in M_{m,n}(\mathbf{R})$; $A = (a_{ij})$, $B = (b_{ij})$ se consideră, prin convenţie, *egale* dacă $a_{ij} = b_{ij}$ pentru orice $1 \leqslant i \leqslant m$, $1 \leqslant j \leqslant n$. Egalitatea de matrici $A = B$ revine la mn egalităţi de numere reale. Pentru orice $\lambda \in \mathbf{R}$ se definesc $A + B$ şi λA cu proprietăţile cunoscute. Dacă $A \in M_{m,n}(\mathbf{R})$, $B \in M_{n,p}(\mathbf{R})$, deci numărul coloanelor lui A coincide cu numărul liniilor lui B, atunci se defineşte produsul $C = A \cdot B \in M_{m,p}(\mathbf{R})$, $C = (c_{ij})$, unde

$$c_{ik} = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}b_{jk}; \quad 1 \leqslant i \leqslant m, \quad 1 \leqslant k \leqslant p.$$

(Elementul de pe linia i şi coloana k din matricea C se obţine făcînd suma produselor dintre elementele liniei i din A şi coloanei k din B). Reamintim că înmulţirea matricilor este asociativă şi distributivă în raport cu adunarea, dar nu şi comutativă. De asemenea, dacă A, B, C sînt matrici şi $AB = AC$ (sau $BA = CA$), nu rezultă $B = C$, chiar dacă $A \neq 0$.

Mulţimea $M_n(\mathbf{R})$ a matricilor pătratice de ordin n cu coeficienţi reali are o structură de inel în care matricea $0_n = \mathrm{diag}(\overbrace{0, \dots, 0}^{n \text{ ori}})$ este elementul neutru pentru adunare, iar $\mathrm{I}_n = \mathrm{diag}(\overbrace{1, \dots, 1}^{n \text{ ori}})$ este elementul neutru pentru înmulţire. Pentru $d_1, \dots d_n \in \mathbf{R}$ am notat:

$$\mathrm{diag}(d_1, \dots, d_n) = \text{matricea diagonală} \begin{pmatrix} d_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & d_2 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & d_n \end{pmatrix}.$$

Exemple. 1) Dacă A, $B \in M_n(\mathbf{R})$ şi $AB = BA$, atunci:

$$(A + B)^n = \sum_{k=0}^{n} C_n^k A^{n-k} B^k = A^n + C_n^1 A^{n-1} B + \dots + C_n^{n-1} A B^{n-1} + B^n;$$

$$A^n - B^n = (A - B)(A^{n-1} + A^{n-2}B + \dots + AB^{n-2} + B^{n-1}),$$

pentru orice întreg $n \geqslant 1$. Verificarea se face prin inducţie după n.

2) Fie $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$. Determinăm toate matricile $X \in M_2(\mathbf{R})$ astfel încît $AX = XA$. Punem $X = \begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix}$ şi rezultă:

$$AX = \begin{pmatrix} x + 2z & y + 2t \\ 2x + 4z & 2y + 4t \end{pmatrix} \quad \text{şi} \quad XA = \begin{pmatrix} x + 2y & 2x + 4y \\ z + 2t & 2z + 4t \end{pmatrix}.$$

Atunci $x + 2z = x + 2y$, $y + 2t = 2x + 4y$, $2x + 4z = z + 2t$, $2y + 4t = 2z + 4t$, de unde $y = z$, $2x + 3y = 2t$, deci $z = y$, $t = \frac{2x + 3y}{2}$, cu x, y numere reale arbitrare.

Dacă $A = (a_{ij})_{1 \leqslant i,\, j \leqslant n}$ este o matrice pătratică, atunci se defineşte determinantul ei:

$$\det A = \begin{vmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} = \sum (-1)^I a_{1i_1} \dots a_{ni_n},$$

unde suma are $n!$ termeni şi se face după toate permutările $(i_1, \dots i_n)$ ale numerelor $(1, \dots, n)$ avînd I inversiuni; fiecare termen este un produs de n factori. Reţinem că $A \in M_n(\mathbf{R})$ şi $\det A \in \mathbf{R}$.

Dacă $A = (a) \in M_1(\mathbf{R})$, atunci $\det A = a$; iar dacă $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, atunci $\det A = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - bc$; în acest caz, dacă $\det A = 0$, atunci $A^2 = (a + d)I_2$.

Proprietăţile principale ale determinanţilor sînt următoarele:

1) $\det A = \det(A^{\mathsf{T}})$, A^{T} fiind transpusa matricii pătratice A.

2) Dacă se schimbă între ele două linii (resp. două coloane), atunci determinantul îşi schimbă semnul.

3) Dacă o linie (sau o coloană) are toate elementele nule, atunci determinantul este nul; dacă două linii (sau coloane) sînt identice sau „proporţionale", atunci determinantul este nul.

4) Dacă o linie (sau coloană) se înmulţeşte cu un număr real λ, $\lambda \neq 0$, atunci determinantul se înmulţeşte cu λ. Dar înmulţind o linie (sau coloană) cu un număr nenul şi adunînd la altă linie (resp. coloană), atunci determinantul nu îşi modifică valoarea.

5) Se cunoaşte dezvoltarea unui determinant după o linie (sau coloană). Aceasta permite calculul determinanţilor prin reducerea succesivă la determinanţi de ordin mai mic.

În cazul $n = 3$, şi numai în acest caz, are loc regula lui Sarrus.

6) Dacă A, $B \in M_n(\mathbf{R})$, atunci $\det(AB) = (\det A) \cdot (\det B)$; dar, în general, $\det(A + B) \neq \det A + \det B$. Reţinem de asemenea că $\det A^k = (\det A)^k$ pentru orice întreg $k \geqslant 1$ şi că $\det(\lambda A) = \lambda^n \det A$ pentru orice $\lambda \in \mathbf{R}$.

7) Un determinant este nul dacă şi numai dacă una din linii (resp. coloane) este combinaţie liniară a celorlalte, adică liniile (resp. coloanele) sînt liniar dependente ca vectori în $\mathbf{R}^n$.

Dacă $A \in M_{m,n}(\mathbf{R})$ este o matrice nenulă, *rangul* lui A este acel unic număr întreg $p \geqslant 1$ astfel încît A să admită un minor *nenul* de ordin p şi toţi minorii de ordin $p+1$ să fie nuli. Rangul lui A este numărul maxim de linii liniar independente (ca vectori din $\mathbf{R}^n$) sau numărul maxim de coloane liniar independente (ca vectori din $\mathbf{R}^m$).

O matrice pătratică $A \in M_n(\mathbf{R})$ se numeşte *nesingulară* dacă $\det A \neq 0$; în acest caz, există, şi este unică, o matrice $B \in M_n(\mathbf{R})$ astfel încît $AB = I_n$ şi $BA = I_n$; matricea B se numeşte *inversa* lui A şi se notează $B = A^{-1}$. Se ştie că:

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A}\begin{pmatrix} A_{11} & \dots & A_{n1} \\ \dots & \dots & \dots \\ A_{1n} & \dots & A_{nn} \end{pmatrix},$$

unde $A_{ij} = (-1)^{i+j}M_{ij}$, unde M_{ij} este minorul corespunzînd locului de pe linia i şi coloana j din matricea A.

Exemple. 1) Calculăm determinantul

$$D = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 4 & 5 \\ 1 & 2 & 3 & -1 \\ 2 & 0 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & -1 & 4 \end{vmatrix}.$$

Schimbînd între ele primele două coloane, rezultă:

$$D = -\begin{vmatrix} 1 & 2 & 4 & 5 \\ 2 & 1 & 3 & -1 \\ 0 & 2 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & -1 & 4 \end{vmatrix}.$$

Înmulţind prima coloană cu -2 şi adunînd la a doua coloană, determinantul nu se modifică:

$$D = -\begin{vmatrix} 1 & 0 & 4 & 5 \\ 2 & -3 & 3 & -1 \\ 0 & 2 & 2 & 3 \\ 2 & -1 & -1 & 4 \end{vmatrix}.$$

Înmulţind prima coloană, respectiv, cu -4 şi -5 şi adunînd la coloanele a treia, a patra, rezultă:

$$D = -\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & -3 & -5 & -11 \\ 0 & 2 & 2 & 3 \\ 2 & -1 & -9 & -6 \end{vmatrix}.$$

Dezvoltînd D după prima linie, rezultă:

$$D = -\begin{vmatrix} -3 & -5 & -11 \\ 2 & 2 & 3 \\ -1 & -9 & -6 \end{vmatrix}.$$

Înmulțind aici prima coloană cu -9 și apoi cu -6, adunînd la coloanele a doua și respectiv a treia, se obține:

$$D = -\begin{vmatrix} -3 & 22 & 7 \\ 2 & -16 & -9 \\ -1 & 0 & 0 \end{vmatrix}.$$

Dezvoltînd D după linia a treia, rezultă:

$$D = -(-1)\begin{vmatrix} 22 & 7 \\ -16 & -9 \end{vmatrix} = -198 + 112 = -86.$$

2) Determinăm rangul matricii

$$A = \begin{pmatrix} 1 & a & 1 \\ 1 & 1 & a \\ b & 1 & b \end{pmatrix}; \quad a, b \in \mathbf{R}.$$

Mai întîi, se observă că $\det A = (a-1)(1-ab)$. Dacă $a \neq 1$ sau $ab \neq 1$, atunci $\det A \neq 0$ și rang $A = 3$. Dacă $a = 1$ și $b = 1$, atunci rang $A = 1$; iar dacă $a = 1$ și $b \neq 1$, atunci rang $A = 2$ și un determinant principal este cel indicat punctat.

3) Determinăm inversa matricii $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ cu $ad - bc \neq 0$ și a matricii $B = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 4 & 0 & -2 \\ 0 & 5 & 1 \end{pmatrix}$. În primul caz: $A^{-1} = \frac{1}{ad-bc}\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$; în cazul secund avem:

$$\det B = 36,\ B_{11} = \begin{vmatrix} 0 & -2 \\ 5 & 1 \end{vmatrix} = 10,\ B_{12} = -\begin{vmatrix} 4 & -2 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = -4,$$

$$B_{13} = \begin{vmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 5 \end{vmatrix} = 20,\ B_{21} = -\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 5 & 1 \end{vmatrix} = 4,\ B_{22} = \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 2,$$

$$B_{23} = -\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 5 \end{vmatrix} = -10,\ B_{31} = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -2 \end{vmatrix} = -2,\ B_{32} = -\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 4 & -2 \end{vmatrix} = 8,$$

$$B_{33} = \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 0 \end{vmatrix} = -4, \text{ deci } B^{-1} = \frac{1}{\det B}\begin{pmatrix} B_{11} & B_{21} & B_{31} \\ B_{12} & B_{22} & B_{32} \\ B_{13} & B_{23} & B_{33} \end{pmatrix} =$$

$$= \frac{1}{36}\begin{pmatrix} 10 & 4 & -2 \\ -4 & 2 & 8 \\ 20 & -10 & -4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{5}{18} & \frac{1}{9} & -\frac{1}{18} \\ -\frac{1}{9} & \frac{1}{18} & \frac{2}{9} \\ \frac{5}{9} & -\frac{5}{18} & -\frac{1}{9} \end{pmatrix}.$$

12. SISTEME LINIARE DE ECUAȚII

Forma generală a unui sistem liniar cu m ecuații și n necunoscute este:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = b_1; \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n = b_m, \end{cases}$$

unde a_{ij}, b_i sînt numere reale (sau complexe) date. Notînd

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} \dots a_{1n} \\ \dots\dots\dots \\ a_{m1} \dots a_{mn} \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}, \quad X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix},$$

sistemul anterior se scrie echivalent sub formă matricială: $AX = B$.

Dacă $m = n$ şi $\det A \neq 0$, atunci matricea A admite inversă. Din relaţia $AX = B$, rezultă că vectorul n-dimensional X al necunoscutelor este unic determinat şi $X = A^{-1}B$; aceasta este practic *regula lui Cramer*: $x_i = \frac{\Delta_i}{\det A}$, $1 \leqslant i \leqslant n$, unde Δ_i este determinantul obţinut din $\det A$ prin înlocuirea coloanei i cu coloana B a termenilor liberi.

În cazul general al sistemelor liniare cu m ecuaţii şi n necunoscute, se aplică *regula lui Rouché*: se notează cu p rangul matricii A şi se fixează un determinant principal Δ_p. Se calculează cei $m - p$ determinanţi caracteristici, prin bordarea lui Δ_p cu termeni liberi. Dacă toţi determinanţii caracteristici sînt nuli sau aceştia nu există (adică $m = p$), atunci sistemul este compatibil şi $n - p$ necunoscute rămîn nedeterminate. Mai precis, dacă $n = p$, atunci sistemul este compatibil determinat; dacă $n - p = 1$, sistemul este compatibil simplu nedeterminat, iar dacă $n - p = 2$, atunci este compatibil dublu nedeterminat etc. Dacă unul (cel puţin) din determinanţii caracteristici este nenul, atunci sistemul este imposibil (incompatibil). Acesta este modul de aplicare a teoremei lui Rouché (care se enunţă succint astfel: un sistem liniar $\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j = b_i$, $1 \leqslant i \leqslant m$, este compatibil dacă şi numai dacă toţi determinanţii caracteristici sînt nuli).

Reamintim de asemenea *teorema lui Kronecker-Capelli*: un sistem liniar $AX = B$ este compatibil dacă şi numai dacă rang A = rang $(A \mid B)$.

Un sistem liniar de forma $AX = 0$ (cu $A \in M_{m,n}(\mathbf{C})$ şi $X \in M_{n,1}(\mathbf{C})$ se numeşte *omogen*. Un astfel de sistem are întotdeauna soluţia *nulă* (numită şi *banală*):

$$X = \left.\begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}\right\} n \text{ linii.}$$

Se pune problema de a decide dacă sistemul admite şi soluţii nebanale. Dacă $m = n$, sistemul $AX = 0$ admite soluţii nebanale dacă şi numai dacă $\det A = 0$. În cazul general, sistemul $AX = 0$ are soluţii nebanale dacă şi numai dacă rang $A < n$, unde n este numărul necunoscutelor (dacă rang $A = n$, atunci $X = 0$).

Pentru un sistem liniar şi omogen cu $n - 1$ ecuaţii şi n ($n \geqslant 2$) necunoscute:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + \dots + a_{1n}x_n = 0; \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a_{n-1,1}x_1 + \dots + a_{n-1,n}x_n = 0, \end{cases}$$

notînd cu $\Delta_1, \Delta_2, \dots, \Delta_n$ determinanţii obţinuţi „ştergînd" coloanele întîi, a doua, ..., a n-a din matricea A (presupuşi nu toţi nuli), rezultă:

$$\frac{x_1}{\Delta_1} = -\frac{x_2}{\Delta_2} = \frac{x_3}{\Delta_3} = \dots = (-1)^{(n+1)}\frac{x_n}{\Delta_n},$$

şi sistemul are soluţiile $(\Delta_1 \cdot t, -\Delta_2 \cdot t, \dots, (-1)^{n+1}\Delta_n \cdot t)$, cu $t \in \mathbf{R}$ arbitrar.

Exemple. 1) Aflăm parametrul m astfel încît sistemul:

$$\begin{cases} 2x + y - mz = 0; \\ x - 2y + z = 0; \\ 5x + 5y - 4z = 0, \end{cases}$$

să admită soluţii nebanale; apoi rezolvăm sistemul. Condiţia impusă este:

$$\begin{vmatrix} 2 & 1 & -m \\ 1 & -2 & 1 \\ 5 & 5 & -4 \end{vmatrix} = 0, \text{ deci } m = 1.$$

Din prima ecuaţie rezultă $y = z - 2x$; înlocuind în celelalte două ecuaţii, se obţine $x - 2z + 4x + z = 0$, $5x + 5z - 10x - 4z = 0$, deci $5x - z = 0$; rezultă $z = 5x$ şi $y = 5x - 2x = 3x$ şi soluţiile sistemului sînt triplete $(x, 3x, 5x)$ cu $x \in \mathbf{C}$ arbitrar.

2) Discutăm şi rezolvăm, aplicînd teorema lui Rouché, sistemul:

$$\begin{cases} 2x + 2y + z + t = 1; \\ x + my - z = 2; \\ 3x - y + 3z + 2t = n, \end{cases}$$

unde m şi n sînt parametri reali. Matricea sistemului este

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & m & -1 & 0 \\ 3 & -1 & 3 & 2 \end{pmatrix}.$$

Dacă $\Delta = \begin{vmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 1 & m & -1 \\ 3 & -1 & 3 \end{vmatrix} \neq 0$, adică $m \neq 5$ (după calcule), atunci rang $A = 3$. În acest caz, fixînd Δ ca determinant principal, se observă că nu există determinanţi caracteristici şi sistemul este compatibil simplu nedeterminat; el se scrie:

$$\begin{cases} 2x + 2y + z = 1 - t; \\ x + my - z = 2; \\ 3x - y + 3z = n - 2t, \end{cases}$$

şi se rezolvă, de exemplu, cu regula lui Cramer ($m \neq 5$, n şi t sînt arbitrare).

Dacă $\Delta = 0$, deci $m = 5$, se observă că toţi determinanţii de ordin III extraşi din matricea A sînt nuli şi ca atare rang $A = 2$. Alegem ca determinant principal $\Delta_p = \begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 1 & 5 \end{vmatrix}$. Avem atunci un singur determinant caracteristic:

$$\Delta_c = \begin{vmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 1 & 5 & 2 \\ 3 & -1 & n \end{vmatrix} = 8n.$$

Dacă $n \neq 0$, atunci sistemul este imposibil, iar dacă $n = 0$ el este compatibil dublu nedeterminat; în acest ultim caz, pentru rezolvare folosim numai ecuaţiile principale: $\begin{cases} 2x + 2y = 1 - z - t; \\ x + 5y = 2 + z, \end{cases}$ şi rezultă: $x = \frac{1 - 7z - 5t}{8}$, $y = \frac{3 + 3z + t}{8}$ (cu z, t nedeterminaţi).

13. LEGI DE COMPOZIŢIE; GRUPURI

Dacă M este o mulţime nevidă, se spune că pe M este definită o *lege de compoziţie internă* (echivalent, o *operaţie algebrică*) dacă oricărei perechi ordonate (x, y) de elemente din M i se asociază un element bine determinat din M, adică este definită o funcţie $\varphi: M \times M \to M$. Se notează $x * y = \varphi(x, y)$ şi se spune că operaţia este notată cu eticheta$*$.

De exemplu, adunarea şi înmulţirea sînt legi de compoziţie interne pe $\mathbf{R}$, pe $\mathbf{Z}$ şi la fel pe $M_n(\mathbf{R})$ sau pe $\mathbf{R}[X]$.

O operaţie $*$ pe o mulţime M se numeşte:

— *comutativă* dacă pentru orice $x, y \in M$, $x * y = y * x$;

— *asociativă* dacă pentru orice $x, y, z \in M$, $x * (y * z) = (x * y) * z$;

— *cu element neutru* dacă există $e \in M$ astfel încît $x * e = x$ şi $e * x = x$ pentru orice $x \in M$.

O submulţime $S \subset M$ se numeşte *stabilă* relativ la operaţia $*$ pe M dacă pentru orice $u, v \in S$ rezultă $u * v \in S$. De exemplu, mulţimea numerelor întregi pare este stabilă relativ la adunarea pe $\mathbf{Z}$ (deoarece suma a două numere pare este un număr par).

O pereche $(M, *)$ formată dintr-o mulţime nevidă M şi o operaţie algebrică pe M se numeşte *monoid* dacă operaţia este asociativă şi admite un element neutru $e \in M$. Un monoid $(M, *, e)$ se numeşte *grup* dacă pentru orice $x \in M$ există $y \in M$ astfel încît $x * y = e$ şi $y * x = e$ (acest element y este unic, se numeşte *inversul* lui x şi se notează x^{-1}); dacă operaţia $*$ este în plus comutativă, grupul se numeşte *comutativ* (sau *abelian*).

Dacă $(G, *, e)$ este un grup, o submulţime $H \subset G$ este *subgrup* dacă, relativ la operaţia $*$, H este un grup; aceasta revine la faptul că pentru orice $x, y \in H$, xy^{-1} aparţine lui H. De exemplu, $\mathbf{Z}$ este subgrup al lui $\mathbf{R}$ relativ la adunare.

Dacă $(G, *, e)$ şi $(G', \circ, e')$ sînt două grupuri, atunci o funcţie $f: G \to G'$ se numeşte *morfism* de grupuri dacă pentru orice $x, y \in G$, rezultă $f(x * y) = f(x) \circ f(y)$ (de aici se obţine că $f(e) = e'$). Dacă în plus f este bijectivă, se spune că f este un *izomorfism*. Două grupuri se numesc *izomorfe* dacă între ele poate fi definit un izomorfism. Relaţia de izomorfism este o relaţie de echivalenţă (reflexivă, simetrică şi tranzitivă).

Exemple. 1) $(M_2(\mathbf{R}), +, O_2)$ este un grup abelian; $(M_2(\mathbf{R}), \cdot, I_2)$ este un monoid necomutativ care nu este grup.

2) $(G, \cdot, 1)$ şi $(\mathbf{R}, +, 0)$, unde G este intervalul $(0, \infty)$, sînt grupuri izomorfe, deoarece există izomorfismul $f: (0, \infty) \to \mathbf{R}$, $f(x) = \ln x$.

3) *Fie $(G, \cdot, e)$ un grup astfel încît pentru orice $x \in G$, $x^2 = e$. Să se arate că G este abelian şi că pentru orice funcţie $f: G \to G$, funcţia $h: G \to G$, $h(x) = f(x) \cdot f(ax)$ (unde $a \in G$, $a \neq e$ este un element fixat) nu este injectivă.* Mai întîi să observăm că pentru orice $x, y \in G$ avem $(xy)^2 = e$, deci $xy \cdot xy = e$ şi înmulţind la stînga cu x şi apoi cu y, rezultă $yxy = x$ şi $xy = yx$. Aşadar, operaţia $\cdot$ (notată şi prin simplă juxtapunere) este comutativă. Apoi să observăm că $h(ax) = f(ax) \cdot f(a^2x) = f(ax) \cdot f(x) = f(x)f(ax) = h(x)$. Dacă h ar fi injectivă, atunci ar rezulta $ax = x$, deci $a = e$, ceea ce este absurd.

14. INELE ŞI CORPURI

Să presupunem că pe o mulţime nevidă A sînt fixate două operaţii algebrice, notate $+$ şi $\cdot$ (numite adunare şi înmulţire) şi că $(A, +, 0)$ este un grup abelian iar $(A, \cdot, 1)$ este un monoid. Dacă în plus înmulţirea este distributivă în raport cu adunarea, atunci se spune că A admite o structură de *inel* (pe scurt, A este un inel).

Un inel A se numeşte *integru* (sau *domeniu de integritate*) dacă este comutativ şi dacă din ipoteza că $x, y \in A$, $xy = 0$ şi $x \neq 0$, rezultă $y = 0$.

Dacă A este un inel şi orice element $x \in A$, $x \neq 0$, admite invers relativ la înmulţire, atunci A se numeşte un *corp*. Dacă înmulţirea este comutativă, inelul se numeşte comutativ. Corpurile comutative se mai numesc *cîmpuri*.

Dacă A, B sînt inele, atunci orice funcţie $f: A \to B$ astfel încît $(\forall)x, y \in A$, $f(x+y) = f(x) + f(y)$, $f(xy) = f(x)f(y)$ şi $f(1) = 1$ se numeşte *morfism* de inele (în acest caz rezultă $f(0) = 0$). Un morfism bijectiv de inele este numit *izomorfism*.

Exemple. 1) $\mathbf{Z}$ şi $\mathbf{R}[X]$ sînt inele şi chiar domenii de integritate, dar nu sînt corpuri. $M_2(\mathbf{R})$ este un inel necomutativ.

Dacă $n \geqslant 2$ este un întreg, neprim, atunci $\mathbf{Z}_n$ este un inel comutativ care nu este domeniu de integritate (de exemplu, în $\mathbf{Z}_6$ avem $\hat{2} \cdot \hat{3} = \hat{0}$).

2) $\mathbf{Q}$, $\mathbf{R}$ *şi* $\mathbf{C}$ sînt corpuri comutative. La fel este $\mathbf{Z}_p$ ($p \geqslant 2$ prim).

3) Fie $f: K \to L$ un morfism de corpuri comutative. Arătăm că f este injectiv (deci K se poate considera ca un subcorp al lui L, deoarece este izomorf cu corpul $f(K)$). Într-adevăr, dacă $f(x) = f(y)$, atunci $f(x - y) = 0$. Dacă $x - y \neq 0$, atunci există $z \in K$ astfel încît $(x - y)z = 1$, deci $f(x - y) \cdot f(z) = 1$ şi rezultă $0 = 1$; deci $x - y = 0$, adică $x = y$.

§ 2. GEOMETRIE PLANĂ

Anumite entităţi geometrice se consideră primare — punctul, dreapta, planul, cu ajutorul cărora se construiesc alte entităţi ca segmentele, semiplanele, unghiurile etc. În cele ce urmează vom reaminti cîteva rezultate mai importante de geometrie, care pot fi folosite fără demonstraţie, deoarece sînt teoreme cuprinse în manuale. Nu vom adopta punctul de vedere axiomatic, ci unul, neformal, suficient pentru succes la examenele de admitere.

1. ELEMENTE DE GEOMETRIA TRIUNGHIULUI

Se cunosc cazurile principale de congruenţă a triunghiurilor (notate sugestiv LUL, ULU, LLL). Evidenţierea unor triunghiuri congruente în anumite configuraţii geometrice reprezintă o resursă importantă pentru obţinerea unor proprietăţi ale acelor configuraţii şi pentru rezolvarea de probleme.

Se cunosc de asemenea proprietăţile triunghiurilor isoscele. De exemplu, dacă într-un triunghi ABC mediana dintr-unul din vîrfuri este şi înălţime, atunci triunghiul este isoscel.

Să considerăm un triunghi oarecare ABC. Dacă M este mijlocul laturii $[AB]$ iar N este mijlocul lui $[AC]$, atunci segmentul $[MN]$ este paralel cu latura $[BC]$ şi are lungimea egală cu jumătatea din lungimea lui $[BC]$ (*proprietatea liniei mijlocii*). Aceasta se extinde la un trapez, unde linia mijlocie este paralelă cu bazele şi are lungimea egală cu semisuma lungimilor bazelor.

Mediana din vîrful A este segmentul care uneşte A cu mijlocul A' al laturii $[BC]$. Atragem atenţia că trebuie făcută distincţie între mediana ca segment $[AA']$, dreapta AA' şi mediana ca lungimea m_a a segmentului respectiv (acest lucru este valabil şi pentru alte linii în triunghi). Cele trei mediane ale triunghiului ABC sînt concurente într-un punct G (*centrul de greutate* al triunghiului) situat pe fiecare mediană la două treimi de vîrf şi o treime de bază $\Big($în sensul că $AG = \frac{2}{3} m_a$,

$GA' = \frac{1}{3} m_a$ etc.$\Big)$. Este util de ştiut modul de calcul al lui m_a în funcţie de lungimile laturilor triunghiului:

$$m_a = \sqrt{\frac{b^2+c^2}{2} - \frac{a^2}{4}}\ ;\ m_b = \sqrt{\frac{a^2+c^2}{2} - \frac{b^2}{4}} \text{ etc.}$$

Este utilă şi următoarea variantă, cunoscută ca *teorema medianei*:

$$AB^2 + AC^2 = 2AA'^2 + \frac{1}{2} BC^2,$$

care dă suma pătratelor distanţelor de la un punct la alte două puncte (v. fig. M.A.2).

Dacă $m(\hat{A}) = 90°$ (sau, cum se mai spune, măsura unghiului $\widehat{BAC}$ este de 90°), atunci $m_a = \frac{1}{2} a$ şi reciproc dacă în triunghiul ABC mediana dintr-un vîrf este jumătate a laturii pe care „cade", atunci triunghiul este dreptunghic. Acest fapt este des folosit în probleme.

Înălţimea din vîrful A al triunghiului ABC este segmentul $[AA_1]$ astfel încît $AA_1 \perp BC$ şi $A_1 \in [BC]$. Înălţimile $[AA_1]$, $[BB_1]$, $[CC_1]$ sînt concurente într-un punct H (numit *ortocentrul* triunghiului). Se pot calcula diversele elemente AH, HA_1, AA_1 etc. în funcţie de laturile (şi unghiurile) triunghiului. De exemplu: $AB_1 = c \mid \cos A \mid$; $\widehat{AHB_1} \equiv \widehat{ACB}$ şi $AH = \frac{AB_1}{\sin C} = \frac{c}{\sin C} \mid \cos A \mid = 2R \mid \cos A \mid$.

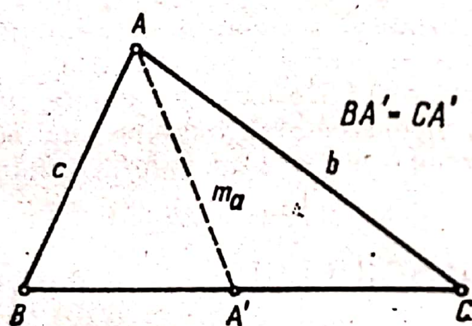


Fig. M.A.2

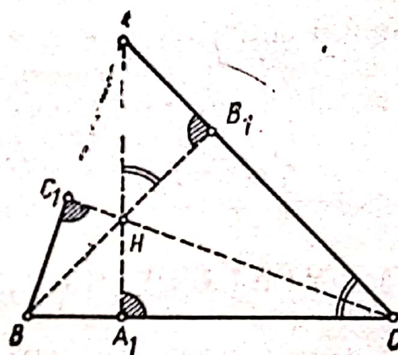


Fig. M.A.3

Apoi: $S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$ (*formula lui Heron*) şi $h_a = \frac{2S}{a}$; în mod similar, $h_b = \frac{2S}{b}$, $h_c = \frac{2S}{c}$ ($S = \sigma(ABC)$ este aria triunghiului); v. fig. M.A.3.

Mediatoarele unui triunghi ABC sînt concurente într-un punct O care este egal depărtat de punctele A, B, C, deci O este centrul cercului circumscris triunghiului: $OA = OB = OC = R$. Se ştie că $R = \frac{a \cdot b \cdot c}{4S}$.

Remarcăm că dacă triunghiul ABC este obtuzunghic, atunci punctele O şi H nu mai sînt interioare triunghiului; iar dacă $m(\widehat{BAC}) = 90°$, atunci O este tocmai mijlocul ipotenuzei $[BC]$ şi $H \equiv A$.

Bisectoarele interioare ale unui triunghi sînt concurente într-un punct interior I care este evident egal depărtat de laturile triunghiului, deci este centrul cercului înscris triunghiului. Raza acestui cerc este $r = \frac{S}{p}$. Se observă că

$$m(\widehat{BIC}) = 180° - m\left(\frac{\hat{B}}{2} + \frac{\hat{C}}{2}\right) = 90° + \frac{1}{2} m(\hat{A}).$$

Un rezultat mult utilizat îl constituie *teorema bisectoarei interioare*: $\frac{AB}{AC} = \frac{BD}{DC}$; dacă AD_1 este bisectoarea exterioară ($D_1 \in BC$), atunci $\frac{AB}{AC} = \frac{BD_1}{D_1C}$. De aici rezultă $\frac{BD}{BD + DC} = \frac{AB}{AB + AC}$, deci $BD = \frac{ac}{b + c}$, ceea ce permite calculul lungimii bisectoarei AD în funcţie de laturi (aplicînd teorema cosinusului în triunghiul ABD); v. fig. M.A.4.

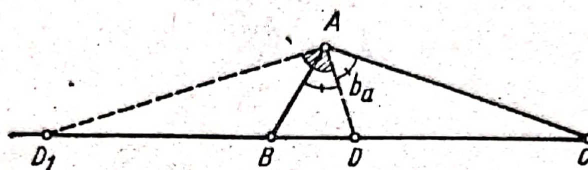


Fig. M.A.4

Pentru a arăta că două drepte sînt paralele există (după caz) două modalităţi principale: sau se observă unghiurile făcute cu o anumită secantă sau se aplică reciproca teoremei lui Thales. Teorema lui Thales are două variante: dacă $M \in [AB]$, $N \in [AC]$ şi $MN \parallel BC$, atunci

1°. $\frac{AM}{MB} = \frac{AN}{NC}$;

2°. $\frac{AM}{AB} = \frac{AN}{AC} = \frac{MN}{BC}$.

În probleme se foloseşte mult tehnica triunghiurilor asemenea. Două triunghiuri ABC şi $A_1B_1C_1$ se numesc *asemenea* dacă între vîrfurile lor se stabileşte o bijecţie (de exemplu, $A \mapsto A_1$, $B \mapsto B_1$, $C \mapsto C_1$) astfel încît $\hat{A} \equiv \hat{A}_1$, $\hat{B} \equiv \hat{B}_1$, $\hat{C} \equiv \hat{C}_1$ şi $\frac{AB}{A_1B_1} = \frac{BC}{B_1C_1} = \frac{CA}{C_1A_1}$. În practică nu trebuie verificate toate aceste cinci condiţii, aplicîndu-se cazurile de asemănare; cel mai utilizat este cazul UU (adică $\hat{A} \equiv \hat{A}_1$, $\hat{B} \equiv \hat{B}_1$). Celelalte două cazuri sînt: cîte un unghi congruent cuprins între laturi corespunzătoare congruente; laturile proporţionale.

Relaţiile metrice principale într-un triunghi dreptunghic ABC ($m(\hat{A}) = 90°$) sînt:

$AB^2 = BD \cdot BC$; $AC^2 = DC \cdot BC$ ($AD \perp BC$, $D \in BC$); $AD^2 = BD \cdot CD$ şi $AD = \frac{AB \cdot AC}{BC}$. Adunînd primele două relaţii se obţine *teorema lui Pitagora*: $AB^2 + AC^2 = BC^2$.

Exemple. 1) Fie A, B două puncte distincte fixe, $AB = a$. Aflăm locul geometric al punctului M astfel încît $MA^2 + MB^2 = k^2$ ($k > 0$ dat). Pentru aceasta se aplică teorema medianei: notînd cu C mijlocul segmentului $[AB]$, avem $MA^2 + MB^2 = 2MC^2 + \frac{1}{2} AB^2$, deci $k^2 = 2MC^2 + \frac{a^2}{2}$. Atunci $MC^2 = \frac{2k^2 - a^2}{4}$. Dacă $2k^2 - a^2 > 0$, atunci locul cerut este cercul de centru C şi rază $\frac{1}{2}\sqrt{2k^2 - a^2}$; dacă $2k^2 - a^2 = 0$, atunci locul este redus la punctul C şi dacă $2k^2 - a^2 < 0$, atunci locul cerut este mulţimea vidă.

2) *Fie triunghiul* ABC *cu* $m(\widehat{BAC}) = 60°$, A' *mijlocul laturii* $[BC]$ *și* $BB_1 \perp AC$, $CC_1 \perp AB$. *Să se arate că triunghiul* $A'B_1C_1$ *este echilateral.* Este suficient să observăm că $B_1A' = \frac{1}{2} BC$ (ca mediană în triunghiul B_1BC) și la fel $C_1A' = \frac{1}{2} BC$, deci triunghiul $A'B_1C_1$ este isoscel. Rămîne să arătăm că el are un

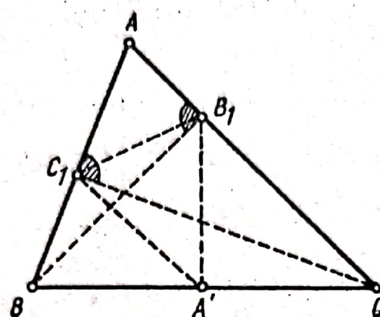


Fig. M.A.5

unghi de 60°. Dar $m(\widehat{BA'C_1}) = 180° - 2m(\hat{B})$ și $m(\widehat{CA'B_1}) = 180° - 2m(\hat{C})$, deci $m(\widehat{B_1A'C_1}) = 180° - (180° - 2m(\hat{B}) + 180° - 2m(\hat{C})) = 2m(\hat{B}) + 2m(\hat{C}) - 180° = 60°$. O altă soluție se obține observînd că cercul de diametru $[BC]$ trece prin B_1 și C_1, $m(\widehat{ABB_1}) = 30°$, deci $m(\widehat{B_1C}) = 60°$; v. fig. M.A.5.

2. CERCUL

Cercul $\mathcal{C}(O, R)$ de centru O și rază $R (R > 0)$ este mulțimea punctelor M (dintr-un plan subînțeles fixat) astfel încît $OM = R$. *Discul* deschis este mulțimea punctelor M astfel încît $OM < R$.

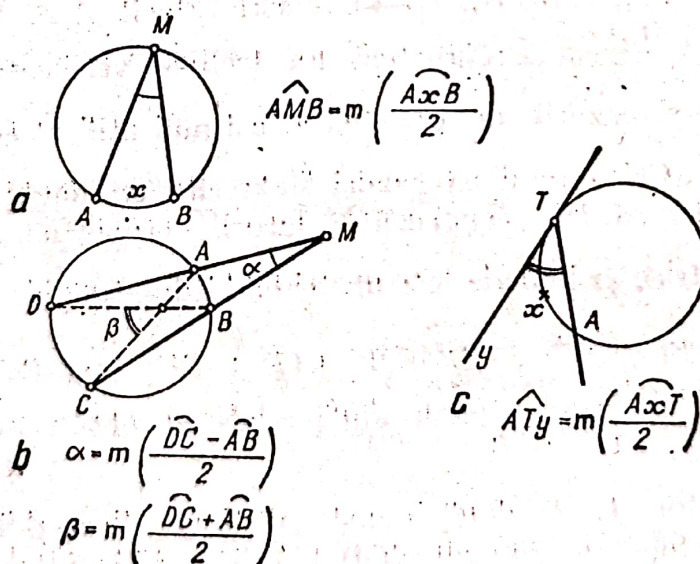


Fig. M.A.6

Măsura întregului cerc este, prin convenție, de 360° (arcul de 1° fiind a 360-a parte dintr-un cerc, numărul 360 fiind ales și pentru că are mulți divizori). Măsura unui arc de cerc este egală cu măsura unghiului la centru corespunzător. În multe probleme se folosesc regulile de evaluare a măsurii unghiurilor ale căror laturi intersectează un cerc dat sau sînt tangente la acesta. În figura M.A.6 indicăm aceste reguli.

Fie $\mathcal{C}(O, R)$ un cerc şi M un punct fixat. Se numeşte *putere* a punctului M expresia $\rho(M) = OM^2 - R^2$ (măsurată în unităţi pătratice, avînd dimensionalitatea unei arii). Dacă M este interior (resp. exterior) cercului, atunci $\rho(M) < 0$ (resp. $\rho(M) > 0$). Punctele de pe cerc sînt exact cele avînd puterea nulă.

În probleme se foloseşte mult *proprietatea puterii*:

a) Dacă M este un punct interior, atunci pentru orice două coarde $[PQ]$ şi $[P'Q']$ trecînd prin M avem $PM \cdot MQ = P'M \cdot MQ' = R^2 - OM^2 = -\rho(M)$.

b) Dacă M este un punct exterior, atunci pentru orice două secante MPQ şi $MP'Q'$ avem $MP \cdot MQ = MP' \cdot MQ' = \rho(M) = OM^2 - R^2 = MT^2$ (v. fig. M.A.7).

Reamintim că tangentele $[AT_1]$, $[AT_2]$ dintr-un punct A exterior la un cerc $\mathcal{C}(O, R)$ sînt congruente ($[AT_1] \equiv [AT_2]$) iar $[OA$ este bisectoarea unghiului $\widehat{T_1AT_2}$.

Dacă A, B sînt puncte fixe, atunci locul geometric al punctelor M astfel încît $m(\widehat{AMB}) = 90°$ este cercul de diametru $[AB]$; dacă $m(\widehat{AMB}) = \alpha$, atunci locul geometric al lui M este alcătuit din reuniunea a două arce de cerc simetrice faţă de dreapta AB (arcele construite pe AB, capabile de unghiul α).

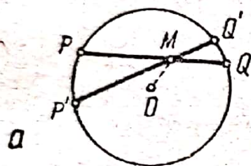


Fig. M.A.7

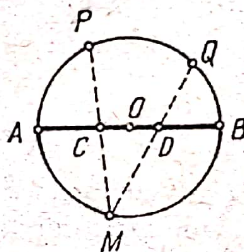


Fig. M.A.8

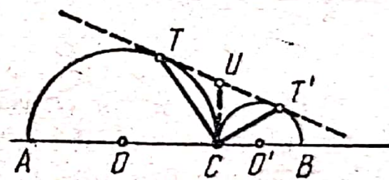


Fig. M.A.9

Exemple. 1) *Fie un cerc* $\mathcal{C}(O, R)$ *şi un diametru* $[AB]$. *Fixăm două puncte* C *şi* D *pe* $[AB]$ *astfel încît* O *să fie mijlocul lui* $[CD]$. *Dacă* M *este un punct oarecare pe cerc şi dreptele* MC, MD *retaie cercul în* P *şi* Q, *să se arate că raportul* $\frac{CP \cdot DQ}{\sqrt{CP^2 + DQ^2}}$ *este constant* (v. fig. M.A.8).

Notăm $OC = OD = a$. Avem $CP \cdot CM = R^2 - a^2$ şi $QD \cdot DM = R^2 - a^2$ (proprietatea puterii). Atunci $CP = \frac{R^2 - a^2}{CM}$, $DQ = \frac{R^2 - a^2}{DM}$ şi raportul din enunţ devine $\frac{R^2 - a^2}{\sqrt{CM^2 + DM^2}}$. Este suficient să aplicăm teorema medianei şi se obţine: $CM^2 + DM^2 = 2MO^2 + \frac{1}{2} CD^2 = 2R^2 + 2a^2$.

2) *Fie* C *un punct luat pe un segment* $[AB]$. *Se duc semicercurile de diametre* $[AC]$, $[CB]$, *de aceeaşi parte a lui* AB, *şi tangenta comună* $[TT']$. *Să se arate că* $TC \perp T'C$ (v. fig. M.A.9).

Ducem tangenta comună $[CU]$ ($U \in TT'$). Atunci $UC = UT$, $UC = UT'$, deci $[CU]$ este mediană în $\triangle CTT'$ şi avem $CU = \frac{1}{2} TT'$. Deci $m(\widehat{TCT'}) = 90°$.

3. PATRULATERE; POLIGOANE. ARII

Suma unghiurilor unui poligon convex cu $n(n \geqslant 3)$ laturi este $180°(n-2)$. Într-un patrulater convex $ABCD$ suma unghiurilor este $360°$.

Reamintim că un patrulater convex $ABCD$ este *paralelogram* dacă laturile opuse sînt paralele; aceasta este echivalent cu faptul că o pereche de laturi opuse sînt paralele și congruente, sau cu faptul că diagonalele se taie în părți congruente (În general, diagonalele nu sînt congruente.) *Dreptunghiul* este un paralelogram cu un unghi drept; toate unghiurile rezultă drepte, iar diagonalele congruente. *Rombul* este paralelogramul cu toate laturile congruente; în acest caz, diagonalele sînt ortogonale și bisectează unghiurile rombului. Pentru a arăta că un patrulater convex $ABCD$ este pătrat trebuie arătat că este un dreptunghi, cu toate laturile congruente (sau cu diagonalele perpendiculare).

Trapezul este un patrulater cu două laturi opuse paralele și celelalte două laturi opuse neparalele.

Un patrulater convex $ABCD$ se numește *inscriptibil* dacă cercul ABC trece și prin D; raza cercului circumscris se calculează cu formula $R = \dfrac{a \cdot b \cdot c}{4S}$ aplicată de exemplu triunghiului ABC. Există trei teoreme importante de caracterizare a patrulaterelor inscriptibile. Un patrulater convex $ABCD$ este inscriptibil dacă și numai dacă:

1. Două unghiuri opuse sînt suplementare; sau

2. Unghiul făcut de o latură cu o diagonală este congruent cu unghiul făcut de cealaltă diagonală cu latura opusă; sau

3. Produsul lungimilor diagonalelor este egal cu suma produselor lungimilor laturilor opuse:

$$AC \cdot BD = AB \cdot CD + AD \cdot BC \text{ (teorema lui Ptolemeu).}$$

Un patrulater convex $ABCD$ are proprietatea că în el se înscrie un cerc dacă și numai dacă există un punct interior egal depărtat de cele patru laturi sau, echivalent, suma lungimilor a două laturi opuse este egală cu suma lungimilor celorlalte două laturi opuse ($AB + CD = AD + BC$).

Pentru a arăta că două patrulatere sînt asemenea trebuie arătat că au unghiurile congruente și laturile corespunzătoare proporționale.

Aria unui dreptunghi de dimensiuni a, b este $a \cdot b$. Dacă $ABCD$ este un paralelogram și $AA' \perp DC (A' \in DC)$, atunci $\sigma(ABCD) = DC \cdot AA'$. Dacă $AB = a$,

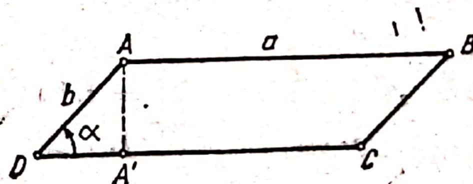


Fig. M.A.10

$AD = b$, $m(\widehat{ADA'}) = \alpha$, atunci $\sigma(ABCD) = ab \sin \alpha$ (v. fig. M.A.10). Se cunosc formulele pentru aria unui triunghi ABC:

$$S = \frac{ah_a}{2} = \frac{bc \sin A}{2} = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}.$$

Pentru orice patrulater convex $ABCD$ avînd unghiul ascuțit dintre diagonale θ, aria este egală cu $\dfrac{AC \cdot BD}{2} \sin \theta$.

Aria sectorului de cerc AOB, cu $OA = OB = R$, $m(\widehat{AOB}) = \theta°$, este $\frac{\pi R^2 \theta°}{360°}$ şi dacă θ_r este măsura unghiului $\widehat{AOB}$ în radiani, această arie este $\frac{R^2\theta_r}{2}$ (v. fig. M.A.11). Reamintim că lungimea arcului $\widehat{AB}$ este egală cu $\frac{\pi R \theta°}{180°} = R \cdot \theta_r$. Vom utiliza frecvent notaţia simplă θ pentru $\theta°$ sau θ_r, semnificaţia rezultînd din context.

Reamintim că pentru un poligon convex regulat cu n laturi ($n \geqslant 3$) înscris într-un cerc de rază R, latura şi apotema au respectiv lungimile: $l_n = 2R \sin \frac{\pi}{n}$, $a_n = R \cos \frac{\pi}{n}$.

Aria poligonului este: $S_n = n \cdot R^2 \sin \frac{\pi}{n} \cos \frac{\pi}{n}$.

În cazul $n = 3$ al triunghiului echilateral, rezultă $l_3 = R\sqrt{3}$, $a_3 = \frac{R}{2}$; pentru $n = 4$, $l_4 = R\sqrt{2}$, $a_4 = \frac{R\sqrt{2}}{2}$ şi pentru $n = 6$ avem $l_6 = R$, $a_6 = \frac{R\sqrt{3}}{2}$.

Exemple. 1) *Fie un cerc de diametru* $[AB] = 2R$. *Pe tangenta în* A *la cerc se consideră de o parte şi de alta punctele* P *şi* Q *astfel încît* $AP = a$, $AQ = b$. *Dreptele* BP, BQ *retaie cercul în* P' *şi* Q' *respectiv. Să se arate că patrulaterul* $PP'Q'Q$ *este inscriptibil şi să se calculeze aria lui.* Avem (v. fig. M.A.12):

$$\widehat{AQQ'} = \frac{m(\widehat{AP'B}) - m(\widehat{AQ'})}{2} = \frac{180° - m(\widehat{AQ'})}{2} = \frac{m(\widehat{BQ'})}{2} = m(\widehat{BP'Q'}).$$

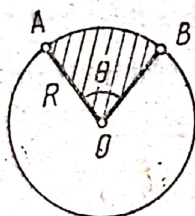


Fig. M.A.11

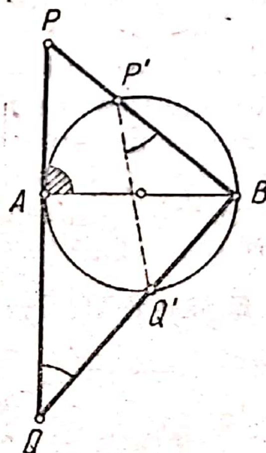


Fig. M.A.12

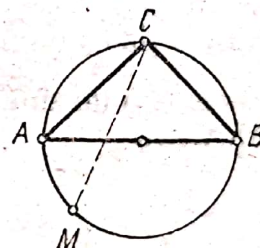


Fig. M.A.13

Atunci $m(\widehat{AQQ'}) + m(\widehat{PP'Q'}) = 180°$, deci patrulaterul $PP'Q'Q$ este inscriptibil. Apoi $\sigma(BPQ) = \sigma(BAP) + \sigma(BAQ) = Ra + Rb = R(a + b)$. Triunghiul $BP'Q'$ este evident asemenea cu BPQ, cu raportul de asemănare $k = \frac{BP'}{BQ} = \frac{AB^2}{BP \cdot BQ} = \frac{4R^2}{\sqrt{4R^2 + a^2}\sqrt{4R^2 + b^2}}$ şi $\sigma(PP'Q'Q) = \sigma(BPQ) - \sigma(BP'Q') = \sigma(BPQ) - k^2 \cdot \sigma(BPQ)$ etc.

2) *Se consideră un cerc de diametru* $[AB]$ *de lungime* $2R$. *Fie* C *mijlocul semicercului superior. Să se arate că dacă* M *este un punct oarecare pe semicercul inferior, atunci* $MA + MB = \sqrt{2}\, MC$ *şi să se determine poziţia lui* M *astfel încît în patrulaterul* $ACBM$ *să se poată înscrie un cerc* (fig. M.A.13).

Pentru aflarea soluţiei, aplicăm teorema lui Ptolomeu în patrulaterul inscriptibil $ACBM$: $AC \cdot BM + BC \cdot AM = AB \cdot CM$, deci $R\sqrt{2} \cdot BM + R\sqrt{2} \cdot AM = 2R \cdot CM$. Apoi condiţia ca în patrulaterul $ACBM$ să se înscrie un cerc este $AC + MB = BC + AM$ şi rezultă $AM = BM$, deci M este mijlocul semicercului inferior.

§ 3. TRIGONOMETRIE

1. DEFINIŢIA FUNCŢIILOR TRIGONOMETRICE

Să considerăm un unghi ascuţit xOy de măsură α. Fie B un punct pe Oy şi B' proiecţia lui B pe Ox (v. fig. M.A.14). Raportul $\frac{BB'}{OB}$ este independent de alegerea lui B şi depinde numai de unghiul α; el se numeşte *sinusul* lui α şi se notează $\sin \alpha$; în mod similar, $\cos \alpha = \frac{OB'}{OB}$, $\operatorname{tg} \alpha = \frac{BB'}{OB'}$ etc. Evident, pentru orice $0° < \alpha < 90°$, $\sin \alpha$, $\cos \alpha$, $\operatorname{tg} \alpha$ sînt adimensionale şi au valori pozitive. Direct, din definiţie, se vede că:

$$\sin 30° = \cos 60° = \frac{1}{2}; \ \sin 45° = \cos 45° = \frac{\sqrt{2}}{2};$$

$$\sin 60° = \cos 30° = \frac{\sqrt{3}}{2}; \ \operatorname{tg} \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha}, \quad \operatorname{ctg} \alpha = \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha} = \frac{1}{\operatorname{tg} \alpha},$$

iar teorema lui Pitagora arată că $\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$.

Fie un triunghi ABC dreptunghic în A. Pentru rezolvarea triunghiului (adică determinarea elementelor lui principale) este suficient, de exemplu, să cunoaştem ipotenuza $[BC]$ şi un unghi ascuţit sau o catetă şi un unghi ascuţit.

Mişcările de rotaţie şi, în general, studiul fenomenelor periodice au impus necesitatea extinderii funcţiilor trigonometrice la unghiuri oarecare. Pentru aceasta s-a considerat *cercul trigonometric*, care este un cerc de rază 1, cu centrul în originea unui sistem ortogonal de coordonate xOy. Se fixează o origine de măsură a arcelor, anume punctul $A(1, 0)$, o orientare pozitivă (în sens invers arcelor unui ceasornic) şi se face convenţia ca unghiurile care se consideră să aibă una din laturi OA. Pentru orice unghi α există un singur punct M pe cercul trigonometric astfel încît $m(\widehat{AOM}) = \alpha$ (fig. M.A.15).

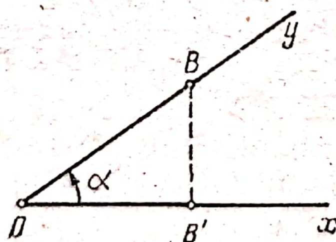


Fig. M.A.14

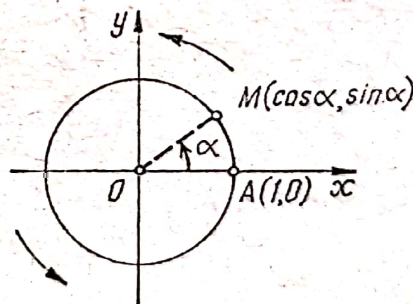


Fig. M.A.15

Prin definiţie, $\cos \alpha = x_M$ şi $\sin \alpha = y_M$, deci $M(\cos \alpha, \sin \alpha)$. Rezultă imediat de aici semnele lui $\sin \alpha$ şi $\cos \alpha$ pe diverse cadrane. Pentru ca funcţiile trigonometrice să devină funcţii reale, unghiurile se măsoară în radiani; atunci sînt definite două funcţii $\sin : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, $\cos : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ (cu domeniul strict de valori $[-1, 1]$), care *extind* funcţiile sin şi cos definite anterior doar pentru unghiuri ascuţite

$\alpha \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right)$. Ele sînt funcții periodice de perioadă principală 2π. Se definesc $\operatorname{tg} \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha}$ ($\cos \alpha \neq 0$) și $\operatorname{ctg} \alpha = \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha}$ ($\sin \alpha \neq 0$).

Reamintim că

$$\sin \alpha = \cos\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right), \quad \cos \alpha = \sin\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right), \quad \operatorname{tg} \alpha = \operatorname{ctg}\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) \text{ etc.}$$

Se cunosc relațiile de reducere la primul cadran: dacă α este în cadranul II $\left(\text{adică } \frac{\pi}{2} < \alpha < \pi\right)$, atunci

$$\sin \alpha = \sin(\pi - \alpha), \quad \cos \alpha = -\cos(\pi - \alpha), \quad \operatorname{tg} \alpha = -\operatorname{tg}(\pi - \alpha);$$

dacă α este în cadranul III, atunci

$$\sin \alpha = -\sin(\alpha - \pi), \quad \cos \alpha = -\cos(\alpha - \pi), \quad \operatorname{tg} \alpha = \operatorname{tg}(\alpha - \pi),$$

iar dacă α este în cadranul IV, atunci

$$\sin \alpha = -\sin(2\pi - \alpha), \quad \cos \alpha = \cos(2\pi - \alpha), \quad \operatorname{tg} \alpha = -\operatorname{tg}(2\pi - \alpha).$$

De exemplu,

$$\sin 150° = \sin \frac{5\pi}{6} = \sin\left(\pi - \frac{5\pi}{6}\right) = \frac{1}{2}, \quad \cos \frac{2\pi}{3} = -\cos\left(\pi - \frac{2\pi}{3}\right) = -\frac{1}{2},$$

$$\operatorname{tg} \frac{7\pi}{4} = -\operatorname{tg}\left(2\pi - \frac{7\pi}{4}\right) = -1.$$

Deoarece

$$\operatorname{ctg} x = \frac{1}{\operatorname{tg} x}, \quad \sec x = \frac{1}{\cos x}, \quad \operatorname{cosec} x = \frac{1}{\sin x}$$

(pentru valorile admisibile), rezultă că esențiale sînt „sin“, „cos“, „tg“.

Dacă α este un unghi oarecare ($\alpha \in \mathbf{R}$), atunci există un singur număr $r \in [0, 2\pi)$ astfel încît $\alpha - r$ este un multiplu întreg de 2π și avem

$$\sin \alpha = \sin r, \quad \cos \alpha = \cos r, \quad \operatorname{tg} \alpha = \operatorname{tg} r;$$

de exemplu, pentru $\alpha = \frac{13\pi}{2}$, luăm $r = \frac{\pi}{2}$ și $\sin \frac{13\pi}{2} = \sin \frac{\pi}{2} = 1$, $\cos \frac{13\pi}{2} = \cos \frac{\pi}{2} = 0$. În mod similar, pentru a calcula $\sin 11820°$, luăm $r =$ restul împărțirii lui 11820 cu 360, deci $r = 300$, și atunci $\sin 11820° = \sin 300° = -\sin(360° - 300°) = -\frac{\sqrt{3}}{2}$.

Reamintim de asemenea că dacă $M(\cos \alpha, \sin \alpha)$, atunci simetricul lui față de Ox va fi $M'(\cos \alpha, -\sin \alpha)$ și acesta corespunde unghiului $-\alpha$. Deci:

$$\cos(-\alpha) = \cos \alpha, \quad \sin(-\alpha) = -\sin \alpha, \quad \operatorname{tg}(-\alpha) = -\operatorname{tg} \alpha.$$

2. RELAȚII ÎNTRE VALORILE FUNCȚIILOR TRIGONOMETRICE ALE ACELUIAȘI UNGHI

Pentru orice $\alpha \in \mathbf{R}$, $\cos^2\alpha + \sin^2\alpha = 1$. De aici rezultă că dacă se cunoaște $\sin \alpha = m$, atunci se pot determina (pînă la semn) valorile celorlalte cinci funcții trigonometrice:

$$\cos \alpha = \pm\sqrt{1 - m^2}, \quad \operatorname{tg} \alpha = \pm\frac{m}{\sqrt{1 - m^2}} \text{ etc.}$$

Dacă se cunoaşte tg $\alpha = m$, atunci $\frac{\sin^2 \alpha}{\cos^2 \alpha} = m^2$, deci $\sin^2\alpha = m^2(1 - \sin^2\alpha)$; rezultă $\sin^2\alpha = \frac{m^2}{1 + m^2}$, adică

$$\sin \alpha = \pm \frac{\operatorname{tg} \alpha}{\sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 \alpha}};$$

în mod similar,

$$\cos \alpha = \pm \frac{1}{\sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 \alpha}}.$$

3. FUNCŢIILE SUMEI ŞI DIFERENŢEI DE UNGHIURI

Pentru orice $x, y \in \mathbf{R}$,

$$\sin(x + y) = \sin x \cdot \cos y + \sin y \cdot \cos x;$$

$$\cos(x + y) = \cos x \cdot \cos y - \sin x \cdot \sin y.$$

Înlocuind y cu $-y$ rezultă

$$\sin(x - y) = \sin x \cdot \cos y - \sin y \cdot \cos x;$$

$$\cos(x - y) = \cos x \cdot \cos y + \sin x \cdot \sin y.$$

Apoi,

$$\operatorname{tg}(x + y) = \frac{\sin (x + y)}{\cos (x + y)} = \frac{\sin x \cdot \cos y + \sin y \cdot \cos x}{\cos x \cdot \cos y - \sin x \cdot \sin y} = \frac{\operatorname{tg} x + \operatorname{tg} y}{1 - \operatorname{tg} x \cdot \operatorname{tg} y},$$

$$\operatorname{tg}(x - y) = \frac{\operatorname{tg} x - \operatorname{tg} y}{1 + \operatorname{tg} x \cdot \operatorname{tg} y}.$$

4. TRANSFORMAREA SUMELOR ÎN PRODUSE ŞI A PRODUSELOR ÎN SUME

Pentru orice $\alpha, \beta \in \mathbf{R}$ avem:

$\sin(\alpha + \beta) + \sin(\alpha - \beta) = 2 \sin \alpha \cos \beta;$

$\sin(\alpha + \beta) - \sin(\alpha - \beta) = 2 \sin \beta \cos \alpha;$

$\cos(\alpha + \beta) + \cos(\alpha - \beta) = 2 \cos \alpha \cos \beta;$

$\cos(\alpha + \beta) - \cos(\alpha - \beta) = -2 \sin \alpha \sin \beta.$

„Citite" de la stînga la dreapta şi înlocuind $\alpha + \beta = x$, $\alpha - \beta = y$, aceste formule devin

$$\sin x + \sin y = 2 \sin \frac{x + y}{2} \cos \frac{x - y}{2},$$

$$\sin x - \sin y = 2 \sin \frac{x - y}{2} \cos \frac{x + y}{2},$$

$$\cos x + \cos y = 2 \cos \frac{x + y}{2} \cos \frac{x - y}{2},$$

$$\cos x - \cos y = -2 \sin \frac{x + y}{2} \sin \frac{x - y}{2}.$$

„Citind" formulele anterioare de la dreapta la stînga și împărțind cu 2, rezultă

$$\sin \alpha \cos \beta = \frac{1}{2}[\sin(\alpha + \beta) + \sin(\alpha - \beta)],$$

$$\cos \alpha \cos \beta = \frac{1}{2}[\cos(\alpha + \beta) + \cos(\alpha - \beta)],$$

$$\sin \alpha \sin \beta = \frac{1}{2}[\cos(\alpha - \beta) - \cos(\alpha + \beta)].$$

Adăugăm formulele:

$$\operatorname{tg} y \pm \operatorname{tg} y = \frac{\sin(x \pm y)}{\cos x \cos y}; \quad \operatorname{ctg} x + \operatorname{ctg} y = \frac{\sin(x + y)}{\sin x \sin y},$$

pentru orice x, y admisibili.

5. FUNCȚIILE UNGHIULUI DUBLU, TRIPLU ȘI SEMIUNGHIULUI

Pentru orice $x \in \mathbf{R}$,

$$\sin 2x = 2 \sin x \cos x,$$

$$\cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x.$$

Apoi, $\operatorname{tg} 2x = \frac{2 \operatorname{tg} x}{1 - \operatorname{tg}^2 x}$ (pentru $\cos x \neq 0$, $\cos 2x \neq 0$).

De asemenea,

$$\sin 3x = 3 \sin x - 4 \sin^3 x,$$

$$\cos 3x = 4 \cos^3 x - 3 \cos x,$$

$$\operatorname{tg} 3x = \frac{3 \operatorname{tg} x - \operatorname{tg}^3 x}{1 - 3 \operatorname{tg}^2 x}.$$

Reținem două formule:

$$1 + \cos \alpha = \left(\cos^2 \frac{\alpha}{2} + \sin^2 \frac{\alpha}{2}\right) + \left(\cos^2 \frac{\alpha}{2} - \sin^2 \frac{\alpha}{2}\right) = 2 \cos^2 \frac{\alpha}{2};$$

$$1 - \cos \alpha = 2 \sin^2 \frac{\alpha}{2},$$

pentru orice $\alpha \in \mathbf{R}$, de unde

$$\sin \frac{\alpha}{2} = \pm \sqrt{\frac{1 - \cos \alpha}{2}}, \quad \cos \frac{\alpha}{2} = \pm \sqrt{\frac{1 + \cos \alpha}{2}}.$$

Două formule des utilizate sînt următoarele:

$$\sin x = \frac{2 \operatorname{tg} \frac{x}{2}}{1 + \operatorname{tg}^2 \frac{x}{2}}; \quad \cos x = \frac{1 - \operatorname{tg}^2 \frac{x}{2}}{1 + \operatorname{tg}^2 \frac{x}{2}}$$

$\left(\text{valabile pentru } \cos \frac{x}{2} \neq 0\right)$.

6. CÎTEVA ECUAȚII TRIGONOMETRICE

Ecuația $\sin x = 0$ admite o infinitate de soluții: $x = k\pi\,(k \in \mathbf{Z})$, care corespund tuturor unghiurilor pentru care ordonata punctului corespunzător de pe cercul trigonometric este nulă. În mod similar, ecuația $\cos x = 0$ are soluție generală $x = \frac{\pi}{2} + k\pi$ cu $k \in \mathbf{Z}$.

Ecuația $\sin x = a$, cu $-1 \leqslant a \leqslant 1$ se rezolvă astfel: se alege acea unică soluție x_0 situată în $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ și rezultă

$$x = (-1)^k x_0 + k\pi,\ k \in \mathbf{Z}.$$

Dacă $a \notin [-1, 1]$, ecuația $\sin x = a$ nu admite soluții.

Ecuația $\cos x = a$, $-1 \leqslant a \leqslant 1$ admite soluția generală:

$$x = \pm x_0 + 2k\pi, \quad k \in \mathbf{Z},$$

unde x_0 este acea unică soluție care aparține intervalului $[0, \pi]$. Dacă $\operatorname{tg} x = b$ și $b \in \mathbf{R}$ arbitrar, notînd cu x_0 soluția din $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$, rezultă $x = x_0 + k\pi$ cu $k \in \mathbf{Z}$.

Exemple. 1) Din ecuația $\cos 3x = -\frac{1}{2}$, rezultă $3x = \pm\frac{2\pi}{3} + 2k\pi$, deci $x = \pm\frac{2\pi}{9} + \frac{2k\pi}{3}$, $k \in \mathbf{Z}$.

2) Ecuația $4\sin^2 x + 4\cos x = 5$ se rezolvă notînd $\cos x = t$; rezultă $4(1 - t^2) + 4t = 5$, deci $4t^2 - 4t + 1 = 0$, de unde $t = \frac{1}{2}$. Așadar, $\cos x = \frac{1}{2}$ și $x = \pm\frac{\pi}{3} + 2k\pi$, $k \in \mathbf{Z}$.

Ecuația $a \sin x + b \cos x = c$ $(a, b, c \in \mathbf{R}$ date) se poate rezolva punînd $\operatorname{tg}\frac{x}{2} = t$; rezultă ecuația algebrică $a \cdot \frac{2t}{1+t^2} + b\,\frac{1-t^2}{1+t^2} = c$ etc. Trebuie analizat separat cazul $\cos\frac{x}{2} = 0$ cînd $\operatorname{tg}\frac{x}{2}$ nu este definit. Aceeași ecuație poate fi rezolvată introducînd un unghi auxiliar; anume, dacă $a \neq 0$, atunci se poate nota $\frac{b}{a} = \operatorname{tg}\varphi$ și ecuația devine $\sin x + \operatorname{tg}\varphi \cos x = \frac{c}{a}$, de unde $\sin(x + \varphi) = \frac{c}{a}\cos\varphi$ etc.

Ecuația $a \sin^2 x + b \sin x \cos x + c \cos^2 x = 0$ $(a, b, c \in \mathbf{R})$ se poate rezolva astfel: presupunînd $\cos x \neq 0$, se împarte ecuația cu $\cos^2 x$ și, notînd $\operatorname{tg} x = t$, rezultă $at^2 + bt + c = 0$ etc. Trebuie analizat separat cazul cînd $\cos x = 0$; dacă $a \neq 0$ se obține $\sin x = 0$, ceea ce nu conduce la soluții (deoarece $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$).

Ecuația $a \sin^2 \alpha x + b \sin \alpha x \cos \alpha x + c \cos^2 \alpha x = d$ se poate rezolva înlocuind $d = d(\sin^2\alpha x + \cos^2\alpha x)$ și împărțind cu $\cos^2\alpha x$.

Ecuațiile de forma $f(\sin x \pm \cos x, \sin x \cos x) = 0$ se pot rezolva prin substituția $\sin x \pm \cos x = u$, de unde $1 \pm 2 \sin x \cos x = u^2$.

Exemple. 1) Rezolvăm ecuația $2\cos^2 5x + 3\cos 5x \sin 5x - 5\sin^2 5x = 0$; dacă $\cos 5x = 0$, rezultă și $\sin 5x = 0$, ceea ce nu este posibil. Așadar, $\cos 5x \neq 0$

şi putem împărţi ecuaţia cu $\cos^2 5x$, punînd $\operatorname{tg} 5x = t$. Rezultă, $2 + 3t - 5t^2 = 0$, de unde $t_1 = 1$, $t_2 = -\frac{2}{5}$. Atunci $5x = \frac{\pi}{4} + k\pi$, $k \in \mathbf{Z}$ şi $5x = -\operatorname{arctg}\frac{2}{5} + p\pi$ cu $p \in \mathbf{Z}$.

2) Aflăm valorile lui $m \in \mathbf{R}$ pentru care ecuaţia $\sin x - \cos x + 2 \sin x \cos x = m$ admite cît mai multe soluţii. Notăm $u = \sin x - \cos x$, deci $u^2 = 1 - 2 \sin x \cos x$. Ecuaţia se scrie $u + 1 - u^2 = m$, deci $u^2 - u + m - 1 = 0$. Deoarece $u = \sin x - \cos x = \sin x - \sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \sqrt{2} \sin\left(x - \frac{\pi}{4}\right)$, rezultă $-\sqrt{2} \leqslant u \leqslant \sqrt{2}$. Problema se reduce la una de algebră, anume aflarea valorilor lui m pentru care ecuaţia $f(u) = u^2 - u + m - 1 = 0$ admite ambele rădăcini situate între $-\sqrt{2}$ şi $\sqrt{2}$; condiţia este $\Delta \geqslant 0$, $-\sqrt{2} \leqslant \frac{u_1 + u_2}{2} \leqslant \sqrt{2}$, $1 \cdot f(\sqrt{2}) \geqslant 0$ etc.

7. FUNCŢII TRIGONOMETRICE INVERSE

Reamintim că dacă $f : A \to B$ este o funcţie bijectivă, atunci se poate considera inversa ei $f^{-1} : B \to A$, care asociază oricărui $y \in B$ acel unic $x \in A$ astfel încît $f(x) = y$.

Funcţia $\sin : \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] \to [-1, 1]$ este bijectivă şi inversa ei este

$$\arcsin = \sin^{-1} : [-1, 1] \to \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right],$$

care asociază oricărui $x \in [-1, 1]$ acel unic $\alpha \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ astfel încît $\sin \alpha = x$.

Funcţia $\cos : [0, \pi] \to [-1, 1]$ este bijectivă şi inversa ei este $\arccos = \cos^{-1} : [-1, 1] \to [0, \pi]$ şi asociază oricărui $x \in [-1, 1]$ acel unic $\beta \in [0, \pi]$ astfel încît $\cos \beta = x$.

În mod similar, $\operatorname{tg} : \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right) \to \mathbf{R}$ este bijectivă şi $\operatorname{tg}^{-1} = \operatorname{arctg} : \mathbf{R} \to \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ asociază oricărui $x \in \mathbf{R}$ acel unic $\alpha \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ astfel încît $\operatorname{tg} \alpha = x$. În fine, $\operatorname{ctg} : (0, \pi) \to \mathbf{R}$ este bijectivă şi $\operatorname{arcctg} = \operatorname{ctg}^{-1} : \mathbf{R} \to (0, \pi)$.

Exemple: 1) Avem: $\arcsin 0 = 0$; $\arccos 0 = \frac{\pi}{2}$; $\arcsin\left(-\frac{1}{2}\right) = -\frac{\pi}{6}$; $\arccos\left(-\frac{1}{2}\right) = \frac{2\pi}{3}$, $\operatorname{arctg}(-1) = -\frac{\pi}{4}$; $\arccos(-1) = \pi$; $\arcsin(-1) = -\frac{\pi}{2}$.

2) Pentru orice $x \in [-1, 1]$ avem: $\arcsin x + \arccos x = \frac{\pi}{2}$. Într-adevăr, să notăm $\arcsin x = \alpha$, $\arccos x = \beta$; avem de arătat că $\alpha + \beta = \frac{\pi}{2}$. Dar $\alpha \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$, $\beta \in [0, \pi]$, $x = \sin \alpha$, $x = \cos \beta$, deci $\sin \alpha = \sin\left(\frac{\pi}{2} - \beta\right)$ cu α şi $\frac{\pi}{2} - \beta$ cuprinse între $-\frac{\pi}{2}$ şi $\frac{\pi}{2}$. Atunci $\alpha = \frac{\pi}{2} - \beta$, deci $\alpha + \beta = \frac{\pi}{2}$.

În mod similar se arată că pentru orice $x \in \mathbf{R}$, $\operatorname{arctg} x + \operatorname{arcctg} x = \frac{\pi}{2}$.

Rezultă de aici că esenţiale sînt „arcsin" şi „arctg", deoarece $\arccos f(x) = \frac{\pi}{2} - \arcsin f(x)$ (pentru $-1 \leqslant f(x) \leqslant 1$) şi la fel $\operatorname{arcctg} f(x) = \frac{\pi}{2} - \operatorname{arctg} f(x)$.

8. ELEMENTE DE TRIGONOMETRIA TRIUNGHIULUI

Fie un triunghi ABC. Pentru simplificare, convenim să notăm: $m(\hat{A}) = A$, $m(\hat{B}) = B$, $m(\hat{C}) = C$. Deoarece $A + B + C = \pi$, rezultă $B + C = \pi - A$, deci $\sin(B + C) = \sin A$, $\cos(B + C) = -\cos A$ și alte relații similare. De aici, $\mathrm{tg}(B + C) = -\mathrm{tg}\, A$, adică $\dfrac{\mathrm{tg}\, B + \mathrm{tg}\, C}{1 - \mathrm{tg}\, B \cdot \mathrm{tg}\, C} = -\mathrm{tg}\, A$ ca atare $\mathrm{tg}\, A + \mathrm{tg}\, B + \mathrm{tg}\, C = \mathrm{tg}\, A \cdot \mathrm{tg}\, B \cdot \mathrm{tg}\, C$. De asemenea, $\dfrac{B + C}{2} = \dfrac{\pi}{2} - \dfrac{A}{2}$, deci:

$$\sin \frac{B + C}{2} = \cos \frac{A}{2};\ \cos \frac{B + C}{2} = \sin \frac{A}{2};\ \mathrm{tg} \frac{B + C}{2} = \mathrm{ctg} \frac{A}{2} \text{ etc.}$$

Un rezultat de bază îl constituie *teorema sinusurilor*; în forma:

$$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C} = 2R = \frac{a + b + c}{\sin A + \sin B + \sin C},$$

ea se folosește la rezolvarea triunghiurilor. În relații „mixte" unghiuri-laturi, înlocuind $a = 2R \sin A$, $b = 2R \sin B$, $c = 2R \sin C$, rezultă o relație exclusiv între unghiuri.

Un alt rezultat de bază îl constituie *teorema cosinusului*; în forma: $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos A$, ea permite calculul unei laturi a triunghiului cunoscînd lungimile a două laturi și măsura unghiului cuprins între ele. Pe de altă parte, în forma: $\cos A = \dfrac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}$ ea permite calculul unghiurilor dacă se cunosc lungimile laturilor.

Reținem de asemenea formulele:

$$\sin \frac{A}{2} = \sqrt{\frac{(p - b)(p - c)}{bc}};\ \cos \frac{A}{2} = \sqrt{\frac{p(p - a)}{bc}},$$

$$S = \sigma(ABC) = \frac{bc \sin A}{2} = 2R^2 \sin A \sin B \sin C \text{ etc.}$$

Exemple. 1) *Să se rezolve un triunghi ABC, cunoscînd $\hat{A}$, a și $h = h_a$.* Mai întîi, să observăm că $B + C = \pi - A$ și $\mathrm{ctg}\, B + \mathrm{ctg}\, C = \dfrac{a}{h}$. Notînd $u = \mathrm{tg}\, B$, $v = \mathrm{tg}\, C$, rezultă $\mathrm{tg}(B + C) = \dfrac{u + v}{1 - uv} = -\mathrm{tg}\, A$ și $\dfrac{1}{u} + \dfrac{1}{v} = \dfrac{a}{h}$. Se obține un sistem simetric în u, v etc.

2) *În ce triunghi ABC are loc relația $h_a = \sqrt{bc} \cdot \cos \dfrac{A}{2}$?* Folosim numai relații valabile în triunghiuri oarecare: deoarece $h_a = \dfrac{2S}{a} = \dfrac{bc \sin A}{a}$, rezultă $\dfrac{bc \sin A}{a} = \sqrt{bc} \cdot \cos \dfrac{A}{2}$, adică $\sqrt{bc} \cdot \sin A = a \cos \dfrac{A}{2}$ sau $\sqrt{bc} \cdot 2 \sin \dfrac{A}{2} \cos \dfrac{A}{2} = a \cos \dfrac{A}{2}$. De aici se obține $\sin \dfrac{A}{2} = \dfrac{a}{2\sqrt{bc}}$, adică $\sqrt{\dfrac{(p - b)(p - c)}{bc}} = \dfrac{a}{2\sqrt{bc}}$ sau, echivalent, $a = \sqrt{4(p - b)(p - c)}$. Așadar, $a^2 = (a + c - b)(a + b - c)$, deci $a^2 = a^2 - (b - c)^2$ și, în final, $b = c$.

3) *Fie triunghiul ABC și M, N puncte pe latura [AB] astfel încît* $\widehat{ACM} \equiv \widehat{MCN} \equiv \widehat{NCB}$. *Presupunînd că* $m(\widehat{ACB}) = 3\alpha$ *și* $[BC] = 3[AC]$ *să se calculeze raportul* $\frac{CM}{CN}$ *în funcție numai de* α. Aplicînd teorema sinusurilor în $\triangle ABC$, rezultă

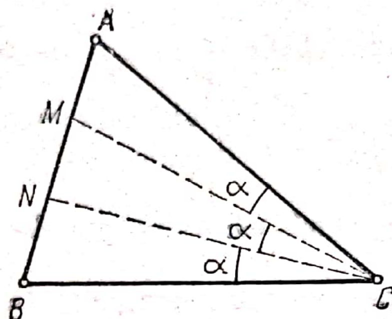


Fig. M.A.16

$\frac{3b}{\sin(B+3\alpha)} = \frac{b}{\sin B}$, deci $3\sin B = \sin(B+3\alpha)$. Atunci $3\sin B = \sin B\cos 3\alpha + \sin 3\alpha\cos B$ și, împărțind cu $\cos B$, se obține $\operatorname{tg} B = \frac{\sin 3\alpha}{3-\cos 3\alpha}$. Aplicăm apoi teorema sinusurilor în triunghiul CMN (v. fig. M.A.16):

$$\frac{CM}{\sin(B+\alpha)} = \frac{CN}{\sin(B+2\alpha)}, \text{ deci:}$$

$$\frac{CM}{CN} = \frac{\sin(B+\alpha)}{\sin(B+2\alpha)} = \frac{\sin B\cos\alpha + \sin\alpha\cos B}{\sin B\cos 2\alpha + \sin 2\alpha\cos B} = \frac{\operatorname{tg} B\cos\alpha + \sin\alpha}{\operatorname{tg} B\cos 2\alpha + \sin 2\alpha}$$

și înlocuim $\operatorname{tg} B = \frac{\sin 3\alpha}{3-\cos 3\alpha}$.

§ 4. GEOMETRIE ÎN SPAȚIU

1. PUNCTE, DREPTE, PLANE; POZIȚII RELATIVE

Noțiunile primare ale geometriei în spațiu sînt: punctele, dreptele, planele. Se cunosc proprietățile care exprimă relațiile dintre ele.

O dreaptă în spațiu d este bine determinată dacă se cunosc două puncte distincte ale ei *sau* dacă se cunoaște un punct pe d și este indicat un vector nenul cu suportul paralel cu d (numit și vector *director*); un plan α în spațiu poate fi determinat dacă se cunosc trei puncte necoliniare din α *sau* un punct din α și o dreaptă $d \subset \alpha$ care nu conține punctul *sau* două drepte concurente din α *sau* două drepte paralele distincte din α.

Două drepte în spațiu d_1, d_2 pot fi coplanare (deci paralele sau concurente), dar pot fi și necoplanare, deci nesituate într-un același plan.

O dreaptă d și un plan α pot avea trei poziții relative posibile: $d \subset \alpha$ (conținută în α), d „înțeapă" planul într-un punct A(adică $d \cap \alpha = \{A\}$) sau d este paralelă cu $\alpha(d \cap \alpha = \emptyset)$.

Două plane α și β pot fi paralele ($\alpha \cap \beta = \emptyset$), confundate ($\alpha = \beta$) sau pot să se intersecteze după o dreaptă.

Trei plane distincte α, β, γ se pot afla în următoarele poziții: $\alpha \parallel \beta \parallel \gamma$; $\alpha \parallel \beta$ iar γ intersectează α, β după două drepte paralele; α și β se intersectează după o dreaptă d și d înțeapă γ într-un punct A (atunci cele trei plane au A ca unic punct comun); α, β, γ trec prin aceeași dreaptă și, în fine, $\alpha \cap \beta = d$ și $d \parallel \gamma$ (se spune atunci că planele determină o prismă).

2. PARALELISM ÎN SPAȚIU

Reamintim că o dreaptă d este paralelă cu un plan α dacă $d \cap \alpha = \emptyset$ și că două plane α, β sînt paralele dacă $\alpha \cap \beta = \emptyset$. Au loc următoarele teoreme care se aplică des:

— Dacă o dreaptă este paralelă cu o dreaptă dintr-un plan, atunci este paralelă cu planul.

— Dacă dreapta d este paralelă cu planul α și dacă prin d este dus un plan β, atunci d este paralelă cu dreapta $d_1 = \alpha \cap \beta$ (v. fig. M.A.17).

— Dacă planele α și β sînt paralele și γ este un plan neparalel cu α, atunci dreptele $\gamma \cap \alpha$ și $\gamma \cap \beta$ sînt paralele (v. fig. M.A.18).

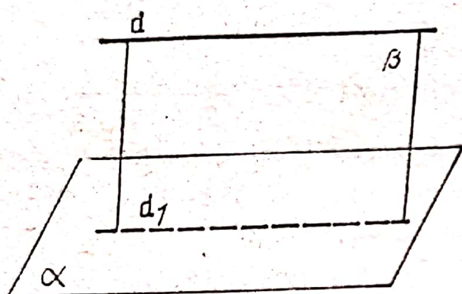


Fig. M.A.17

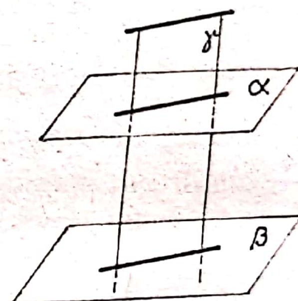


Fig. M.A.18

— Relația de paralelism între drepte și relația de paralelism între plane sînt tranzitive.

— Dacă două drepte concurente sînt paralele cu un plan α, planul determinat de ele este paralel cu α.

— Dacă dreptele d_1, d_2 sînt concurente și d_1', d_2' sînt concurente iar $d_1 \parallel d_1'$, $d_2 \parallel d_2'$, atunci planele determinate de (d_1, d_2) și respectiv (d_1', d_2') sînt paralele.

3. UNGHIURI ÎN SPAȚIU

Dacă două drepte sînt coplanare, situate în același plan α, atunci unghiul lor este, prin definiție, unghiul definit în geometria plană (din planul α). Dacă dreptele

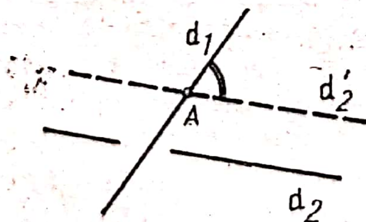


Fig. M.A.19

d_1 și d_2 sînt necoplanare, atunci se alege un punct $A \in d_1$ și se duce prin A paralela d_2' la d_2; unghiul dreptelor d_1, d_2 este unghiul făcut de dreptele coplanare d_1 și d_2', notat $(\widehat{d_1, d_2})$; v. fig. M.A.19. Evident, $(\widehat{d_1, d_2})$ este independent de alegerea lui A.

Fiind date o dreaptă d și un plan α, în cazul cînd d este situată în α sau $d \parallel \alpha$, se consideră că unghiul între d și α este nul. Dacă d înțeapă planul α în punctul A, atunci se alege un punct $M \in d$ și se consideră proiecția M' a lui M pe α; prin definiție, $\widehat{(d, \alpha)} = \widehat{MAM'}$ (independent de M). Așadar, unghiul unei drepte cu un plan este unghiul făcut de dreaptă cu proiecția ei pe plan. (v. fig. M.A.20)

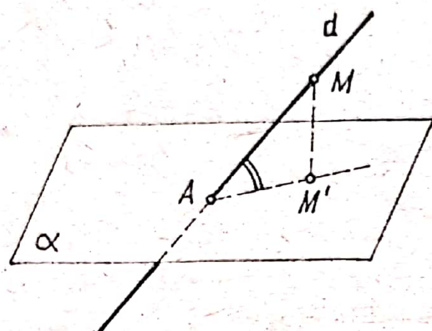


Fig. M.A.20

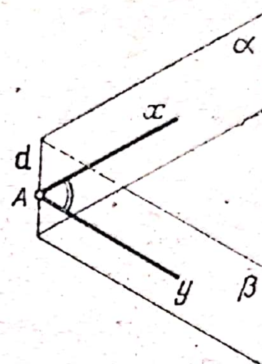


Fig. M.A.21

Dacă α și β sînt două plane paralele, se consideră că ele fac unghiul nul. Dar dacă α și β se intersectează după o dreaptă d, atunci se formează un unghi diedru; alegînd un punct $A \in$ d și ridicînd perpendiculare pe d situate în cele două plane α, β($Ax \subset \alpha$, $Ay \subset \beta$ și $Ax \perp$ d, $Ay \perp$ d) măsura unghiului plan xAy este independentă de alegerea lui A și se numește *măsura unghiului diedru* $\widehat{(\alpha, \beta)}$ (pentru precizare se poate alege unghiul ascuțit); v. fig. M.A.21.

4. PERPENDICULARITATE ÎN SPAȚIU

Două drepte d_1, d_2 se numesc *perpendiculare* dacă $m(\widehat{d_1, d_2}) = 90°$ (ele pot fi coplanare sau necoplanare); două plane α, β se numesc *perpendiculare* dacă $m(\widehat{\alpha, \beta}) = 90°$, adică măsura unghiului diedru este cea a unui unghi drept.

O dreaptă d se spune că este *perpendiculară pe un plan* α dacă ea este perpendiculară pe *orice* dreaptă conținută în α.

Au loc următoarele teoreme importante:

— Dacă o dreaptă este perpendiculară pe două drepte concurente conținute într-un plan, atunci ea este perpendiculară pe plan;

— Dacă o dreaptă d este perpendiculară pe un plan α, atunci orice plan trecînd prin d este perpendicular pe α.

— Dacă planele α și β sînt perpendiculare, orice dreaptă conținută în α și perpendiculară pe $\alpha \cap \beta$ este perpendiculară pe β.

— Două plane perpendiculare pe aceeași dreaptă sînt paralele; două drepte perpendiculare pe același plan sînt paralele.

— Dacă o dreaptă d nu este perpendiculară pe un plan α, atunci există un plan unic, care trece prin d și este perpendicular pe α (planul *proiectant* al lui d pe α);

— *Teorema celor trei perpendiculare*: dacă o dreaptă d este perpendiculară pe un plan α și din punctul $A = d \cap \alpha$ se duce o perpendiculară AB pe o dreaptă d_1

conținută în α, atunci pentru orice punct $M \in$ d, dreapta MB este perpendiculară pe d_1 (v. fig. M.A.22). Există unele reciproce de asemenea adevărate, care trebuie demonstrate *ad-hoc*, pentru că demonstrația este aproape imediată.

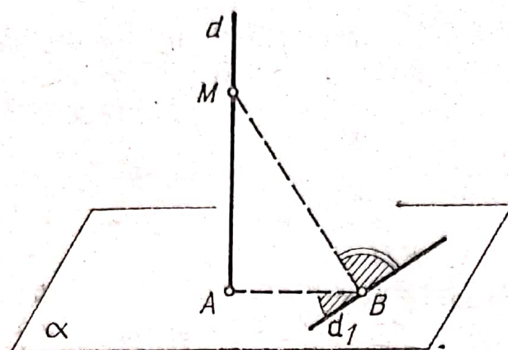


Fig. M.A.22

Orice vector nenul perpendicular pe un plan se mai numește un vector *normal* la plan. Unghiul a două plane este egal cu unghiul făcut de doi vectori normali la acele plane; iar unghiul format de o dreaptă și un plan este complementul unghiului dintre dreaptă și un vector normal la plan.

5. PROIECȚII

Fie α un plan.

Dacă A și B sînt două puncte în spațiu și A', B' sînt proiecțiile ortogonale ale lui A, B respectiv pe α, atunci $A'B' = AB \cdot \cos\theta$, unde θ este unghiul făcut de dreapta AB cu planul α; așadar, prin proiecție, segmentele nu își măresc lungimea.

Dacă d este o dreaptă și A', B' sînt proiecțiile punctelor A, B de pe d, atunci $A'B' = AB \cdot \cos\theta_1$, unde θ_1 este unghiul dintre dreptele d și AB.

Dacă T este un triunghi și T' este proiecția lui T pe planul α, atunci $\sigma(T') = \sigma(T) \cdot \cos\theta$, unde θ este măsura unghiului dintre planul triunghiului T și planul α. Acest rezultat se extinde la poligoane (și chiar la mulțimi măsurabile mai generale).

6. CORPURI ÎN SPAȚIU

Prisma. Aria laterală A a unei prisme oarecare este suma ariilor fețelor laterale. În cazul unei prisme regulate (în care baza este un poligon regulat și muchia laterală este perpendiculară pe planul bazei) avem A = perimetrul bazei × înălțimea.

Volumul unei prisme oarecare este V = aria bazei × înălțimea.

Cilindrul drept. Aria laterală: $A = 2\pi RI$ și volumul: $V = \pi R^2 I$ (R = raza bazei, I = înălțimea).

Piramida. Volumul piramidei: $V = \frac{1}{3}$ aria bazei × înălțimea. În cazul unei piramide regulate (baza poligon regulat și vîrful piramidei se proiectează în centrul bazei), aria laterală este:

$$A = \frac{1}{2} \text{ perimetrul bazei} \times \text{apotema piramidei},$$

apotema fiind înălțimea unei fețe laterale coborîte din vîrful piramidei.

Conul circular drept. Aria laterală: $A = \pi RG$ și volumul: $V = \frac{1}{3}\pi R^2 I$ (R = raza bazei conului, I = înălțimea și G = generatoarea conului).

Trunchiul de piramidă. Volumul $= \frac{1}{3}$ înălţimea $\times (S + s + \sqrt{Ss})$, unde S = aria bazei mari iar s = aria bazei mici. Pentru un trunchi regulat, aria laterală este $\frac{1}{2}$ apotema $\times (P + p)$, unde P = perimetrul bazei mari, iar p = perimetrul bazei mici.

Trunchiul de con circular drept. Aria laterală: $A = \pi G(R + r)$; Volumul $= \frac{\pi I}{3}(R^2 + r^2 + Rr)$; G = generatoarea trunchiului, I înălţimea, R = raza bazei mari şi r = raza bazei mici a trunchiului.

Dacă $R = r$ se regăsesc formulele din cazul cilindrului circular drept, iar în cazul $r = 0$, formulele conului circular drept.

Sfera. *Sfera* de centru O şi rază R este mulţumea punctelor M din spaţiu astfel încît $OM = R$. Uneori prin sferă se înţelege sfera plină (sau bila), adică mulţimea acelor puncte M astfel încît $OM < R$.

Aria sferei de rază R este: $A = 4\pi R^2$, iar volumul sferei: $V = \frac{4}{3}\pi R^3$.

Aria calotei sferice cu înălţimea I este $2\pi RI$, iar volumul calotei (numită şi *segment sferic cu o bază*) este $V = \frac{\pi I^2}{3}(3R - I)$.

Aria zonei este $2\pi RI$ (I fiind distanţa dintre planele care o delimitează), iar volumul se obţine scăzînd din volumul sferei volumul a două calote.

Raza *sferei înscrise* într-o piramidă (în ipoteza că există o astfel de sferă) este $r = \frac{3V}{A_t}$, unde V = volumul piramidei şi A_t = aria totală. Demonstraţia se obţine notînd cu I centrul sferei înscrise şi cu r raza sferei, scriind că volumul V se obţine ca suma volumelor piramidelor avînd I ca vîrf şi feţele piramidei iniţiale ca baze.

Raza *sferei circumscrise* unei piramide regulate este $R = \frac{M^2}{2I}$, unde M = muchia laterală şi I = înălţimea piramidei (pentru demonstraţie se consideră punctul diametral opus vîrfului piramidei şi se aplică teorema catetei).

Pentru raza sferei înscrise şi raza sferei circumscrise unui con circular drept, se pot aplica formulele $r = \frac{S}{p}$, $R = \frac{abc}{4S}$ din geometria plană.

Într-un trunchi de con se poate înscrie o sferă dacă şi numai dacă $G = R + r$; în acest caz, raza ρ a sferei va fi dată de relaţia $4\rho^2 = (R + r)^2 - (R - r)^2$, deci $\rho = \sqrt{Rr}$.

§ 5. GEOMETRIE ANALITICĂ

1. GEOMETRIE PE O AXĂ

Se numeşte *axă* o dreaptă pe care se fixează originea, unitatea de măsură şi un sens (mai sugestiv, se fixează punctele care corespund lui 0, 1 şi respectiv $+\infty$). Dacă se consideră o axă de versor $\vec{u}$, atunci oricărui punct M al axei i se asociază acel unic număr real x_M astfel încît $\overrightarrow{OM} = x_M\vec{u}$; numărul x_M se numeşte *abscisa* lui M. Dacă M, N sînt două puncte pe axă, atunci vectorul $\overrightarrow{MN}$ este dat de $\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{ON} - \overrightarrow{OM} = (x_N - x_M)\vec{u}$. Distanţa între M şi N este $|x_M - x_N|$ iar abscisa mijlocului segmentului MN este $\frac{1}{2}(x_M + x_N)$.

Exemplu. *Fie o axă Ox de versor $\vec{u}$ şi A, B două puncte fixate de abscise a, b pe axă. Să se determine coordonatele punctelor M_1 şi M_2 de pe axă care împart segmentul $[AB]$ în rapoarte k, $-k$, respectiv* ($k \neq \pm 1$). Aşadar, $\overrightarrow{AM_1} = k\overrightarrow{M_1B}$,

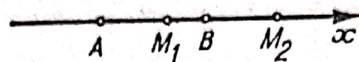


Fig. M.A.23

$\overrightarrow{AM_2} = -k\overrightarrow{M_2B}$. (v. fig. M.A.23). Notînd cu x_1, x_2 abscisele lui M_1, M_2 respectiv, rezultă $x_1 - a = k(b - x_1)$ şi $x_2 - a = -k(b - x_2)$, deci $x_1 = \frac{a + kb}{1 + k}$, $x_2 = \frac{a - kb}{1 - k}$. Se spune că A, B, M_1, M_2 formează o *diviziune armonică* (sau că M_2 este *conjugatul armonic al lui M_1 faţă de A şi B*). Între a, b, x_1, x_2 există o relaţie independentă de k, anume: $2(ab + x_1x_2) = (a + b)(x_1 + x_2)$. Dacă $x_1 = 0$, atunci $\frac{2}{x_2} = \frac{1}{a} + \frac{1}{b}$.

2. PUNCTE ŞI DIRECŢII ÎN PLAN

Se consideră un reper în plan, determinat de un sistem ortogonal de axe xOy, avînd o origină comună şi aceeaşi unitate de măsură; dacă $\vec{i}$ şi $\vec{j}$ sînt versorii axelor Ox, Oy, pentru orice punct M (din plan) există, şi sînt unice, două numere reale x_M, y_M astfel încît $\overrightarrow{OM} = x_M\vec{i} + y_M\vec{j}$. Se spune că M are coordonatele carteziene (x_M, y_M) relativ la reperul xOy şi se stabileşte astfel o corespondenţă bijectivă între punctele planului şi mulţimea $\mathbf{R}^2$ (bijecţia lui Descartes).

Dacă $M_1(x_1, y_1)$ şi $M_2(x_2, y_2)$, atunci *distanţa* dintre punctele M_1 şi M_2 este numărul real nenegativ:

$$d(M_1, M_2) = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}.$$

A da o direcţie în plan revine la a indica un versor $\vec{v}$ paralel cu acea direcţie. Dacă $\vec{v}$ face unghiul α cu versorul $\vec{i}$ al axei Ox, atunci α se numeşte *panta* direcţiei,

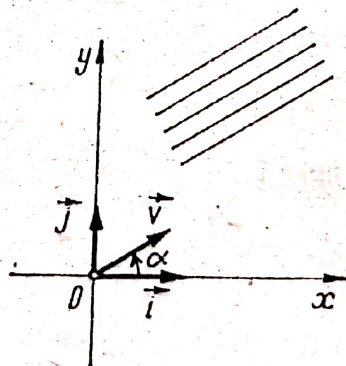


Fig. M.A.24

iar numărul real $m = \operatorname{tg} \alpha$ (în ipoteza $\cos \alpha \neq 0$) se numeşte *coeficientul unghiular* al direcţiei; evident, $\vec{v} = \cos \alpha\vec{i} + \sin \alpha\vec{j}$ (fig. M.A.24). Se consideră „tangenta" şi nu altă funcţie trigonometrică deoarece pantele α şi $\alpha + \pi$ determină aceeaşi direcţie şi „tangenta" este periodică de perioada principală π.

Două direcţii de coeficienţi unghiulari m_1, m_2 sînt paralele (resp. perpendiculare) dacă $m_1 = m_2$ (resp. $m_1m_2 + 1 = 0$). Fiind date două direcţii de coeficienţi unghiulari m_1, m_2, unghiul θ a două drepte avînd aceste direcţii satisface relaţia: $\operatorname{tg}\theta = \dfrac{m_2 - m_1}{1 + m_1m_2}$.

3. DREPTE ÎN PLAN

Reţinem că punctele au coordonate, direcţiile au pantă (sau coeficient unghiular); dreptele, cercurile, elipsele şi, în general, curbele au ecuaţii, iar regiunile din plan sînt date prin inecuaţii. Ecuaţia unei figuri plane F este, în termeni sugestivi, dar nu foarte riguroşi, legătura (algebrică) între coordonatele x, y ale unui punct M din plan relativ la un reper fixat, care rezultă din condiţia geometrică pusă ca M să aparţină figurii F. De exemplu, un punct $M(x, y)$ aparţine axei (resp. Oy) dacă şi numai dacă $y = 0$ (resp. $x = 0$); ecuaţia dreptei trecînd prin origine cu coeficientul unghiular m este $y = mx$. Ecuaţia unei drepte oarecare cu coeficientul unghiular m este $y = mx + \alpha$, intersecţia acesteia cu axa Oy fiind punctul $(0, \alpha)$; în acest caz sînt excluse dreptele verticale, care au ecuaţiile de forma: $x = x_0$, cu $x_0 \in \mathbf{R}$.

Ecuaţia generală a unei drepte este $Ax + By + C = 0$ (cu $A^2 + B^2 \neq 0$): dacă $B \neq 0$ (adică dreapta nu este verticală), rezultă $m = -\dfrac{A}{B}$.

Ecuaţia dreptei trecînd prin punctul $M_0(x_0, y_0)$ cu coeficient unghiular m este: $y - y_0 = m(x - x_0)$, iar ecuaţia dreptei trecînd prin punctele $M_1(x_1, y_1)$, $M_2(x_2, y_2)$ este:

$y - y_1 = m(x - x_1)$, unde $m = \dfrac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$ (dacă $x_1 \neq x_2$) şi $x = x_1$ (dacă $x_2 = x_1$); în mod unificat,

$$\begin{vmatrix} x & y & 1 \\ x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \end{vmatrix} = 0.$$

A intersecta două drepte neparalele $D_1 : A_1x + B_1y + C_1 = 0$, $D_2 : A_2x + B_2y + C_2 = 0$ revine la a afla punctul comun, adică a afla punctul ale cărui coordonate verifică simultan ambele ecuaţii. Dreptele D_1 şi D_2 sînt paralele (şi distincte) dacă şi numai dacă $\dfrac{A_1}{A_2} = \dfrac{B_1}{B_2} \neq \dfrac{C_1}{C_2}$.

Trei drepte de ecuaţii $A_ix + B_iy + C_i = 0$, $1 \leqslant i \leqslant 3$ sînt concurente (sau paralele între ele) dacă şi numai dacă:

$$\begin{vmatrix} A_1 & B_1 & C_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 \\ A_3 & B_3 & C_3 \end{vmatrix} = 0.$$

Distanţa de la un punct $M_0(x_0, y_0)$ la o dreaptă $D : Ax + By + C = 0$ este:

$$d(M_0, D) = \frac{|Ax_0 + By_0 + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}}.$$

Exemple 1) *Se consideră punctele* $A(1, 2)$, $B(4, 1)$. *Să se afle punctul de pe bisectoarea întîi a axelor egal depărtat de* A *şi* B. Un punct oarecare pe bisectoarea întîi are coordonatele $M(\lambda, \lambda)$ şi punem condiţia ca $d(A, M) = d(B, M)$, deci $(\lambda - 1)^2 + (\lambda - 2)^2 = (\lambda - 4)^2 + (\lambda - 1)^2$ şi rezultă $\lambda = 3$, deci $M(3, 3)$. O altă metodă constă în a intersecta mediatoarea segmentului AB cu dreapta $y = x$.

2) *Fie $A(2, 0)$ și P un punct oarecare pe axa Oy. Să se afle ecuația locului geometric al intersecției M dintre paralela prin P la Ox cu perpendiculara în A pe AP.* Fie $P(0, \lambda)$. Atunci coeficientul unghiular al dreptei AP este $m = \frac{\lambda - 0}{0 - 2} = -\frac{\lambda}{2}$.

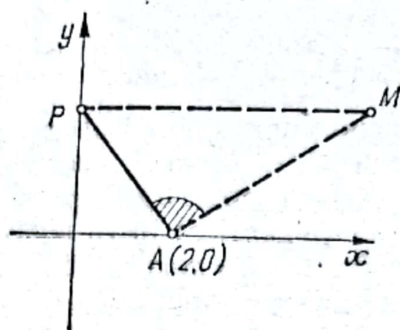


Fig. M.A.25

Ecuația perpendicularei în A pe AP va fi: $y - 0 = \frac{2}{\lambda}(x - 2)$. Trebuie deci aflată ecuația locului intersecției dreptelor $y = \lambda$, $y = \frac{2}{\lambda}(x - 2)$, ceea ce se obține eliminînd λ; se obține $y^2 = 2(x - 2)$ și recunoaștem ecuația unei parabole (v. fig. M.A.25).

4. CERCUL ÎN PLAN

Se subînțelege fixat un reper ortogonal xOy. Ecuația cercului cu centrul $M_0(x_0, y_0)$ și rază $R > 0$ este: $(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = R^2$, obținîndu-se din condiția ca un punct curent $M(x, y)$ din plan să aparțină cercului, adică $d(M_0, M) = R$.

În particular, ecuația cercului $\mathcal{C}(O, R)$ este $x^2 + y^2 = R^2$; semicercul superior este $y = \sqrt{R^2 - x^2}$ iar cel inferior $y = -\sqrt{R^2 - x^2}$.

Ecuația generală a unui cerc este $x^2 + y^2 + mx + ny + p = 0$ cu $m, n, p \in \mathbf{R}$. Centrul acestui cerc are coordonatele $\left(-\frac{m}{2}, -\frac{n}{2}\right)$ și raza este: $R = \sqrt{\frac{m^2}{4} + \frac{n^2}{4} - p}$ $\left(\text{în ipoteza că } \frac{m^2}{4} + \frac{n^2}{4} - p \geqslant 0\right)$.

Fiind date trei puncte necoliniare $M_1(x_1, y_1)$, $M_2(x_2, y_2)$, $M_3(x_3, y_3)$, ecuația cercului circumscris triunghiului $M_1M_2M_3$ este

$$\begin{vmatrix} x^2 + y^2 & x & y & 1 \\ x_1^2 + y_1^2 & x_1 & y_1 & 1 \\ x_2^2 + y_2^2 & x_2 & y_2 & 1 \\ x_3^2 + y_3^2 & x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix} = 0.$$

Exemple. 1) Ecuația cercurilor tangente în origine la Oy se obține observînd că centrul este situat pe Ox, deci $M_0(\lambda, 0)$ iar raza este $|\lambda|$; ecuația căutată va fi: $(x - \lambda)^2 + (y - 0)^2 = \lambda^2$, adică $x^2 + y^2 - 2\lambda x = 0$; în mod similar, ecuația cercurilor tangente în origine la Ox este: $x^2 + y^2 - 2\lambda y = 0$.

2) Cercul $x^2 + y^2 - 4x + 4y - 1 = 0$ are centrul în $(2, -2)$ și raza egală cu 3.

3) Ecuația cercului de diametru M_1M_2, unde $M_1(x_1, y_1)$, $M_2(x_2, y_2)$ este: $(x - x_1)(x - x_2) + (y - y_1)(y - y_2) = 0$.

Ecuația tangentei la un cerc într-un punct al cercului se obține prin dedublarea ecuației cercului.

Ecuaţia comună celor două tangente la cercul $x^2 + y^2 = R^2$, paralele cu direcţia de coeficient unghiular m este: $y = mx \pm R\sqrt{1 + m^2}$.

Un punct oarecare pe cercul $x^2 + y^2 = R^2$ are coordonatele (α, β), unde $\alpha^2 + \beta^2 = R^2$ sau, echivalent, coordonatele $(R \cos t,\ R \sin t)$, unde $t \in [0, 2\pi)$; pentru $t = 0$ se obţine punctul $(R, 0)$. În mod similar, un punct oarecare pe cercul $(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = R^2$ are coordonatele: $x = x_0 + R \cos t$; $y = y_0 + R \sin t$, cu $t \in [0, 2\pi)$. Aceste relaţii se mai numesc şi *ecuaţiile parametrice* ale cercului respectiv.

5. CONICE ÎN PLAN

Fie F, F' două puncte la distanţa $2c$ $(c > 0)$. Se numeşte *elipsă de focare* F, F' *avînd* şi *lungimea axei mari* $2a$ $(a > c)$ mulţimea punctelor M astfel încît:

$$d(M, F) + d(M, F') = 2a.$$

Alegînd dreapta FF' ca axă Ox şi mediatoarea segmentului $[FF']$ ca Oy (fig. M.A.26), ecuaţia elipsei va fi: $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1 = 0$, unde $b = \sqrt{a^2 - c^2}$ (deci $b < a$). Dacă $b = a$, adică F şi F' coincid cu 0, elipsa devine cerc; raportul $\frac{c}{a}$ se numeşte *excentricitate* şi măsoară „abaterea elipsei de la cerc" (acest raport este nul cînd elipsa este un cerc).

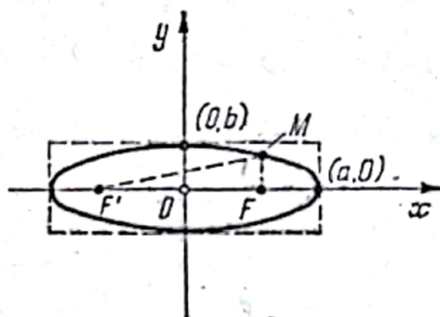


Fig. M.A.26

Dacă $b > a$, atunci focarele elipsei $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1 = 0$ sînt situate pe axa Oy la distanţa $2c$, unde $c = \sqrt{b^2 - a^2}$.

Presupunînd că focarele sînt pe axa Ox (deci $b < a$), dreptele $x = \frac{a^2}{c}$ şi $x = -\frac{a^2}{c}$ se numesc *directoarele* elipsei.

Un punct oarecare de pe elipsa $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1 = 0$ are coordonatele $(a \cos t,\ b \sin t)$, cu $t \in [0, 2\pi)$. Tangenta într-un punct $M_0(x_0, y_0)$ de pe elipsă are ecuaţia: $\frac{xx_0}{a^2} + \frac{yy_0}{b^2} - 1 = 0$ (obţinută prin dedublare).

Ecuaţia comună a celor două tangente la elipsa $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1 = 0$, paralele cu direcţia de coeficient unghiular m este: $y = mx \pm \sqrt{a^2m^2 + b^2}$. Este remarcabilă *proprietatea optică* a elipsei, conform căreia pentru orice punct M_0 de pe elipsă, bisectoarea unghiului $\widehat{FM_0F'}$ este normală în M_0 la elipsă (adică perpendiculară pe tangenta în M_0 la elipsă). Această proprietate are diverse utilizări prac-

tice. Reamintim că una din legile lui Kepler afirmă că, în mişcarea sa în jurul Soarelui, Pămîntul descrie o elipsă avînd Soarele într-unul din focare; acelaşi lucru are loc pentru mişcarea unui satelit artificial în jurul Pămîntului.

Dacă $F(c, 0)$, $F'(-c, 0)$ sînt două puncte fixe, *hiperbola de focare* F, F' *şi lungimi ale axelor* a, b ($c > a$, $b = \sqrt{c^2 - a^2}$) este mulţimea punctelor M din plan astfel încît:

$$|MF - MF'| = 2a.$$

Dacă $MF - MF' = 2a$ se obţine ramura din stînga a hiperbolei. Directoarele hiperbolei sînt $x = \pm \frac{a^2}{c}$, iar dreptele $y = \frac{b}{a}x$, $y = -\frac{b}{a}x$ sînt *asimptotele* hiperbolei.

Dacă $a = b$, se spune că hiperbola este *echilateră*. Dacă se iau ca axe asimptotele unei hiperbole echilatere, ecuaţia acesteia va fi de forma $xy = k (k \in \mathbf{R}$ dat).

Fiind dată o hiperbolă (H) $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} - 1 = 0$, hiperbola $-\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1 = 0$ se numeşte *conjugata* lui H.

Un punct oarecare pe hiperbola $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} - 1 = 0$ are coordonatele $M_0(a \operatorname{ch} t, b \operatorname{sh} t)$; reamintim că $\operatorname{sh} t = \frac{1}{2}(e^t - e^{-t})$ şi $\operatorname{ch} t = \frac{1}{2}(e^t + e^{-t})$. Se obţine astfel şi o justificare a denumirii de „funcţii hiperbolice".

Ecuaţia tangentei într-un punct $M_0(x_0, y_0)$ al hiperbolei $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} - 1 = 0$ este: $\frac{xx_0}{a^2} - \frac{yy_0}{b^2} - 1 = 0$; dacă $|m| > \frac{b}{a}$, atunci există două tangente la hiperbola $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} - 1 = 0$, paralele cu direcţia de coeficient unghiular m, şi acestea au ecuaţia comună: $y = mx \pm \sqrt{a^2m^2 - b^2}$.

Fie F un punct fixat şi D o dreaptă fixată astfel încît $F \notin$ D. Se numeşte *parabolă de focar F şi directoare* D mulţimea punctelor M din plan pentru care $d(M, F) = d(M, \text{D})$. Alegînd ca axă perpendiculara FG din F pe D ($G \in$ D) şi

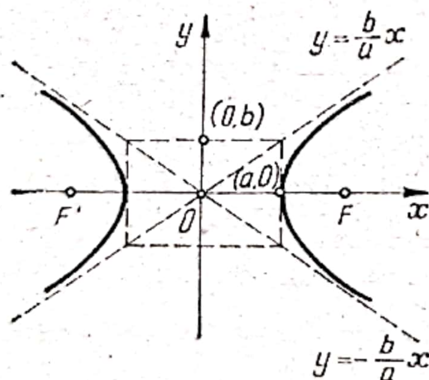


Fig. M.A.27

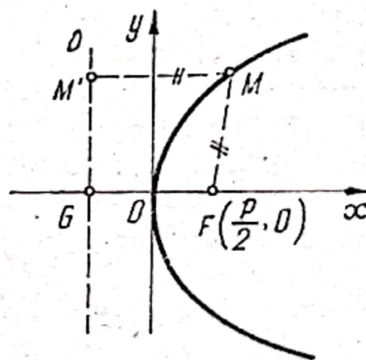


Fig. M.A.28

ca axă Oy mediatoarea lui FG, ecuaţia parabolei va fi: $y^2 = 2px$ dacă $F\left(\frac{p}{2}, 0\right)$. Directoarea D va avea ecuaţia $x = -\frac{p}{2}$. Ecuaţia tangentei la parabola $y^2 = 2px$ într-un punct (x_0, y_0) al ei va fi: $yy_0 = p(x + x_0)$ şi pentru o direcţie de coeficient unghiular m există o singură tangentă paralelă cu acea direcţie, anume $y = mx + \frac{p}{2m}$.

Pentru a construi puncte pe parabolă se procedează astfel: se alege un punct M' pe directoare și se duc paralela prin M' la Ox și mediatoarea lui $[M'F]$.

Exemple. 1) Pentru a reprezenta grafic elipsa $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-1=0$, se consideră dreptunghiul definit de punctele $A(a, 0)$, $A'(-a, 0)$, $B(0, b)$, $B'(0, -b)$ și elipsa este „înscrisă" în acest dreptunghi. Pentru a reprezenta grafic hiperbola $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}-1=0$, se consideră dreptunghiul ei $AA'BB'$, ca mai sus, ale cărei diagonale sînt tocmai asimptotele hiperbolei, iar A, A' sînt vîrfurile hiperbolei (fig. M.A.27).

2) Arătăm că *pentru orice punct situat pe directoarea unei parabole, tangentele duse la parabolă sînt perpendiculare*. Fie $A\left(-\frac{p}{2}, q\right)$ un punct oarecare de pe directoarea parabolei $y^2 = 2px$. Orice dreaptă trecînd prin A are ecuația de forma $y-q=\lambda\left(x+\frac{p}{2}\right)$; punem condiția ca ea să fie tangentă la parabolă, deci intersecția cu parabola „să se facă în două puncte confundate"; aceasta revine la faptul că ecuația $\left[q+\lambda\left(x+\frac{p}{2}\right)\right]^2=2px$ are rădăcini egale. Scriind că $\Delta=0$ rezultă că λ verifică o ecuație de gradul II cu soluțiile λ_1, λ_2 astfel încît $\lambda_1 \cdot \lambda_2 = -1$. Ele corespund celor două tangente duse din A la parabolă, care se dovedesc a fi perpendiculare. (v. fig. M.A.28).

3) Reamintim, de asemenea, proprietatea optică a parabolei: *pentru orice punct M al unei parabole de focar F, raza vectoare și paralela prin M la axa parabolei formează un unghi a cărei bisectoare interioară este tocmai normala în M la parabolă*

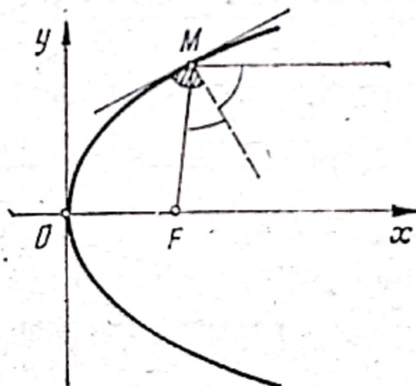


Fig. M.A.29

(fig. M.A.29). Aceasta este folosită masiv în tehnică: farurile de automobil sînt paraboloizi cu becul în focar; unele captatoare solare au formă parabolică pentru ca razele solare paralele cu axa să fie concentrate după reflexie în focar etc.

Elipsele, hiperbolele și parabolele au primit denumirea comună de *conice*, deoarece considerînd un con circular drept și secționîndu-l cu diverse plane se obțin tocmai elipse, hiperbole sau parabole.

§ 6. ANALIZĂ MATEMATICĂ

Analiza matematică studiază în principal conceptul de limită. Derivata unei funcții într-un punct și integrala unei funcții pe un interval sînt exemple specifice de limite. Pentru a înțelege aceste concepte trebuie înțelese „retro" limitele de funcții, limitele de șiruri, șirurile de numere reale și funcțiile reale.

1. ŞIRURI DE NUMERE REALE; MĂRGINIRE, MONOTONIE

Analiza matematică elementară își trage denumirea de la analiza, adică studiul funcţiilor reale de o variabilă reală $f: D \to \mathbf{R}$ ($D \subset \mathbf{R}$). Un caz special îl constituie cazul şirurilor de numere reale $f: \mathbf{N} \to \mathbf{R}$; notînd $a_n = f(n)$ pentru $n \in \mathbf{N}$, acest şir se notează pe scurt $(a_n)_{n \geq 0}$.

Un şir $(a_n)_{n \geq 0}$ de numere reale (reprezentat şi astfel: $a_0, a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots$) se numeşte *mărginit* dacă se pot indica două numere $\alpha, \beta \in \mathbf{R}$ independente de n astfel încît $\alpha \leqslant a_n \leqslant \beta$ pentru orice $n \geqslant 0$. Aceasta este echivalent cu existenţa unui număr real $M > 0$ astfel încît $|a_n| \leqslant M$ pentru orice $n \geqslant 0$.

Exemple. Şirul $a_n = \frac{\sin n}{n}$, $n \geqslant 1$, este mărginit deoarece $|a_n| = \left|\frac{\sin n}{n}\right| = \frac{|\sin n|}{n} \leqslant \frac{1}{n} \leqslant 1$ pentru orice $n \geqslant 1$.

În mod similar, şirul $a_n = \frac{1}{n^2+1}$, $n \geqslant 0$, este mărginit deoarece $0 \leqslant a_n \leqslant 1$ pentru orice $n \geqslant 0$. Dar şirul $b_n = \frac{n^2}{n+1}$, $n \geqslant 0$, nu este mărginit deoarece $b_n \geqslant n - 1$ pentru orice $n = 0, 1, 2, 3, \ldots$ (de exemplu, $b_{1000} \geqslant 999$ iar $b_{10000} \geqslant 9999$).

Un şir $(a_n)_{n \geq 0}$ este *monoton* dacă diferenţa $\Delta_n = a_{n+1} - a_n$ are un semn constant începînd de la un anumit rang; dacă acest semn este „+" (resp. „−"), se spune că şirul este *monoton crescător* (resp. *monoton descrescător*). Şirurile care nu sînt monoton se numesc *oscilante*.

Exemple. 1) Şirul $a_n = \frac{2n+1}{3n+4}$ este monoton crescător, deoarece

$$a_{n+1} - a_n = \frac{2n+3}{3n+7} - \frac{2n+1}{3n+4} = \frac{5}{(3n+7)(3n+4)} > 0 \text{ pentru orice } n \geqslant 0.$$

2) Şirul $a_n = (-1)^n \frac{1}{n}$, $n \geqslant 1$, este oscilant, deoarece termenii sînt $-1, \frac{1}{2}, -\frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \ldots$ şi $a_{n+1} - a_n = (-1)^{n+1} \frac{1}{n+1} - (-1)^n \frac{1}{n} = (-1)^{n+1}\left(\frac{1}{n+1} + \frac{1}{n}\right) = (-1)^n \frac{2n+1}{n(n+1)}$ nu are semn constant.

2. ŞIRURI CONVERGENTE; LIMITE DE ŞIRURI

Pentru înţelegerea conceptelor de bază ale analizei este esenţială înţelegerea „tinderii la zero". Începem cu o discuţie euristică. Ce înseamnă că un volum $V > 0$ tinde la zero? Simţul fizic ne spune că V nu este constant şi „devine din ce în ce mai mic". A trecut mult timp pînă ce s-a dat un sens matematic acestui fapt de experienţă umană. Observăm că dacă se consideră un cub de latură 1 cm şi dacă V tinde la zero, trebuie ca $V < 1$ (de la un „moment" dat); iar dacă latura este de 1 micron trebuie ca $V < 1\mu^3$ (începînd de la un alt „moment"). În general, pentru orice $\varepsilon > 0$ trebuie să avem $V < \varepsilon$ (începînd de la un „moment" ce depinde de ε). Raţionînd similar, trebuie considerat că o temperatură T tinde la zero dacă pentru orice $\varepsilon > 0$, avem $|T| < \varepsilon$ (începînd de la un „moment" dat). Lipsa de rigoare este legată de faptul că nu putem preciza ce este acela moment.

Doar în cazul şirurilor putem da o definiţie riguroasă. Reamintim că distanţa între două numere reale a, b este $d(a, b) = |a - b|$. Un şir de n umere reale se numeşte *convergent* către $a \in \mathbf{R}$ dacă $d(a_n, a) \to 0$ cînd $n \to \infty$, adică $\forall \varepsilon > 0$ există un rang $N(\varepsilon)$ (acesta fiind „momentul") astfel încît $d(a_n, a) < \varepsilon$, adică $|a_n - a| < \varepsilon$ pentru orice $n \geqslant N(\varepsilon)$.

Aceasta înseamnă că $a_n \in (a - \varepsilon, a + \varepsilon)$ pentru orice $n \geq N(\varepsilon)$, adică în afara intervalului $(a - \varepsilon, a + \varepsilon)$ se află eventual doar termenii a_n, cu $n < N(\varepsilon)$, adică un număr finit de termeni ai șirului.

O vecinătate a unui punct $a \in \mathbf{R}$ este o mulțime de numere reale care conține un interval deschis centrat în a. Vecinătățile lui $+\infty$ (resp. $-\infty$) sînt mulțimi care conțin intervale de forma (b, ∞) și respectiv $(-\infty, b)$, cu $b \in \mathbf{R}$.

Reamintim că un șir $(a_n)_{n\geq 0}$ de numere reale *are limita* $a \in \overline{\mathbf{R}}$ dacă în orice vecinătate V a lui a sînt situați toți termenii șirului începînd de la un anumit rang (rang care depinde de V); se scrie $a_n \to a$ sau $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$. În acest caz, orice subșir al lui $(a_n)_{n\geq 0}$ are limita a. Șirurile convergente sînt exact cele care au limită finită.

Pentru rezolvarea de exerciții și probleme este importantă cunoașterea următoarelor rezultate teoretice:

1) Orice șir convergent este mărginit. Orice șir mărginit admite un subșir convergent.

2) Orice șir mărginit și monoton este convergent.

3) Dacă $|a_n - a| \leq b_n$ (începînd de la un anumit rang N, adică pentru orice $n \geq N$) cu $a \in \mathbf{R}$ și dacă $b_n \to 0$, atunci $a_n \to a$.

4) Dacă $a_n \geq b_n$ pentru orice $n \geq N$ (N natural fixat) și dacă $b_n \to +\infty$, atunci $a_n \to +\infty$; iar dacă $a_n \to -\infty$, atunci $b_n \to -\infty$.

5) Dacă $a_n \to \infty$ (sau dacă $a_n \to -\infty$), atunci $\frac{1}{a_n} \to 0$.

6) Dacă șirul $(a_n)_{n\geq 0}$ este mărginit și $b_n \to 0$, atunci $a_n \cdot b_n \to 0$.

7) Dacă șirul (a_n) este mărginit și $b_n \to +\infty$, $c_n \to -\infty$, atunci $a_n + b_n \to +\infty$ și $a_n + c_n \to -\infty$.

8) Dacă șirurile (a_n), (b_n) au limită și $a_n < b_n$, atunci pentru orice $n \geq N$, $\lim\limits_{n\to\infty} a_n \leq \lim\limits_{n\to\infty} b_n$.

9) Dacă șirurile (a_n), (b_n) sînt convergente, atunci:

$$\lim_{n\to\infty}(a_n \pm b_n) = \lim_{n\to\infty} a_n \pm \lim_{n\to\infty} b_n;\ \lim_{n\to\infty} a_n b_n = (\lim_{n\to\infty} a_n)\ (\lim_{n\to\infty} b_n);$$

iar dacă $\lim\limits_{n\to\infty} b_n \neq 0$, atunci $b_n \neq 0$ pentru $n \geq N$ și $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = (\lim\limits_{n\to\infty} a_n)/(\lim\limits_{n\to\infty} b_n)$.

10) Dacă $|a| < 1$, atunci $\lim\limits_{n\to\infty} a^n = 0$ și $\lim\limits_{n\to\infty}(1 + a + \ldots + a^n) = \frac{1}{1-a}$.

11) Șirul $a_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$, $n \geq 1$, este monoton crescător și are toți termenii cuprinși între 2 și 3; $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \mathrm{e}$ (numărul lui Euler; $\mathrm{e} \simeq 2{,}71828183$). Șirul $b_n = 1 + \frac{1}{1!} + \ldots + \frac{1}{n!}$, $n \geq 1$, este de asemenea convergent, cu limita e.

12) Dacă șirurile (a_n), (b_n) sînt convergente și $\lim\limits_{n\to\infty} a_n > 0$, atunci: $\lim\limits_{n\to\infty} a_n^{\,b_n} = (\lim\limits_{n\to\infty} a_n)^{\lim\limits_{n\to\infty} b_n}$.

Există unele operații cu șiruri care conduc la nedeterminări $\frac{0}{0}$, $\frac{\infty}{\infty}$, $0 \cdot \infty$, $\infty - \infty$, 0^0, ∞^0, 1^∞. De exemplu, faptul că $\frac{0}{0}$ este o nedeterminare revine la aceea că pentru orice $a \in \overline{\mathbf{R}}$ există șiruri $a_n \to 0$, $b_n \to 0$ și $\frac{a_n}{b_n} \to a$. În cazul ∞^0 se recomandă formula: $\lim u^v = \mathrm{e}^{\lim v \ln u}$, iar în cazul 1^∞ se scrie: $u^v = (1 + u - 1)^{\frac{1}{u-1} v(u-1)}$ și $\lim u^v = \mathrm{e}^{\lim v(u-1)}$.

Exemple. 1) Avem $\frac{\sin n}{n} \to 0$, deoarece şirul $a_n = \sin n$ este mărginit, iar $\frac{1}{n} \to 0$.

2) Arătăm că şirul $x_n = (-1)^n \frac{1}{n} \to 0$, iar şirul $y_n = (-1)^n \frac{n+1}{n}$ nu este convergent. Într-adevăr, avem $|x_n - 0| = \frac{1}{n}$, deci $x_n \to 0$. Apoi $y_{2n} \to 1$, $y_{2n+1} \to -1$ şi dacă şirul y_n ar tinde către l, ar rezulta $l = 1$ şi $l = -1$ simultan, ceea ce ar fi o contradicţie.

3) Scriem $x_n \sim y_n$ dacă $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{x_n}{y_n} = 1$. Astfel: $(n+2) \sim (n-2)$; $\sqrt{n+2} \sim \sim \sqrt{n+7}$; $n \sin \frac{1}{n} \sim 1$. Dacă $P(n) = a_0 n^k + a_1 n^{k-1} + \ldots + a_k$ $(a_0 \neq 0)$, atunci $P(n) \sim a_0 n^k$; iar dacă

$$x_n = \frac{a_0 n^k + a_1 n^{k-1} + \ldots + a_k}{b_0 n^p + b_1 n^{p-1} + \ldots + b_p}, \quad (a_0 \neq 0,\ b_0 \neq 0),$$

atunci $x_n \sim \frac{a_0}{b_0} n^{k-p}$.

4) Calculăm $L = \lim\limits_{n\to\infty} n^\alpha \left(\sqrt[3]{n+1} - \sqrt[3]{n-1}\right)$. Avem:

$$x_n = n^\alpha \left(\sqrt[3]{n+1} - \sqrt[3]{n-1}\right) = n^\alpha \cdot \frac{(n+1)-(n-1)}{\sqrt[3]{(n+1)^2} + \sqrt[3]{n^2-1} + \sqrt[3]{(n-1)^2}} \sim \frac{2n^\alpha}{3\sqrt[3]{n^2}} = \frac{2}{3} n^{\alpha - \frac{2}{3}}.$$

Avem $L = +\infty$ dacă $\alpha > \frac{2}{3}$, $L = \frac{2}{3}$ dacă $\alpha = \frac{2}{3}$ şi $L = 0$ dacă $\alpha < \frac{2}{3}$.

3. LIMITE DE FUNCŢII

Fie $f : D \to \mathbf{R}$ o funcţie reală şi $\alpha \in \overline{\mathbf{R}}$ un punct de acumulare pentru D (deci există un şir de puncte din $D \setminus \{\alpha\}$, convergent către α). Se scrie că $\lim\limits_{x\to\alpha} f(x) = l$, cu $l \in \overline{\mathbf{R}}$, dacă pentru orice vecinătate V a lui l există o vecinătate U a lui α astfel încît $(\forall) x \in D \cap U$, $x \neq \alpha$, să avem $f(x) \in V$. Aceasta echivalează cu faptul că pentru orice şir $x_n \to \alpha$, $x_n \in D \setminus \{\alpha\}$, avem $f(x_n) \to l$.

Presupunem cunoscută definiţia limitelor laterale ale lui f într-un punct $\alpha \in \mathbf{R}$. Dacă $f(\alpha - 0) = l_s$ există, atunci $l_s = \lim\limits_{n\to\infty} f\left(\alpha - \frac{1}{n}\right)$; în mod similar, $l_d = \lim\limits_{n\to\infty} f\left(\alpha + \frac{1}{n}\right)$. În probleme se folosesc în principal următoarele rezultate teoretice:

1) Dacă $\lim\limits_{x\to\alpha} f(x) = l$ şi $\alpha \in \mathbf{R}$, atunci $l_s = l_d = l$; reciproc, dacă l_s şi l_d există în punctul α şi sînt egale, atunci $\lim\limits_{x\to\alpha} f(x) = l_s$.

2) Dacă D conţine un interval de forma $(-\infty, b)$, cu $a, b \in \mathbf{R}$, şi dacă există $\lim\limits_{x\to\infty} f(-x) = L$, atunci $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = L$; rezultă un mod de calcul al limitelor spre $-\infty$:

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{z\to+\infty} f(-z) \quad (\text{punînd } x = -z).$$

3) Se cunosc principalele operaţii cu limite de funcţii; de exemplu, dacă există şi sînt finite $\lim_{x\to\alpha} f(x) = l_1$ şi $\lim_{x\to\alpha} g(x) = l_2$, atunci $\lim_{x\to\alpha} [f(x) + g(x)] = l_1 + l_2$. Dacă $l_1 = l_2 = \infty$, atunci $\lim_{x\to\alpha} [f(x) + g(x)] = \infty$, iar dacă $l_1 = l_2 = -\infty$, atunci $\lim_{x\to\alpha} [f(x) + g(x)] = -\infty$. În schimb, dacă $l_1 = \infty$ şi $l_2 = -\infty$ (sau $l_1 = -\infty$, $l_2 = +\infty$), nu se poate spune nimic despre limita $\lim_{x\to\alpha} [f(x) + g(x)]$ şi avem o nedeterminare de tipul $\infty - \infty$, care trebuie studiată prin prelucrare convenabilă a funcţiei de sub limită.

În mod similar se consideră celelalte cazuri de nedeterminare.

Reamintim de asemenea că dacă inegalitatea $f(x) < g(x)$ are loc în toate punctele unei vecinătăţi U ale lui $\alpha \in \overline{\mathbf{R}}$ şi dacă există $\lim_{x\to\alpha} f(x)$, $\lim_{x\to\alpha} g(x)$, atunci $\lim_{x\to\alpha} f(x) \leqslant \lim_{x\to\alpha} g(x)$; inegalităţile se păstrează prin trecere la limită (se transformă în inegalităţi de acelaşi sens şi eventual nu mai rămîn stricte).

4) Prezentăm acum o *listă* de limite remarcabile.

a) Avem $\lim_{x\to\alpha} f(x) = f(\alpha)$ pentru orice funcţie f elementară şi pentru orice punct α interior domeniului de definiţie.

b) $$\lim_{x\to\infty} (a_0x^n + a_1x^{n-1} + \ldots + a_n) = \lim_{x\to\infty} a_0x^n = \begin{cases} \infty & \text{dacă } a_0 > 0, \\ -\infty & \text{dacă } a_0 < 0. \end{cases}$$

şi pentru $a \neq 0, b \neq 0$,

$$\lim_{x\to\infty} \frac{a_0x^n + a_1x^{n-1} + \ldots + a_n}{b_0x^m + b_1x^{m-1} + \ldots + b_m} = \begin{cases} 0 & \text{dacă } n < m, \\ \dfrac{a_0}{b_0} & \text{dacă } n = m, \\ \dfrac{a_0}{b_0}\infty & \text{dacă } n > m. \end{cases}$$

c) $$\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1, \quad \lim_{x\to -\infty} \frac{\sin x}{x} = 0, \quad \lim_{x\to\infty} \frac{\sin x}{x} = 0.$$

d) $$\lim_{x\to\infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e; \quad \lim_{x\to 0} (1 + x)^{\frac{1}{x}} = e.$$

e) $$\lim_{x\to 0} \frac{\ln (1 + x)}{x} = 1; \quad \lim_{x\to 0} \frac{a^x - 1}{x} = \ln a \ (a > 0); \quad \lim_{x\to 0} \frac{(1 + x)^r - 1}{x} = r \quad (r \in \mathbf{R}).$$

Pentru o limită $\lim_{x\to\alpha} \frac{f(x)}{g(x)}$ care conduce la o nedeterminare de tipul $\frac{0}{0}$ se recomandă, după caz, simplificarea cu $x - \alpha$ sau efectuarea schimbării de variabilă $x - \alpha = y$ sau amplificarea cu conjugata etc. În cazul $\frac{\infty}{\infty}$ se recomandă eventual scoaterea unui factor comun forţat. În cazul 1^∞ (adică $u \to 1$, $v \to \infty$) se recomandă formula:

$$\lim u^v = e^{\lim v(u-1)}.$$

În cazurile 0^0, ∞^0 se recomandă formula: $\lim u^v = e^{\lim (v \ln u)}$ etc. Reamintim că pentru calculele limitelor laterale în punctul $\alpha \in \mathbf{R}$ se pot folosi şirurile $\alpha - \frac{1}{n}$, $\alpha + \frac{1}{n}$ $(n \geqslant 1)$ iar o limită spre $-\infty$ se calculează prin substituţia $x = -z$,

transformînd-o într-o limită spre $+\infty$; în acest caz, este util să reamintim că pentru orice funcţie polinomială $P(x)$ avem:

$$\lim_{x\to\infty}[P(x)+e^{kx}]=\infty \text{ şi } \lim_{x\to\infty}\frac{P(x)}{e^{kx}}=0 \quad (k>0).$$

De asemenea,

$$\lim_{x\to\infty}\frac{\ln x}{P(x)}=0 \text{ şi } \lim_{x\to\infty}[P(x)+\ln x]=\lim_{x\to\infty}P(x).$$

Pentru a arăta că $\lim_{x\to\alpha} f(x)$ nu există, este suficient să indicăm două şiruri $x_n'\to\alpha$, $x_n''\to\alpha$ astfel încît $\lim_{n\to\infty} f(x_n')$ şi $\lim_{n\to\infty} f(x_n'')$ să nu existe sau să existe dar să nu fie egale.

Exemple. 1) *Să se afle* $a, b\in \mathbf{R}$ *dacă limita* $L=\lim_{x\to-\infty}(ax+\sqrt{4x^2+bx})$ *există şi este egală cu* -3. Se observă că în mod necesar avem $a>0$ (în cazul $a\leqslant 0$ limita este $+\infty$). Se obţine o nedeterminare de tipul $\infty-\infty$ şi avem:

$$L=\lim_{x\to-\infty}\frac{a^2x^2-(4x^2+bx)}{ax-\sqrt{4x^2+bx}}\overset{x=-z}{=}\lim_{z\to\infty}\frac{(a^2-4)z^2+bz}{-az-\sqrt{4z^2-bz}};$$

în mod necesar $a^2-4=0$ şi se acceptă doar $a=2$. În final,

$$L=\lim_{z\to\infty}\frac{bz}{-2z-\sqrt{4z^2-bz}}=\lim_{z\to\infty}\frac{bz}{z\left(-2-\sqrt{4-\frac{b}{z}}\right)}=-\frac{b}{4}.$$

Deoarece $L=-3$, rezultă $b=12$.

2) *Să se arate că limita* $\lim_{x\to1}\cos\frac{1}{x-1}$ *nu există.* Considerăm funcţia $f:\mathbf{R}\setminus\{1\}\to\mathbf{R}$, $f(x)=\cos\frac{1}{x-1}$ şi construim şirurile x_n', x_n'' astfel încît $f(x_n')=1$ şi $f(x_n'')=0$ pentru orice $n\in\mathbf{N}$; anume: $x_n'=1+\frac{1}{2n\pi}$, $x_n''=1+\frac{1}{\frac{\pi}{2}+2n\pi}$

şi rezultă $\lim_{n\to\infty} f(x_n')\neq\lim_{n\to\infty} f(x_n'')$.

3) *Să se calculeze* $L=\lim_{x\to\infty}(\sqrt[3]{x^3+x}-\sqrt{x^2+x})$. Scriem:

$$L=\lim_{x\to\infty}(\sqrt[3]{x^3+x}-x+x-\sqrt{x^2+x})=\lim_{x\to\infty}(\sqrt[3]{x^3+x}-x)+$$

$$+\lim_{x\to\infty}(x-\sqrt{x^2+x})=\lim_{x\to\infty}\frac{x^3+x-x^3}{\sqrt[3]{(x^3+x)^2}+x\sqrt[3]{x^3+x}+x^2}+\lim_{x\to\infty}\frac{x^2-x^2-x}{x+\sqrt{x^2+x}}=$$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{x}{x^2\left(\sqrt[3]{\left(1+\frac{1}{x^2}\right)^2}+\sqrt[3]{\left(1+\frac{1}{x^2}\right)}+1\right)}-\lim_{x\to\infty}\frac{x}{x\left(1+\sqrt{1+\frac{1}{x}}\right)}=0-\frac{1}{2}=-\frac{1}{2}.$$

4. CONTINUITATE

Considerăm o funcţie reală $f: D\to\mathbf{R}$, $D\subset\mathbf{R}$ şi un punct $a\in D$. Reamintim că f este *continuă în* a dacă pentru orice vecinătate V a lui $f(a)$ există o vecinătate U a lui a astfel încît pentru orice $x\in U\cap D$ să rezulte $f(x)\in V$. Se spune că f este *continuă pe* D dacă este continuă în orice punct din D. Dacă a este izolat

(adică există o vecinătate U a lui a astfel încît $U \cap D = \{a\}$), atunci f este în mod automat continuă în a. Dacă a este punct de acumulare pentru D (cazul cel mai des întîlnit), continuitatea lui f în punctul a este echivalentă cu faptul că limita $\lim_{x \to a} f(x)$ există și este egală cu $f(a)$, sau cu faptul că pentru orice șir $x_n \to a$, $x_n \in D$, rezultă $f(x_n) \to f(a)$.

Sintetizăm acum cîteva rezultate teoretice.

1) Fie $f : D \to \mathbf{R}$ și $a \in D$ astfel încît să existe $l_s = f(a-0)$ și $l_d = f(a+0)$. Funcția f admite limită în $a \longleftrightarrow l_s = l_d$; f este continuă în $a \longleftrightarrow l_s = l_d = f(a)$. În figura M.A.30 sînt indicate sugestiv cîteva situații posibile.

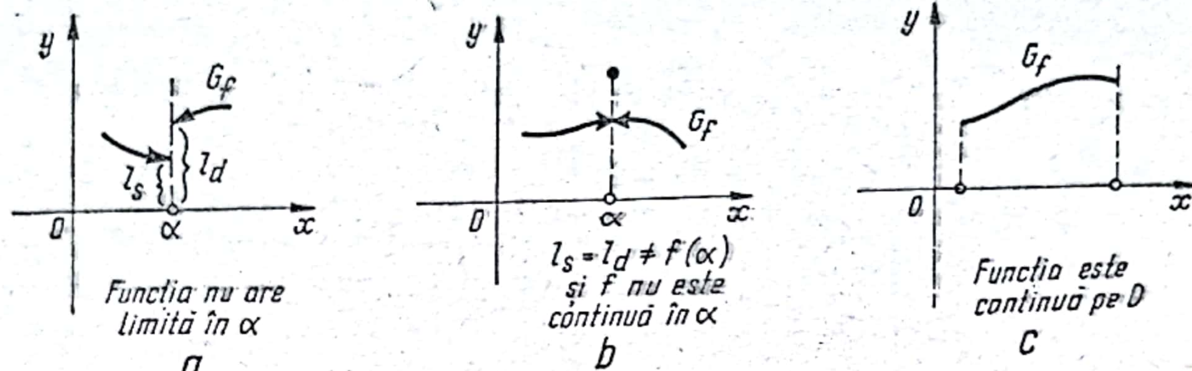


Fig. M.A. 30

2) Orice funcție elementară este continuă în orice interval deschis conținut în domeniul de definiție.

3) Dacă $f : D \to \mathbf{R}$ este continuă într-un punct $a \in D$ care este punct de acumulare și dacă $f(a) > 0$ (resp. $f(a) < 0$), atunci există o vecinătate U a lui a astfel încît $f > 0$ pe U, adică $(\forall) x \in U$, $f(x) > 0$ (resp. $f < 0$ pe U); aceasta se mai numește *proprietatea de inerție* a funcțiilor continue.

4) Dacă $f : [a, b] \to \mathbf{R}$ este continuă, atunci f este mărginită și își atinge marginile.

5) Dacă $\varphi : [a, b] \to \mathbf{R}$ este o funcție continuă și $\varphi(a) \cdot \varphi(b) < 0$, atunci există cel puțin un punct $c \in (a, b)$ astfel încît $\varphi(c) = 0$ (*lema lui Bolzano*).

6) Dacă I este un interval, orice funcție continuă $f : I \to \mathbf{R}$ are *proprietatea lui Darboux*, adică pentru orice $x_1 < x_2$ din I și pentru orice c situat între $f(x_1)$ și $f(x_2)$ există u situat între x_1 și x_2 astfel încît $f(u) = c$ [adică ecuația $f(x) = c$ admite cel puțin o soluție $u \in (x_1, x_2)$]. Faptul că o funcție $f : D \to \mathbf{R}$, $D \subset \mathbf{R}$ are proprietatea Darboux este echivalent cu faptul că pentru orice interval $J \subset D$, $f(J)$ este un interval.

7) Dacă $f, g : D \to \mathbf{R}$ sînt continue pe D, atunci $f + g, f - g, f \cdot g, f^2$, $\max(f, g)$, $\min(f, g)$ sînt de asemenea continue pe D.

8) Dacă $f : D \to D_1$ și $g : D_1 \to \mathbf{R}$ sînt funcții continue, atunci funcția compusă $g \circ f$ este continuă pe D; dacă $f : I \to \mathbf{R}$ este o funcție continuă pe un interval, strict monotonă și $J = f(I)$, atunci aplicația $f : I \to J$ este bijectivă și $f^{-1} : J \to I$ este de asemenea continuă și strict monotonă.

9) Pentru a stabili semnul unei funcții continue $f : I \to \mathbf{R}$ pe un interval I se poate proceda astfel: se determină soluțiile ecuației $f(x) = 0$ situate în I; pe intervalul dintre două soluții consecutive, semnul lui f este constant, conform lemei lui Bolzano 5) (și este suficient de aflat semnul într-un punct).

Pentru a înțelege mai bine sensul unora din proprietățile anterioare, să presupunem că viteza unui automobil este o funcție continuă $v : I \to \mathbf{R}$, $t \to v(t)$ într-un interval de timp I. Proprietatea de inerție 3) arată că dacă $v(t_0) > 0$, adică automobilul nu este în repaus la un moment $t_0 \in I$, el nu va fi în repaus în punctele unei vecinătăți a lui t_0. Proprietatea 4) arată că dacă $I = [a, b]$ este compact,

atunci există două valori $v_m \leqslant v_M$ ale vitezei astfel încît $v_m \leqslant v(t) \leqslant v_M$ pentru orice $t \in I$; în plus, există momente în I în care sînt atinse efectiv viteza minimă și viteza maximă. Proprietatea lui Darboux arată că pentru orice $t_1, t_2 \in I$, $t_1 < t_2$, o dată cu valorile $v(t_1)$, $v(t_2)$ este atinsă orice valoare intermediară, adică pentru orice valoare v^* situată între $v(t_1)$ și $v(t_2)$ există un moment $\tau \in (t_1, t_2)$ astfel încît viteza la momentul τ să fie tocmai v^*.

Exemple. 1) *Să se afle $m \in \mathbf{R}$ dacă funcția $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$,*

$$f(x) = \begin{cases} x^2 + m, & x \leqslant -2 \\ \cos \pi x, & x > -2 \end{cases}$$

este continuă pe $\mathbf{R}$. Pe fiecare din intervalele $(-\infty, -2)$ și $(-2, \infty)$ funcția f este elementară, deci este continuă. Rămîne de pus condiția ca f să fie continuă în punctul $\alpha = -2$. Dar $l_s = f(-2-0) = \lim\limits_{\substack{x \to -2 \\ x < -2}} (x^2 + m) = 4 + m$. $l_d = f(-2+0) = \lim\limits_{\substack{x \to -2 \\ x > -2}} \cos \pi x = \cos(-2\pi) = 1$ și $f(-2) = 4 + m$. Funcția f este continuă $\longleftrightarrow$ $m + 4 = 1$, adică $m = -3$.

2) Studiem semnul funcției $f : (0, \infty) \to \mathbf{R}$, $f(x) = (x^2 - 4x + 3)(\ln^2 x - \ln x)$. Funcția este elementară, deci este continuă pe intervalul $(0, \infty)$. Ecuația $f(x) = 0$ are soluțiile 1, e, 3. Pe intervalele $(0, 1)$, $(1, e)$, $(3, \infty)$ funcția este pozitivă, iar pe $(e, 3)$ este negativă.

5. DERIVATE

Fie $f : D \to \mathbf{R}$ o funcție reală ($D \subset \mathbf{R}$), x_0 un punct de acumulare pentru D, aparținînd lui D. Reamintim că f *are derivată în* x_0 dacă există limita: $\lim\limits_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta f}{\Delta x}$ (eventual egală cu $+\infty$ sau $-\infty$), numită *derivata lui f în x_0* și notată $f'(x_0)$ sau $\frac{df}{dx}(x_0)$. Dacă această limită în plus este finită, atunci se spune că *f este derivabilă în x_0*.

Reamintim rezultatele teoretice mai des utilizate.

1) Dacă f este derivabilă în x_0, atunci f este continuă în x_0 (deci dacă f nu este continuă într-un punct, ea nu este nici derivabilă).

2) Funcția f are derivată în x_0 dacă și numai dacă derivatele ei laterale $f'_s(x_0)$ și $f'_d(x_0)$ există și sînt egale.

3) Dacă $f : (a, b) \to \mathbf{R}$ este continuă și $x_0 \in (a, b)$, atunci f este derivabilă în x_0 dacă și numai dacă graficul lui f admite tangentă (neverticală) în x_0; în acest caz, ecuația tangentei respective la graficul $y = f(x)$ în punctul $(x_0, f(x_0))$ este $y - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0)$.

4) Fără a mai da precizări, să reamintim cîteva reguli de derivare:

$$c' = 0; \quad (u^r)' = r\, u^{r-1} \cdot u'; \quad (\sqrt{u})' = \frac{u'}{2\sqrt{u}}; \quad (f \pm g)' = f' \pm g';$$

$$(fg)' = f'g + fg'; \quad \left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{f'g - fg'}{g^2}; \quad \left(\frac{1}{f}\right)' = -\frac{f'}{f^2};$$

$$(\ln u)' = \frac{u'}{u}; \quad (a^u)' = a^u \cdot u' \cdot \ln a; \quad (e^u)' = e^u \cdot u';$$

$$(\sin u)' = (\cos u) \cdot u'; \quad (\cos u)' = -(\sin u) \cdot u';$$

$$(\operatorname{tg} u)' = \frac{u'}{\cos^2 u}; \quad (\operatorname{ctg} u)' = -\frac{u'}{\sin^2 u};$$

$$(\arcsin u)' = \frac{u'}{\sqrt{1 - u^2}}; \quad (\arccos u)' = -\frac{u'}{\sqrt{1 - u^2}};$$

$$(\operatorname{arctg} u)' = \frac{u'}{1 + u^2}; \quad (u^v)' = u^v \cdot \left(v' \ln u + v\frac{u'}{u}\right).$$

5) Pentru a determina punctele de extrem și intervalele de creștere sau descreștere ale unei funcții derivabile, se recomandă completarea tabloului de variație folosind prima derivată; pentru punctele de inflexiune și intervalele de convexitate sau concavitate, se utilizează derivata a doua.

6) *Teorema lui Rolle.* Dacă $f:[a, b] \to \mathbf{R}$ este o funcție continuă pe $[a, b]$, derivabilă pe (a, b) și în plus $f(a) = f(b)$, atunci există cel puțin un punct $c \in (a, b)$ astfel încît $f'(c) = 0$.

7) *Formula creșterilor finite* (*Lagrange*). Dacă $f:[a, b] \to \mathbf{R}$ este o funcție continuă pe $[a, b]$ și derivabilă pe (a, b), atunci există cel puțin un punct $c \in (a, b)$ astfel încît $f(b) - f(a) = (b - a)f'(c)$.

Dacă $f' = 0$ pe un interval, atunci f este constantă pe acel interval. Apoi, dacă f este continuă pe o vecinătate V a lui a și derivabilă în $V \setminus \{a\}$, atunci $f'(a) = \lim\limits_{x \to a} f'(x)$; similar pentru derivate laterale.

Fără a intra în detalii, reamintim existența *regulii lui l'Hôpital* pentru calculul limitelor (care trebuie aplicată o dată cu prelucrarea funcției de sub limită), utilizarea *șirului lui Rolle* pentru a decide numărul și poziția soluțiilor reale ale unor ecuații, ca și posibilitatea *demonstrării unor inegalități*, folosind tabloul de variație ale unor funcții convenabil alese. Vom ilustra aceste rezultate în exemplele următoare.

Exemple. 1) *Să se calculeze* $L_1 = \lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x > 0}} x\, e^{\frac{1}{x}}$ *și* $L_2 = \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{x^2 - \sin^2 x}{x^4}$. Punînd

$$x = \frac{1}{y}, \text{ avem } L_1 = \lim_{y \to \infty} \frac{e^y}{y} \overset{\text{Hôp.}}{=} \lim_{y \to \infty} \frac{e^y}{1} = \infty. \text{ Apoi:}$$

$$L_2 = \lim_{x \to 0} \frac{2x - 2\sin x \cos x}{4x^3} = \lim_{x \to 0} \frac{2 - 2\cos^2 x + 2\sin^2 x}{12x^2} = \lim_{x \to 0} \frac{2 - 2\cos 2x}{12x^2} =$$

$$= \lim_{x \to 0} \frac{1 - \cos 2x}{6x^2} = \lim_{x \to 0} \frac{2\sin 2x}{12x} = \lim_{x \to 0} \frac{4\cos 2x}{12} = \frac{1}{3}.$$

2) *Să se studieze numărul soluțiilor reale ale ecuației* $x^3 - 3\ln x + m = 0$, *unde* m *este un parametru real.* Se consideră funcția $f:(0, \infty) \to \mathbf{R}$, $f(x) = x^3 - 3\ln x + m$. Evident, $f'(x) = 3x^2 - \dfrac{3}{x}$ și ecuația $f'(x) = 0$ admite o singură soluție reală, anume $x = 1$. Se alcătuiește tabloul:

x	0	1	∞
$f'(x)$		0	
$f(x)$	∞	$1 + m$	∞

Șirul Rolle este șirul finit de valori $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x > 0}} f(x) = \infty$, $f(1) = 1 + m$ și $\lim\limits_{x \to \infty} f(x) = \infty$.

Dacă $m + 1 < 0$, atunci ecuația are exact două soluții reale $x_1 \in (0, 1)$ și $x_2 \in (1, \infty)$; dacă $m + 1 > 0$ ecuația nu are soluții reale; iar dacă $m = -1$, atunci $x = 1$ este rădăcină multiplă (de fapt dublă, deoarece $f''(1) \neq 0$).

3) *Să se arate că pentru orice* $x \in \left[0, \dfrac{\pi}{2}\right]$ *avem* $\operatorname{tg} \dfrac{x}{2} \leqslant x$. Pentru aceasta se consideră funcția $g: \left[0, \dfrac{\pi}{2}\right] \to \mathbf{R}$, $g(x) = x - \operatorname{tg} \dfrac{x}{2}$. Evident, $g'(x) = 1 - \dfrac{1}{2\cos^2 \dfrac{x}{2}} =$

$= \dfrac{\cos x}{2\cos^2 \dfrac{x}{2}} \geqslant 0$ pentru orice $x \in \left[0, \dfrac{\pi}{2}\right]$. Atunci g este monoton crescătoare, deci pentru orice $x \in \left[0, \dfrac{\pi}{2}\right]$ avem $g(x) \geqslant g(0) = 0$, adică $x - \operatorname{tg} \dfrac{x}{2} \geqslant 0$.

6. REPREZENTAREA GRAFICĂ A FUNCŢIILOR

Fiind dată o funcţie reală f, etapele principale ale trasării (oricum aproximative) a graficului lui f sînt următoarele:

a) Se determină domeniul maxim de definiţie D, reprezentat ca reuniune de intervale;

b) Se calculează limitele la capete şi se determină asimptotele graficului;

c) Se calculează derivata lui f (în domeniul $D_1 \subset D$ de derivabilitate) şi se rezolvă ecuaţia $f'(x) = 0$;

d) Se alcătuieşte tabloul de variaţie a lui f care cuprinde semnele lui f' pe diverse intervale, completat eventual şi cu studiul derivatei a doua.

e) Se trasează graficul, adăugînd eventualele intersecţii cu axele de coordonate.

Reamintim că *asimptotele verticale* ale graficului lui f sînt acele drepte $x = \alpha (\alpha \in \mathbf{R})$ pentru care cel puţin una din limitele laterale $f(\alpha - 0)$, $f(\alpha + 0)$ este $\pm \infty$. De exemplu, funcţia $f(x) = \dfrac{1}{\sin x}$ admite ca asimptote verticale toate dreptele $x = k\pi\ (k \in \mathbf{Z})$. Dacă $\lim\limits_{x \to \infty} f(x) = L$ (finită), atunci dreapta $y = L$ este *asimptotă orizontală spre* $+\infty$, iar dacă $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = L_1$, atunci $y = L_1$ este *asimptotă orizontală spre* $-\infty$.

În cazul cînd există şi sînt finite $m = \lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{f(x)}{x}$ şi $n = \lim\limits_{x \to \infty} (f(x) - mx)$, dreapta $y = mx + n$ este *asimptotă oblică* spre $+\infty$; similar se procedează pentru $-\infty$. Un grafic nu poate avea asimptote orizontală şi oblică „de aceeaşi parte".

Graficele de funcţii permit „vizualizarea comportării" acelor funcţii. Ele sînt de, asemenea utilizate în studiul unor ecuaţii $f(x) = m$, care revin la determinarea absciselor punctelor de intersecţie ale graficului $y = f(x)$ cu drepte $y = m$ paralele cu Ox; de asemenea în studiul unor inecuaţii $f(x) > m$, $f(x) \leqslant m$ etc.

7. PRIMITIVE ŞI INTEGRALE NEDEFINITE

Dacă I este un interval şi $f : I \to \mathbf{R}$ este o funcţie, reamintim că prin *primitivă a lui f pe I* se înţelege o funcţie $F : I \to \mathbf{R}$ derivabilă pe I astfel încît $F' = f$. De exemplu, $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, $f(x) = x^2$ are primitiva $F(x) = \dfrac{x^3}{3}$ pe $\mathbf{R}$.

Se ştie că orice funcţie continuă pe un interval admite primitivă pe acel interval şi că dacă o funcţie nu are proprietatea lui Darboux, ea nu admite primitivă.

Dacă o funcţie $f : I \to \mathbf{R}$ admite primitiva F pe I, atunci mulţimea tuturor primitivelor lui f este $F + C$ (cu C constantă arbitrară, privită ca o funcţie constantă pe I); această mulţime este numită *integrala nedefinită a lui f* şi se notează $\int f(x)\, dx$.

Pentru calculul explicit al primitivelor, ceea ce revine la exprimarea lor prin funcţii elementare (aceasta este posibil doar în anumite cazuri), sînt recomandate următoarele metode principale: folosirea tabloului de primitive, integrarea prin părţi şi schimbarea de variabilă.

Exemple. 1) Calculăm $\int\left(x\sqrt[3]{x}+\cos 7x+\frac{1}{x-3}\right)dx$ pe intervalul $I=(3,\infty)$. Folosind direct tabloul de primitive, rezultatul este

$$\frac{x^{\frac{4}{3}+1}}{\frac{4}{3}+1}+\frac{\sin 7x}{7}+\ln|x-3|+C.$$

2) Integralele nedefinite de forma

$$\int P(x)\sin\alpha x\,dx,\ \int P(x)\cos\alpha x\,dx,\ \int P(x)e^{\alpha x}\,dx,$$

cu P funcție polinomială și α constantă reală, se calculează succesiv prin părți, obținîndu-se în membrul secund polinoame de grad mai mic.

3) Dacă P, Q sînt funcții polinomiale, integralele de forma $\int\frac{P(x)}{Q(x)}dx$ se numesc *raționale*. Dacă $\text{gr } P\geqslant \text{gr } Q$, atunci $P=C\cdot Q+R$ cu $\text{gr } R<\text{gr } Q$, deci $\frac{P}{Q}=C+\frac{R}{Q}$; atunci $\int\frac{P(x)}{Q(x)}dx=\int C(x)\,dx+\int\frac{R(x)}{Q(x)}dx$. Se poate de aceea presupune de la început că $\text{gr } P<\text{gr } Q$ și se recomandă descompunerea în fracții simple impusă de rădăcinile lui Q. Trebuie reținute cîteva integrale raționale:

$$\int\frac{1}{x-\alpha}dx=\ln|x-\alpha|+C;\int\frac{1}{x^2+\alpha^2}dx=\frac{1}{\alpha}\text{arctg}\frac{x}{\alpha}+C\quad(\alpha\neq 0);$$

$$\int\frac{1}{x^2-\alpha^2}dx=\frac{1}{2\alpha}\ln\left|\frac{x-\alpha}{x+\alpha}\right|+C(\alpha\neq 0);\ \int\frac{1}{(x-\alpha)^2}dx=-\frac{1}{x-\alpha}+C;$$

$$\int\frac{x+p}{x+q}dx=\int\frac{x+q+p-q}{x+q}dx=\int\left(1+\frac{p-q}{x+q}\right)dx=x+(p-q)\ln|x+q|+C;$$

$$\int\frac{x^2}{x-\alpha}dx=\int\frac{x^2-\alpha^2+\alpha^2}{x-\alpha}dx=\int\left(x+\alpha+\frac{\alpha^2}{x-\alpha}\right)dx=\frac{x^2}{2}+\alpha x+\alpha^2\ln|x-$$

$-\alpha|+C$; dacă $\beta\neq 0$, atunci punînd $x-\alpha=\beta t$ avem:

$$\int\frac{Ax+B}{(x-\alpha)^2+\beta^2}dx=\int\frac{A(\alpha+\beta t)+B}{\beta^2(t^2+1)}\beta\,dt=\frac{1}{\beta}\int\frac{A\beta t+A\alpha+B}{t^2+1}dt=A\int\frac{t}{t^2+1}dt+$$

$$+\frac{A\alpha+B}{\beta}\int\frac{dt}{t^2+1}=\frac{A}{2}\ln(t^2+1)+\frac{A\alpha+B}{\beta}\text{arctg } t+C \text{ și înlocuim aici } t=\frac{x-\alpha}{\beta}.$$

8. INTEGRALE DEFINITE

Dacă $f:[a,b]\to\mathbf{R}$, $a<b$, este o funcție mărginită, atunci pentru orice diviziune Δ: $a=x_0<x_1<x_2<\ldots<x_n=b$ a intervalului $[a,b]$ și pentru orice puncte intermediare $\xi_1\in[a,x_1)$, $\xi_2\in[x_1,x_2)$, ..., $\xi_n\in[x_{n-1},b]$ se poate forma suma Riemann

$$\sigma_\Delta(f;\xi_i)=\sum_{i=1}^{n}f(\xi_i)(x_i-x_{i-1}).$$

Reamintim că, prin definiție, f este *integrabilă Riemann* dacă există un număr real I $\left(\text{numit } \textit{integrala lui } f \text{ pe intervalul compact } [a,b] \text{ și notat } I=\int_a^b f(x)\,dx=\int_{[a,b]}f\right)$ astfel încît să fie îndeplinită următoarea condiție: pentru orice $\varepsilon>0$ există $\delta(\varepsilon)>0$ astfel încît oricare ar fi diviziunea Δ de normă cel mult $\delta(\varepsilon)$ și oricare ar fi punctele ξ_i intermediare să avem $|\sigma_\Delta(f,\xi_i)-I|<\varepsilon$.

Dăm o sinteză a principalelor rezultate teoretice:

1) Funcţiile continue, funcţiile monotone şi funcţiile continue pe porţiuni (definite pe un interval compact) sînt integrabile.

2) *Liniaritatea integralei:* dacă $f, g : [a, b] \to \mathbf{R}$ sînt funcţii integrabile şi $\alpha, \beta \in \mathbf{R}$ sînt constante, atunci $\alpha f + \beta g$ este integrabilă şi în plus:

$$\int_a^b (\alpha f(x) + \beta g(x))\, dx = \alpha \int_a^b f(x)\, dx + \beta \int_a^b g(x)\, dx.$$

3) *Monotonia integralei:* dacă $f : [a, b] \to \mathbf{R}$ este integrabilă şi $f \geqslant 0$ (adică $f(x) \geqslant 0$ pentru orice $x \in [a, b]$), atunci $\int_a^b f(x)\, dx \geqslant 0$. Dacă $f, g : [a, b] \to \mathbf{R}$ sînt integrabile şi $f \geqslant g$, atunci $\int_a^b f(x)\, dx \geqslant \int_a^b g(x)\, dx$.

4) *Aditivitatea integralei:* dacă $f : [a, b] \to \mathbf{R}$ este integrabilă şi $c \in [a, b]$, atunci f este integrabilă pe $[a, c]$ şi pe $[c, b]$ şi în plus:

$$\int_a^c f(x)\, dx + \int_c^b f(x)\, dx = \int_a^b f(x)\, dx \left(\text{prin convenţie, } \int_a^a f(x)\, dx = 0\right).$$

5) *Teorema de medie:* dacă $f : [a, b] \to \mathbf{R}$ este continuă, atunci există cel puţin un punct $\xi \in (a, b)$ astfel încît $\int_a^b f(x)\, dx = f(\xi)(b - a)$.

6) Pentru calculul explicit al unor integrale definite se poate folosi *formula Leibniz-Newton*: dacă $f : [a, b] \to \mathbf{R}$ este o funcţie continuă, atunci:

$$\int_a^b f(x)\, dx = F(x)\Big|_a^b = F(b) - F(a),$$

unde F este o primitivă oarecare a lui f pe intervalul $[a, b]$.

7) În calcule aproximative, se poate folosi definiţia, aproximînd integrala cu o sumă Riemann corespunzătoare unei diviziuni echidistante, cu o alegere convenabilă a punctelor intermediare; de exemplu, notînd $h = \frac{b - a}{n}$, putem considera diviziunea:

$$\Delta : a = x_0 < x_1 = a + h < x_2 = a + 2h < \ldots < x_n = a + nh = b$$

şi luăm $\xi_1 = x_0, \xi_2 = x_1, \ldots, \xi_n = x_{n-1}$. Atunci $x_i - x_{i-1} = h$ şi suma Riemann corespunzătoare este $\sigma_\Delta(f; \xi_i) = h \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)$, deci

$$\int_a^b f(x)\, dx \simeq \frac{b - a}{n} [f(a) + f(a + h) + \ldots + f(a + (n - 1)h)],$$

cu $n \geqslant 1$ ales convenabil (de exemplu, $n = 5$, $n = 20$ etc. în funcţie de precizia urmărită).

8) Dacă $f, g : [a, b] \to \mathbf{R}$ sînt funcţii derivabile cu derivată continuă, atunci:

$$\int_a^b f(x)g'(x)\, dx = f(x)g(x)\Big|_a^b - \int_a^b f'(x)g(x)\, dx$$

(integrarea prin părţi).

9) Dacă $f : [a, b] \to \mathbf{R}$ este continuă şi $\varphi : [c, d] \to [a, b]$ este derivabilă cu derivata continuă şi dacă $\varphi(c) = a$, $\varphi(d) = b$, atunci:

$$\int_a^b f(x)\, dx = \int_c^d f(\varphi(t)) \cdot \varphi'(t)\, dt \text{ (s-a pus } x = \varphi(t)).$$

10) Dacă $\psi : [\alpha, \beta] \to [a, b]$ este strict monotonă, derivabilă cu derivata continuă și dacă $\psi(\alpha) = a$, $\psi(\beta) = b$ (sau $\psi(\alpha) = b$, $\psi(\beta) = a$), atunci pentru orice funcție integrabilă $f : [a, b] \to \mathbf{R}$, avem:

$$\int_{\psi(\alpha)}^{\psi(\beta)} f(x)\,\mathrm{d}x = \int_{\alpha}^{\beta} f(\psi(t)) \cdot \psi'(t)\,\mathrm{d}t.$$

11) Fie $[-a, a]$ un interval simetric și $f : [-a, a] \to \mathbf{R}$ o funcție integrabilă. Dacă f este pară, atunci $\int_{-a}^{a} f(x)\,\mathrm{d}x = 2\int_{0}^{a} f(x)\,\mathrm{d}x$, iar dacă f este impară, atunci $\int_{-a}^{a} f(x)\,\mathrm{d}x = 0$.

12) Dacă $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ este o funcție periodică de perioadă T și integrabilă pe orice interval compact, atunci:

$$\int_{0}^{T} f(x)\,\mathrm{d}x = \int_{-T/2}^{T/2} f(x)\,\mathrm{d}x = \int_{a}^{a+T} f(x)\,\mathrm{d}x,$$

pentru orice $a \in \mathbf{R}$; așadar, contează numai lungimea T a intervalului de integrare.

Exemple.

1) $\int_{0}^{\pi} (x + \sin x)\,\mathrm{d}x = \left(\frac{x^2}{2} - \cos x\right)\Big|_{0}^{\pi} = \frac{\pi^2}{2} - \cos\pi - 0 + \cos 0 = \frac{\pi^2}{2} + 2.$

2) $\int_{-1}^{1} \sqrt{1 - x^2}\,\mathrm{d}x = 2\int_{0}^{1} \sqrt{1 - x^2}\,\mathrm{d}x \overset{x=\sin t}{=} 2\int_{0}^{\pi/2} \sqrt{1 - \sin^2 t} \cdot \cos t\,\mathrm{d}t =$
$= 2\int_{0}^{\pi/2} \cos^2 t\,\mathrm{d}t = \int_{0}^{\pi/2} (1 + \cos 2t)\,\mathrm{d}t = \left(t + \frac{\sin 2t}{2}\right)\Big|_{0}^{\pi/2} = \frac{\pi}{2}.$

În general, pentru integrale care conțin $\sqrt{a^2 - x^2}$ se recomandă $x = a \sin t$, iar pentru $\sqrt{a^2 + x^2}$, $x = a \operatorname{tg} t$.

9. APLICAȚII ALE INTEGRALELOR DEFINITE

Fie $f : [a, b] \to \mathbf{R}$ o funcție continuă și pozitivă (cu graficul deasupra lui Ox). Se notează cu Γ_f *subgraficul* lui f, adică submulțimea lui $\mathbf{R}^2$ cuprinsă între axa Ox, curba $y = f(x)$ și dreptele $x = a$, $x = b$. Atunci:

1) Aria lui Γ_f este $A = \int_{a}^{b} f(x)\,\mathrm{d}x$;

2) Volumul corpului născut prin rotirea lui Γ_f în jurul axei Ox este $\pi\int_{a}^{b} f(x)^2\,\mathrm{d}x$;

3) Asimilînd o placă materială omogenă cu mulțimea Γ_f, centrul de greutate G al plăcii are coordonatele:

$$x_G = \frac{\int_{a}^{b} x f(x)\,\mathrm{d}x}{A}; \quad y_G = \frac{\frac{1}{2}\int_{a}^{b} f(x)^2\,\mathrm{d}x}{A}.$$

Formulele anterioare se extind la mulţimi plane care se reprezintă ca reuniuni de mulţimi de tipul Γ_f, folosind aditivitatea integralei. De exemplu, dacă $f, g : [a, b] \to \mathbf{R}$ sînt funcţii continue, atunci aria mulţimii plane dintre graficele lor (limitate de dreptele $x = a$, $x = b$) este $A = \int_a^b |f(x) - g(x)|\, dx$; v. fig. M.A.31.

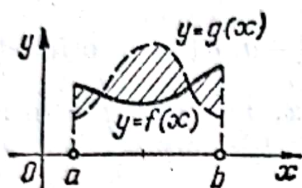


Fig. M.A.31

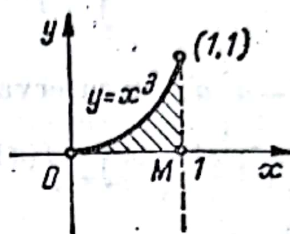


Fig. M.A.32

Exemple. 1) Calculăm aria A dintre curbele de ecuaţii $y = \sin x$, $y = \cos x$, $x \in [0, \pi]$. Avem:

$$A = \int_0^{\pi} |\sin x - \cos x|\, dx = \int_0^{\pi/4} (\cos x - \sin x)\, dx + \int_{\pi/4}^{\pi} (\sin x - \cos x)\, dx \text{ etc.}$$

2) Se consideră placa omogenă definită prin $M = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 \mid 0 \leqslant x \leqslant 1, 0 \leqslant y \leqslant x^3\}$. Aria lui M este $A = \int_0^1 x^3\, dx = \frac{1}{4}$ şi volumul obţinut prin rotaţia lui M în jurul axei Ox este $V = \pi \int_0^1 x^6\, dx = \frac{\pi}{7}$. Coordonatele centrului de greutate al plăcii M sînt $x_G = 4\int_0^1 x^4\, dx = \frac{4}{5}$ şi $y_G = 2\int_0^1 x^6\, dx = \frac{2}{7}$; v. fig. M.A.32.

Derivatele şi integralele au multe alte aplicaţii geometrice sau fizice.

B. PROBLEME DATE LA CONCURSURILE DE ADMITERE ÎN ÎNVĂȚĂMÎNTUL SUPERIOR

ENUNȚURI

1984

I. ÎNVĂȚĂMÎNTUL TEHNIC

α. PROFILUL: ELECTRIC, ENERGETIC, MECANIC (numai specializarea *Aeronave*), GEOLOGIE (ingineri zi).

a. ALGEBRĂ ȘI ELEMENTE DE ANALIZĂ MATEMATICĂ

I. 1°. Să se rezolve ecuațiile:

$$x^5 - 5x^4 + 3x^3 + 11x^2 - 6x - 4 = 0;$$
$$x^5 - 5x^4 + 6x^3 + 2x^2 - 12x + 8 = 0,$$

știind că admit rădăcini comune.

2°. Se dă matricea:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Să se calculeze matricea A^n, n fiind număr natural, $n \geqslant 2$.

3°. Fie $f: E \to \mathbf{R}$ definită prin

$$f(x) = \frac{ax^4}{(b + cx)^3},$$

$a, b, c \neq 0$, fiind numere reale, iar E domeniul maxim de definiție al lui f. Ce relații satisfac a, b, c astfel încît graficul funcției f să admită ca asimptotă dreapta $y = x - 3$? În acest caz să se studieze variația funcției f și să se reprezinte grafic.

4°. Fie $(a_n)_{n\geqslant 0}$ un șir de numere reale care verifică, pentru orice $n \geqslant 0$, relația:

$$a_{n+1} - a_n = \frac{1}{10}\, a_n.$$

Să se calculeze a_n în funcție de a_0 și să se afle $\lim\limits_{n\to\infty} a_n$.

5°. Să se calculeze: $\int_0^\pi x \cos^2 x \, dx$.

b. GEOMETRIE PLANĂ ȘI ÎN SPAȚIU ȘI TRIGONOMETRIE

II. 1°. Fie ABC un triunghi și $M \in [AC]$. Bisectoarele unghiurilor AMB, CMB intersectează laturile $[AB]$, respectiv $[BC]$ în P, Q. Să se arate că dreapta PQ este paralelă cu dreapta AC dacă și numai dacă M este mijlocul segmentului $[AC]$.

2°. Fie O centrul cercului circumscris unui triunghi ABC și I centrul cercului înscris în același triunghi. Să se calculeze lungimea segmentului $[OI]$ în funcție de lungimile R și r ale razelor celor două cercuri.

3°. Pe muchiile $[AB]$, $[BC]$, $[CD]$ și $[DA]$ ale tetraedrului regulat $ABCD$ se iau punctele M, N, P și respectiv Q, astfel încît să avem $[AM] \equiv [BN] \equiv [CP] \equiv [DQ]$. Notăm cu O mijlocul segmentului $[NQ]$. Să se arate că planul MOP este perpendicular pe dreapta NQ.

4°. Să se arate că volumul trunchiului de con circumscris unei sfere este strict mai mare decît $\frac{3}{2}$ din volumul sferei.

5°. Să se discute și să se rezolve ecuația:

$$2\cos^2 x - \cos x = m + 1, \quad m \in \mathbf{R}.$$

β. PROFILUL: MECANIC (fără specializarea *Aeronave*), CONSTRUCȚII, GEODEZIE (ingineri zi).

a. ALGEBRĂ ȘI ELEMENTE DE ANALIZĂ MATEMATICĂ

III. 1°. Să se studieze variația funcției $f\colon (0, \infty) \to \mathbf{R}$ definită prin:

$$f(x) = \ln\left(x + \frac{1}{x}\right) + \frac{x^2 - 1}{x^2 + 1},$$

și să se reprezinte grafic.

2°. Să se determine a astfel încît ecuația:

$$\begin{vmatrix} 2 - a & a - x & x - 1 \\ 1 - x^2 & x^2 & -1 \\ 2 - a - 2x & x + a & x - 2 \end{vmatrix} = 0$$

să admită o rădăcină dublă număr întreg.

3°. Să se calculeze: $\lim\limits_{x \to \frac{\pi}{2}} (\sin x)^{\frac{1}{2x - \pi}}$.

4°. Să se calculeze: $\displaystyle\int_0^1 \frac{dx}{(x + 1)(x^2 + 4)}$.

5°. Fie ε o rădăcină a ecuației $x^2 + x + 1 = 0$. Să se calculeze A^n, $n = 2, 3, 4$, unde A este matricea:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & \varepsilon & \varepsilon^2 \\ 1 & \varepsilon^2 & \varepsilon \end{pmatrix}.$$

b. GEOMETRIE PLANĂ ȘI ÎN SPAȚIU ȘI TRIGONOMETRIE

IV. 1°. Bisectoarea unghiului cu vîrful în A al triunghiului ABC taie cercul circumscris acestuia în D. Să se arate că dacă laturile $[AC]$ și $[AB]$ au lungimile b, respectiv c, atunci distanța d dintre punctele A și D verifică inegalitatea:

$$d > \frac{1}{2}(b + c).$$

2°. Se consideră figura formată din segmentul $[AB]$ și un semicerc cu acest diametru. Să se determine dreptunghiul de arie maximă înscris în această figură.

3°. Fie două plane perpendiculare p și q, iar A și B două puncte pe intersecția celor două plane. Fie $C \in p$ și $D \in q$ astfel încît $m(\widehat{ABC}) = m(\widehat{ADB}) = \frac{\pi}{2}$. Cunoscînd lungimile a și b ale segmentelor $[AB]$ și respectiv $[BC]$, să se calculeze volumul sferei determinată de punctele A, B, C, D.



4°. Se consideră un con circular drept circumscris sferei de rază r. Unghiul format de o generatoare a conului cu înălțimea are măsura x. Să se calculeze aria laterală a conului în funcție de r și x. Să se determine x astfel încît aria bazei conului să fie egală cu aria sferei.

5°. Să se discute și să se rezolve ecuația:

$$m(\sin x - \cos x)^2 - \cos 4x - 1 = 0,$$

m fiind un parametru real.

γ. PROFILUL: METALURGIC, ARHITECTURĂ ȘI SISTEMATIZARE, MINE, CHIMIE (ingineri zi și seral, toate profilurile).

a. ALGEBRĂ ȘI ELEMENTE DE ANALIZĂ MATEMATICĂ

V. 1°. Se consideră sistemul:

$$\begin{cases} ax + y + 2z = 0; \\ x + ay + z = 0; \\ 2x + 2y + az = 0. \end{cases}$$

a) Pentru ce valori ale lui a sistemul are soluție unică?
b) Să se rezolve sistemul pentru $a = 1$.

2°. Să se determine parametrul real m astfel încît ecuația:

$$x^6 + x^5 + 3x^4 + 3x^2 + mx + 1 = 0$$

să admită rădăcina i.

3°. Să se studieze variația funcției $f\colon (-1, \infty) \to \mathbf{R}$ definită prin: $f(x) = x - \ln(x + 1)$.

4°. Să se calculeze: $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{\pi}{2} - \operatorname{arctg} x\right)^{\frac{1}{\ln x}}$.

5°. Să se calculeze: $\int \frac{\sqrt{1 + x^2}}{x}\,dx,\ x > 0.$

b. GEOMETRIE PLANĂ ȘI ÎN SPAȚIU ȘI TRIGONOMETRIE

VI. 1°. Fie ABC, DBC două triunghiuri echilaterale, simetrice în raport cu dreapta BC și P un punct pe cercul de centru D și rază DB. Notăm cu a, b, c lungimile segmentelor $[PA]$, $[PB]$ și, respectiv, $[PC]$. Să se arate că: $a^2 = b^2 + c^2$.

2°. În triunghiul ABC laturile $[AB]$ și $[AC]$ sînt congruente și au lungimea 11,5 dm, iar baza $[BC]$ are lungimea 3 dm. Se consideră punctele $M \in [BC]$, $E \in [AC]$ astfel ca $[BM] \equiv [MC]$ și $[ME$ este bisectoarea unghiului AMC. Să se calculeze distanța de la A la E.

3°. Distanța AB de la punctul A la planul p este a. Din punctul A ducem oblicele AC, AD care fac cu planul p unghiuri de 45° și 30°, iar între ele un unghi drept ($C, D \in p$). Să se afle distanța de la C la D și aria totală a piramidei $ABCD$.

4°. Să se afle volumul și aria laterală ale conului circular drept înscris într-o sferă de rază r, știind că raza bazei, înălțimea și generatoarea conului au lungimile, în această ordine, în progresie aritmetică.

5°. Punctele M, N, P, Q au, respectiv, afixele $z_M = 5 + 6i$, $z_N = 5i$, $z_P = 1$, $z_Q = 6 + i$. Să se verifice că $MNPQ$ este un pătrat și să se calculeze: $\sqrt[4]{\frac{z_M}{z_Q}}$.

2. ÎNVĂȚĂMÎNTUL UNIVERSITAR

α. PROFILUL MATEMATICĂ (Specializările: *Matematică*, învățămînt de zi și fără frecvență; *Informatică*, *Matematică-Mecanică*, învățămînt de zi și seral).

a. ALGEBRĂ

VII. 1°. Fie $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \in M_2(\mathbf{Z})$. Să se calculeze: A^n, $(n \geqslant 1)$.

2°. Să se rezolve sistemul de ecuații:

$$\begin{cases} xy + x + y = 11; \\ x^2y + y^2x = 30. \end{cases}$$

3°. Să se determine mulțimea:

$$A = \left\{ x \in \mathbf{Z} \,\middle|\, \frac{x^3 - 3x + 2}{2x + 1} \in \mathbf{Z} \right\}.$$

4°. Pentru orice $m, n \in \mathbf{R}$, se consideră funcția $f_{mn}: \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ definită prin:

$$f_{mn}(x) = \begin{cases} x - m & \text{pentru } x \leqslant 0; \\ nx + m & \text{pentru } x > 0. \end{cases}$$

Să se determine valorile lui m și n pentru care f_{mn} este funcție:
a) surjectivă; b) injectivă; c) bijectivă.

5°. Determinați elementele inversabile din inelul $\mathbf{Z}_{12}$ și inversul fiecăruia.

b. ELEMENTE DE ANALIZĂ MATEMATICĂ

VIII. 1°. Să se arate că dacă $(a_n)_{n \geqslant 1}$ este un șir de numere reale, convergent către un număr real, diferit de zero, atunci:

$$\lim_{n \to \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = 1.$$

2°. Să se studieze continuitatea funcțiilor compuse $g \circ f$ și $f \circ g$, unde $f: \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, $g: \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ sînt definite prin:

$$f(x) = \begin{cases} -1 & \text{pentru } x < 0; \\ 0 & \text{pentru } x = 0; \\ 1 & \text{pentru } x > 0, \end{cases}$$

și $g(x) = x^2 - 4x + 4$.

3°. Să se reprezinte grafic funcția $f: \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, definită prin:

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2}{x - 1} & \text{pentru } x < 1; \\ x & \text{pentru } x \geqslant 1. \end{cases}$$

4°. Să se calculeze: $\int_0^1 \sqrt{1 + \sqrt{x}}\, dx$.

5°. Să se arate că oricare ar fi numerele naturale $n \geqslant 1$ și $p \geqslant 1$ are loc egalitatea:

$$\int_0^1 x^n (1 - x)^p \, dx = \int_0^1 x^p (1 - x)^n \, dx.$$

c. GEOMETRIE PLANĂ ŞI ÎN SPAŢIU, TRIGONOMETRIE ŞI GEOMETRIE ANALITICĂ

IX. 1°. Pe un cerc de diametru $[AB]$ se consideră un punct C. Se duce tangenta (τ) la cerc în B şi se consideră cercul (γ), avînd centrul în A şi raza egală cu AB. Semidreapta $|AC$ intersectează (γ) în D şi (τ) în E. Să se determine măsura unghiului $\widehat{BAC}$ astfel încît: $\widehat{ABC} \equiv \widehat{CBD} \equiv \widehat{DBE}$.

2°. Se consideră un trapez $ABCD$ în care $AB \parallel DC$, $AD \perp DC$ şi diagonalele $[AC]$, $[BD]$ sînt perpendiculare. Să se calculeze raportul $\frac{AC}{BD}$, ştiind că $\frac{AB}{CD} = k$.

3°. Să se arate că, în orice tetraedru, cele şase plane, determinate de cîte o muchie şi mijlocul muchiei opuse acesteia, au un punct comun.

4°. Să se determine valorile $x \in \mathbf{R}$ pentru care:

$$\sin 2x - \sqrt{2} \cos\left(2x - \frac{\pi}{4}\right) \geqslant 1.$$

5°. Se consideră hiperbola (H):

$$x^2 - y^2 = a^2, \quad (a > 0),$$

raportată la un reper cartezian xOy, avînd focarele F, F'. Se ia un punct variabil $P \in$ (H) astfel încît triunghiul PFF' să fie ascuţitunghic. Să se determine locul geometric al centrului de greutate al triunghiului PFF'.

β. PROFILUL MATEMATICĂ (Specializarea *Matematică-Fizică*, 3 ani, învăţămînt de zi).

ALGEBRĂ (clasele IX—X), GEOMETRIE PLANĂ ŞI ÎN SPAŢIU ŞI TRIGONOMETRIE

X. 1°. Lungimile a, b, c $(a \neq b \neq c \neq a)$ a trei muchii ale unui paralelipiped dreptunghic sînt rădăcinile ecuaţiei:

$$x^3 - 10x^2 + 31x - 30 = 0.$$

Să se determine volumul, aria totală şi lungimea diagonalei paralelipipedului.

2°. Să se rezolve ecuaţia:

$$\sqrt{x+2} + \sqrt{x-2} = \sqrt{3x-2}.$$

3°. Să se demonstreze că dacă:

$$A + B + C = \pi,$$

atunci:

$$\sin A + \sin B + \sin C = 4 \cos\frac{A}{2} \cos\frac{B}{2} \cos\frac{C}{2}.$$

4°. Fie ABC un triunghi dreptunghic, M şi N mijloacele catetelor $[AB]$ şi $[AC]$. Se notează cu D proiecţia punctului A pe ipotenuza $[BC]$. Să se demonstreze că $MD \perp ND$.

3. ALTE PROFILURI

α. PROFILUL PETROL

a. ALGEBRĂ ŞI ELEMENTE DE ANALIZĂ MATEMATICĂ

XI. 1°. Să se calculeze determinantul:

$$\begin{vmatrix} a+b & c & 1 \\ b+c & a & 1 \\ c+a & b & 1 \end{vmatrix}$$

a, b, c fiind numere reale.

2°. Să se verifice că ecuaţia cu coeficienţi întregi:

$$x^3 + (2m-5)x^2 + (9-5m)x + 2(m-3) = 0$$

admite o rădăcină independentă de m; să se rezolve ecuaţia.

3°. Fie $f: \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ definită prin:

$$f(x) = 3x^4 - 4mx^3 - 2nx^2 + 24x + 24,$$

m şi n fiind numere reale. Să se determine m şi n astfel încît graficul funcţiei să treacă prin punctul $(-1, 5)$ iar în acest punct tangenta la grafic să fie paralelă cu axa Ox.

4°. a) Să se calculeze:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{x^{2n} - x^2 + 6}{x^{2n} + x^2 + 4}, \ x \in \mathbf{R}.$$

b) Fie $f: \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ definită prin:

$$f(x) = \lim_{n\to\infty} \frac{x^{2n} - x^2 + 6}{x^{2n} + x^2 + 4}.$$

Să se studieze variaţia funcţiei f şi să se reprezinte grafic.

5°. Să se calculeze:

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{2\cos x + 3}.$$

b. GEOMETRIE PLANĂ ŞI ÎN SPAŢIU ŞI TRIGONOMETRIE

XII. 1°. Pe laturile unui patrulater $ABCD$, ca diametre, se descriu cercuri. Să se arate că coarda comună cercurilor descrise pe $[AB]$ şi $[BC]$ este paralelă cu coarda comună cercurilor descrise pe $[AD]$ şi $[CD]$.

2°. Pe un cerc cu centrul în O se consideră două puncte fixe A şi B şi două puncte mobile M şi N astfel încît $m(\widehat{AOB}) = m(\widehat{MON}) = \frac{\pi}{2}$. Să se afle locul geometric al punctului de intersecţie a dreptelor AM şi BN.

3°. Fie paralelipipedul dreptunghic $ABCDA'B'C'D'$ în care $AB = a$, $AD = b$, $AA' = c$. Să se afle aria patrulaterului care are vîrfurile în mijloacele muchiilor $[AB]$, $[BC]$, $[A'D']$ şi $[C'D']$.

4°. Se consideră o piramidă patrulateră regulată şi un cub astfel încît patru dintre vîrfurile cubului se află în planul bazei piramidei, iar celelalte patru vîrfuri

se găsesc pe muchiile laterale ale piramidei. Să se calculeze lungimea muchiilor cubului, știind că laturile bazei piramidei au lungimea a și înălțimea piramidei este h.

5°. Să se determine x astfel încît: $\sin x = \sin^3 \frac{x}{2}$.

β. PROFILUL ELECTRIC (subingineri seral).

ALGEBRĂ, GEOMETRIE PLANĂ ȘI TRIGONOMETRIE

XIII. 1°. a) Să se arate că ecuația:

$$8mx^2 - 2(m^2 + 2m + 1)x + m^2 + 1 = 0$$

are rădăcini reale, oricare ar fi $m \in \mathbf{R}\setminus\{0\}$.

b) Să se determine valorile lui m astfel încît: $\frac{x_1 + x_2}{x_1 x_2} \leqslant 4$.

2°. Să se rezolve ecuația: $2\sqrt[3]{2 (\log_{16} x)^2} - \sqrt[3]{\log_2 x} - 6 = 0$.

3°. Să se rezolve ecuația: $\cos 2x - 13 \sin x - 7 = 0$.

4°. Fie ABC un triunghi oarecare și M mijlocul lui $[BC]$. Bisectoarea unghiului AMB taie pe $[AB]$ în P și bisectoarea unghiului AMC taie pe $[AC]$ în Q. Să se arate că:

a) PQ este paralelă cu BC;

b) $2\,RM = PQ$,

(R fiind punctul unde AM taie pe PQ).

γ. PROFILUL METALURGIC (Specializările: *Furnale și oțelării*, *Turnătorie și Deformări plastice și tratamente termice*, subingineri seral).

ALGEBRĂ, GEOMETRIE PLANĂ ȘI TRIGONOMETRIE

XIV. 1°. Se dă ecuația:

$$x^2 + px + q = 0$$

ale cărei rădăcini sînt x_1 și x_2. Să se formeze ecuația de gradul II în y, cu rădăcinile: $y_1 = x_1 + \frac{1}{x_2}$, $y_2 = x_2 + \frac{1}{x_1}$.

2°. Primul termen al unei progresii geometrice este 5 și suma primilor patru termeni este 75. Să se determine progresia.

3°. Să se rezolve și să se discute ecuația:

$$\sin 2x + m \sin x = 0,\ m \in \mathbf{R}.$$

4°. Într-un hexagon regulat H_1, se unesc mijloacele laturilor consecutive și se formează un nou hexagon H_2. Să se determine raportul ariilor celor două hexagoane: $\left(\frac{\text{Aria } H_1}{\text{Aria } H_2}\right)$.

δ. PROFILUL CHIMIE (subingineri seral).

ALGEBRĂ

XV. 1°. Se dă ecuația:

$$(1 + m^2)x^2 - (1 + m)x + m(1 - m) = 0,\ m \in \mathbf{R}.$$

Să se determine parametrul m pentru care au loc inegalitățile:

$$-1 \leqslant \frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \frac{1}{x_1 x_2} \leqslant 0.$$

2°. Să se arate că:

$$\frac{1}{2\sqrt{1}+1\sqrt{2}}+\frac{1}{3\sqrt{2}+2\sqrt{3}}+\frac{1}{4\sqrt{3}+3\sqrt{4}}+\dots$$

$$\dots+\frac{1}{(n+1)\sqrt{n}+n\sqrt{n+1}}=1-\frac{\sqrt{n+1}}{n+1}$$

şi să se demonstreze prin inducţie că egalitatea este adevărată pentru orice $n \in N$

3°. Să se rezolve ecuaţia: $5^{\lg x}-3^{\lg x-1}=3^{\lg x+1}-5^{\lg x-1}$.

4°. Fie:

$$A=\begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix},\ I_2=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},\ O_2=\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$x, y, z, t \in \mathbf{Z}$. Să se verifice că:

$$A^2-(x+t)A+(xt-yz)I_2=O_2$$

şi apoi să se determine x, y, z, t astfel ca $A^2=I_2$.

ε. PROFILUL TEHNOLOGIA ŞI CHIMIA PRODUSELOR ALIMENTARE ŞI TEHNICĂ PISCICOLĂ (Specializarea *Tehnologia şi chimia produselor alimentare*).

ALGEBRĂ ŞI TRIGONOMETRIE

XVI. 1°. Să se rezolve inecuaţia:

$$\lg 2+\lg(4^{x-2}+9)\leqslant 1+\lg(2^{x-2}-1).$$

2°. Să se rezolve sistemul:

$$\begin{cases} \log_a x+\log_a 2y=\dfrac{3}{2}; \\ \log_{a^2} x+\log_a y=\dfrac{5}{2}. \end{cases}$$

3°. Să se arate că următoarele numere sînt în progresie aritmetică:

$$\frac{a}{x+1};\quad \frac{x+a-1}{2x};\quad \frac{x^2+a-1}{x(x+1)},$$

cu $x \neq -1$ şi $x \neq 0$ şi să se determine valorile lui x, astfel încît raţia să aparţină intervalului $[1, 2]$, pentru $a=2$.

4°. Să se rezolve în $\mathbf{C}$ ecuaţia:

$$\left(\frac{x+i}{x-i}\right)^3+\left(\frac{x+i}{x-i}\right)^2+\frac{x+i}{x-i}+1=0.$$

5°. Să se rezolve ecuaţia:

$$\sin x+2\cos^2 x+\frac{1}{\sin x}=2,\ (\sin x \neq 0).$$



PROFILUL TEHNOLOGIA ȘI CHIMIA PRODUSELOR ALIMENTARE ȘI TEHNICĂ PISCICOLĂ (Specializările: *Tehnologii extractive în industria alimentară, Tehnologia produselor alimentare de origine animală, Morărit-panificație*).

ALGEBRĂ ȘI TRIGONOMETRIE

XVII. 1°. Să se arate că numerele următoare:

$$\frac{1}{1-x};\quad \frac{m}{x(1-x)};\quad \frac{2m-x}{x(1-x)},$$

cu $x \neq 0$, $x \neq 1$ și $m \in \mathbf{R}$, sînt în progresie aritmetică și să se determine x pentru care rația este 3 și $m = -7$.

2°. Să se determine valorile reale ale lui x astfel încît:

$$\frac{1}{3} \leqslant \frac{3^x+1}{9^x+1} \leqslant \frac{1}{2}.$$

3°. Să se determine $a \in \mathbf{R}$ astfel încît ecuația:

$$z^4 - 4z^3 + 6z^2 + az + 5 = 0$$

să admită rădăcina $z = 2 - \mathrm{i}$. Să se rezolve ecuația.

4°. Să se calculeze $\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}$ știind că:

$$\sin\alpha + \cos\alpha = \frac{7}{5} \text{ pentru } \alpha \in \left(0, \frac{\pi}{4}\right).$$

9. PROFILUL FORESTIER (Specializarea *Silvicultură și exploatări forestiere*).

ALGEBRĂ

XVIII. 1°. Să se determine $a \in \mathbf{R}$, pentru care există $x, y, z, t \in \mathbf{R}$ nu toți nuli, astfel încît:

$$x\begin{pmatrix}1 & 2\\ 1 & 2\end{pmatrix} + y\begin{pmatrix}-2 & -1\\ 1 & a-1\end{pmatrix} + z\begin{pmatrix}1 & 3\\ 1 & 2\end{pmatrix} + t\begin{pmatrix}-1 & -3\\ 1 & a\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}.$$

2°. Să se determine $x \in A \subset \mathbf{R}$, dacă: $A = \left\{x \in \mathbf{R} \,\middle|\, \left|\frac{2x^2-x}{x^2+x+1}\right| < 2\right\}$.

3°. Să se rezolve ecuația: $\log_{x^2}(x+2) + \log_x(x^2+2x) = 4$.

4°. Pe mulțimea $\mathbf{R}$ a numerelor reale definim legea de compoziție prin: $x * y = \frac{1}{2}(x + y - xy + 1)$, oricare ar fi $x, y \in \mathbf{R}$. Să se arate că mulțimea $\mathbf{R}_1 = \mathbf{R} - \{1\}$ este o parte stabilă față de legea $*$, iar $\mathbf{R}_1$ cu operația indusă este un grup comutativ.

5°. Fie polinomul: $f = X^4 + 2X^3 + mX^2 + nX + p$. Să se determine $m, n, p \in \mathbf{R}$ astfel ca f împărțit la $X - 1$ să dea restul -15, iar ecuația $f(x) = 0$ să aibă o rădăcină egală cu $-1 + \mathrm{i}$. Pentru m, n, p determinați mai sus, să se rezolve ecuația $f(x) = 0$.

ψ. PROFILUL ECONOMIC (Specializările: *Planificare*, *Cibernetică economică*).

ALGEBRĂ ŞI ELEMENTE DE ANALIZĂ MATEMATICĂ

XIX. 1°. Să se discute şi să se rezolve, în mulţimea numerelor reale, sistemul:

$$\begin{cases} x + ay + a^2z = a^3; \\ x + by + b^2z = b^3; \\ x + cy + c^2z = c^3. \end{cases}$$

2°. Să se găsească numerele a şi b, ştiind că polinomul $aX^4 + bX^3 + 1$ se divide prin $X^2 - 2X + 1$. Pentru a şi b astfel determinaţi, să se rezolve ecuaţia: $ax^4 + bx^3 + 1 = 0$.

3°. Fie $a_n = \frac{(n+1)^2}{n(n+2)}$. Să se calculeze:

$$\lim_{n\to\infty} a_n \text{ şi } \lim_{n\to\infty} b_n, \text{ unde } b_n = a_1a_2 \ldots a_n.$$

4°. Să se găsească punctele de extrem ale funcţiei $f: [1, \infty) \to \mathbf{R}$ definită prin:

$$f(x) = e^{-\frac{3x}{4}}\sqrt{x^3 + 1}.$$

5°. Să se calculeze: $\int_0^{\frac{\pi}{2}} x \cos x \, dx$.

PROFILUL ECONOMIC (Specializările: *Comerţ*, *Economia serviciilor de alimentaţie publică*).

ALGEBRĂ ŞI ELEMENTE DE ANALIZĂ MATEMATICĂ

XX. 1°. Se consideră ecuaţia: $x^4 + 2x^3 + mx^2 + 2x + 1 = 0$. Să se determine m astfel încît suma a două rădăcini să fie egală cu suma celorlalte două: pentru m astfel determinat, să se rezolve ecuaţia.

2°. Să se calculeze: $\int_{-2}^{5} (x+1)\, e^{-|x|} \, dx$.

3°. Să se studieze variaţia funcţiei $f: (0, \infty) \to \mathbf{R}$ definită prin: $f(x) = \frac{\ln x}{x}$ şi să se reprezinte grafic.

4°. Să se calculeze:

$$\lim_{n\to\infty}\left(a\sqrt{n+a} + b\sqrt{n+b} + c\sqrt{n+c}\right)$$

a, b, c fiind numere reale, astfel încît: $a + b + c = 0$.

5°. Să se calculeze determinantul:

$$\begin{vmatrix} a_1 + b_1\mathrm{i} & a_1\mathrm{i} - b_1 & c_1 \\ a_2 + b_2\mathrm{i} & a_2\mathrm{i} - b_2 & c_2 \\ a_3 + b_3\mathrm{i} & a_3\mathrm{i} - b_3 & c_3 \end{vmatrix}.$$



ENUNȚURI
1985

1. ÎNVĂȚĂMÎNTUL TEHNIC

α. PROFILUL: ELECTRIC, MECANIC, CONSTRUCȚII (ingineri zi).

a. ALGEBRĂ ȘI ELEMENTE DE ANALIZĂ MATEMATICĂ

XXI. 1°. Fie a, b numere reale, fixate și $(a_n)_{n\geq 1}$ un șir astfel încît: $a_1 + a_2 + \ldots$ $\ldots + a_n = an^2 + bn$, pentru orice întreg, $n \geqslant 1$. Să se arate că șirul este o progresie aritmetică și să se determine rația acesteia.

2°. Să se arate că dacă $f: \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ este o funcție polinomială de grad $n \geqslant 2$, atunci funcția $g: \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, $g(x) = f(x+2) - 2f(x+1) + f(x)$, este polinomială, de grad $n - 2$. Să se determine coeficienții polinomului f în cazul particular cînd $g(x) = 6x + 24$, pentru orice $x \in \mathbf{R}$, $f(0) = 5$ și $f(1) = 23$.

3°. Se consideră funcția $f: (0, \infty) \to \mathbf{R}$ definită prin:

$$f(x) = \frac{2 \ln x - 1}{x^2}.$$

Să se calculeze valoarea $f\left(\frac{1}{e}\right)$, cu două zecimale exacte și să se determine numărul de soluții reale ale ecuației $f(x) = m$, m fiind un parametru real.

4°. Fie $f: \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ o funcție continuă și $g: \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, $g(x) = \cos f(x)$. Să se arate că funcția g este continuă și că dacă $g(x) = 1$, pentru orice $x \in \mathbf{R}$, atunci f este constantă.

5°. Să se calculeze: $\int_0^{2\pi} x \sin x \, dx$.

b. GEOMETRIE PLANĂ ȘI ÎN SPAȚIU ȘI TRIGONOMETRIE

XXII. 1°. Fie ABC un triunghi ascuțitunghic și A', B', C' triunghiul său ortic (A', B', C' picioarele înălțimilor). Să se calculeze lungimile segmentelor $[A'B]$, $[A'C]$, $[B'A]$ etc., lungimile laturilor triunghiului ortic și aria acestuia, în funcție de lungimile laturilor și măsurile unghiurilor triunghiului.

2°. Într-un cerc de centru O se duc diametrele perpendiculare $[AB]$ și $[CD]$. O dreaptă variabilă prin B intersectează raza $[OC]$ în N ($N \in [OC]$) și cercul în M. Fie I și P punctele de intersecție ale paralelei dusă prin N la AB cu raza $[OM]$ și, respectiv, cu tangenta în M la cerc. Să se arate că triunghiul MIN este isoscel, că patrulaterul $ONMP$ este un trapez isoscel și să se determine locul geometric al punctului P cînd N parcurge raza $[OC]$.

3°. Să se rezolve ecuația:

$$\sqrt{1 + \sin 2x} - \sqrt{1 - \sin 2x} = 2 \sin x,$$

unde $x \in [-\pi, \pi]$.

4°. Dîndu-se un cub $ABCDA'B'C'D'$, să se afle distanța de la o diagonală a cubului la o diagonală a unei fețe, cu care nu se intersectează, în funcție de lungimea a a unei muchii.

5°. O piramidă patrulateră $VABCD$ (cu baza pătratul $ABCD$ și vîrful V) regulată, are lungimea laturii bazei a și lungimile muchiilor din V, $a\sqrt{2}$. Prin mijlocul unei muchii din V se duce un plan perpendicular pe muchia opusă (ce trece tot prin V), care determină o secțiune în piramidă. Să se calculeze perimetrul și aria patrulaterului de secțiune, precum și raportul volumelor celor două corpuri în care este divizată piramida.

β. PROFILUL: ELECTRIC, MECANIC, CONSTRUCŢII (ingineri seral).

a. ALGEBRĂ ŞI ELEMENTE DE ANALIZĂ MATEMATICĂ

XXIII. 1°. Se consideră funcţia $f: \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ definită prin: $f(x) = mx$. Să se determine valorile parametrului real m în fiecare din situaţiile următoare:

a) f este strict crescătoare;

b) $f \circ f = f$.

2°. Să se rezolve ecuaţia: $(x^2 - 2x)(e^{x-2} - 1) = 0$ şi inecuaţia: $\frac{e^{x-2} - 1}{x^2 - 2x} < 0$.

3°. Să se afle constantele reale p şi q dacă matricea $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ satisface relaţia: $A^3 = pA^2 + q \cdot A$.

4°. Fie funcţia $f: \left(0, \frac{\pi}{2}\right) \to \mathbf{R}$ definită prin:

$f(x) = \frac{1}{x^2} - \text{ctg}^2 x$. Să se determine $f\left(\frac{\pi}{4}\right)$, cu două zecimale exacte şi să se calculeze: $\lim_{\substack{x \to 0 \\ x > 0}} f(x)$.

5°. Se consideră funcţia $f: (0, \infty) \to \mathbf{R}$ definită prin:

$$f(x) = 2x + ax \ln x.$$

Să se afle constanta reală a, dacă $f'(1) = 1$ şi, în acest caz, să se calculeze aria mulţimii mărginite de curba $y = f(x)$, axa Ox şi dreptele $x = 1$, $x = e$.

b. GEOMETRIE PLANĂ ŞI ÎN SPAŢIU ŞI TRIGONOMETRIE

XXIV. 1°. Într-un triunghi ABC, cu unghiurile avînd măsura cel mult 90°, se consideră înălţimea $[AD]$ şi diametrul $[AE]$ al cercului circumscris (D pe $[BC]$ între B şi C, E pe cerc). Să se arate că:

a) $m(\widehat{ABC}) = m(\widehat{AEC})$;

b) AD şi AE sînt egal înclinate faţă de laturi, adică $m(\widehat{BAD}) = m(\widehat{EAC})$;

c) Dacă înălţimea şi mediana prin A împart unghiul $\widehat{BAC}$ în trei părţi, avînd aceeaşi măsură, atunci $\widehat{BAC}$ este unghi drept.

2°. Să se verifice că dacă într-un patrulater $ABCD$ putem înscrie un cerc (patrulaterul este circumscriptibil), atunci $AB + CD = BC + AD$. Utilizînd acest fapt, să se arate că aria unui trapez dreptunghic circumscriptibil este egală cu produsul lungimilor bazelor.

3°. Să se rezolve ecuaţia:

$$\frac{\sin^2 x}{\cos x(1 + \text{tg}\, x)} - \frac{\cos^2 x}{\sin x(1 + \text{ctg}\, x)} = \sqrt{2}.$$

4°. Se consideră piramida hexagonală regulată $VABCDEF$, cu $VA = 10$ cm şi înălţimea $[VO]$, cu $VO = 8$ cm (O centrul hexagonului de bază). Se cere aria laterală şi măsura unghiului diedru a două feţe laterale alăturate.

5°. Într-un con circular drept, cu lungimea înălțimii h și măsura unghiului de la vîrf al secțiunii axiale (secțiune ce conține axa VO, V vîrful, O centrul bazei) 2α, se duce un plan (P), paralel cu baza, prin centrul sferei înscrise în con. Să se calculeze, în funcție de h și α, raza R a cercului de bază, raza r a sferei înscrise, raza ρ a cercului de tangență a sferei cu conul și să se determine α astfel ca planul (P) să împartă conul în două corpuri cu volume egale.

2. ÎNVĂȚĂMÎNT UNIVERSITAR

α. PROFILUL MATEMATICĂ (Specializările: *Matematică*, învățămînt de zi și fără frecvență; *Informatică*, *Matematică-Mecanică*, învățămînt de zi și seral).

a. ALGEBRĂ

XXV. 1°. Să se rezolve ecuația: $\sqrt[4]{97-x}+\sqrt[4]{9+x}=8$.

2°. Să se discute, după parametrii reali a, b și c, compatibilitatea sistemului și apoi să se rezolve:

$$\begin{cases} ax+(a+1)y+(a+2)z=a+3; \\ bx+(b+1)y+(b+2)z=b+3; \\ x+cy+c^2z=c^3. \end{cases}$$

3°. Polinomul $f(X)\in \mathbf{Z}[X]$ are trei rădăcini întregi care dau resturi distincte prin împărțire la 3. Să se arate că, pentru orice $n\in\mathbf{Z}$, $f(n)$ este divizibil cu 3.

4°. Fie a o rădăcină a ecuației $x^3-x-1=0$. Să se găsească un polinom nenul, cu coeficienți întregi, care să admită rădăcina $b=2a^2-a$.

5°. În grupul S_5, al permutărilor de grad 5, să se rezolve ecuația: $\sigma x=x\sigma$, unde:

$$\sigma=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 3 & 1 & 5 & 4 \end{pmatrix}.$$

Găsiți toate soluțiile ecuației respective.

b. ELEMENTE DE ANALIZĂ MATEMATICĂ

XXVI. 1°. Fie a și x_0 două numere reale. Șirul $(x_n)_{n\geqslant 0}$ este definit astfel:

$$x_n=\frac{2ax_{n-1}}{x_{n-1}+a} \text{ oricare ar fi } n\geqslant 1.$$

Să se studieze convergența șirului $(x_n)_{n\geqslant}$ în cazul în care $a>0$ și $x_0>0$.

2°. Fie funcția $f:\mathbf{R}\to\mathbf{R}$ dată prin:

$f(x)=\max(\sin x,\ \lambda+\cos x)$ pentru $x\in\mathbf{R}$,

unde λ este un parametru real. Să se determine valorile lui λ pentru care funcția f este derivabilă pe $\mathbf{R}$.

3°. Să se calculeze: $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x+\sqrt{x}}{x-\sqrt{x}}\right)^x$.



4°. Să se reprezinte grafic funcția $f:(0,\infty)\to\mathbf{R}$ dată prin:

$$f(x)=\frac{|\ln x|}{\sqrt{x}}\quad \text{pentru } x>0.$$

5°. Să se arate că:

$$2\sqrt{e}\leqslant\int_0^1 e^{x^2}\,dx+\int_0^1 e^{1-x^2}\,dx\leqslant 1+e.$$

c. GEOMETRIE PLANĂ, ȘI ÎN SPAȚIU, TRIGONOMETRIE ȘI GEOMETRIE ANALITICĂ

XXVII. 1°. Fie ABM un triunghi înscris în cercul $\mathscr{C}(0, r)$. Se notează cu H punctul de intersecție al înălțimilor și cu G punctul de intersecție al medianelor triunghiului ABM. Știind că punctele A și B sînt fixe, iar punctul M este mobil pe cercul $\mathscr{C}(O, r)$, să se determine locurile geometrice descrise de punctele H și G.

2°. Să se arate că, pentru orice punct O care nu este situat în planul triunghiului ABC, avem:

$$m(\widehat{AOB})+m(\widehat{AOC})>m(\widehat{BOC}).$$

3°. Un triunghi are aria egală cu 1. Să se arate că, în acest caz, cel puțin două din laturile triunghiului au lungimile mai mari sau egale cu $\sqrt{2}$.

4°. Să se rezolve ecuația: $\cos^n x-\sin^n x=1$, unde n este un număr natural, nenul.

5°. Să se scrie ecuația hiperbolei raportată la axele sale, știind că trece prin punctul de coordonate (1, 0) și are ca asimptote dreptele de ecuații:

$(d_1): 2x-y=0$; $\quad(d_2): 2x+y=0$.

β. PROFILUL MATEMATICĂ (Specializarea *Matematică-Fizică*, 3 ani, învățămînt de zi).

ALGEBRĂ (clasele IX–X), GEOMETRIE PLANĂ ȘI ÎN SPAȚIU ȘI TRIGONOMETRIE

XXVIII 1°. Există termeni independenți de x în dezvoltarea binomului:

$$\left(\sqrt{x\sqrt{x}}+\frac{2}{\sqrt[3]{x}}\right)^{1989}?$$

Justificați răspunsul și precizați acești termeni, în caz că există!

2°. Fie $a>0$ un număr real. Să se arate că funcția $f:\mathbf{R}\to\mathbf{R}$ definită prin:

$$f(x)=x^3+\frac{x}{a},$$

este bijectivă.

3°. Fie $ABCD$ un trapez cu baza mare $[AB]$. Să se arate că bisectoarele unghiurilor $\widehat{BCD}$ și $\widehat{ADC}$ se intersectează într-un punct situat pe $[AB]$ dacă și numai dacă are loc egalitatea:

$$(1)\qquad AB=AD+BC.$$

Dacă este satisfăcută egalitatea (1) și trapezul $ABCD$ este inscriptibil, să se calculeze lungimile diagonalelor în funcție de lungimile bazelor trapezului.

4°. Să se arate că, în orice triunghi ABC, avem:

$$2(\sin B + \sin C) \leqslant 3 + 2\cos A.$$

Cînd inegalitatea respectivă devine egalitate?

3. ALTE PROFILURI

α. PROFILUL ECONOMIC (Specializarea *Economia industriei construcțiilor și transporturilor*).

ALGEBRĂ ŞI ELEMENTE DE ANALIZĂ MATEMATICĂ

XXIX. 1°. Să se determine numerele reale a, b, c astfel încît ecuația $x^3 - ax^2 + bx - c = 0$ să admită rădăcinile a, b, c.

2°. Să se afle constantele reale a și b știind că polinomul $2X^3 - X^2 + aX + b$ admite rădăcina $x_1 = 1 + i$; pentru valorile găsite, să se determine celelalte rădăcini x_2, x_3 și să se calculeze suma $x_1^4 + x_2^4 + x_3^4$.

3°. Se consideră funcția $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ definită prin: $f(x) = \ln(1 + |\sin x|)$. Să se calculeze: $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} \frac{f(x)}{\ln x}$ și să se arate că limită $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)$ nu există.

4°. Să se reprezinte grafic funcția: $f : (0, 1) \to \mathbf{R}$ definită prin:

$$f(x) = x\sqrt{\frac{x}{1-x}}.$$

5°. Să se calculeze integrala: $I = \int_1^2 \frac{dx}{x^3 + x^2 + x + 1}$

PROFILUL ECONOMIC (Specializările: *Comerț, Economia serviciilor de alimentație publică și turism*).

ALGEBRĂ ŞI ELEMENTE DE ANALIZĂ MATEMATICĂ

XXX. 1°. Se consideră funcția $f : [-3, \infty) \to \mathbf{R}$ definită prin:

$$f(x) = \sqrt{x + 3} - x - 1.$$

Să se rezolve ecuația $f(x) = 0$ și inecuația $\log_{\frac{1}{2}} f(x) \leqslant 0$.

2°. Să se determine cel mai mic număr natural n pentru care:

$$\frac{2^{n+1} + 10}{2^n + 2} < \frac{101}{50}.$$

3°. Se consideră matricile:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & -2 \\ 3 & 1 & p \\ 3 & -1 & 1 \end{pmatrix} \text{ și } B = \begin{pmatrix} 1 & -2 & -2 & 4 \\ 3 & 1 & p & 4 \\ 3 & -1 & 1 & q \end{pmatrix}.$$

Să se afle numerele reale p și q astfel încît cele două matrici să aibă același rang.

4°. Să se determine funcția polinomială $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, de gradul III, avînd ca puncte de extrem local $A(1, 1)$ și $B(0, 3)$. Apoi să se traseze graficul lui f.

5°. Să se calculeze: $\lim\limits_{n\to\infty} \int_{-n}^{0} (2x - 3) \cdot e^x \, dx.$



PROFILUL ECONOMIC (Specializarea *Contabilitate și economie agrară*).

ALGEBRĂ ȘI ELEMENTE DE ANALIZĂ MATEMATICĂ

XXXI. 1°. Să se rezolve ecuația: $4^x + 2^{x+1} \cdot 3^x = 3 \cdot 9^x$.

2°. Fie $\varepsilon = -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$. Să se determine toate tripletele (x, y, z) de numere complexe care satisfac simultan relațiile:

$$x + \varepsilon y + \varepsilon^2 z = 0, \qquad \varepsilon^2 x + y + \varepsilon z = 0, \qquad \varepsilon x + \varepsilon^2 y + z = 0.$$

3°. Se consideră matricea $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. Să se determine toate matricile X astfel încît $A^2 \cdot X = X \cdot A^2$ și să se arate că nu există nici o matrice Y astfel încît:

$$A^2 \cdot Y - Y \cdot A^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

4°. Să se rezolve ecuația $x^3 - x^2 - x + 1 = 0$ și să se reprezinte grafic funcția $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ definită prin: $f(x) = \sqrt[3]{x^3 - x^2 - x + 1}$, folosind și derivata a doua.

5°. Să se calculeze integrala: $I = \int_0^1 x\,e^{1-x}\,dx$.

β. PROFILUL GEODEZIE (subingineri seral).

ALGEBRĂ, GEOMETRIE PLANĂ ȘI TRIGONOMETRIE

XXXII. 1°. Să se rezolve ecuația: $x^{\log_{x^2}(x-1)} = 8$.

2°. Folosind metoda inducției matematice, să se demonstreze că, pentru orice număr natural n, are loc egalitatea:

$$2^2 + 4^2 + 6^2 + \ldots + (2n)^2 = \frac{2n(n+1)(2n+1)}{3}.$$

3°. Să se arate că într-un patrulater convex, bisectoarele a două unghiuri consecutive formează între ele un unghi egal cu semisuma celorlalte două unghiuri ale patrulaterului.

4°. Fie ecuația: $2(m+1)\cos 2x + 4m \sin x - 3m - 1 = 0$. Să se rezolve ecuația dată și să se discute după valorile parametrului $m \in \mathbf{R} \setminus \{-1\}$.

γ. PROFILUL FORESTIER (Specializarea *Silvicultură și exploatări forestiere*, ingineri zi și seral).

ALGEBRĂ

XXXIII. 1°. Fie ecuația:

$$2mx^3 + (2 - 7m)x^2 - (2 - 7m)x - 2m = 0, \quad m \in \mathbf{R} \setminus \{0\}.$$

Să se discute natura și semnele rădăcinilor ecuației, după valorile parametrului m.

2°. Să se rezolve inecuația: $\log_2(9 - 2^x) > 3 - x$.

3°. Fie polinomul:

$$f = X^4 + aX + b, \qquad a, b \in \mathbf{Q}.$$

Să se determine valorile parametrilor a şi b pentru care f are rădăcina $x_1 = 1 + \sqrt{3}$ şi apoi să se rezolve ecuaţia $f = 0$.

4°. Să se rezolve sistemul:

$$\begin{cases} 4x - y + z = 1; \\ x + y - z = -1; \\ 2x - y + z = 1. \end{cases}$$

5°. Fie mulţimea:

$$M_2 = \left\{ M(x,y) \mid M(x,\ y) = \begin{pmatrix} x+y & 4y \\ -y & x-y \end{pmatrix},\ x,\ y \in \mathbb{Q} \right\}.$$

Să se arate că $(M_2, +)$ este grup abelian.

δ. PROFILUL TEHNOLOGIA ŞI CHIMIA PRODUSELOR ALIMENTARE ŞI TEHNICA PISCICOLĂ (Specializarea *Tehnologia şi chimia produselor alimentare*, subingineri seral).

ALGEBRĂ

XXXIV. 1°. Să se rezolve ecuaţia:

$$x^6 - 9x^3 + 8 = 0.$$

2°. Să se determine $x \in \mathbf{R}$ pentru care: $\sqrt{1+x} - \sqrt{1-x} = 1$.

3°. Să se rezolve inecuaţia: $x^{\sqrt{x}} < \sqrt{x}^x$.

4°. Fie ecuaţia:

$$x^3 + mx^2 - 16x + 48 = 0,\ m \in \mathbf{R}.$$

Să se determine valoarea lui m şi să se rezolve ecuaţia, ştiind că suma a două rădăcini ale acesteia este nulă.

ENUNŢURI 1986

1. ÎNVĂŢĂMÎNTUL TEHNIC

α. PROFILUL: ELECTRIC, MECANIC, CONSTRUCŢII

a. ALGEBRĂ ŞI ELEMENTE DE ANALIZĂ MATEMATICĂ

XXXV. 1°. Să se rezolve în $\mathbf{R}$ ecuaţia:

$$(\log_x 6)^2 + \left(\log_{\frac{1}{6}}\left(\frac{1}{x}\right)\right)^2 + \log_{\frac{1}{\sqrt{x}}}\left(\frac{1}{6}\right) + \log_{\sqrt{6}} x + \frac{3}{4} = 0.$$

2°. Să se determine parametrul real m şi să se rezolve în $\mathbf{R}$ ecuaţia: $2x^3 + mx^2 + 4x + 4 = 0$, ştiind că are o rădăcină dublă.

3°. Să se calculeze, pentru $k \in \mathbf{N}$, $a \in \mathbf{R}$, $a > 0$, $a \neq 1$,

$$\lim_{n\to\infty} n^k \left(a^{\frac{1}{n}} - 1\right)\left(\sqrt{\frac{n-1}{n}} - \sqrt{\frac{n+1}{n+2}}\right).$$

4°. a) Să se determine funcția polinomială $P(x)$ astfel încît funcția $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$,

$$f(x) = \begin{cases} e^{\frac{1}{x^2-1}} & \text{dacă } |x| < 1, \\ P(x) & \text{dacă } |x| \geq 1, \end{cases}$$

să fie indefinit derivabilă pe $\mathbb{R}$.

b) Să se reprezinte grafic funcția:

$$g(x) = \begin{cases} f\left(\frac{1}{x}\right) & \text{dacă } |x| > 1, \\ x^2 - 1 & \text{dacă } |x| \leq 1. \end{cases}$$

5°. Să se calculeze: $\int_1^3 |(x-1)(x-2)(x-3)|\, dx.$

b. GEOMETRIE PLANĂ ȘI ÎN SPAȚIU ȘI TRIGONOMETRIE

XXXVI. 1°. Triunghiul MAB înscris în cercul $\mathcal{C}(O, r)$ are vîrfurile A și B fixe, iar vîrful M variabil pe cerc. Să se afle:

a) Locul geometric descris de ortocentrul triunghiului MAB;

b) Locul geometric descris de centrul de greutate al triunghiului MAB.

2°. Fie $[AA_1$, $A_1 \in [BC]$, bisectoarea unghiului $\hat{A}$ în triunghiul ABC. Cercul circumscris triunghiului AA_1B intersectează dreapta AC a doua oară în punctul $N \in [AC]$, iar cercul circumscris triunghiului AA_1C intersectează dreapta AB a doua oară în punctul $M \in [AB]$. Să se arate că $[BM] \equiv [CN]$.

3°. Să se discute și să se rezolve ecuația:

$$3m \sin 2x + (m-1) \cos 2x = 1,$$

unde m este un parametru real.

4°. Într-un con circular drept se înscrie o sferă astfel încît cercul de tangență dintre ele este baza unui cilindru înscris în sferă. Raportul dintre aria sferei și aria totală a conului este $\frac{4}{9}$. Să se determine raportul dintre volumul cilindrului și volumul conului.

5°. Să se determine măsura unghiurilor unui triunghi ABC știind că are loc relația: $8 \sin A \sin B \cos C + 1 = 0$.

β. PROFILUL: MECANIC, CONSTRUCȚII, ARHITECTURĂ ȘI SISTEMATIZARE, MINE, PETROL, GEOLOGIE

a. ALGEBRĂ ȘI ELEMENTE DE ANALIZĂ MATEMATICĂ

XXXVII. 1°. Să se afle soluțiile reale ale sistemului:

$$x^{\sqrt{y}} = y^x; \quad y^{\sqrt{x}} = x^y.$$

2°. Să se determine polinoamele de gradul al doilea cu coeficienți reali care verifică $P(X^3) = (P(X))^3$.

3°. Să se calculeze: $\lim\limits_{x \to 0} \frac{x^n - (\sin x)^n}{x^{n+2}}$, pentru $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 1$.

4°. Se consideră mulțimile:

$$K = \left\{ A = \begin{pmatrix} a & 5b \\ b & a \end{pmatrix} \mid A \in M_2(\mathbf{Q}) \right\} \text{ și } L = \{c + d\sqrt{5} \mid c,\ d \in \mathbf{Q}\}.$$

a) Să se arate că L este parte stabilă a lui $\mathbf{R}$ în raport cu operațiile de adunare și inmulțire și K este parte stabilă a lui $M_2(\mathbf{Q})$ în raport cu adunarea și inmulțirea.

b) Să se arate că mulțimile L și K formează corpuri în raport cu operațiile induse.

c) Să se stabilească un izomorfism de corpuri de la L la K.

5°. Se consideră funcția $f : \left(0, \frac{\pi}{2}\right) \to (0, \infty)$,

$$f(x) = \int_0^x \frac{(\sin t + \cos t)\sin t}{\cos^2 t}\, dt.$$

Să se calculeze integrala și să se arate că funcția f este bijectivă.

b. GEOMETRIE PLANĂ ȘI ÎN SPAȚIU ȘI TRIGONOMETRIE

XXXVIII. 1°. Fie $ABCD$ un paralelogram cu diagonalele $[AC]$ și $[BD]$.

a) Să se arate că $AC^2 + BD^2 = 2(AB^2 + AD^2)$.

b) Presupunînd că $AC^2 \cdot BD^2 = AB^4 + AD^4$, să se calculeze măsura unghiului obtuz al paralelogramului.

2°. Două cercuri de raze a, respectiv x, $x > a$, sînt tangente exterioare.

a) Să se calculeze în funcție de a și x lungimile laturilor triunghiului ABC format de cele trei tangente comune la cele două cercuri.

b) Păstrînd a fix să se determine x astfel încît volumul corpului generat prin rotirea triunghiului ABC în jurul liniei centrelor să aibă valoarea $\frac{8\pi a^3}{3}$.

3°. Se consideră punctul M aparținînd interiorului unui triedru tridreptunghic de vîrf O. Să se ducă prin M un plan care să intersecteze muchiile triedrului în punctele A, B, C astfel ca M să fie ortocentrul triunghiului ABC.

4°. Să se rezolve ecuația: $(\sin x + \cos x)\sqrt{2} = \operatorname{tg} x + \operatorname{ctg} x$.

5°. Să se demonstreze că triunghiul ABC în care are loc relația: $1 + \operatorname{ctg}\left(\frac{\pi}{4} - B\right) = \frac{2}{1 - \operatorname{ctg} C}$, este dreptunghic.

γ. PROFILUL: METALURGIC, CHIMIE

a. ALGEBRĂ ȘI ELEMENTE DE ANALIZĂ MATEMATICĂ

XXXIX. 1°. Să se determine numerele naturale x și y astfel încît numerele C_{x-1}^{y-1}, C_{x-1}^{y}, C_x^y să fie în progresie aritmetică, iar numerele A_x^y, A_x^{y+1}, A_{x+1}^{y+1} să fie în progresie geometrică (A_n^k și C_n^k reprezintă numărul aranjamentelor și, respectiv, al combinărilor de n elemente luate cîte k).

2°. Să se scrie tabla înmulțirii în inelul claselor de resturi modulo 7 și să se determine cel mai mare divizor comun al polinoamelor f și g din $\mathbf{Z}_7[X]$, unde:

$$f = X^4 + \hat{6}X^3 + \hat{5}X^2 + \hat{3}X + \hat{3} \text{ și } g = \hat{3}X^2 + \hat{1}.$$

3°. Se consideră șirul $(x_n)_{n \geq 0}$ definit de relațiile:

$$x_{n+1} = \frac{x_n}{1 + n \cdot x_n^2},\ n \in \mathbf{N},\ x_0 > 0.$$

Să se studieze convergența șirurilor $(x_n)_{n\geq 0}$ și $(nx_n)_{n\geq 0}$; dacă sînt convergente, să se calculeze limitele celor două șiruri.

4°. Să se calculeze:

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{4}} (2 - \operatorname{tg} x \sqrt{\operatorname{ctg} x})^{\frac{1}{\sin x - \cos x}}.$$

5°. Se consideră funcțiile $f, g: \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, $f(x) = x \operatorname{arctg} x$, $g(x) = \ln(1 + x^2)$.

a) Să se determine funcția $h(x) = \max(f(x), g(x))$, pentru $x \in [0, 1]$.

b) Să se calculeze aria mulțimii cuprinse între graficele funcțiilor f și g și dreptele $x = 0$, $x = 1$.

b. GEOMETRIE PLANĂ ȘI ÎN SPAȚIU ȘI TRIGONOMETRIE

XL. 1°. Fie două puncte fixe A, B situate pe diametrul unui semicerc și egal depărtate de centru, iar M, N două puncte variabile pe semicerc astfel ca $AM \parallel BN$. Să se demonstreze că produsul $AM \cdot BN$ este constant.

2°. În triunghiul ABC, $[AB] \equiv [AC]$ și $m(\widehat{BAC}) = 80°$. Fie M un punct în interiorul triunghiului ABC astfel încît $m(\widehat{MBC}) = 30°$ și $m(\widehat{MCB}) = 10°$. Fie N punctul de intersecție al dreptei MB cu bisectoarea unghiului $\widehat{BAC}$. Să se determine $m(\widehat{BNC})$ și $m(\widehat{AMC})$.

3°. Să se rezolve ecuația: $\cos^2 x + 3 \sin x \cos x + 1 = 0$.

4°. Se dă un tetraedru regulat $ABCD$. Să se ducă prin punctul A un plan paralel cu dreapta BD astfel încît cele două corpuri în care acest plan împarte tetraedrul să aibă volume egale.

5°. Să se arate că triunghiul ABC în care are loc relația: $\sin B \operatorname{tg} B = \frac{b^2}{a \cdot c}$, este dreptunghic.

δ. PROFILUL: ELECTRIC, ENERGETIC, MECANIC

a. ALGEBRĂ ȘI ELEMENTE DE ANALIZĂ MATEMATICĂ

XLI. 1°. Să se determine valorile parametrului real m astfel încît matricea:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & x & 3 \\ x & -1 & x \\ 1 & 2 & m \end{pmatrix}$$

să fie inversabilă pentru orice $x \in \mathbf{R}$.

2°. Să se afle valorile parametrului real a pentru care rădăcinile x_1, x_2, x_3 ale ecuației $x^3 - x - a = 0$ verifică inegalitatea: $x_1^6 + x_2^6 + x_3^6 \geq x_1^5 + x_2^5 + x_3^5$.

3°. Se consideră funcția $f: \mathbf{R} \setminus \{1, 2\} \to \mathbf{R}$, $f(x) = \frac{1}{x^2 - 3x + 2}$. Să se determine limita șirului $(a_n)_{n\geq 0}$ cu termenul general:

$$a_n = n^2 \cdot \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} f^{(k)}(n + 3).$$

4°. Să se calculeze parametrii reali a și b astfel încît graficul funcției $f: \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, $f(x) = \sqrt[3]{ax^3 + bx^2}$, să admită dreapta $y = 2x - \frac{1}{3}$ ca asimptotă.

5°. Să se reprezinte grafic funcţia $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, $f(x) = (1 + x)e^{-|x-1|}$ şi să se calculeze aria mulţimii cuprinse între graficul funcţiei f, axele de coordonate şi dreapta $x = 2$.

b. GEOMETRIE PLANĂ ŞI ÎN SPAŢIU ŞI TRIGONOMETRIE

XLII. 1°. Fie O punctul de intersecţie a diagonalelor unui trapez. Să se arate că dreapta determinată de punctul O şi de punctul de intersecţie a laturilor neparalele ale trapezului trece prin mijloacele bazelor trapezului.

2°. În triunghiul ABC se consideră punctele $M \in [AC]$ şi $N \in [BC]$. Dreptele AN şi BM se intersectează în punctul O. Să se determine ariile triunghiurilor OMN şi CMN în funcţie de ariile S_1, S_2, S_3 ale triunghiurilor OMA, OAB, ONB.

3°. Să se rezolve ecuaţia: $\cos^2 x + 4 \sin x \cos x - 2 \sin^2 x = 2$.

4°. Se dă un tetraedru regulat $ABCD$ cu muchia de lungime a. Se secţionează tetraedrul cu un plan variabil paralel cu muchiile opuse $[AB]$ şi $[CD]$. Să se determine aria maximă a secţiunilor obţinute.

5°. Să se demonstreze că suma distanţelor unui punct variabil, din interiorul unui tetraedru regulat, la feţele tetraedrului este constantă.

2. ÎNVĂŢĂMÎNT UNIVERSITAR

α. PROFILUL MATEMATIC (Specializările: *Matematică*, învăţămînt de zi şi fără frecvenţă; *Informatică*, *Matematică-Mecanică*, învăţămînt de zi şi seral).

a. ALGEBRĂ

XLIII. 1°. Se consideră funcţia $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}, f(x) = mx^2 + (2m + 1)x + 2m - 1$. Să se discute după parametrul real m natura şi semnul rădăcinilor ecuaţiei $f(x) = 0$.

2°. Se consideră funcţia $f : \mathbf{N} \to \mathbf{N}$, $f(n) = 3n + 1$. Să se construiască o funcţie $g : \mathbf{N} \to \mathbf{N}$ astfel încît $g \circ f = 1_{\mathbf{N}}$. Arătaţi că, pentru orice asemenea funcţie g are loc afirmaţia: $f \circ g \neq 1_{\mathbf{N}}$.

3°. Să se discute după parametrii reali a, b, c şi să se rezolve sistemul:

$$\begin{cases} x + y + z = 1; \\ ax + by + (a+b)z = c; \\ a^2x + b^2y + (a^2+b^2)z = c^2. \end{cases}$$

4°. Se defineşte pe mulţimea $\mathbf{R}$ a numerelor reale legea de compoziţie: $x * y = xy - ax + by$. Să se determine numerele reale a şi b astfel încît $(\mathbf{R}, *)$ să devină un monoid. Pentru fiecare din monoizii astfel obţinuţi să se determine elementele inversabile.

5°. Să se demonstreze că pentru orice număr natural $n > 0$ este adevărată egalitatea:

$$1 + 2C_n^1 + 3C_n^2 + \ldots + (n-1)C_n^n = 2^{n-1}(n+2).$$

b. ELEMENTE DE ANALIZĂ MATEMATICĂ

XLIV. 1°. Să se calculeze:

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{2\ln 2} + \frac{1}{3\ln 3} + \ldots + \frac{1}{n\ln n}\right).$$

2°. Să se arate că, pentru orice număr natural $k \geqslant 2$, avem:

$$0 < \ln(\ln(k+1)) - \ln(\ln k) < \frac{1}{k\ln k}.$$

3°. Să se calculeze:

$$\lim_{n\to\infty}\left(\lim_{x\to 0}(1+\operatorname{tg}^2 x+\operatorname{tg}^2(2x)+\ldots+\operatorname{tg}^2(nx))^{\frac{1}{n^3x^2}}\right).$$

4°. Să se reprezinte grafic funcţia: $f: \mathbf{R}\to\mathbf{R}$ dată prin:

$$f(x) = (x-1)\arcsin\sqrt{\frac{x^2}{x^2+1}}.$$

5°. Să se calculeze:

$$\lim_{n\to\infty}\left(\int_a^b (x-a)^n(b-x)^n\mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{n}} \text{ dacă } a<b.$$

c. GEOMETRIE PLANĂ ŞI ÎN SPAŢIU, TRIGONOMETRIE ŞI GEOMETRIE ANALITICĂ

XLV. 1°. Se dă cercul $\mathscr{C}(O, R)$ şi se consideră $A\in\mathscr{C}(O, R)$, $B\in\mathscr{C}(O, R)$ astfel încît $AB<2R$. Fie C punctul diametral opus lui B iar D punctul de intersecţie al tangentelor în A şi B la cercul dat. Dreptele AC şi AO intersectează tangenta BD, respectiv, în E şi F. Dreapta OB intersectează tangenta AD în G. Să se arate că:

a) D este mijlocul segmentului $[EB]$;

b) Dreptele FC şi EG sînt perpendiculare.

2°. Se consideră în plan triunghiurile ABC cu vîrfurile B şi C fixe şi cu unghiul $\widehat{BAC}$ de măsură dată. Care dintre aceste triunghiuri are perimetrul maxim?

3°. Se consideră piramida regulată $SABCD$, cu vîrful S şi cu baza pătratul $ABCD$. Fie O piciorul înălţimii piramidei şi M mijlocul segmentului $[SO]$. Distanţa punctului M la planul (ASB) este p, iar distanţa lui M la dreapta SA este q.

a) Să se arate că $p<q<p\sqrt{2}$.

b) Să se determine volumul piramidei în funcţie de p şi q.

4°. Se dau A şi B punctele distincte în plan şi $C\in(AB)$. Să se găsească locul geometric al punctelor M din plan cu proprietatea că cercul înscris în triunghiul MAB este tangent dreptei AB în C.

5°. Să se discute şi să se rezolve ecuaţia:

$$\arcsin ax = \arccos bx,\ (a, b\in\mathbf{R}).$$

β. PROFILUL MATEMATICĂ (Specializarea *Matematică-Fizică*, 3 ani, învăţămînt de zi).

ALGEBRĂ (clasele IX – X), GEOMETRIE PLANĂ ŞI ÎN SPAŢIU ŞI TRIGONOMETRIE

XLVI. 1°. Să se rezolve sistemul:

$$\begin{cases}\sqrt{x+y}+\sqrt[3]{x-y}=6;\\ \sqrt[6]{(x+y)^3(x-y)^2}=8.\end{cases}$$

2°. Să se rezolve ecuaţia: $x^3+ax^2+x+1=0$, ştiind că rădăcinile sale x_1, x_2, x_3 satisfac relaţiile: $x_1^3+x_2^3+x_3^3=-1$ şi $x_1^4+x_2^4+x_3^4=4a-1$.

3°. Se dau în spaţiu dreptele d şi d'. Să se arate că prin fiecare punct al spaţiului trece o dreaptă perpendiculară pe d şi d'.

4°. Să se determine unghiurile triunghiului dreptunghic ale cărui laturi formează o progresie aritmetică.

3. ALTE PROFILURI

α. PROFILUL GEODEZIE (Specializarea *Cadastru funciar*, subingineri seral).

ALGEBRĂ, GEOMETRIE PLANĂ ŞI TRIGONOMETRIE

XLVII. 1°. Să se rezolve sistemul:

$$\begin{cases} \left(\frac{3}{2}\right)^{x-y} - \left(\frac{2}{3}\right)^{x-y} = \frac{65}{36} \\ xy - x + y = 118. \end{cases}$$

2°. Să se scrie primii cinci termeni ai unei progresii geometrice (a_n) dacă:

$$\begin{cases} a_5 - a_1 = 15; \\ a_4 - a_2 = 6. \end{cases}$$

3°. Să se rezolve ecuaţia: $\sin 3x - \cos 2x - \sin x = 0$.

4°. Tangentele în punctele A şi B, la un cerc de centru O, se întîlnesc într-un punct C. Prin A se duce paralela la BC care intersectează din nou cercul în D, iar dreapta CD intersectează a doua oară cercul în E. În sfîrşit, AE intersectează pe BC în F.

1. Să se arate că:

a) unghiurile $\widehat{CAE}$, $\widehat{BCE}$ au aceeaşi măsură;

b) $FC^2 = FE \cdot FA$.

2. La ce distanţă de centrul O trebuie să fie punctul C ca patrulaterul $ADBC$ să fie romb?

β. PROFILUL CHIMIE (subingineri seral).

ALGEBRĂ

XLVIII. 1°. Să se rezolve ecuaţia: $\left(\sqrt{2+\sqrt{3}}\right)^x + \left(\sqrt{2-\sqrt{3}}\right)^x = 4$.

2°. Să se rezolve ecuaţiile:

$$\begin{cases} x^4 - 2x^3 - x + 2 = 0; \\ x^4 - 4x^3 + 6x^2 - 5x + 2 = 0, \end{cases}$$

ştiind că au rădăcini comune.

3°. Fie:

$$f_m(x) = mx^2 + 2(m-1)x + m - 1,\ m \in \mathbf{R}\setminus\{0\}.$$

Să se determine m astfel încît $f_m(x) \geqslant 0$ pentru orice $x \in \mathbf{R}$.

4°. În corpul claselor de resturi modulo 11, să se rezolve sistemul:

$$\begin{cases} \hat{2}x + \widehat{10}y + z = \hat{4}; \\ x + \hat{3}z = \hat{2}; \\ \widehat{10}x + \hat{2}y + \hat{2}z = \hat{1}. \end{cases}$$

γ. PROFILUL FORESTIER (Specializarea *Silvicultură şi exploatări forestiere*, ingineri zi şi seral).

ALGEBRĂ

XLIX. 1°. Să se rezolve sistemul:

$$\begin{cases} x + y + z = 4; \\ x^2 + y^2 + z^2 = 14; \\ x^3 + y^3 + z^3 = 34. \end{cases}$$

2°. Folosind metoda inducţiei matematice, să se calculeze suma:

$$\frac{1}{1 \cdot 4} + \frac{1}{4 \cdot 7} + \ldots + \frac{1}{(3n-2)(3n+1)}.$$

3°. a) Să se determine cel mai mare divizor comun al polinoamelor: $X^5 - 5X^4 - 6X^3 - 6X^2 - 7X - 1$; $2X^4 - 16X^3 + 23X^2 - 2X - 1$.

b) Să se rezolve ecuaţia: $2x^4 - 16x^3 + 23x^2 - 2x - 1 = 0$.

4°. Să se rezolve ecuaţia:

$$\log_x \sqrt[3]{4} + 3 \log_x (x\sqrt[3]{4}) + 6 \log_x^2 \sqrt[3]{4} = 5.$$

5°. a) Să se arate că, pe intervalul $(-1, 1)$, legea de compoziţie: $x \top y = \dfrac{x+y}{1+xy}$, determină o structură de grup comutativ.

b) Să se arate că între grupul multiplicativ al numerelor reale pozitive şi grupul de la punctul a există un izomorfism $f: (0, \infty) \to (-1, 1)$, de forma: $f(x) = \dfrac{mx - 1}{x + 1}$, unde $m \in \mathbf{R}$, care trebuie determinat corespunzător.

ENUNŢURI
1987

1. ÎNVĂŢĂMÎNTUL TEHNIC

α. PROFILUL: ELECTRIC, ENERGETIC, MECANIC, CONSTRUCŢII

a. ALGEBRĂ ŞI ELEMENTE DE ANALIZĂ MATEMATICĂ

L. 1°. Să se determine termenul care îl conţine pe b^2 din dezvoltarea $(\sqrt{a} - \sqrt[3]{b})^n$, ştiind că n este cel mai mare număr natural ce verifică inecuaţia:

$$\log_{\frac{1}{3}} n + \log_{\frac{n}{3}} n > 0.$$

2°. Fie sistemul:

$$\begin{cases} x + y + z = 1; \\ \alpha x + \beta y + \gamma z = 1; \\ \alpha^2 x + \beta^2 y + \gamma^2 z = 1. \end{cases}$$

Să se discute sistemul după valorile parametrilor reali α, β, γ şi, în cazul cînd este compatibil determinat, să se rezolve.

3°. Să se determine un polinom $f \in \mathbf{R}[X]$, de grad minim, astfel încît funcția polinomială asociată să aibă un maxim egal cu 6 pentru $x = 1$ și un minim egal cu 2 pentru $x = 3$.

4°. Fie $a_0, a_1, \ldots, a_k$ numere reale astfel încît $a_0 + a_1 + \ldots + a_k = 0$. Să se calculeze:

$$\lim_{n\to\infty} (a_0 \sqrt[3]{n} + a_1 \sqrt[3]{n+1} + \ldots + a_k \sqrt[3]{n+k}).$$

5°. Să se calculeze: $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos 2x}{1 + \cos x} \mathrm{d}x$

b. GEOMETRIE PLANĂ, GEOMETRIE ÎN SPAȚIU ȘI TRIGONOMETRIE

LI. 1°. Se notează cu M, N și P respectiv mijloacele laturilor $[BC]$, $[CA]$ și $[AB]$ ale triunghiului oarecare ABC. Dreptele AM, BN și CP intersectează cercul circumscris triunghiului ABC respectiv în Q, S și T. Să se demonstreze inegalitatea:

$$\frac{AM}{MQ} + \frac{BN}{NS} + \frac{CP}{PT} \geqslant 9.$$

2°. Latura $[BC]$ a triunghiului ABC este fixă, iar vîrful A este mobil astfel încît suma $\operatorname{tg} B + \operatorname{tg} C$ este aceeași pentru orice poziție a lui A. Să se afle locul geometric al ortocentrului triunghiului ABC.

3°. Se consideră tetraedrul $ABCD$ în care se cunosc: $m(\widehat{BAC}) = \alpha$, $m(\widehat{CAD}) = \beta$ și $m(\widehat{DAB}) = \gamma$. Să se calculeze măsura unghiului diedru format de fețele ABC și ABD în funcție de α, β, γ.

4°. Să se determine $x \in [0, \pi]$ astfel încît:

$$\cos^2 x + \cos^2 2x + \cos^2 3x = 1 \text{ și } \cos 2x \in \left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right].$$

5°. Se dă triunghiul oarecare ABC și se consideră punctul $D \in [BC]$ astfel încît $BC = 3DC$. Se notează cu E mijlocul medianei $[CC']$. Să se arate că punctele A, D și E sînt coliniare.

β. PROFILUL: ELECTRIC, MECANIC, CONSTRUCȚII

a. ALGEBRĂ ȘI ELEMENTE DE ANALIZĂ MATEMATICĂ

LII. 1°. Să se arate că pentru orice întreg $n \geqslant 2$,

$$\frac{4^n}{n+1} < \frac{(2n)!}{(n!)^2},$$

2°. Știind că rădăcinile x_1, x_2, x_3 ale ecuației $x^3 + x^2 + ax + b = 0$; $a, b \in \mathbf{R}$ sînt reale, să se arate că acestea sînt egale dacă și numai dacă:

$$\begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ x_3 & x_1 & x_2 \\ x_2 & x_3 & x_1 \end{vmatrix} = 0.$$

Să se rezolve în acest caz ecuația dată și să se determine a și b.

3°. Fie A un inel astfel încît $x^6 = x$, pentru orice $x \in A$. Să se arate că $x^2 = x$, pentru orice $x \in A$.

4°. Să se calculeze: $\lim_{x\to\infty}\left(\operatorname{tg}\frac{\pi x}{2x+1}\right)^{\frac{1}{x}}$.

5°. Se consideră funcția $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$,

$$f(x) = \begin{cases} (x-1)e^{-x} & \text{dacă } x \in (-\infty, 1), \\ \dfrac{\ln^2 x}{x} & \text{dacă } x \in [1, \infty). \end{cases}$$

Să se arate că f are primitive și să se calculeze o primitivă a sa.

b. GEOMETRIE PLANĂ ȘI ÎN SPAȚIU ȘI TRIGONOMETRIE

LIII. 1°. Pe diametrul (AB) al cercului $\mathcal{C}$ se consideră un punct fix D și fie M un punct mobil pe cerc. Perpendiculara în M pe MD intersectează tangentele în A și B la cerc respectiv în E și F. Să se arate că produsul $AE \cdot BF$ nu depinde de poziția punctului M pe cerc.

2°. Se dau punctele A și B de afixe $a = 1 + i$ și respectiv $b = \sqrt{3} + 1 + 2i$. Să se determine afixele punctelor M astfel încît $m(\widehat{BAM}) = 45°$ și $AB = AM$.

3°. Diagonala $[AC']$ a paralelipipedului dreptunghic $ABCDA'B'C'D'$ formează cu muchiile $[AB]$, $[AD]$ și $[AA']$ respectiv unghiurile α, β și γ. Să se arate că:

$$\frac{1}{\cos^2\alpha} + \frac{1}{\cos^2\beta} + \frac{1}{\cos^2\gamma} \geqslant 9.$$

4°. Se dau două cercuri secante $\mathcal{C}_1$ și $\mathcal{C}_2$. Prin unul din punctele lor de intersecție se duce o dreaptă variabilă care intersectează a doua oară cercurile $\mathcal{C}_1$ și $\mathcal{C}_2$ în M_1 și, respectiv, M_2. Să se afle locul geometric al punctului $M \in (M_1M_2)$ astfel încît $MM_1 = 2MM_2$.

5°. Se notează cu a, b și c, aria totală a unui con circular drept, volumul conului și respectiv aria sferei înscrise în acest con. Să se demonstreze egalitatea: $a^2 \cdot c = 36\pi b^2$.

γ. PROFILUL: METALURGIE, CHIMIE, ARHITECTURĂ ȘI SISTEMATIZARE, MINE, PETROL, GEOLOGIE

a. ALGEBRĂ ȘI ELEMENTE DE ANALIZĂ MATEMATICĂ

LIV. 1°. Fie funcția $f : \mathbf{R} \to (1, \infty)$, $f(x) = 4^x + 2^x + 1$. Să se arate că f este bijectivă, să se determine $g = f^{-1}$ și să se calculeze $g'(3)$.

2°. Să se arate că oricare ar fi $a, b, c, \in \mathbf{Z}$ sistemul:

$$\begin{cases} \dfrac{1}{2}x = ax + by + cz; \\ \dfrac{1}{2}y = cx + ay + bz; \\ \dfrac{1}{2}z = bx + cy + az, \end{cases}$$

admite numai soluția $x = y = z = 0$.

3°. Fie $\mathcal{M} = \{A \in M_2(\mathbf{R}) \mid {}^tA \circ A = E\}$, unde ${}^tA$ este transpusa matricei A, iar $E = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. Să se arate că:

a) Pentru orice $A \in \mathcal{M}$, $\det A = \pm 1$;

b) Operația de înmulțire a matricelor determină pe $\mathcal{M}$ o structură de grup.

4°. Știind că șirul $(a_n)_{n\geq 1}$, $a_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2}$, este convergent și are limita $\frac{\pi^2}{6}$, să se arate că șirul $(b_n)_{n\geq 1}$, $b_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{(2k-1)^2}$ este convergent și să i se calculeze limita.

5°. Fie funcția $f: \mathbf{R}\setminus\{1\} \to \mathbf{R}$, $f(x) = \ln\left(1 + \frac{1}{|x-1|}\right)$. Să se calculeze aria mulțimii mărginite de graficul funcției, cele două axe de coordonate și dreapta $x = \frac{1}{2}$.

b. GEOMETRIE PLANĂ ȘI ÎN SPAȚIU ȘI TRIGONOMETRIE

LV. 1°. Fie $[AB]$ un diametru fix al cercului $\mathcal{C}(O, r)$ și M un punct mobil pe cerc. Tangenta în M la cerc intersectează dreapta AB în N. Să se afle locul geometric al centrului cercului înscris în triunghiul ONM.

2°. Se dă triunghiul ABC în care $\operatorname{tg} A = 3$ și $\operatorname{tg} B = 2$. Să se arate că ortocentrul triunghiului coincide cu mijlocul înălțimii $[AA']$.

3°. Se consideră piramida $SABCD$ avînd ca bază dreptunghiul $ABCD$ cu $AB = 2a$, $BC = a$ și a cărei înălțime este $SD = 2a$. Să se determine un punct $P \in (SB)$ astfel încît triunghiul APC să fie dreptunghic în P.

4°. Se dă funcția $f: \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, $f(x) = \cos 3x + \cos 5x - \cos x$, și se cere să se calculeze $f\left(\frac{\pi}{24}\right)$.

5°. Fie O centrul cercului $\mathcal{C}$ circumscris triunghiului oarecare ABC. Tangenta în B la $\mathcal{C}$ intersectează dreapta AC în D. Cercul circumscris triunghiului BCD intersectează a doua oară dreapta AB în E. Să se arate că:

a) Dreapta DE este tangentă cercului circumscris triunghiului ACE;

b) Dreptele AO și DE sînt perpendiculare.

δ. PROFILUL MECANIC

a. ALGEBRĂ ȘI ELEMENTE DE ANALIZĂ MATEMATICĂ

LVI. 1°. Să se rezolve sistemul:

$$\begin{cases} C_x^3 x^3 \cdot 2^{x-3} - C_x^4 x^4 \cdot 2^{x-4} < 0; \\ C_x^5 x^5 \cdot 2^{x-5} - C_x^4 x^4 \cdot 2^{x-4} < 0. \end{cases}$$

2°. Să se arate că ecuația $x^3 - x^2 - x - 1 = 0$ admite o singură rădăcină reală. Fie aceasta x_1. Să se calculeze $\lim_{n\to\infty} (x_2^n + x_3^n)$, unde x_2 și x_3 sînt celelalte două rădăcini ale ecuației date.

3°. Să se determine a astfel încît polinomul: $\hat{2}X^3 + (a + \hat{2})X + \hat{1} \in \mathbf{Z}_3[X]$ să fie ireductibil peste $\mathbf{Z}_3$.

4°. Fie $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$,

$$f(x) = \begin{cases} e^{\frac{1}{x^2+x}}, & x \in (-1, 0); \\ 0, & x \in \mathbf{R} \setminus (-1, 0). \end{cases}$$

Să se studieze derivabilitatea funcţiei f pe $\mathbf{R}$.

5°. Să se traseze graficul funcţiei $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, $f(x) = \sqrt{|x^2 - 1|} - x$ şi să se afle aria mulţimii mărginite de graficul funcţiei, axa Ox şi dreptele $x = -\frac{1}{2}$, $x = \frac{1}{2}$.

b. GEOMETRIE PLANĂ ŞI ÎN SPAŢIU ŞI TRIGONOMETRIE

LVII. 1°. În cercul $\mathcal{C}$ se înscrie triunghiul ABC avînd vîrful A fix, iar vîrfurile B şi C variabile pe cerc astfel încît $AB^2 + AC^2 = k$, unde k este un număr pozitiv dat. Să se afle locul geometric al mijlocului M al laturii $[BC]$.

2°. Să se arate că dacă în triunghiul ABC are loc egalitatea $BC = \sqrt{2}AC$, atunci mediana $[AA']$ formează cu latura $[BC]$ un unghi congruent cu unghiul A.

3°. Se consideră o piramidă triunghiulară regulată $ABCD$ cu baza BCD. Pe muchia $[AB]$ se ia un punct M astfel încît $AB = 4AM$ şi se notează cu N mijlocul muchiei $[CD]$. Să se arate că MN trece prin mijlocul înălţimii $[AO]$ a piramidei.

4°. Să se demonstreze egalitatea:

$$\cos\frac{2\pi}{7} + \cos\frac{4\pi}{7} + \cos\frac{6\pi}{7} + \frac{1}{2} = 0.$$

5°. Două plane perpendiculare intersectează o sferă după cercurile de raze a şi b. Se cunoaşte distanţa c de la centrul sferei la dreapta de intersecţie a planelor. Să se calculeze raza sferei în funcţie de a, b, c.

2. ÎNVĂŢĂMÎNT UNIVERSITAR

α. PROFILUL MATEMATICĂ (Specializările: *Matematică*, învăţămînt de zi şi fără frecvenţă; *Informatică*, *Matematică-Mecanică*, învăţămînt de zi şi seral).

a. ALGEBRĂ

LVIII. 1°. Să se rezolve sistemul:

$$\begin{cases} \sqrt{3x + y} + \sqrt{x - y} = 6; \\ 3x + \sqrt{x - y} = 17, \end{cases}$$

unde $x, y \in \mathbf{R}$.

2°. Să se reprezinte în plan imaginile geometrice ale numerelor complexe z care îndeplinesc condiţia: $\left|\frac{z^2 + i}{z^2 - 3i}\right| = 1$.

3°. Să se arate că dacă n şi k sînt numere naturale cu $n \geqslant k + 3$, atunci coeficienţii binomiali: C_n^k, C_n^{k+1}, C_n^{k+2}, C_n^{k+3}, nu pot fi termenii consecutivi ai unei progresii aritmetice.

4°. Să se demonstreze că polinomul: $P(X) = (X - 1)^2(X - 2)^2 + 1$, nu se poate descompune în produs de două polinoame cu coeficienţi numere întregi.

5°. Fie G mulțimea matricilor din $M_3(\mathbf{R})$ de forma:

$$M_{a,b} = \begin{pmatrix} a & b & b \\ b & a & b \\ b & a & a \end{pmatrix}$$

și avînd proprietatea $\det(M_{a,b}) = 1$. Să se arate că G este un grup în raport cu înmulțirea matricilor.

b. ELEMENTE DE ANALIZĂ MATEMATICĂ

LIX. 1°. Fie $(X_n)_{n\geqslant 1}$ un șir de numere reale pozitive astfel încît

$$(n+1)X_{n+1} - nX_n < 0$$

pentru orice $n \geqslant 1$. Să se arate că șirul $(X_n)_{n\geqslant 1}$ este convergent și să se calculeze limita sa.

2°. Să se reprezinte grafic funcția $f : D \to \mathbf{R}$ definită prin

$$f(x) = \frac{x^2}{x+1}\, e^{\frac{1}{x}},$$

unde D este domeniul maxim de definiție.

3°. Să se arate că pentru orice $a \in (0, 1]$ există $n \in \mathbf{N}$ și $x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ astfel încît: $\sin^{2n} x + \cos^{2n} x = a$.

4°. Să se arate că pentru orice $x \geqslant 2$ are loc inegalitatea:

$$(x+1)\cos\frac{\pi}{x+1} - x\cos\frac{\pi}{x} > 1.$$

5°. Să se calculeze: $\displaystyle\int_{-1}^{-\frac{\sqrt{2}}{2}} \frac{\arcsin x}{x^2}\, dx.$

c. GEOMETRIE PLANĂ ȘI ÎN SPAȚIU, TRIGONOMETRIE ȘI GEOMETRIE ANALITICĂ

LX. 1°. Fie A în interiorul cercului $\mathscr{C}(O, R)$, $A \neq 0$ și (BC) coarda ce trece prin A și este perpendiculară pe OA. Să se arate că pentru orice punct $M \in \mathscr{C}(O, R)$ avem $m(\widehat{AMO}) \leqslant m(\widehat{ABO})$.

2°. Fie $[AB]$ și $[CD]$ diametri perpendiculari în cercul $\mathscr{C}(O, R)$ și $M \in (OA)$. Dreapta CM intersectează iar cercul în N. Tangenta în N la cerc se intersectează cu paralela prin M la CD în P.

i) Să se arate că patrulaterul $OMNP$ este un trapez isoscel.

ii) Să se afle locul geometric al punctului $Q = ON \cap MP$ cînd M parcurge segmentul (OA).

3°. Să se arate că pentru orice con circular drept raportul dintre aria sa totală și aria sferei înscrise este mai mare sau egal cu 2.

4°. Se consideră în plan două drepte perpendiculare. Să se determine mulțimea punctelor M din plan cu proprietatea că suma distanțelor lui M la dreptele date este egală cu suma inverselor distanțelor lui M la cele două drepte date.

5°. Să se discute și să se rezolve ecuația:

$$m^2 \sin^2 3x = \sin^2 x,\ m \in \mathbf{R},\ m > 0.$$

β. PROFILUL MATEMATICĂ (Specializarea *Matematică-Fizică*, 3 ani învățămînt de zi).

ALGEBRĂ (clasele IX–X), GEOMETRIE PLANĂ ȘI ÎN SPAȚIU ȘI TRIGONOMETRIE

LXI. 1°. Să se determine numerele naturale distincte m, p, n, q pentru care polinomul $X^m + X^n + X^p + X^q$ este divizibil cu $X^3 + X^2 + X + 1$.

2°. Există termeni independenți de x în dezvoltarea binomului

$$\left(\sqrt{x\sqrt[3]{x^2}} + \frac{2}{\sqrt[3]{x}}\right)^{1988} ?$$

Să se scrie acești termeni în caz că există.

3°. În triunghiul ABC ($m(\hat{A}) = 90°$) se duce înălțimea $[AD]$, $D \in (BC)$ și se consideră $F \in (AD)$. Perpendiculara în F pe FC intersectează pe AB în G. Paralela prin A la FG intersectează pe BC în H. Să se arate că patrulaterul $AGFH$ este paralelogram.

4°. Să se rezolve ecuația: $\arccos x = \operatorname{arctg} x$.

3. ALTE PROFILURI

α. PROFILUL: FORESTIER (Specializarea *Silvicultură și exploatări forestiere*, ingineri zi), TEHNOLOGIA ȘI CHIMIA PRODUSELOR ALIMENTARE ȘI TEHNICA PISCICOLĂ (ingineri zi și, după caz, seral).

ALGEBRĂ

LXII. 1°. Să se studieze în raport cu $\alpha \in \mathbf{R}_+^*$ și să se rezolve sistemul:

$$\begin{cases} 2^{\frac{x}{y}} = \alpha^{\frac{y}{x}}; \\ x^2 = y^x. \end{cases}$$

2°. Cum trebuie alese numerele naturale m, n, p astfel încît polinomul $P = X^{3m} - X^{3n+1} + X^{3p+2}$ să fie divizibil cu $X^2 - X + 1$.

3°. Să se determine permutarea $\sigma \in S_7$ dacă:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 7 & 3 & 2 & 1 & 6 & 5 & 4 \end{pmatrix} \circ \sigma \circ \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 3 & 1 & 2 & 7 & 4 & 5 & 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 5 & 1 & 3 & 6 & 4 & 7 & 2 \end{pmatrix}.$$

4°. Fie matricea $X \in M_4(\mathbf{N})$:

$$X = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Să se arate că matricile $X, X^2, X^3, \ldots$ formează un grup multiplicativ abelian. Cîte elemente are acest grup?

5°. Fie $z_1 = a + bi$ și $z_2 = \dfrac{1 - \bar{z}_1}{1 + \bar{z}_1}$ două numere complexe. Cum trebuie ales z_1 astfel încît $z_1 - z_2$ și z_2^2 să fie numere reale?

β. TOATE PROFILURILE (subingineri seral).

ALGEBRĂ, GEOMETRIE PLANĂ ȘI TRIGONOMETRIE

LXIII. 1°. Să se rezolve ecuația:

$$2\cos^6 x - 2\sin^6 x = \sin 4x.$$

2°. Să se rezolve inecuația: $\left(\frac{3}{4}\right)^{-6x+10-x^2} < \frac{27}{64}$.

3°. Să se găsească patru numere întregi, consecutive, așa fel încît cubul celui mai mare să fie egal cu suma cuburilor celorlalte trei.

4°. Să se arate că un triunghi este dreptunghic dacă și numai dacă are loc egalitatea: $\sin^2 A + \sin^2 B + \sin^2 C = 2$.

LXIV. 1°. Să se rezolve ecuația: $\sin^4 x + 5\cos 2x + 4 = 0$.

2°. Să se rezolve inecuația:

$$\frac{1}{5-\log_a x} + \frac{2}{1+\log_a x} < 1; \quad 0 < a < 1.$$

3°. Să se rezolve ecuația:

$$\begin{vmatrix} x & a & b & c \\ a & x & c & b \\ b & c & x & a \\ c & b & a & x \end{vmatrix} = 0.$$

4°. În ce fel de triunghi are loc egalitatea:

$$\sin B + \cos B = \sin C + \cos C.$$

γ. PROFILUL: CHIMIE, TEHNOLOGIA ȘI CHIMIA PRODUSELOR ALIMENTARE ȘI TEHNICĂ PISCICOLĂ (subingineri seral).

ALGEBRĂ

LXV. 1°. Să se rezolve ecuația:

$$\log_{\sqrt{x}}(x + |x-2|) = \log_x(5x - 6 + 5|x-2|).$$

2°. Să se afle matricea X dacă:

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \cdot X - X \cdot \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

3°. Să se demonstreze că pentru $(\forall)n \geq 3$, $n \in \mathbf{N}$, are loc inegalitatea:

$$2^n > 2n + 1.$$

4°. Să se determine parametrul real a și să se rezolve ecuația: $x^3 - 3x^2 + ax + 8 = 0$, știind că produsul a două rădăcini este egal cu 2.

8 PROFILUL ECONOMIC

ALGEBRĂ ŞI ELEMENTE DE ANALIZĂ MATEMATICĂ

LXVI. 1°. Să se demonstreze egalitatea:

$$1^3 + 2^3 + 3^3 + \dots + n^3 = \left[\frac{n(n+1)}{2}\right]^2, \quad n \in \mathbf{N}^*,$$

şi să se calculeze suma:

$$1 + 2(1 + 2) + 3(1 + 2 + 3) + \dots + n(1 + 2 + 3 + \dots + n).$$

2°. Să se rezolve în corpul numerelor complexe sistemul:

$$\begin{cases} (x+1)^2(y+1)^2 = 15xy; \\ (x^2+1)(y^2+1) = 3xy. \end{cases}$$

3°. Fie în $M_2(\mathbf{R})$ egalitatea matricială:

$$\begin{pmatrix} a_1 & a_2 \\ a_3 & a_4 \end{pmatrix}^2 = \begin{pmatrix} b_1 & b_2 \\ b_3 & b_4 \end{pmatrix}.$$

Să se arate că dacă a_1, a_2, a_3, a_4 sînt în progresie aritmetică, atunci $b_2 - b_1, b_3 - b_2, b_4 - b_3$ sînt tot în progresie aritmetică.

4°. Fie funcţia $f : [1, 3] \to \mathbf{R}$, $f(x) = \begin{cases} \dfrac{25x}{x^2+1} - 1, & x \in [1, 2], \\ \dfrac{(x+1)^2}{x-1}, & x \in (2, 3]. \end{cases}$

Să se verifice dacă este aplicabilă teorema lui Lagrange şi să se determine punctele $x = c$ corespunzătoare.

5°. Să se găsească parametrul real α astfel încît graficul funcţiei f, $f(x) = \dfrac{-x}{\sqrt{\alpha - x^3}}$, să admită un punct de inflexiune în $x = -1$. Pentru $\alpha = \dfrac{1}{8}$ să se reprezinte grafic funcţia obţinută şi să se calculeze volumul corpului de rotaţie determinat de f pentru $x \in [-1, 0]$.

LXVII. 1°. Să se calculeze determinantul:

$$\begin{vmatrix} x_1^2 & x_2^2 & x_3^2 \\ x_2 & x_3 & x_1 \\ x_3 & x_1 & x_2 \end{vmatrix},$$

ştiind că x_1, x_2, x_3 sînt soluţiile ecuaţiei $x^3 - x^2 + 5x + 2 = 0$.

2°. Fie $a_1, a_2, \dots, a_n \in \mathbf{R} \setminus \{0\}$ termenii unei progresii aritmetice cu raţia $r \neq 0$. Să se găsească suma:

$$\frac{1}{a_1 a_2} + \frac{1}{a_2 a_3} + \dots + \frac{1}{a_{n-1} a_n}, \quad n \in \mathbf{N}^*$$

în funcţie de a_1, r şi n. Să se verifice rezultatul folosind metoda inducţiei complete.

3°. Să se rezolve în $\mathbf{C}$ sistemul:

$$\begin{cases} xy^2 + x^2y = 6; \\ x^2y^3 + x^3y^2 = 36, \end{cases}$$

$\mathbf{C}$ fiind corpul numerelor complexe.

4°. Fie funcţia $f : [1, 4] \to \mathbf{R}$, $f(x) = \dfrac{x^2}{2} - \ln \sqrt[4]{x}$. Să se calculeze aria suprafeţei de rotaţie determinată de funcţia f.

5°. Să se reprezinte grafic familia de funcții $f : D \times \mathbf{R} \to \mathbf{R}, f(x, k) = x^2 \sqrt{x+k}$, unde k este un număr real pozitiv, negativ sau nul.

LXVIII. 1°. Fie ecuația:

$$x^2 - (a+b)x + ab = -\sqrt{[(a+b)x - ab]^2 - x^2}.$$

Cum trebuie aleși parametrii reali $0 \leqslant a < b$ astfel încît ecuația să admită rădăcini reale?

2°. Folosind metoda inducției complete să se arate că dacă $x, y \geqslant 0$, atunci:

$$(x+y)^n \leqslant 2^{n-1}(x^n + y^n), \quad (\forall) n \in \mathbf{N}^*.$$

3°. Să se rezolve ecuația matricială:

$$X \cdot \begin{pmatrix} -3 & 4 & 0 \\ 1 & 1 & -2 \\ -2 & -1 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ -1 & 3 & -2 \end{pmatrix}.$$

4°. Fie funcția $f : [-\alpha, \alpha] \to \mathbf{R}$, $f(x) = \dfrac{e^{\alpha x} + e^{-\alpha x}}{2\alpha}$, $\alpha > 0$. Să se afle aria suprafeței de rotație determinată de f.

5°. Să se studieze continuitatea, derivabilitatea și să se reprezinte grafic funcția $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$,

$$f(x) = \begin{cases} \max(x, x^2, x^3), & x \leqslant 0, \\ \min\left(1 + x, \dfrac{1}{x}, e^x\right), & x > 0. \end{cases}$$

LXIX. 1°. Să se rezolve ecuația: $\left[\dfrac{x+2}{3}\right] = \dfrac{x}{2}$ și să se arate că soluțiile ei sînt în progresie aritmetică (s-a notat cu $[\alpha]$ partea întreagă a numărului real α).

2°. Să se rezolve, în inelul claselor de resturi modulo 6, sistemul:

$$\begin{cases} \hat{5}x + \hat{2}y = \hat{3}; \\ \hat{4}x + \hat{3}y = \hat{1}. \end{cases}$$

3°. Să se arate că polinomul: $P = X^{4n} + X^3 - X - 1$, $n \in \mathbf{N}^*$, este divizibil cu $(X^2 + X + 1)(X^2 - 1)$.

4°. Fie funcția $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, $f(x) = \begin{cases} e^{ax}, & x < 0, \\ (ax)^x, & x > 0, \end{cases}$ unde $a \in \mathbf{R}_+^*$. Să se studieze continuitatea și derivabilitatea funcției f în punctul $x = 0$. Să se calculeze: $\int_{-a}^{0} x^2 f(x)\, dx$.

5°. Să se reprezinte grafic $f(x) = \sqrt{\dfrac{x-5}{x+2}}$ și apoi să se studieze soluția ecuației $f(x) = m, m \in \mathbf{R}$.

REZOLVĂRI

I. 1°. Rădăcinile comune ale celor două ecuații polinomiale vor fi rădăcinile celui mai mare divizor comun al polinoamelor. Notăm:

$$P(X) = X^5 - 5X^4 + 6X^3 + 2X^2 - 12X + 8;$$

$$Q(X) = X^5 - 5X^4 + 3X^3 + 11X^2 - 6X - 4,$$

și aflăm cel mai mare divizor comun $D(X)$ prin algoritmul lui Euclid. Avem:

$$P(X) = Q(X) \cdot 1 + 3(X^3 - 3X^2 - 2X + 4);$$

$$Q(X) = (X^3 - 3X^2 - 2X + 4)\,(X^2 - 2X - 1),$$

deci $D(X) = X^3 - 3X^2 - 2X + 4$. Obținem apoi:

$$P(X) = (X^3 - 3X^2 - 2X + 4)\,(X^2 - 2X + 2).$$

Aflăm mai întîi rădăcinile comune ale celor două polinoame. Observăm că $D(X)$ are rădăcina $x_1 = 1$ și, prin schema lui Horner, obținem descompunerea: $D(X) = (X - 1)(X^2 - 2X - 4)$. Rezultă că rădăcinile comune sînt $X_1 = 1$, $X_2 = 1 + \sqrt{5}$, $X_3 = 1 - \sqrt{5}$. Polinomul $P(X)$ mai are și rădăcinile $x_4 = 1 + i$, $X_5 = 1 - i$, iar polinomul $Q(X)$ mai are și rădăcinile $x_4' = 1 + \sqrt{2}$, $x_5' = 1 - \sqrt{2}$.

2°. *Metoda I.* Calculăm A^2, A^3:

$$A^2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad A^3 = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 3 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Presupunem că $A^n = \begin{pmatrix} 1 & n & a_n \\ 0 & 1 & n \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ și calculăm:

$$A^{n+1} = A^n \cdot A = \begin{pmatrix} 1 & n+1 & a_n + n \\ 0 & 1 & n+1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Rezultă că $a_{n+1} = a_n + n$, $(\forall)\, n \geqslant 1$. Deducem:

$$a_n = (n-1) + a_{n-1} = (n-1) + (n-2) + a_{n-2} = \ldots =$$

$$= (n-1) + (n-2) + \ldots + 2 + 1 + a_1 = 1 + 2 + \ldots + (n-1) = \frac{(n-1)n}{2}.$$

Deci

$$A^n = \begin{pmatrix} 1 & n & \frac{(n-1)n}{2} \\ 0 & 1 & n \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Metoda II. Putem scrie matricea A astfel:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = I_3 + B.$$

Deoarece matricile I_3 și B comută la înmulțire (adică $I_3B = BI_3$) putem scrie formula (care se demonstrează prin inducție):

$$A^n = (I_3 + B)^n = \sum_{k=0}^{n} C_n^k I_3^{n-k} \cdot B^k = \sum_{k=0}^{n} C_n^k B^k. \text{ Dar}$$

$$B^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad B^3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

deci avem:

$$A^n = C_n^0 \cdot I_3 + C_n^1 \cdot B + C_n^2 \cdot B^2 =$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} + n \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + \frac{n(n-1)}{2} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & n & \frac{(n-1)n}{2} \\ 0 & 1 & n \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

3°. Asimptota oblică $y = x - 3$ are $m = 1$ și $n = -3$. Avem:

$$m = \lim_{x \to \infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \to \infty} \frac{ax^3}{(b + cx)^3} = \frac{a}{c^3} = 1,$$

deci $a = c^3$. Apoi:

$$n = \lim_{x \to \infty} [f(x) - x] = \lim_{x \to \infty} \left[\frac{c^3x^4}{(b + cx)^3} - x \right] =$$

$$= \lim_{x \to \infty} \frac{-3bc^2x^3 - 3b^2cx^2 - b^3x}{c^3x^3 + 2c^2bx^2 + 3cb^2x + b^3} = -3\frac{b}{c} = -3,$$

deci $b = c$. În acest caz funcția se scrie: $f(x) = \frac{x^4}{(x+1)^3}$ și $E = \mathbf{R} \setminus \{-1\}$. Avem: $\lim_{x \to \infty} f(x) = +\infty$ și $\lim_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$. Apoi:

$$\lim_{\substack{x \to -1 \\ x < -1}} f(x) = -\infty \quad \text{și} \quad \lim_{\substack{x \to -1 \\ x > -1}} f(x) = +\infty.$$

Graficul are asimptota verticală $x = 1$ și asimptota oblică $y = x - 3$ (la ambele ramuri $\pm\infty$). Calculăm: $f'(x) = \frac{x^3(x+4)}{(x+1)^4}$. Rezultă tabloul de variație:

x	$-\infty$		-4		-1		0		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	|	$-$	0	$+$	
(fx)	$-\infty$	$\nearrow$	$-\frac{256}{27}$	$\searrow$	$-\infty$ | $+\infty$	$\searrow$	0	$\nearrow$	$+\infty$

și graficul corespunzător (v. fig. M.B.1).

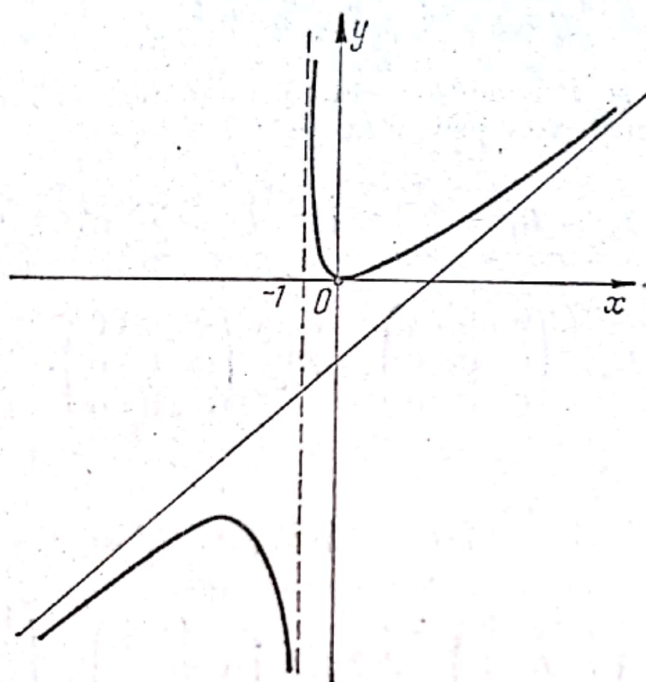


Fig. M.B.1

4°. Se obține imediat că $a_{n+1} = \frac{11}{10} a_n$, deci $(a_n)_{n\geq 0}$ este o progresie geometrică cu rația $q = \frac{11}{10}$. Rezultă $a_n = a_0 \cdot q^n = a_0 \cdot \left(\frac{11}{10}\right)^n$. Atunci:

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \begin{cases} +\infty & \text{dacă } a_0 > 0, \\ 0 & \text{dacă } a_0 = 0, \\ -\infty & \text{dacă } a_0 < 0. \end{cases}$$

5°. Avem: $\int_0^\pi x \cos^2 x \, dx = \int_0^\pi x \frac{1 + \cos 2x}{2} dx = \frac{1}{2}\int_0^\pi x \, dx + \frac{1}{2}\int_0^\pi x \cos 2x \, dx =$
$= \frac{x^2}{4}\Big|_0^\pi + \frac{1}{2}\left[x \cdot \frac{\sin 2x}{2}\Big|_0^\pi - \int_0^\pi \frac{\sin 2x}{2} dx\right] = \frac{\pi^2}{4} + \frac{\cos 2x}{8}\Big|_0^\pi = \frac{\pi^2}{4}$.

II. 1°. Teorema bisectoarei în triunghiul AMB ne dă relația $\frac{AP}{BP} = \frac{AM}{BM}$. Teorema bisectoarei în triunghiul BMC dă relația $\frac{CQ}{BQ} = \frac{CM}{BM}$ (v. fig. M.B.2). Dreapta PQ este paralelă cu dreapta AC dacă și numai dacă $\frac{AP}{BP} = \frac{CQ}{BQ}$ (Thales).

Din relațiile anterioare rezultă că PQ este paralelă cu AC dacă și numai dacă $\frac{AM}{BM} = \frac{CM}{BM}$, adică dacă și numai dacă $[AM] = [CM]$ (M mijlocul lui $[AC]$).

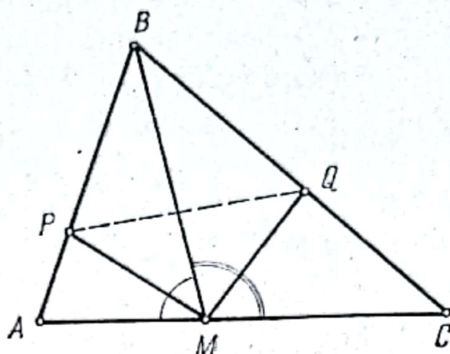


Fig. M.B.2

2°. Bisectoarele din A și B intersectează cercul circumscris triunghiului în mijlocul A' al arcului BC, respectiv în mijlocul B' al arcului AC (v. fig. M.B.3). Ducem $ID \perp AB$; în triunghiul AID avem $AI = \frac{r}{\sin \frac{A}{2}}$. Apoi:

$$m(\widehat{IBA'}) = \frac{m(\widehat{A'B'})}{2} = \frac{m(\widehat{BC}) + m(\widehat{AC})}{4};$$

$$m(\widehat{BIA'}) = \frac{m(\widehat{BA'}) + m(\widehat{AB'})}{2} = \frac{m(\widehat{BC}) + m(\widehat{AC})}{4}.$$

Deci $\widehat{IBA'} \equiv \widehat{BIA'}$, adică $\triangle BIA'$ este isoscel. Teorema sinusurilor în triunghiul ABA' dă: $IA' = BA' = 2R \sin \frac{A}{2}$. Puterea punctului I față de cercul O dă egalitatea: $AI \cdot IA' = R^2 - OI^2$, de unde obținem: $OI^2 = R^2 - 2Rr = R(R - 2r)$.

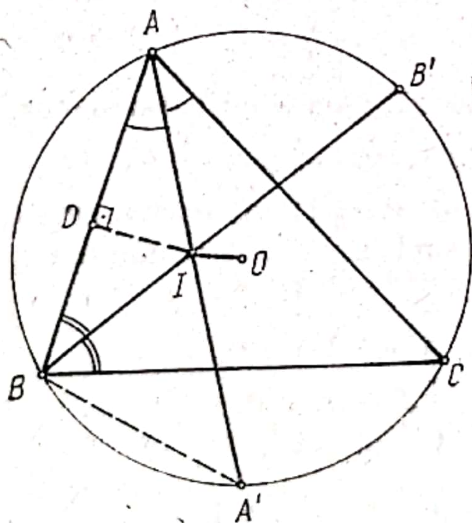


Fig. M.B.3

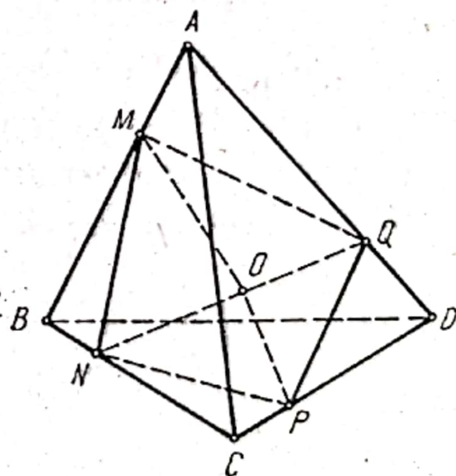


Fig. M.B.4

3°. Fie a lungimea unei muchii a tetraedrului și fie $x = AM$. Triunghiurile AMQ și BMN sînt congruente, deoarece $[AM] \equiv [BN]$, $[AQ] \equiv [BM]$ (de lungime $a - x$) și $m(\widehat{MAQ}) = m(\widehat{MBN}) = 60°$. Rezultă $[MN] \equiv [MQ]$, deci triunghiul MNQ

este isoscel. Atunci obținem $NQ \perp OM$. Analog, triunghiurile CPN și DPQ sînt congruente, deoarece $[CP] \equiv [DQ]$, $[CN] \equiv [DP]$ (de lungime $a - x$) și $m(\widehat{PCN}) = m(\widehat{PDQ}) = 60°$. Rezultă $[NP] \equiv [QP]$, deci triunghiul NPQ este isoscel. Obținem $NQ \perp OP$. Deoarece NQ este perpendiculară pe două drepte din planul MOP (OM și OP) este perpendiculară pe MOP.(v. fig. M.B.4).

4°. Notînd cu R_1 raza mică a trunchiului de con, cu R_2 raza mare a trunchiului de con și cu R raza sferei, o secțiune prin figură arată ca în fig. M.B.5.

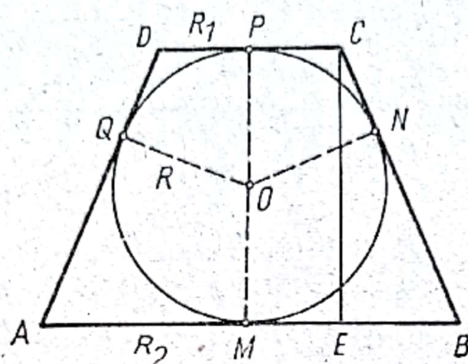


Fig. M.B.5

Avem $[BM] \equiv [BN] \equiv [AM] \equiv [AQ]$ (de lungime R_2) și $[CP] \equiv [CN] \equiv [DP] \equiv [DQ]$ (de lungime R_1). Ducem $CE \perp AB$ și avem: $BC = R_2 + R_1$, $BE = R_2 - R_1$ și $CE = 2R$. Teorema lui Pitagora aplicată în triunghiul CEB ne dă relația: $(R_2 - R_1)^2 + 4R^2 = (R_2 + R_1)^2$, adică $R^2 = R_1R_2$. Volumul sferei este $V_{\text{sf}} = \frac{4\pi R^3}{3}$, iar volumul trunchiului de con este $V_{\text{tr con}} = \frac{\pi \cdot 2R}{3}(R_2^2 + R_1^2 + R_2R_1)$.

Inegalitatea $V_{\text{tr con}} > \frac{3}{2} V_{\text{sf}}$ devine: $R_2^2 + R_1^2 + R_2R_1 > 3R^2$, adică $R_2^2 + R_1^2 + R_2R_1 > 3R_1R_2$, sau $(R_2 - R_1)^2 > 0$; evident.

5°. Notăm $\cos x = y$ și ecuația devine: $2y^2 - y - (m + 1) = 0$, cu soluțiile $y_{1,2} = \frac{1 \pm \sqrt{8m + 9}}{4}$, care sînt reale dacă $\Delta = 8m + 9 \geqslant 0$. Rezultă $m \in \left[-\frac{9}{8}, +\infty\right)$. Pentru ca ecuația inițială să aibă soluții trebuie ca y_1 sau $y_2 \in [-1, 1]$. Discuția se poate face prin mai multe metode.

Metoda I. Notăm cu $P(y)$ trinomul $2y^2 - y - (m + 1)$. Apar mai multe cazuri.

Cazul a. Avem $y_1, y_2 \in [-1, 1]$. Folosind semnul trinomului se impun condițiile:

$$\begin{cases} \Delta \geqslant 0, \\ P(-1) \geqslant 0, \\ P(1) \geqslant 0, \\ -1 \leqslant \frac{y_1 + y_2}{2} \leqslant 1, \end{cases} \quad \text{adică} \quad \begin{cases} 8m + 9 \geqslant 0, \\ 2 - m \geqslant 0, \\ -m \geqslant 0, \\ -1 \leqslant \frac{1}{4} \leqslant 1, \end{cases}$$

cu soluțiile $m \in \left[-\frac{9}{8}, 0\right]$. Deci pentru $m \in \left[-\frac{9}{8}, 0\right]$ avem $y_1, y_2 \in [-1, 1]$ și ecuațiile $\cos x = \frac{1 \pm \sqrt{8m + 9}}{4}$ au soluțiile $x = 2k\pi \pm \arccos \frac{1 \pm \sqrt{8m + 9}}{4}$, $k \in \mathbf{Z}$.

Cazul b. Avem $y_1 \in [-1, 1]$, $y_2 > 1$. Folosind, din nou, semnul trinomului se impun condițiile:

$$\begin{cases} \Delta \geqslant 0, \\ P(-1) \geqslant 0, \\ P(1) \leqslant 0, \end{cases} \text{ adică } \begin{cases} 8m + 9 \geqslant 0, \\ 2 - m \geqslant 0, \\ -m \leqslant 0, \end{cases}$$

cu soluțiile $m \in [0, 2]$. De fapt, pentru $m = 0$ avem $y_1, y_2 \in [-1, 1]$. Deci pentru $m \in (0, 2]$ avem $y_1 = \frac{1 - \sqrt{8m + 9}}{4} \in [-1, 1]$ $(y_2 > y_1)$ și ecuația $\cos x = \frac{1 - \sqrt{8m + 9}}{4}$ are soluțiile $x = 2k\pi \pm \arccos \frac{1 - \sqrt{8m + 9}}{4}$, $k \in \mathbf{Z}$.

Cazul c. Avem $y_1 < -1$, $y_2 \in [-1, 1]$. Se impun condițiile:

$$\begin{cases} \Delta \geqslant 0, \\ P(-1) \leqslant 0, \\ P(1) \geqslant 0, \end{cases} \text{ adică } \begin{cases} 8m + 9 \geqslant 0, \\ 2 - m \leqslant 0, \\ -m \geqslant 0, \end{cases}$$

de unde rezultă $m \in \emptyset$. Celelalte cazuri nu convin deoarece ambele rădăcini y_1, $y_2 \notin [-1, 1]$.

Metoda II. Notăm $P(y) = 2y^2 - y - (m + 1)$ și facem substituția $t = \frac{1 - y}{1 + y}$. Obținem trinomul în variabila t: $Q(t) = (2 - m)t^2 - 2(m + 3)t - m$. Analizăm separat cazul cînd o rădăcină este -1. Avem: $P(-1) = 0$, deci $2 - m = 0$, adică $m = 2$ și $y_1, y_2 = \frac{1 \pm 5}{4}$; $y_1 = -1$, $y_2 = \frac{3}{2} \notin [-1, 1]$. Obținem din $\cos x = -1$, soluțiile $x = 2k\pi \pm \pi$, $k \in \mathbf{Z}$. Condiția $y \in (-1, 1]$ este echivalentă cu $t \in [0, \infty)$.

Cazul a. Avem $t_1, t_2 \in [0, \infty)$. Se impun condițiile asupra trinomului în t:

$$\begin{cases} \Delta_1 \geqslant 0, \\ P \geqslant 0, \\ S \geqslant 0, \end{cases} \text{ adică } \begin{cases} 8m + 9 \geqslant 0, \\ \frac{-m}{2 - m} \geqslant 0, \\ \frac{2(m + 3)}{2 - m} \geqslant 0, \end{cases}$$

cu soluțiile $m \in \left[-\frac{9}{8}, 0\right]$. Soluțiile sînt aceleași $x = 2k\pi \pm \arccos \frac{1 \pm \sqrt{8m + 9}}{4}$, $k \in \mathbf{Z}$.

Cazul b. Avem $t_1 \in [0, \infty)$, $t_2 < 0$. Se impun condițiile:

$$\begin{cases} \Delta_1 \geqslant 0, \\ P \leqslant 0, \end{cases} \text{ adică } \begin{cases} 8m + 9 \geqslant 0, \\ \frac{-m}{2 - m} \leqslant 0, \end{cases}$$

cu soluțiile $m \in [0, 2)$. Scoțînd pe $m = 0$ care apare în cazul a) și adăugînd pe $m = 2$ (tratat separat), obținem $m \in (0, 2]$ și soluțiile $x = 2k\pi \pm \arccos \frac{1 - \sqrt{8m + 9}}{4}$, $k \in \mathbf{Z}$. În celelalte cazuri nu obținem soluții convenabile.

Metoda III. După ce am aflat $y_{1,2} = \frac{1 \pm \sqrt{8m + 9}}{4}$ impunem direct condițiile: $\Delta \geqslant 0$, $-1 \leqslant y_1 \leqslant 1$, $-1 \leqslant y_2 \leqslant 1$ etc. și rezolvînd inecuațiile iraționale (adică cu radicali) care apar se obține aceeași discuție pe cazuri. Deși prin această metodă condițiile care se impun sînt mai simple, rezolvarea inecuațiilor iraționale poate fi

dificilă și, de aceea, această metodă poate fi mai complicată decît celelalte două metode prezentate anterior.

III. 1°. Avem: $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} f(x) = +\infty$ și $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = +\infty$. Graficul are o singură asimptotă (verticală) $x = 0$. Apoi: $f'(x) = \dfrac{x^4 + 4x^2 - 1}{x(x^2+1)^2}$ și $f'(x) = 0$ pentru $x = \sqrt{\sqrt{5}-2}$. Calculăm: $f''(x) = \dfrac{(1-x^2)(x^4+10x^2+1)}{x^2(x^2+1)^3}$ și $f''(x)=0$ pentru $x=1$. Tabloul de variație este următorul:

x	0		$\sqrt{\sqrt{5}-2}$		1		∞
$f'(x)$		$-\ \ -$	0	$+$		$+\ \ +$	
$f(x)$	$\vert +\infty$	$\searrow$	$f\left(\sqrt{\sqrt{5}-2}\right)$	$\nearrow$	$\ln 2$	$\nearrow$	$+\infty$
$f''(x)$		$+$		$+$	0	$-\ \ -\ \ -$	

și graficul (fig. M.B.6).

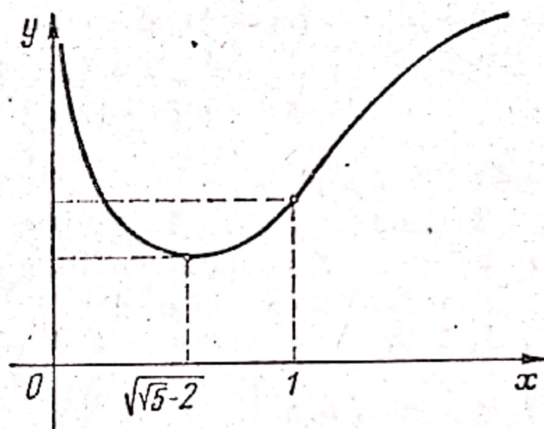


Fig. M.B.6

2°. Notăm cu $P(x)$ determinantul și îl calculăm astfel: adunăm coloana a doua la prima coloană și obținem:

$$P(x) = \begin{vmatrix} 2-x & a-x & x-1 \\ 1 & x^2 & -1 \\ 2-x & x+a & x-2 \end{vmatrix}.$$

Adunăm acum coloana întîi la coloana a treia și rezultă:

$$P(x) = \begin{vmatrix} 2-x & a-x & 1 \\ 1 & x^2 & 0 \\ 2-x & x+a & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & x^2 \\ 2-x & x+a \end{vmatrix} = x^3 - 2x^2 + x + a.$$

Rădăcina dublă a lui $P(x)$ se află printre rădăcinile lui $P'(x) = 3x^2 - 4x + 1$. Obținem $x_1' = 1$ și $x_2' = \dfrac{1}{3}$. Din enunț rezultă că rădăcina dublă este $x_1 = x_2 = 1$ și din condiția $P(1) = 0$ rezultă $a = 0$. Obținem (pentru $a = 0$) descompunerea $P(x) = x(x-1)^2$, deci $x = 1$ este rădăcină dublă.

3°. Caz de nedeterminare de tipul 1^∞. Procedăm astfel:

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}} (\sin x)^{\frac{1}{2x-\pi}} = \lim_{x\to\frac{\pi}{2}} [1+(\sin x - 1)]^{\frac{1}{\sin x - 1}\cdot\frac{\sin x - 1}{2x-\pi}} =$$

$$= e^{\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{\sin x - 1}{2x-\pi}} = e^{\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{\sin x - \sin\frac{\pi}{2}}{2x-\pi}} = e^{\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{2\sin\left(\frac{x}{2}-\frac{\pi}{4}\right)\cos\left(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{4}\right)}{4\left(\frac{x}{2}-\frac{\pi}{4}\right)}} = e^{\frac{1}{2}\cdot 0} = 1.$$

4°. Descompunem mai întîi în fracţii simple: $\frac{1}{(x+1)(x^2+4)} = \frac{A}{x+1} + \frac{Bx+C}{x^2+4}$. Obţinem: $A = \frac{1}{5}$, $B = -\frac{1}{5}$, $C = \frac{1}{5}$. Atunci avem:

$$I = \int_0^1 \frac{dx}{(x+1)(x^2+4)} = \frac{1}{5}\int_0^1 \frac{dx}{x+1} - \frac{1}{5}\int_0^1 \frac{x\,dx}{x^2+4} + \frac{1}{5}\int_0^1 \frac{dx}{x^2+4} =$$

$$= \frac{1}{5}\ln|x+1|\Big|_0^1 - \frac{1}{10}\ln(x^2+4)\Big|_0^1 + \frac{1}{10}\operatorname{arctg}\frac{x}{2}\Big|_0^1 = \frac{1}{10}\left(\ln\frac{16}{5} + \operatorname{arctg}\frac{1}{2}\right).$$

5°. Deoarece $x^3 - 1 = (x-1)(x^2+x+1)$ rezultă că $\varepsilon^3 = 1$. Avem:

$$A^2 = \begin{pmatrix} 3 & 1+\varepsilon+\varepsilon^2 & 1+\varepsilon^2+\varepsilon \\ 1+\varepsilon+\varepsilon^2 & 1+\varepsilon^2+\varepsilon & 3 \\ 1+\varepsilon^2+\varepsilon & 3 & 1+\varepsilon+\varepsilon^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \\ 0 & 3 & 0 \end{pmatrix},$$

$$A^3 = A^2\cdot A = 3\cdot\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & \varepsilon^2 & \varepsilon \\ 1 & \varepsilon & \varepsilon^2 \end{pmatrix},\ A^4 = A^2\cdot A^2 = 9\cdot I_3.$$

IV. 1°. *Metoda I*. Avem: $m(\widehat{DBC}) = m\left(\frac{\widehat{DC}}{2}\right) = m\left(\frac{\widehat{A}}{2}\right)$ şi $m(\widehat{DCB}) = m\left(\frac{\widehat{BD}}{2}\right) = m\left(\frac{\widehat{A}}{2}\right)$. Teorema sinusurilor în $\triangle ABD$ ne dă: $d = 2R\sin\left(B + \frac{A}{2}\right)$, iar teorema

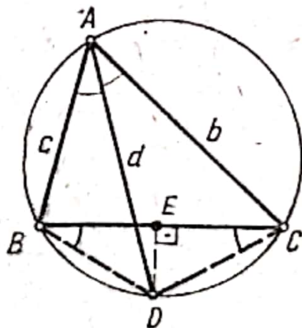


Fig. M.B.7

sinusurilor în $\triangle ACD$ ne dă: $d = 2R\sin\left(C + \frac{A}{2}\right)$ (v. fig. M.B.7). Adunînd cele două relaţii, obţinem: $2d = 2R\left(\sin\left(B+\frac{A}{2}\right) + \sin\left(C + \frac{A}{2}\right)\right)$. Din teorema sinusurilor în

triunghiul ABC avem: $b = 2R \sin B$, $c = 2R \sin C$, deci $b + c = 2R(\sin B + \sin C)$. Inegalitatea din enunț se scrie echivalent astfel:

$$\sin\left(B + \frac{A}{2}\right) + \sin\left(C + \frac{A}{2}\right) > \sin B + \sin C, \text{ sau:}$$

$$2 \sin \frac{A + B + C}{2} \cos \frac{B - C}{2} > 2 \sin \frac{B + C}{2} \cos \frac{B - C}{2}. \text{ Rezultă:}$$

$$\cos \frac{B - C}{2}\left(1 - \sin \frac{B + C}{2}\right) > 0,$$

care este o inegalitate evidentă, deoarece $m\left(\frac{B - C}{2}\right) \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ și $m\left(\frac{B + C}{2}\right) \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$.

Metoda II. Aplicînd teorema lui Ptolemeu patrulaterului inscriptibil $ABDC$ obținem: $AB \cdot CD + AC \cdot BD = AD \cdot BC$ sau $a \cdot d = b \cdot BD + c \cdot CD$. Dar $m(\widehat{BD}) = m(\widehat{CD})$, deci $[BD] \equiv [CD]$ și atunci putem scrie relația anterioară sub forma: $a \cdot d = BD(b + c)$. Ducem $DE \perp BC$ și avem $[BE] \equiv [EC]$, adică $BE = \frac{a}{2}$.

Evident $BD > BE = \frac{a}{2}$. Din relația anterioară obținem: $a \cdot d > \frac{a}{2}(b + c)$, adică $d > \frac{1}{2}(b + c)$. Ținînd seama de faptul că trebuie demonstrată și relația lui Ptolemeu (problemă din manual) cele două soluții sînt comparabile ca întindere.

2°. Fie $MNPQ$ un dreptunghi înscris în semicercul dat. Avem: $ON = R \cos \alpha$, $PN = R \sin \alpha$, deci $MN = 2R \cos \alpha$. Atunci aria lui $MNPQ$ este: $S = MN \cdot PN = 2R^2 \sin \alpha \cos \alpha = R^2 \sin 2\alpha$. Evident, aria maximă se obține pentru $\sin 2\alpha = 1$, adică $\alpha = \frac{\pi}{4}$. Rezultă $ON = \frac{R\sqrt{2}}{2} = PN$ și $S_{max} = R^2$ (v. fig. M.B.8).

3°. Deoarece $CB \perp AB$ (dreapta de intersecție a celor două plane) și $p \perp q$ rezultă $CB \perp q$ (v. fig. M.B.9). Din teorema celor trei perpendiculare rezultă: $CB \perp q$, $BD \perp AD$, deci $CD \perp AD$. Deoarece $m(\widehat{ABC}) = m(\widehat{ADC}) = \frac{\pi}{2}$ rezultă

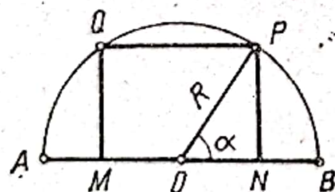


Fig. M.B.8

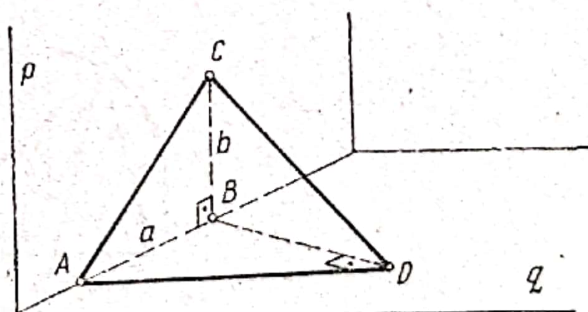


Fig. M.B.9

că punctele B și D se află pe sfera de diametru $[AC]$. Avem $AC = \sqrt{a^2 + b^2}$ și raza sferei este $R = \frac{\sqrt{a^2 + b^2}}{2}$. Atunci volumul sferei este:

$$V = \frac{4\pi R^3}{3} = \frac{4\pi}{3} \cdot \frac{(a^2 + b^2)\sqrt{a^2 + b^2}}{8} = \frac{\pi}{6}(a^2 + b^2)\sqrt{a^2 + b^2}.$$

4°. O secțiune axială prin figură arată astfel:

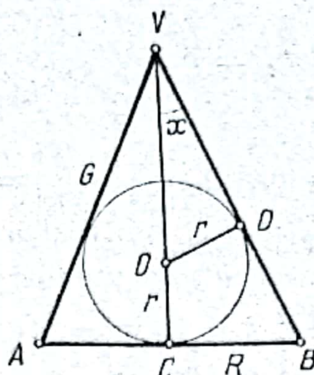


Fig. M.B.10

Avem: $VA = VB = G$, $CV = h$, $AC = BC = R$. În triunghiul dreptunghic VOD putem scrie: $OV = \frac{r}{\sin x}$. Atunci $h = OV + OC = \frac{r}{\sin x} + r = \frac{r(1+\sin x)}{\sin x}$. În triunghiul dreptunghic VBC avem (v. fig. M.B.10):

$$R = h \operatorname{tg} x = \frac{r(1+\sin x)}{\cos x} \text{ și } G = \frac{h}{\cos x} = \frac{r(1+\sin x)}{\sin x \cdot \cos x}.$$

Atunci aria laterală a conului este: $A_{\text{lat}} = \pi RG = \frac{\pi r^2(1+\sin x)^2}{\sin x \cdot \cos^2 x}$. Aria bazei conului este πR^2, iar aria sferei este $4\pi r^2$. Rezultă ecuația: $\frac{\pi r^2(1+\sin x)^2}{\cos^2 x} = 4\pi r^2$, adică $(1+\sin x)^2 = 4\cos^2 x$. Deci $1 + 2\sin x + \sin^2 x = 4 - 4\sin^2 x$, sau $5\sin^2 x + 2\sin x - 3 = 0$. Obținem $\sin x = -1$ (neacceptabilă) și $\sin x = \frac{3}{5}$. Rezultă $x = \arcsin\frac{3}{5}$.

5°. Avem: $(\sin x - \cos x)^2 = \sin^2 x + \cos^2 x - 2\sin x\cos x = 1 - \sin 2x$ și $\cos 4x + 1 = 2\cos^2 2x = 2(1 - \sin^2 2x)$. Ecuația se scrie echivalent: $m(1 - \sin 2x) - 2(1 - \sin^2 2x) = 0$ sau $(1 - \sin 2x)(m - 2 - 2\sin 2x) = 0$. Rezultă $1 - \sin 2x = 0$ cu soluțiile $x = (-1)^k\frac{\pi}{4} + \frac{k\pi}{2}$, $k \in \mathbf{Z}$, pentru orice $m \in \mathbf{R}$ și $m - 2 - 2\sin 2x = 0$, de unde: $\sin 2x = \frac{m-2}{2}$. Impunem condițiile: $-1 \leqslant \frac{m-2}{2} \leqslant 1$, adică $m \in [0, 4]$, pentru care mai avem un rînd de soluții: $2x = (-1)^l \arcsin\frac{m-2}{2} + l\pi$, $l \in \mathbf{Z}$, adică $x = \frac{(-1)^l}{2}\arcsin\frac{m-2}{2} + l\frac{\pi}{2}$, $l \in \mathbf{Z}$.

V. 1°. a) Sistemul are soluție unică dacă determinantul

$$\Delta = \begin{vmatrix} a & 1 & 2 \\ 1 & a & 1 \\ 2 & 2 & a \end{vmatrix} = a^3 - 7a + 6$$

este nenul. Rezolvînd ecuația $a^3 - 7a + 6 = 0$ avem:

$$a^3 - a - 6a + 6 = a(a-1)(a+1) - 6(a-1) = (a-1)(a^2 + a - 6),$$

de unde $a_1 = 1$, $a_2 = 2$, $a_3 = -3$. Deci pentru $a \in \mathbf{R} \setminus \{-3, 1, 2\}$ sistemul are soluție unică ((0, 0, 0) deoarece este omogen).

b) Pentru $a = 1$ matricea sistemului

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

are rangul 2, deoarece determinantul $\Delta_1 = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = -1 \neq 0$. Sistemul fiind omogen este compatibil (toţi determinanţii caracteristici sînt, evident, nuli). Pentru rezolvare renunţăm la ecuaţia a treia (ecuaţie secundară) şi scriem sistemul sub forma:

$$\begin{cases} y + 2z = -x; \\ y + z \ \ = -x. \end{cases}$$

Scăzînd ecuaţiile obţinem $z = 0$ şi apoi $y = -x$. Deci soluţiile sînt: $x = \lambda$; $y = -\lambda$; $z = 0$, $(\forall)\lambda \in \mathbf{R}$.

2°. Avem: $i^2 = -1$, $i^3 = -i$, $i^4 = 1$, $i^5 = i$, $i^6 = -1$. Înlocuind în ecuaţie $x = i$, obţinem relaţia: $(m + 1)i = 0$, deci $m = -1$.

3°. Avem:

$$\lim_{\substack{x \to -1 \\ x > -1}} f(x) = +\infty, \quad \lim_{x \to \infty} f(x) = \lim_{x \to \infty} x\left(1 - \frac{\ln(x+1)}{x}\right) = +\infty,$$

deci $x = -1$ este asimptotă verticală. Calculăm:

$$m = \lim_{x \to \infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \to \infty} \left(1 - \frac{\ln(x+1)}{x}\right) = 1. \text{ Apoi:}$$

$$n = \lim_{x \to \infty} (f(x) - x)) = \lim_{x \to \infty} (-\ln(x+1)) = -\infty,$$

deci nu avem asimptote orizontale şi nici oblice. Observăm că $f(0) = 0$. Calculăm prima derivată:

$$f'(x) = 1 - \frac{1}{x+1} = \frac{x}{x+1}.$$

Calculăm şi derivata a doua: $f''(x) = \frac{1}{(x+1)^2}$. Tabloul de variaţie este următorul:

x	-1			0			∞
$f'(x)$	|	$-$	$-$	0	$+$	$+$	
$f(x)$	|	$+\infty$	↘	0	↗		$+\infty$
$f''(x)$	|	$+$		$+$	$+$	$+$	

şi graficul (v. fig. M.B.11).

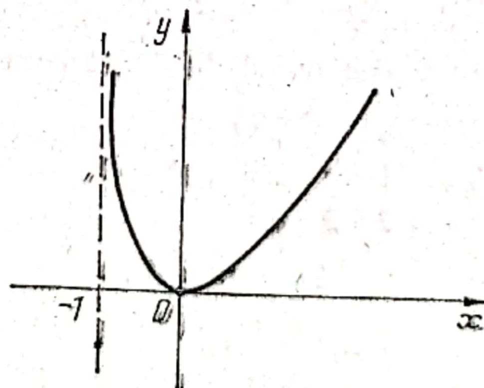


Fig. M.B.11

4°. Avem cazul de nedeterminare 0^0. Scriem astfel:

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{\pi}{2}-\operatorname{arctg} x\right)^{\frac{1}{\ln x}} = e^{\lim\limits_{x\to\infty} \ln\left(\frac{\pi}{2}-\operatorname{arctg} x\right)^{\frac{1}{\ln x}}} = e^{\lim\limits_{x\to\infty}\frac{\ln\left(\frac{\pi}{2}-\operatorname{arctg} x\right)}{\ln x}}.$$

Pentru limita de la exponent avem cazul de nedeterminare $\frac{-\infty}{\infty}$ și aplicăm regula lui l'Hôpital. Rezultă:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{\ln\left(\frac{\pi}{2}-\operatorname{arctg} x\right)}{\ln x} = \lim_{x\to\infty}\frac{\dfrac{-\dfrac{1}{1+x^2}}{\dfrac{\pi}{2}-\operatorname{arctg} x}}{\dfrac{1}{x}} =$$

$$= \lim_{x\to\infty}\frac{\dfrac{x}{1+x^2}}{\operatorname{arctg} x-\dfrac{\pi}{2}} \overset{\frac{0}{0}}{=} \lim_{x\to\infty}\frac{\dfrac{1+x^2-2x^2}{(1+x^2)^2}}{\dfrac{1}{1+x^2}} = \lim_{x\to\infty}\frac{1-x^2}{1+x^2} = -1.$$

Deci limita inițială este $e^{-1} = \frac{1}{e}$.

5°. Avem:

$$I = \int\frac{\sqrt{1+x^2}}{x}\,dx = \int\frac{1+x^2}{x\sqrt{1+x^2}}\,dx = \int\frac{dx}{x\sqrt{1+x^2}} + \int\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}\,dx = J + \sqrt{1+x^2},$$

unde:

$$J = \int\frac{dx}{x\sqrt{1+x^2}} = \int\frac{\dfrac{dx}{x^2}}{\dfrac{1}{x}\sqrt{1+x^2}} = -\int\frac{-\dfrac{dx}{x^2}}{\sqrt{\dfrac{1}{x^2}+1}} = -\int\frac{d\left(\dfrac{1}{x}\right)}{\sqrt{\dfrac{1}{x^2}+1}} =$$

$$= -\ln\left(\sqrt{\frac{1}{x^2}+1}+\frac{1}{x}\right)+C. \text{ Obținem: } I = \sqrt{1+x^2} - \ln\frac{\sqrt{1+x^2}+1}{x} + C.$$

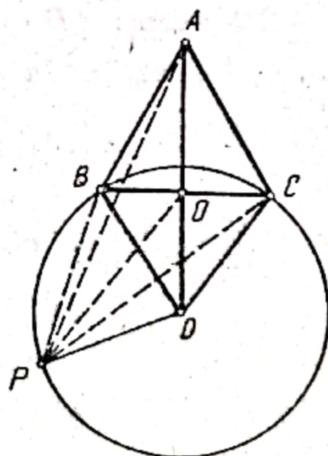


Fig. M.B.12

VI. 1°. Fie O intersecția lui $[BC]$ cu $[AD]$. Unim P cu O (v. fig. M.B.12). Fie l lungimea laturii în triunghiul echilateral ABC. Atunci $OA = \frac{l\sqrt{3}}{2}$

şi $AD = 2OA = l\sqrt{3}$. Teorema medianei în triunghiul PBC ne dă relaţia: $PO^2 = \frac{2(PB^2 + PC^2) - l^2}{4}$, iar teorema medianei în triunghiul PAD ne conduce la relaţia $PO^2 = \frac{2(PA^2 + l^2) - 3l^2}{4}$. Din cele două relaţii obţinem:

$$2(PB^2 + PC^2) - l^2 = 2PA^2 + 2l^2 - 3l^2,$$

$$\text{deci} \quad PB^2 + PC^2 = PA^2, \quad \text{adică } a^2 = b^2 + c^2.$$

2°. Avem: $AM^2 = AB^2 - BM^2 = 130$, deci $AM = \sqrt{130}$ dm (v. fig. M.B.13). Din teorema bisectoarei în triunghiul AMC obţinem: $\frac{AE}{EC} = \frac{AM}{MC}$, deci

$\frac{AE}{AE + EC} = \frac{AM}{AM + MC}$, adică $\frac{AE}{11,5} = \frac{\sqrt{130}}{\sqrt{130} + 1,5}$. Rezultă $AE = \frac{11,5 \cdot \sqrt{130}}{\sqrt{130} + 1,5}$ dm.

3°. Prin ipoteză avem: $m(\widehat{ACB}) = 45°$, $m(\widehat{ADB}) = 30°$ şi $m(\widehat{CAD}) = 90°$. Ducem $AE \perp CD$; deoarece $AB \perp p$, din teorema celor trei perpendiculare rezultă $BE \perp CD$ (v. fig. M.B.14). În triunghiul ABC avem: $BC = AB = a$

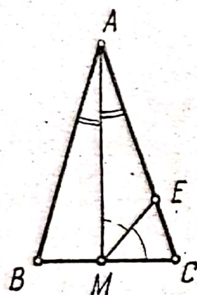


Fig. M.B.13

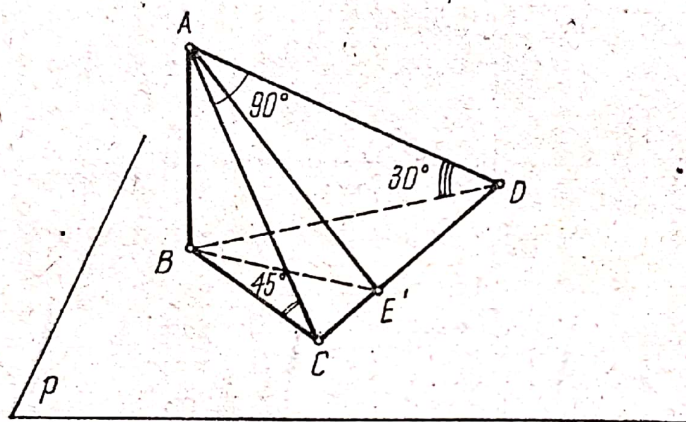


Fig. M.B.14

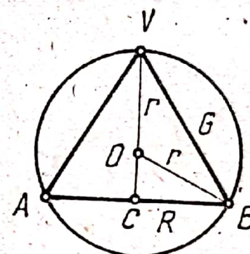


Fig. M.B.15

şi $AC = a\sqrt{2}$. În triunghiul ABD avem: $AD = 2AB = 2a$ şi $BD = a\sqrt{3}$. În triunghiul ACD rezultă: $CD^2 = AC^2 + AD^2 = 2a^2 + 4a^2 = 6a^2$, deci $CD = a\sqrt{6}$. Apoi $AE = \frac{AC \cdot AD}{CD} = \frac{a\sqrt{2} \cdot 2a}{a\sqrt{6}} = \frac{2a\sqrt{3}}{3}$. În triunghiul ABE avem: $BE^2 = AE^2 - AB^2 = \frac{3a^2}{9}$, deci $BE = \frac{a\sqrt{3}}{3}$. Rezultă $\sigma(ABC) = \frac{a^2}{2}$, $\sigma(ABD) = \frac{a^2\sqrt{3}}{2}$, $\sigma(ACD) = a^2\sqrt{2}$ şi $\sigma(BCD) = \frac{CD \cdot BE}{2} = \frac{a\sqrt{6} \cdot \frac{a}{\sqrt{3}}}{2} = \frac{a^2\sqrt{2}}{2}$. Atunci, aria totală a piramidei $[ABCD]$ este: $S = \sigma(ABC) + \sigma(ABD) + \sigma(ACD) + \sigma(BCD) = \frac{a^2(1 + \sqrt{3} + 3\sqrt{2})}{2}$.

4°. O secţiune axială arată ca în fig. M.B.15. Din ipoteză rezultă relaţia: $2h = R + G$. Din triunghiul VBC obţinem: $h^2 = G^2 - R^2 = (G + R)(G - R)$. Rezultă relaţia: $h^2 = 2h(G - R)$, deci $h = 2(G - R)$. Deducem egalitatea

$4(G-R)=G+R$, deci $G=\frac{5}{3}R$ și $h=\frac{4R}{3}$. Din triunghiul OBC rezultă: $OB^2=CB^2+OC^2$, deci $r^2=R^2+\left(\frac{4R}{3}-r\right)^2$, adică $R^2+\frac{16R^2}{9}-\frac{8Rr}{3}=0$, de unde $R=\frac{24}{25}r$. Obținem apoi: $G=\frac{8}{5}r$ și $h=\frac{32}{25}r$. Volumul conului este: $V_{con}=\frac{\pi R^2h}{3}=\frac{\pi}{3}\cdot\frac{24^2}{25^2}\cdot\frac{32}{25}r^3=\frac{6144}{15\,625}\pi r^3$, iar aria laterală este: $A_{lat}=\pi RG=$ $=\pi\cdot\frac{24}{25}r\cdot\frac{8}{5}r=\frac{192}{125}\pi r^2$.

5°. Avem: $MN=|z_M-z_N|=|5+i|=\sqrt{26}$, $NP=|z_P-z_N|=$ $=|1-5i|=\sqrt{26}$, $PQ=|z_Q-z_P|=|5+i|=\sqrt{26}$ și $QM=|z_M-z_Q|=$ $=|-1+5i|=\sqrt{26}$, deci $MN=NP=PQ=QM$, adică $MNPQ$ este romb. Apoi: $MP^2=|z_P-z_M|^2=|-4-6i|^2=16+36=52=MN^2+NP^2$, deci $m(\widehat{MNP})=90°$, adică $MNPQ$ este pătrat (v. fig. M.B.16). Putem scrie $\frac{z_M}{z_Q}=\frac{5+6i}{6+i}=\frac{(5+6i)(6-i)}{36+1}=\frac{36+31i}{37}=\sqrt{\frac{61}{37}}(\cos\varphi+i\sin\varphi)$, unde $\operatorname{tg}\varphi=\frac{31}{36}$, adică $\varphi=\operatorname{arctg}\frac{31}{36}$. Rezultă: $\sqrt[4]{\frac{z_M}{z_Q}}=\sqrt[8]{\frac{61}{37}}\left(\cos\frac{\varphi+2k\pi}{4}+i\sin\frac{\varphi+2k\pi}{4}\right)$, $k=0, 1, 2, 3$, unde $\varphi=\operatorname{arctg}\frac{31}{36}$.

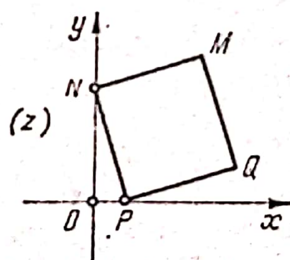


Fig. M.B.16

VII. 1°. Cum

$$A=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 1 & 1\end{pmatrix},\ A^2=A\cdot A=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 1 & 1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1 & 0\\ 1 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 2 & 1\end{pmatrix},$$

procedînd prin inducție matematică, se găsește:

$$A^n=\begin{pmatrix}1 & 0\\ n & 1\end{pmatrix},\ (\forall)n\in\mathbb{N},\ n\geqslant 1.$$

2°. Sistemul dat este simetric în x și y. Punînd $x+y=s$ și $xy=p$, sistemul respectiv ia forma:

$$\begin{cases}p+s=11;\\ ps=30,\end{cases}$$

necunoscutele p și s fiind rădăcinile ecuației: $t^2-11t+30=0$, adică $(p, s)\in\{(5, 6), (6, 5)\}$, deci $(x, y)\in\{(2, 3), (3, 2), (1, 5), (5, 1)\}$ sînt soluțiile căutate.

3°. Observînd că:

$E(x) = \frac{1}{8} \cdot \frac{8x^3 - 24x + 16}{2x + 1} = \frac{1}{8}\left(4x^2 - 2x - 11 + \frac{27}{2x + 1}\right)$, deducem că:
(1) $E(x) \in \mathbf{Z} \Leftrightarrow \left(4x^2 - 2x - 11 + \frac{27}{2x+1}\right) \in \mathcal{M}_8 \subset \mathbf{Z}$, cu $x \in \mathbf{Z}$. Cum însă, pentru $x \in \mathbf{Z}$, avem $4x^2 - 2x - 11 \in \mathbf{Z}$, rezultă că $E(x) \in \mathbf{Z}$ atunci și numai atunci cînd sînt îndeplinite condițiile (1) și (2) $\frac{27}{2x + 1} \in \mathbf{Z}$. Pe de altă parte, (2) este adevărată dacă și numai dacă

$$2x + 1 \in \mathcal{D}_{27} = \{\pm 1, \pm 3, \pm 9, \pm 27\}, \text{ adică:}$$

(3) $$x \in \{-14, -5, -2, -1, 0, 1, 4, 13\},$$

de unde rezultă că: $A = \{-14, -5, -2, -1, 0, 1, 4, 13\}$, dacă avem în vedere că, pentru x satisfăcînd (3), este îndeplinită (1).
Notă. Calculul valorilor lui $E(x)$, cu x satisfăcînd (3), se poate realiza chiar mai simplu dacă avem în vedere că:

$$E(x) = \frac{(x - 1)^2(x + 2)}{2x + 1}.$$

4°. Pentru o funcție $f\colon A \to B$, ținem seama că:
P_1 : f este surjectivă $\Leftrightarrow (\forall) y \in B$, ecuația $f(x) = y$ admite cel puțin o soluție $x \in A$;
P_2: f este injectivă $\Leftrightarrow (\forall) y \in B$, ecuația $f(x) = y$ admite cel mult o soluție $x \in A$.
Notăm: $\text{Im } f = \{y \in B \mid (\exists) x \in A, \text{ astfel încît } f(x) = y\}$. În cazul problemei considerate, fie $y \in \mathbf{R}$. Să studiem ecuația:

(1) $$f_{mn}(x) = y,$$

i) Căutînd soluții $x \leqslant 0$, ecuația (1) se reduce la $x - m = y$, deci $x = y + m$ este soluție dacă și numai dacă $y + m \leqslant 0$, ceea ce este echivalent cu $y \in (-\infty, -m]$. Așadar, $(\forall) y \in (-\infty, -m]$, (1) este verificată pentru $x = y + m \leqslant 0$, deci $(-\infty, -m] \subseteq \text{Im } f_{mn}$.
ii) Căutînd soluții $x > 0$, ecuația (1) se reduce la:

(2) $$nx + m = y.$$

Dacă $n = 0$, atunci (2) are soluții numai pentru $y = m$.
Dacă $n \neq 0$, $x = \frac{y - m}{n}$ este soluție a lui (2) atunci și numai atunci cînd $\frac{y - m}{n} > 0$.

Revenind la textul problemei date, găsim:
a) Ținem cont de P_1; în plus, din studiul făcut în cazul i) avem că $(\forall) y \in (-\infty, -m]$, $(\exists) x = m + y \in \mathbf{R}_- \subset \mathbf{R}$ astfel încît $f_{mn}(x) = y$.
Așadar, pentru ca f să fie surjectivă este necesar și suficient ca pentru orice $y > -m$, ecuația $nx + m = y$ să aibă o soluție pozitivă, adică $x = \frac{y - m}{n} > 0$, $(\forall) y > -m$.
Dacă $n = 0$, conform cu ii), avem:

$$\text{Im } f_{mn} = (-\infty, -m] \cup \{m\} \subset \mathbf{R} \text{ și } \text{Im } f_{mn} \neq \mathbf{R},$$

deci f_{mn} nu este surjectivă.

Pentru $n < 0$, potrivit aceluiaşi caz ii), $x = \frac{y-m}{n}$ este soluţie dacă şi numai dacă $\frac{y-m}{n} > 0$, adică $y < m$, deci:

$$\text{Im } f_{mn} = (-\infty, \ -m] \cup (-\infty, \ m) = (-\infty, \ |m|) \subset \mathbf{R} \text{ şi } \text{Im } f_{mn} \neq \mathbf{R},$$

prin urmare f_{mn} nu este surjectivă. Analog, pentru $n > 0$, găsim:

$$\text{Im } f_{mn} = (-\infty, \ -m] \cup (m, \ \infty),$$

deci f_{mn} este surjectivă atunci şi numai atunci cînd $\text{Im } f_{mn} = \mathbf{R}$, adică $-m \geqslant m$, ceea ce este echivalent cu $m \in (-\infty, \ 0]$. În concluzie, f_{mn} este surjectivă pentru orice $m \in (-\infty, 0]$ şi orice $n \in (0, \infty)$.

b) În acord cu cele obţinute în cazul i), rezultă că oricare ar fi $y \leqslant -m$, există o rădăcină $x = y + m < 0$ a ecuaţiei (1). Ţinînd cont şi de ii), găsim că dacă $n = 0$, atunci f_{mn} nu este injectivă, deoarece oricare ar fi două numere reale, pozitive, $x_1 \neq x_2$, avem $f_{m0}(x_1) = f_{m0}(x_2) = m$. Analog, dacă $n < 0$, atunci oricare ar fi $y < -|m| \leqslant -m$, există o soluţie negativă $x_1 = y + m$ şi una pozitivă

$$x_2 = \frac{y-m}{n} \text{ ale ecuaţiei (1), adică:}$$

$$(\exists) x_1, \ x_2 \in \mathbf{R}, \quad x_1 < 0 < x_2, \quad f(x_1) = f(x_2) = y.$$

Pentru $n > 0$, ţinînd cont de P_2, rezultă că ecuaţia (1) are o soluţie pozitivă $x = \frac{y-m}{n} > 0$ dacă şi numai dacă $y > m$ şi o soluţie nulă sau negativă $x = y + m$ atunci şi numai atunci cînd $y \leqslant -m$. Pentru a nu avea (simultan) o soluţie pozitivă şi una nulă sau negativă este necesar şi suficient ca $-m \leqslant m$, adică $m \geqslant 0$. Prin urmare, f_{mn} este injectivă dacă şi numai dacă $m \in (0, \infty]$ şi $n \in (0, \infty)$.

c) f_{mn} este bijectivă dacă şi numai dacă este surjectivă şi injectivă, adică atunci şi numai atunci cînd $m = (-\infty, \ 0] \cap [0, \ \infty) = \{0\}$ şi $n \in (0, \ \infty)$.

5°. Ţinînd seama că „$a \in \mathbf{Z}_n^*$ este inversabil dacă şi numai dacă c.m.m.d.c. $(a, \ n) = 1$", găsim că mulţimea elementelor inversabile din $\mathbf{Z}_{12}$ este $U = \{\hat{1}, \hat{5}, \hat{7}, \widehat{11}\}$. Se verifică fără dificultate că $(\forall) x \in U$, avem $x \cdot x = \hat{1}$, deci

$$(\hat{1})^{-1} = \hat{1}; \quad (\hat{5})^{-1} = \hat{5}; \quad (\hat{7})^{-1} = \hat{7}; \quad (\widehat{11})^{-1} = \widehat{11}.$$

Notă. Folosirea proprietăţii (teoremei) respective putea fi evitată dacă, de exemplu, s-ar fi procedat la scrierea celor 144 de elemente ale tabelei de înmulţire în $\mathbf{Z}_{12}$, dar faţă de valoarea mare a lui n $(n = 12)$ această din urmă cale nu este recomandată.

VIII. 1°. Ţinem seama că:

„P: Dacă $(a_n)_{n \in \mathbf{N}}$ şi $(b_n)_{n \in \mathbf{N}}$ sînt şiruri convergente şi dacă $\lim_{n \to \infty} b_n \neq 0$, atunci şirul $\left(\frac{a_n}{b_n}\right)_{n \in \mathbf{N}}$ este convergent şi $\lim_{n \to \infty} \frac{a_n}{b_n} = \frac{\lim_{n \to \infty} a_n}{\lim_{n \to \infty} b_n}$".

Fie $b_n = a_{n+1}$, $(\forall) n \in \mathbf{N}$, $n \geqslant 1$. Cum $(b_n)_{n \geqslant 1}$ este subşir al şirului $(a_n)_{n \geqslant 1}$ convergent, prin ipoteză, către un număr real, diferit de zero, avem:

$$\lim_{n \to \infty} b_n = \lim_{n \to \infty} a_n \overset{\text{not}}{=} l \neq 0$$

şi, aplicînd propoziţia amintită, găsim:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{b_n}{a_n} = \frac{\lim\limits_{n\to\infty} b_n}{\lim\limits_{n\to\infty} a_n} = \frac{l}{l} = 1.$$

2°. $(f \circ g)(x) = f(g(x)) = \begin{cases} -1 \text{ dacă } g(x) < 0, \\ 0 \text{ dacă } g(x) = 0, \\ 1 \text{ dacă } g(x) > 0, \end{cases} = \begin{cases} 0 \text{ dacă } x = 2, \\ 1 \text{ dacă } x \in \mathbb{R} \setminus \{2\}. \end{cases}$

$f \circ g$ este continuă pe $(-\infty, 2) \cup (2, \infty)$, fiind constantă (deci funcţie elementară). Dar:

$$\lim_{x\to 2} (f \circ g)(x) = 1 \neq (f \circ g)(2) = 0,$$

deci $f \circ g$ nu este continuă în $x = 2$.

$$(g \circ f)(x) = [f(x) - 2]^2 = \begin{cases} 9 \text{ dacă } x < 0, \\ 4 \text{ dacă } x = 0, \\ 1 \text{ dacă } x > 0. \end{cases}$$

Cum $(g \circ f)(x) = 9$, $(\forall) x \in (-\infty, 0)$, rezultă că $g \circ f$ este continuă pe $(-\infty, 0)$. Analog, $g \circ f$ este continuă pe $(0, \infty)$, dar, în $x = 0$, $g \circ f$ nu are nici măcar limită deoarece:

$$\lim_{\substack{x\to 0 \\ x<0}} (g \circ f)(x) = 9 \neq 1 = \lim_{\substack{x\to 0 \\ x>0}} (g \circ f)(x),$$

deci nu este continuă în punctul respectiv.

3°. Observăm mai întîi că restricţia lui f la intervalul $[1, \infty)$ are ca reprezentare grafică o semidreaptă închisă, inclusă în prima bisectoare. Aşadar, este suficient să studiem restricţia lui f la intervalul $(-\infty, 1)$.
Intersecţia cu axele: $G_f \cap Ox = G_f \cap Oy = \{O(0, 0)\}$. Cum $\lim\limits_{x\to -\infty} f(x) = -\infty$, rezultă că f nu admite asimptotă orizontală la $-\infty$.
Din:

$$\lim_{x\to -\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to -\infty} \frac{x^2}{x^2 - x} = 1; \quad \lim_{x\to -\infty} (f(x) - x) = \lim_{x\to -\infty} \frac{x}{x-1} = 1,$$

deducem că $y = x + 1$ este asimptotă oblică la $-\infty$. În plus:

$$\lim_{\substack{x\to 1 \\ x<1}} f(x) = \lim_{\substack{x\to 1 \\ x<1}} \frac{x^2}{x-1} = -\infty,$$

deci dreapta de ecuaţie $x = 1$ este asimptotă verticală, la dreapta, pentru f. Funcţia f este derivabilă pe intervalul $(-\infty, 1)$ şi avem:

$$f'(x) = \frac{x^2 - 2x}{(x-1)^2},$$

pentru care se constată, fără dificultate că:

$$f'(x) > 0, (\forall) x \in (-\infty, 0); \; f'(0) = 0; \; f'(x) < 0, (\forall) x \in (0, 1).$$

Mai mult:

$$f'_s(1) = \lim_{\substack{x\to 1 \\ x<1}} \frac{x^2 - 2x}{(x-1)^2} = -\infty.$$

Dar, pe intervalul $(-\infty, 1)$, f este de două ori derivabilă şi:

$$f''(x) = \frac{2}{(x-1)^3} < 0, \ (\forall)x \in (-\infty, 1).$$

Tabloul de variaţie a restricţiei lui f la intervalul $(-\infty, 1)$ este:

x	$-\infty$		0		1	2
$f\|_{(-\infty, 1)}$	$-\infty$	↗	0	↘	$-\infty$	▒▒▒
$f'\|_{(-\infty, 1)}$		+ + + +	0	− − − −	$-\infty$	▒▒▒
$f''\|_{(-\infty, 1)}$		− − − −	−	− − −		▒▒▒

În figura M.B.17 este redată reprezentarea geometrică a graficului funcţiei f.

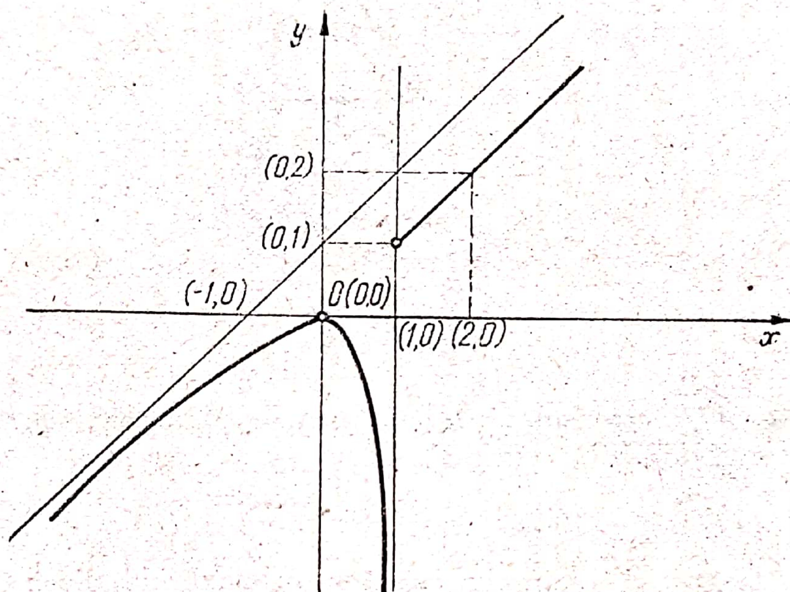


Fig. M.B.17

Notă. Cum

$$(x+1) - \frac{x^2}{x-1} = \frac{1}{1-x} > 0, \ (\forall)x \in (-\infty, 1); \ (x+1) - x > 0, \ (\forall)x \in [1, +\infty),$$

rezultă că graficul funcţiei f nu întîlneşte asimptota oblică, fiind situat peste tot sub asimptota respectivă.

4°. Notînd $f(x) = \sqrt{1+\sqrt{x}}$ şi punînd $1 + \sqrt{x} = t$, avem $x = (t-1)^2$, unde $t: [0, 1] \to [1, 2]$, $t(0) = 1$, $t(1) = 2$; în plus, $dx = 2(t-1)\,dt$. Cum $f: [0, 1] \to [1, 1+\sqrt{2}]$ este continuă, deci integrabilă, avem:

$$\int_0^1 \sqrt{1+\sqrt{x}}\,dx = \int_1^2 \sqrt{t} \cdot 2(t-1)\,dt = 2\int_1^2 \left(t^{\frac{3}{2}} - t^{\frac{1}{2}}\right) dt = \frac{8(\sqrt{2}+1)}{15}.$$

5°. Considerînd schimbarea de variabilă:

$u = 1 - x$; $u: [0, 1] \to [0, 1]$, $u(0) = 1$, $u(1) = 0$, avem: $du = -dx$, deci:

$$\int_0^1 x^n(1-x)^p\,dx = -\int_1^0 (1-u)^n \cdot u^p\,du = \int_0^1 (1-x)^n \cdot x^p\,dx.$$

IX. 1°. $[BE$ fiind tangentă la cercul (γ), în punctul B, iar $[AB]$ rază a cercului respectiv (v. fig. M.B.18), rezultă $m(\widehat{ABE}) = 90°$. Dar, prin ipoteză:

$$(1) \qquad \widehat{ABC} \equiv \widehat{CBD} \equiv \widehat{DBE}, \text{ deci}$$
$$m(\widehat{ABC}) = m(\widehat{CBD}) = m(\widehat{DBE}) = 30°.$$

Fig. M.B.18

Pe de altă parte, $\widehat{ABC}$ este unghi înscris într-un semicerc, deci $m(\widehat{ACB}) = 90°$, astfel că, din triunghiul ABC, găsim:

$$(2) \qquad m(\widehat{BAC}) = 180° - [m(\widehat{ABC}) + m(\widehat{ACB})] = 60°.$$

Notă. Se poate arăta și reciproca acestei propoziții, adică: „în condițiile din problemă, (2) implică (1)". Într-adevăr, dacă ținem seama de (2), cum $[AD] \equiv [AB]$ (ca raze ale aceluiași cerc), rezultă că triunghiul ABD este echilateral, deci: $m(\widehat{ABD}) = 60°$. Apoi găsim, fără dificultate, că:

$$m(\widehat{ABC}) = 30°; \quad m(\widehat{CBD}) = 30°; \quad m(\widehat{DBE}) = 30°,$$

de unde rezultă (1).

Fig. M.B.19

2°. Construim $DE \parallel AC$, $E \in AB$ (v. fig. M.B.19). Atunci $DE \perp DB$ și, aplicînd teorema catetei în triunghiul EDB, găsim:

$$(1) \qquad DE^2 = EA \cdot EB; \quad DB^2 = AB \cdot BE.$$

Cum $EACD$ este paralelogram, rezultă:

$$(2) \qquad [DE] \equiv [AC]; \quad [EA] \equiv [DC].$$

Din (1) și (2), găsim: $\frac{AC^2}{BD^2} = \frac{DC \cdot EB}{AB \cdot EB}$, adică: $\frac{AC^2}{BD^2} = \frac{DC}{AB}$, de unde: $\frac{AC}{BD} = \frac{1}{\sqrt{k}}$.

3°. Fie M, N, P, Q, R, S mijloacele muchiilor $[AB]$, $[BC]$, $[CD]$, $[AD]$, $[AC]$, $[BD]$ (v. fig. M.B.20), respectiv; atunci:

$$(1)\quad (A, B, P) \cap (C, D, M) = MP; \quad (B, C, Q) \cap (A, D, N) = NQ;$$
$$(B, D, R) \cap (A, C, S) = RS.$$

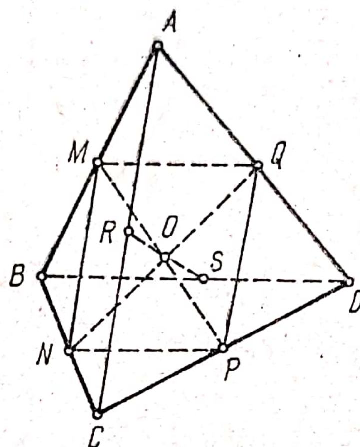


Fig. M.B.20

$[MN]$ și $[PQ]$ fiind linii mijlocii corespunzătoare laturii $[AC]$, respectiv în triunghiurile ABC și ADC, rezultă: $MN \parallel AC \parallel PQ$; analog: $MQ \parallel BD \parallel NP$. Așadar, $MNPQ$ este paralelogram, deci:

$$(2)\qquad [MP] \cap [NQ] = \{O\}; \quad [MO] \equiv [OP], \; [NO] \equiv [OQ].$$

În mod similar se arată că $RQSN$ este paralelogram, avînd diagonalele $[NQ]$ și $[RS]$ care se taie în mijlocul diagonalei $[NQ]$. Prin urmare:

$$(3)\qquad [NQ] \cap [RS] = \{O\}.$$

În sfîrșit, din (1), (2) și (3) obținem:

$$O \in [MP] \cap [NQ] \cap [RS] = (A, B, P) \cap (M, C, D) \cap (B, C, Q) \cap$$
$$\cap (A, D, N) \cap (B, D, R) \cap (A, C, S).$$

4°. Ținem seama că inecuația dată este echivalentă cu:

$$\sin 2x - \sqrt{2} \cos 2x \cos \frac{\pi}{4} - \sqrt{2} \sin 2x \sin \frac{\pi}{4} \geqslant 1, \text{ de unde}$$

$$(1)\qquad \cos 2x \leqslant -1.$$

Pe de altă parte, potrivit definiției funcției cosinus, avem:

$$(2)\qquad -1 \leqslant \cos 2x \leqslant 1, \quad (\forall) x \in \mathbf{R}.$$

Din (1) și (2) deducem $\cos 2x = -1$, de unde:

$$2x \in \text{Arccos}(-1) = \{\pm \arccos(-1) + 2k\pi \mid k \in \mathbf{Z}\},$$

deci

$$x \in \left\{\pm \frac{\pi}{2} + k\pi \mid k \in \mathbf{Z}\right\}.$$

5°. Hiperbola fiind echilaterală (v. fig.M.B.21), focarele acesteia sînt $F(a\sqrt{2}, 0)$, $F'(-a\sqrt{2}, 0)$. Fie α și β coordonatele punctului $P \in (H)$. Sînt de luat în seamă următoarele trei cazuri:

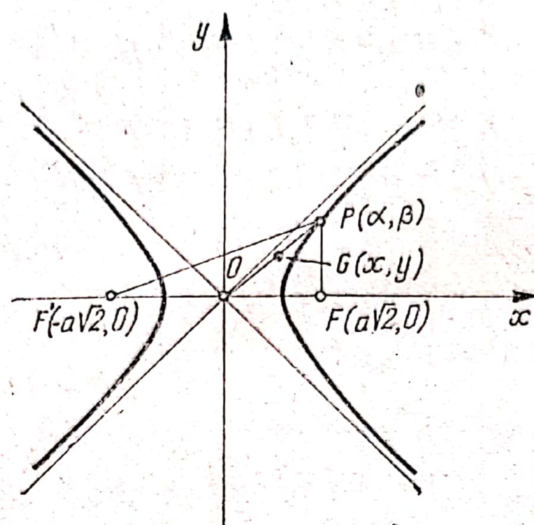


Fig. M.B.21

i) pentru $\alpha \leqslant -a\sqrt{2}$, rezultă $m(\widehat{PF'F}) \geqslant 90°$;

ii) pentru $\alpha \geqslant a\sqrt{2}$, rezultă $m(\widehat{PFF'}) \geqslant 90°$;

iii) pentru $\alpha \in (-a\sqrt{2}, a\sqrt{2}) \setminus [-a, a]$ rezultă $m(\widehat{PF'F}) < 90°$ și $m(\widehat{PFF'}) < 90°$.

Prin urmare, triunghiul PFF' poate fi ascuțitunghic numai în cazul iii), situație în care mai este necesar să studiem $m(\widehat{FPF'})$, considerînd că $P \notin FF'$.

$$m(\widehat{FPF'}) < 90° \Leftrightarrow \cos \widehat{FPF'} > 0 \Leftrightarrow \frac{PF^2 + F'P^2 - F'F^2}{2PF \cdot PF'} > 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{(\alpha - a\sqrt{2})^2 + \alpha^2 - a^2 + (\alpha + a\sqrt{2})^2 + \alpha^2 - a^2 - 8a^2}{2\sqrt{[(\alpha - a\sqrt{2})^2 + \alpha^2 - a^2][(\alpha + a\sqrt{2})^2 + \alpha^2 - a^2]}} > 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 4\alpha^2 - 6a^2 > 0 \Leftrightarrow \alpha \in \left(-\infty, -\frac{a\sqrt{6}}{2}\right) \cup \left(\frac{a\sqrt{6}}{2}, +\infty\right).$$

Așadar, triunghiul PFF' este ascuțitunghic numai atunci cînd

$$\alpha \in \left(-a\sqrt{2}, -\frac{a\sqrt{6}}{2}\right) \cup \left(\frac{a\sqrt{6}}{2}, a\sqrt{2}\right); \ \beta \neq 0.$$

Fie, acum, $G(x, y)$ centrul de greutate al triunghiului FPF'. Cum G se găsește pe mediana $[OP]$, astfel încît: $\frac{OG}{OP} = \frac{1}{3}$, rezultă:

(1) $$x = \frac{\alpha}{3}, \quad y = \frac{\beta}{3}, \text{ unde}$$

(2) $$\alpha^2 - \beta^2 = a^2, \qquad (\beta \neq 0).$$

Eliminînd parametrii α și β între relațiile (1) și (2), obținem:

(3) $$x^2 - y^2 = \frac{a^2}{9}.$$

Aşadar, locul geometric căutat este format din mulţimea punctelor aflate pe arcele hiperbolei de ecuaţie (3) şi ale căror coordonate x şi y satisfac condiţiile:

$$x \in \left(-\frac{a\sqrt{2}}{3}, -\frac{a\sqrt{6}}{6}\right) \cup \left(\frac{a\sqrt{6}}{6}, \frac{a\sqrt{2}}{3}\right); \quad y \neq 0.$$

X.1°. *Metoda I.* Folosind schema lui Horner, găsim că $x_1 = 2$, $x_2 = 3$ şi $x_3 = 5$ sînt soluţiile ecuaţiei date. Formulele:

(1) $$V = abc;$$

(2) $$A_t = 2(ab + ac + bc);$$

(3) $$d = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2},$$

care dau volumul, aria totală şi, respectiv, lungimea diagonalei (în fapt, lungimile diagonalelor paralelipipedului, dar care sînt însă congruente) sînt simetrice în a, b şi c, deci, pentru a face o alegere, putem considera:

(4) $$a = x_1, \ b = x_2, \ c = x_3.$$

Ţinînd seama de (4) în (1), (2) şi (3), obţinem:

$$V = 30, \ A = 62, \ d = \sqrt{38}.$$

Metoda II. Avem în vedere că:

$$x^3 - 10x^2 + 31x - 30 = x^3 - 10x^2 + 25x + 6x - 30 =$$

$$= x(x^2 - 10x + 25) + 6(x - 5) = (x - 5)[x(x - 5) + 6] = (x - 5)(x - 2)(x - 3),$$

prin urmare, ecuaţia dată este echivalentă cu:

$$(x - 2)(x - 3)(x - 5) = 0,$$

de unde soluţiile $x_1 = 2$, $x_2 = 3$ şi $x_3 = 5$, raţionamentul continuîndu-se ca la metoda anterioară.

Metoda III. Scriind relaţiile lui Viète, corespunzătoare ecuaţiei date găsim:

$$\begin{cases} a + b + c = 10; \\ ab + ac + bc = 31; \\ abc = 30, \end{cases}$$

şi, comparîndu-le cu (1) — (3) (v. Metoda I), găsim:

$$V = 30, \qquad A = 2 \cdot 31 = 62,$$

$$d = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2} = \sqrt{(a + b + c)^2 - 2(ab + ac + bc)} = \sqrt{38}.$$

Metoda IV. Scriind că a, b şi c verifică ecuaţia dată, obţinem sistemul:

$$\begin{cases} a^3 - 10a^2 + 31a - 30 = 0; \\ b^3 - 10b^2 + 31b - 30 = 0; \\ c^3 - 10c^2 + 31c - 30 = 0. \end{cases}$$

Scăzînd, succesiv, din prima ecuaţie pe celelalte două, găsim:

$$a^3 - b^3 - 10(a^2 - b^2) + 31(a - b) = 0;$$

$$a^3 - c^3 - 10(a^2 - c^2) + 31(a - c) = 0,$$

de unde, cum $a \neq b$ şi $a \neq c$, obţinem:

$$a^2 + ab + b^2 - 10(a + b) + 31 = 0;$$

$$a^2 + ac + c^2 - 10(a + c) + 31 = 0.$$

Făcînd diferența dintre ultimele două relații, avem:

$$b^2 - c^2 + a(b - c) - 10(b - c) = 0$$

sau, cum $b \neq c$, obținem: $a + b + c = 10$. Acum, ideea de a folosi relațiile lui Viète aproape că se impune de la sine, mai ales dacă la pasul următor se are în vedere ridicarea la pătrat a ultimei egalități obținute, în scopul evaluării sumei pătratelor celor trei muchii ale paralelipipedului.

Note. 1. Metoda III, poate cea mai indicată, este mai elegantă și mai rapidă decît toate celelalte, deoarece evită atît rezolvarea ecuației, cît și unele calcule numerice, care nu sînt neapărat necesare. Trebuie însă remarcat că ideea de a folosi metoda respectivă apare în mod natural la acei rezolvitori care supun problema unei analize globale și, mai ales, totale (complete), adică la aceia care intuiesc înainte de rezolvarea ecuației că vor avea de aplicat formulele (1) — (3). Pentru cei obișnuiți cu raționamente de tip liniar, în pași mici, cu finalizarea fiecărei etape intermediare de lucru, primele două metode se impuneau de la sine.

2. O formulare echivalentă cu cea a problemei considerată, dar care ar fi adus în prim plan utilizarea Metodei III, este următoarea: „Să se determine volumul, aria totală și lungimea diagonalei (diagonalelor) unui paralelipiped dreptunghic, știind că lungimile a, b, c $(a \neq b \neq c \neq a)$ a trei muchii ale acestuia sînt rădăcinile ecuației:

$$x^3 - 10x^2 + 31x - 30 = 0.“$$

3. Cea de a patra metodă de rezolvare ar fi putut fi sugerată de problema respectivă, în forma dată sau în formulări similare, dar în care s-ar fi înlocuit textul „sînt rădăcinile ecuației“ prin „verifică ecuația“.

2°. *Metoda I.* Ecuația dată are sens numai dacă:

$$(1) \qquad \begin{cases} x + 2 \geqslant 0; \\ x - 2 \geqslant 0; \\ 3x - 2 \geqslant 0, \end{cases}$$

adică pentru $x \in [2, +\infty)$. Observînd că ambii membri ai ecuației respective sînt pozitivi și ridicînd la pătrat, obținem: (2) $2\sqrt{x^2 - 4} = x - 2$. Efectuînd o nouă ridicare la pătrat — în (2), ai cărei membri sînt pozitivi — găsim: $(x - 2)(3x + 10) = 0$, de unde $x = 2$, deoarece $3x + 10 > 0$, pentru $x \in [2, +\infty)$.
Metoda II. Se procedează ca anterior pînă se obține relația (2) ce mai poate fi scrisă sub forma:

$$\sqrt{x - 2}\,(2\sqrt{x + 2} - \sqrt{x - 2}) = 0,$$

de unde $x = 2 \in [2, +\infty)$ și $2\sqrt{x + 2} = \sqrt{x - 2}$, ultima egalitate conducînd, de exemplu, prin ridicare la pătrat (ambii membri fiind pozitivi) la valoarea:

$$x = -\frac{10}{3} \notin [2, +\infty).$$

Așadar, $x = 2$ este singura valoare care verifică ecuația dată.
Metoda III. Se impun aceleași condiții (1) ca la metodele anterioare, de unde rezultă că $x \in [2, +\infty)$. Notăm: (3) $x + 2 = u^2$; $x - 2 = v^2$. Cum $x \geqslant 2$, rezultă că u^2 și v^2 trebuie să verifice condițiile: $u^2 \geqslant 4$; $v^2 \geqslant 0$. Atunci, ecuația dată se scrie ca: (4) $u + v = \sqrt{u^2 + 2v^2}$, iar din (3), scăzînd între ele cele două egalități, obținem: (5) $u^2 - v^2 = 4$. Pentru a afla soluțiile ecuației date este necesar să rezolvăm sistemul format din ecuațiile (4) și (5). Ridicînd la pătrat

în (4), găsim: $v(v-2u)=0$, de unde: $v=0$ sau $v=2u$. Pentru $v=0$ din (5) rezultă $u^2=4$ și, dacă ținem cont de aceste valori în (3), obținem $x=0$. Pentru $v=2u$, (5) devine:

$$u^2-4u^2=4,$$

egalitate imposibilă deoarece $u^2 \geqslant 4$. Așadar, singura soluție a ecuației date este $x=2$.

Metoda IV. Se procedează ca anterior, pînă se găsește că $x \in [2, +\infty)$. Apoi, se ține seama că ecuația dată se mai scrie ca:

$$\sqrt{x+2}+\sqrt{x-2}=\sqrt{(x+2)+2(x-2)} \text{ sau}$$

(6) $$1+\sqrt{\frac{x-2}{x+2}}=\sqrt{1+2\cdot\frac{x-2}{x+2}},$$

deoarece $x+2>0$, pentru $x \geqslant 2$. Notînd: (7) $\sqrt{\frac{x-2}{x+2}}=t$, avem: (8) $0 \leqslant t < 1$, inegalități care rezultă imediat, deoarece $x \geqslant 2$. Pe de altă parte, ținînd seama de (7) în (6), găsim:

$$1+t=\sqrt{1+2t^2},$$

de unde, ridicînd la pătrat (ambii membri fiind pozitivi) și efectuînd calculele, obținem: $t(t-2)=0$, deci $t=0$ sau $t=2$. Valoarea $t=2$ nu satisface (8), prin urmare nu poate conduce la o soluție a ecuației date. Pentru $t=0$, din (7), găsim $x=2$, aceasta fiind unica soluție a ecuației considerate.

Metoda V. Ridicînd la pătrat ambii membri ai ecuației date și efectuînd calculele, obținem: $2\sqrt{x^2-4}=x-2$, care mai poate fi pusă și sub forma: $\sqrt{x-2}(2\sqrt{x+2}-\sqrt{x-2})=0$, de unde $x=2$ și $2\sqrt{x+2}=\sqrt{x-2}$. Ridicînd la pătrat în ultima egalitate și efectuînd calculele, găsim $x=-\frac{10}{3}$. În sfîrșit, prin calcul direct se constată că $x=2$ verifică ecuația dată în timp ce $x=-\frac{10}{3}$ conduce la o egalitate imposibilă. Deci singura soluție a ecuației respective este $x=2$.

Note. 1. Prima metodă pare a fi cea mai naturală deoarece folosește succesiv două ridicări la pătrat. Trebuie observat însă că, în general, ridicarea la pătrat poate conduce la creșterea gradului ecuației care se obține, fapt ce poate avea ca efect imposibilitatea de a rezolva noua ecuație. Creșterea gradului ecuațiilor care se obțin prin ridicări la pătrat poate fi atenuată dacă se procedează ca la Metoda II.

2. În cele mai multe lucrări de specialitate nu se atrage atenția asupra studierii semnelor celor doi membri ai unei ecuații, înaintea ridicării la pătrat, acest lucru fiind solicitat, aproape în exclusivitate, numai în cazul inecuațiilor. Probabil că se are în vedere afirmația: „oricare ar fi numerele A și B, reale sau complexe, $A=B$ implică $A^2=B^2$". Ținînd însă seama că „pentru A și B, numere reale sau complexe, din $A^2=B^2$ nu rezultă (cu necesitate) $A=B$", putînd avea $A=B$ sau $A=-B$, considerăm că trebuie analizate două situații distincte, conștienți fiind că procedeul de rezolvare a ecuațiilor prin ridicare la pătrat poate introduce rădăcini străine:

— impunînd condițiile de existență a ecuației date și asigurîndu-ne că egalitățile $A=B$ și $A^2=B^2$ sînt echivalente (afirmație adevărată atunci cînd A și B au același semn), avem asigurat că soluțiile obținute printr-un calcul corect satisfac ecuația dată, dacă verifică toate condițiile impuse. Așa am procedat la Metodele I—IV. În asemenea cazuri, verificarea soluțiilor (astfel obținute) în ecuația dată este facultativă, aceasta avînd doar rolul de control asupra corectitudinii calculului;

— neimpunînd nici un fel de condiție asupra necunoscutelor, se efectuează calculele necesare după care se verifică în ecuația dată toate valorile obținute, în vederea eliminării rădăcinilor străine. În acest mod am procedat în cazul Metodei V.

3°. *Metoda I.* Egalitatea din ipoteză, fiind simetrică în A, B și C, o putem scrie, pentru a face o alegere, sub forma:

$$A = \pi - B - C,$$

de unde:

$$\sin A = \sin[\pi - (B + C)] = \sin(B + C).$$

Atunci:

$$\sin A + \sin B + \sin C = \sin(B + C) + \sin B + \sin C =$$

$$= 2 \sin \frac{B + C}{2} \cos \frac{B + C}{2} + 2 \sin \frac{B + C}{2} \cos \frac{B - C}{2} =$$

$$= 2 \sin \frac{B + C}{2} \left(\cos \frac{B + C}{2} + \cos \frac{B - C}{2} \right) =$$

$$= 2 \sin \frac{\pi - A}{2} \cdot 2 \cos \frac{\frac{B+C}{2} + \frac{B-C}{2}}{2} \cos \frac{\frac{B+C}{2} - \frac{B-C}{2}}{2} =$$

$$= 4 \sin\left(\frac{\pi}{2} - \frac{A}{2}\right) \cos \frac{B}{2} \cos \frac{C}{2} = 4 \cos \frac{A}{2} \cos \frac{B}{2} \cos \frac{C}{2},$$

de unde, reținînd din lanțul de egalități numai termenii extremi, rezultă egalitatea din enunț.

Metoda II. Egalitatea ce trebuie dovedită este echivalentă cu:

$$2 \sin \frac{A}{2} \cos \frac{A}{2} + 2 \sin \frac{B}{2} \cos \frac{B}{2} + 2 \sin \frac{C}{2} \cos \frac{C}{2} -$$

$$- 4 \cos \frac{A}{2} \cos \frac{B}{2} \cos \frac{C}{2} = 0, \text{ adică:}$$

$$(1) \qquad \sin \frac{A}{2} \cos \frac{A}{2} + \cos \frac{B}{2} \left(\sin \frac{B}{2} - \cos \frac{A}{2} \cos \frac{C}{2} \right) +$$

$$+ \cos \frac{C}{2} \left(\sin \frac{C}{2} - \cos \frac{A}{2} \cos \frac{B}{2} \right) = 0.$$

Prin ipoteză: $A + B + C = \pi$, deci $\frac{B}{2} = \frac{\pi}{2} - \frac{A + C}{2}$, de unde:

$$(2) \qquad \sin \frac{B}{2} = \cos \frac{A + C}{2} = \cos \frac{A}{2} \cos \frac{C}{2} - \sin \frac{A}{2} \sin \frac{C}{2}$$

și, analog:

$$(3) \qquad \sin \frac{C}{2} = \cos \frac{A + B}{2} = \cos \frac{A}{2} \cos \frac{B}{2} - \sin \frac{A}{2} \sin \frac{B}{2}.$$

Ținînd cont de (2) și (3) în (1), obținem:

$$\left(\cos \frac{A}{2} - \cos \frac{B}{2} \sin \frac{C}{2} - \sin \frac{B}{2} \cos \frac{C}{2} \right) \cdot \sin \frac{A}{2} = 0 \text{ sau:}$$

$$\left[\cos \frac{A}{2} - \sin\left(\frac{B}{2} + \frac{C}{2} \right) \right] \cdot \sin \frac{A}{2} = 0, \text{ adică:}$$

$$(4) \qquad \left(\cos \frac{A}{2} - \sin \frac{\pi - A}{2} \right) \cdot \sin \frac{A}{2} = 0,$$

egalitate care este adevărată pentru orice valoare a lui A, deoarece $\sin \frac{\pi - A}{2} = \cos \frac{A}{2}$.

Metoda III. Ținînd seama că:

$$\sin B + \sin C = 2 \sin \frac{B+C}{2} \cos \frac{B-C}{2};$$

$$\sin \frac{B+C}{2} = \sin\left(\frac{\pi}{2} - \frac{A}{2}\right) = \cos \frac{A}{2},$$

egalitatea dată este echivalentă cu:

$$\sin A + 2 \sin \frac{B+C}{2} \cos \frac{B-C}{2} = 4 \cos \frac{A}{2} \cos \frac{B}{2} \cos \frac{C}{2}, \text{ sau:}$$

$$\sin \frac{A}{2} \cos \frac{A}{2} + \cos \frac{A}{2} \cos \frac{B-C}{2} = 2 \cos \frac{A}{2} \cos \frac{B}{2} \cos \frac{C}{2}.$$

Ultima egalitate este adevărată pentru $A = \pi$, iar dacă $A \neq \pi$ aceasta este echivalentă cu:

$$\sin \frac{A}{2} + \cos \frac{B-C}{2} = 2 \cos \frac{B}{2} \cos \frac{C}{2}, \text{ sau:}$$

$$\sin \frac{A}{2} + \sin \frac{B}{2} \sin \frac{C}{2} = \cos \frac{B}{2} \cos \frac{C}{2}, \text{ adică:}$$

$\sin \frac{A}{2} = \cos \frac{B+C}{2}$, ultima relație fiind adevărată, deoarece: $\frac{B+C}{2} = \frac{\pi}{2} - \frac{A}{2}$.

Note. 1. Pentru a arăta că relația (4), de la metoda a doua, este adevărată s-ar fi putut proceda și la o analiză de cazuri:

— dacă $A = 0$, atunci egalitatea (4) este verificată;

— dacă $A \neq 0$, atunci (4) este echivalentă cu: $\cos \frac{A}{2} - \sin \frac{\pi - A}{2} = 0$, care este adevărată pentru orice A, deoarece: $\cos \frac{A}{2} = \sin \frac{\pi - A}{2}$.

2. Condiția din ipoteză: $A + B + C = \pi$ nu este echivalentă cu afirmația „A, B și C sînt unghiuri ale unui triunghi", caz în care, evident, A, B sau C nu pot lua valorile 0 sau π.

4°. *Metoda I.* Cum M și N sînt mijloacele catetelor $[AB]$ și respectiv $[AC]$ (v. fig. M.B.22), rezultă că $[MN]$ este linie mijlocie în ABC, prin urmare:

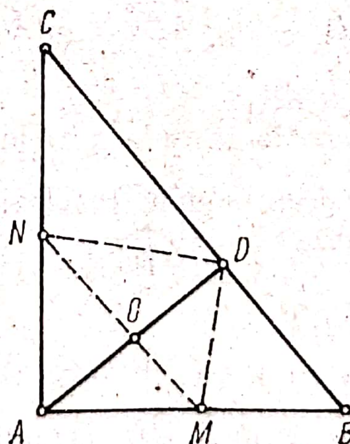


Fig. M.B.22

(1) $MN \parallel BC$. Pe de altă parte, D fiind proiecția (ortogonală) a lui A pe $[BC]$, deducem că: (2) $AD \perp BC$. Din (1) și (2), rezultă: (3) $AD \perp MN$. Fie O punctul de intersecție al lui $[AD]$ cu $[MN]$, adică $[AD] \cap [MN] = \{O\}$. Din $\triangle ADB$, cum $OM \parallel DB$, rezultă: (4) $\frac{AO}{OD} = \frac{AM}{MB}$. Dar (5) $[AM] \equiv [MB]$ și, dacă ținem seama

de (5) în (4), obținem: (6) $[AO] \equiv [OD]$. Din (3) și (6) rezultă că MN este mediatoarea segmentului $[AD]$, prin urmare: (7) $[MA] = [MD]$. Analog, însă folosind $\triangle ADC$, găsim: (8) $[NA] \equiv [ND]$. Ținînd seama de (7) și (8), precum și de faptul că $[MN] \equiv [NM]$, rezultă că triunghiurile MAN și MDN sînt congruente (cazul L.L.L.), prin urmare: $\widehat{MAN} \equiv \widehat{MDN}$, adică $m(\widehat{MDN}) = 90°$.

Metoda II. Cum $AD \perp BC$, D fiind proiecția (ortogonală) a lui A pe BC, rezultă că $\triangle ADB$ este dreptunghic. Pe de altă parte, prin ipoteză, M este mijlocul lui $[AB]$, prin urmare M este centrul cercului circumscris triunghiului ADB, de unde: (9) $[MA] \equiv [MD]$, ca raze ale cercului respectiv. Analog, dar folosind $\triangle ADC$, găsim: (10) $[NA] \equiv [ND]$. Din (9) și (10), în fapt relații identice cu (7) și (8), de la metoda anterioară, și ținînd seama că $[MN] \equiv [MN]$, rezultă (cazul L.L.L.): $\triangle MAN \equiv \triangle MDN$, de unde $\widehat{MAN} \equiv \widehat{MDN}$, deci $m(\widehat{MDN}) = 90°$.

Metoda III. Din faptul că $MN \parallel BC$, ($[MN]$ fiind linie mijlocie în $\triangle ABC$), rezultă: (11) $\widehat{AMN} \equiv \widehat{ABC}$, ca unghiuri corespondente, și: (12) $\widehat{NMD} \equiv \widehat{MDB}$, ca unghiuri alterne interne. Pe de altă parte, triunghiul ADB fiind dreptunghic, găsim că $[MD] \equiv [MB]$, ca raze ale cercului triunghiului respectiv, prin urmare $\triangle BMD$ este isoscel, deci: (13) $\widehat{MBD} \equiv \widehat{MDB}$. Din (11), (12) și (13), obținem: (14) $\widehat{AMN} \equiv \widehat{NMD}$. Analog, găsim: (15) $\widehat{ANM} \equiv \widehat{MND}$. Ținînd seama de (14) și (15), precum și de faptul că $[MN] \equiv [MN]$, rezultă (cazul U.L.U.): $\triangle MAN \equiv \triangle MDN$, prin urmare $m(\widehat{MDN}) = 90°$.

Metoda IV. Se procedează ca la Metoda II pînă cînd se obțin relațiile (9) și (10). Apoi se ține seama că $\triangle MAN$ este dreptunghic, prin urmare: (16) $MN^2 = AM^2 + AN^2$, iar din (9) și (10) găsim: (17) $MA = MD$; $NA = ND$. Ținînd cont de (17) în (16), obținem: $MN^2 = MD^2 + ND^2$, ceea ce probează faptul că $\triangle MDN$ este dreptunghic în D.

Metoda V. Obținînd, ca la Metoda I sau ca la cea de-a doua, că $[MA] \equiv [MD]$, deducem că $\triangle AMD$ este isoscel, prin urmare: $\widehat{MAD} \equiv \widehat{MDA}$. Analog, se găsește: $\widehat{NAD} \equiv \widehat{NDA}$. Așadar:

$$90° = m(\widehat{MAN}) = m(\widehat{MAD}) + m(\widehat{NAD}) = m(\widehat{MDA}) + m(\widehat{NDA}) = m(\widehat{MDN}),$$

deci $m(\widehat{MDN}) = 90°$.

Metoda VI. Din motivele arătate la metoda a treia, au loc relațiile (13) și (14). Pe de altă parte, $\triangle ABC$ fiind dreptunghic, rezultă: $m(\widehat{ABD}) + m(\widehat{NCD}) = 90°$. Atunci $m(\widehat{MDN}) = 180° - [m(\widehat{MDB}) + m(\widehat{NDC})] = 180° - [m(\widehat{MBD}) + m(\widehat{NCD})] = 180° - 90° = 90°$, deci $m(\widehat{MDN}) = 90°$.

Metoda VII. Motivînd ca anterior că M este centrul cercului circumscris $\triangle ADB$, găsim: (18) $m(\widehat{AMD}) = 2\, m(\widehat{ABD})$, primul fiind unghi la centru iar celălalt unghi înscris în cercul respectiv. Analog, obținem: (19) $m(\widehat{AND}) = 2\, m(\widehat{ACD})$. Ținînd seama de (18) și (19), precum și de faptul că $AMND$ este un poligon convex, găsim $m(\widehat{MDN}) = 360° - [m(\widehat{NAM}) + m(\widehat{AMD}) + m(\widehat{DNA})] = 360° - 90° - 2[m(\widehat{ABD}) + m(\widehat{ACD})] = 270° - 2 \cdot 90° = 90°$, adică $m(\widehat{MDN}) = 90°$.

Note. 1. La primele trei metode, ideea comună este de a arăta congruența triunghiurilor MAN şi MDN, de unde rezultă concluzia problemei.

2. Teorema lui Pitagora este utilizată numai la Metoda IV.

3. Proprietatea privind inscriptibilitatea unui triunghi dreptunghic în cercul de diametru egal cu ipotenuza triunghiului respectiv este utilizată la Metodele II—IV, VI şi VII, la Metoda V aceasta fiind opțională.

XI. 1°. Aplicînd proprietățile determinanților avem succesiv:

$$\begin{vmatrix} a+b & c & 1 \\ c-a & a-c & 0 \\ c-b & b-c & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} c-a & a-c \\ c-b & b-c \end{vmatrix} = 0.$$

2°. Ecuația se mai scrie:

$$m(2x^2 - 5x + 2) + x^3 - 5x^2 + 9x - 6 = 0.$$

Rădăcina independentă de m satisface:

$$\begin{cases} 2x^2 - 5x + 2 = 0; \\ x^3 - 5x^2 + 9x - 6 = 0. \end{cases}$$

Prima ecuație are rădăcinile 2 şi $\frac{1}{2}$. Valoarea $x = 2$ satisface şi a doua ecuație şi deci aceasta este rădăcina întreagă independentă de m căutată. Ecuația inițială se mai scrie:

$$(x-2)[x^2 + (2m-3)x - (m-3)] = 0,$$

avînd rădăcinile:

$$x_1 = 2; \quad x_{2,3} = \frac{2m - 3 \pm \sqrt{4m^2 - 8m - 3}}{2}.$$

3°. Punem condițiile: $f(-1) = 5$; $f'(-1) = 0$, de unde: $1 + 4m - 2n = 5$; $-3 - 3m + n + 6 = 0 \Rightarrow m = 1;\ n = 0$.

4°. a). Avem $\lim\limits_{n\to\infty} x^{2n} = \begin{cases} 0 & \text{pentru } x \in (-1,\ 1), \\ 1 & \text{pentru } x \in \{-1,\ 1\}, \\ +\infty & \text{pentru } x \in (-\infty,\ -1) \cup (1,\ \infty). \end{cases}$

Cu aceasta obținem:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{x^{2n} - x^2 + 6}{x^{2n} + x^2 + 4} = \frac{6 - x^2}{x + x^2} \quad \text{pentru } x \in (-1,\ 1);$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{x^{2n} - x^2 + 6}{x^{2n} + x^2 + 4} = 1 \quad \text{pentru } x \in \{-1,\ 1\};$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{x^{2n} - x^2 + 6}{x^{2n} + x^2 + 4} = \lim_{n\to\infty} \frac{x^{2n}\left(1 - \frac{x^2}{x^{2n}} + \frac{6}{x^{2n}}\right)}{x^{2n}\left(1 + \frac{x^2}{x^{2n}} + \frac{n}{x^{2n}}\right)} = 1 \text{ pentru } x \in (-\infty,\ -1) \cup (1,\ \infty).$$

b) Avem $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$,

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{pentru } x \in (-\infty,\ -1], \\ \dfrac{6 - x^2}{4 + x^2} & \text{pentru } x \in (-1,\ 1), \\ 1 & \text{pentru } x \in [1,\ \infty). \end{cases}$$

$f(-x) = f(x)$, deci f este pară şi vom studia variația doar pe $[0,\ \infty)$.

Intersecția cu axa absciselor: $y = 0 \Rightarrow x = \sqrt{6} \notin [0, 1)$.

Intersecția cu axa ordonatelor: $x = 0 \Rightarrow y = \frac{3}{2}$.

Graficul nu prezintă asimptote.

$$f'(x) = \begin{cases} -\dfrac{20x}{(4 + x^2)^2} & \text{pentru } x \in [0, 1), \\ 0 & \text{pentru } x \in (1, \infty). \end{cases}$$

$f_s'(1) = \lim\limits_{\substack{x \to 1 \\ x < 1}} f'(x) = -\frac{4}{5}$; $f_d'(1) = \lim\limits_{\substack{x \to 1 \\ x > 1}} f'(x) = 0$ și deci f nu este derivabilă în $x = 1$, conform corolarului teoremei lui Lagrange.

$$f''(x) = \begin{cases} \dfrac{20(3x^2 - 4)}{(4 + 2x^2)^3} & \text{pentru } x \in [0, 1), \\ 0 & \text{pentru } x \in (1, \infty). \end{cases}$$

$f''(x)$ nu se anulează pe $(0, 1)$.

Tabloul de variație pe $[0, \infty)$ este următorul:

x	0		1		∞
$f'(x)$		— — — — $-\frac{4}{5}$		0 0	
$f''(x)$		— — —		0 0 0	
$f(x)$	$\frac{3}{2}$	↘	1	1	1

Graficul funcției este prezentat în fig. M.B.23:

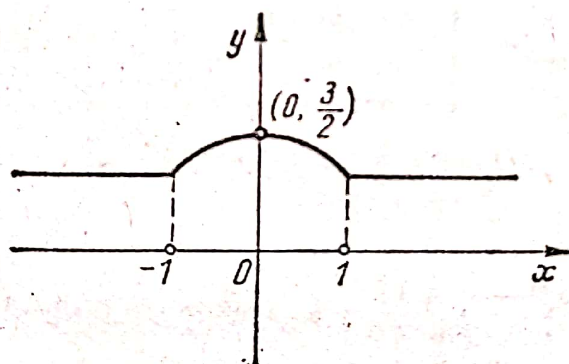


Fig. M.B.23

5°. Considerăm $\varphi : [0, 1] \to \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$, $\varphi(t) = 2 \operatorname{arctg} t$, $\varphi'(t) = \frac{2}{1 + t^2}$.

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{2 \cos x + 3} = \int_0^1 \frac{1}{2\dfrac{1 - t^2}{1 + t^2} + 3} \cdot \frac{2}{1 + t^2} dt = 2\int_0^1 \frac{1}{5 + t^2} dt = \frac{2}{\sqrt{5}} \operatorname{arctg} \frac{t}{\sqrt{5}} \Big|_0^1 =$$

$$= \frac{2}{\sqrt{5}} \operatorname{arctg} \frac{1}{\sqrt{5}}.$$

XII. 1°. Fie M, N, P, Q mijloacele laturilor $[AB]$, $[BC]$, $[CD]$ și $[DA]$ respectiv (v. fig. M.B.24). Coarda comună $[BB']$ a cercurilor care au diametrele $[AB]$ și $[BC]$ este perpendiculară pe linia centrelor, deci este perpendiculară pe MN.

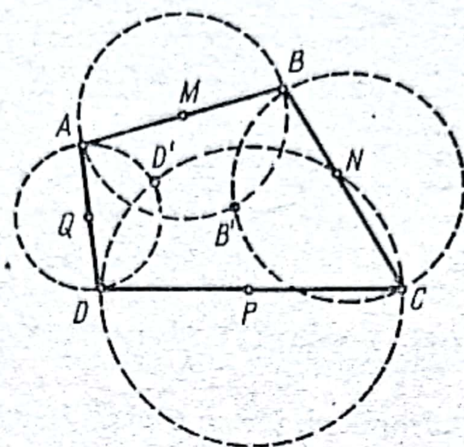


Fig. M.B.24

Analog coarda comună $[DD']$ cercurilor care au diametrele $[DC]$ și $[AD]$ este perpendiculară pe linia centrelor celor două cercuri care este PQ. Să observăm că $[MN]$ și $[PQ]$ sînt linii mijlocii în triunghiurile ABC și ADC, deci avem $MN \parallel AC$ și $PQ \parallel AC$, deci $MN \parallel PQ$. Rezultă că $BB' \parallel DD'$. Mai mult, punctele A, B' și C sînt coliniare deoarece avem $m(\widehat{AB'B}) = m(\widehat{BB'C}) = 90°$. Analog se constată că D' este pe diagonala $[AC]$.

2°. *Cazul 1.* N este pe cercul dat între A și M, iar M între B și N (v. fig. M.B.25). În acest caz să observăm că $ABMN$ este trapez isoscel cu laturile neparalele congruente $[AB] \equiv [MN]$. Dacă notăm $\{P\} = AM \cap BN$ avem $m(\widehat{APB}) = \dfrac{m(\widehat{AB}) + m(\widehat{MN})}{2} = 90°$. Rezultă că punctul P aparține cercului de diametru $[AB]$. Ținînd cont că P este în interiorul cercului, deducem că locul lui P este un arc de cerc care se obține prin intersecția discului determinat de cercul dat și cercul de diametru $[AB]$.

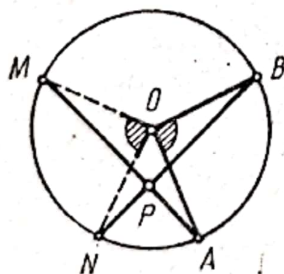


Fig. M.B.25

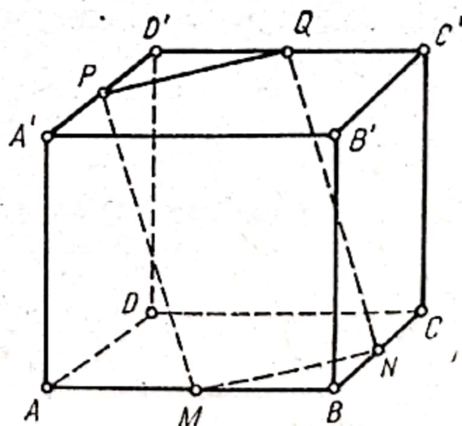


Fig. M.B.26

Cazul 2. N este pe cercul dat între B și M. În acest caz rezultă $AM \parallel BN$, deci locul este mulțimea vidă $\emptyset$.

3°. Să observăm mai întîi că $MNPQ$ (vezi fig. M.B.26) este un paralelogram. Într-adevăr, MN este linie mijlocie în triunghiul ABC, deci $MN \parallel AC$. La fel

Intersecția cu axa absciselor: $y = 0 \Rightarrow x = \sqrt{6} \notin [0, 1)$.

Intersecția cu axa ordonatelor: $x = 0 \Rightarrow y = \frac{3}{2}$.

Graficul nu prezintă asimptote.

$$f'(x) = \begin{cases} -\frac{20x}{(4+x^2)^2} & \text{pentru } x \in [0, 1), \\ 0 & \text{pentru } x \in (1, \infty). \end{cases}$$

$f_s'(1) = \lim_{\substack{x\to 1\\ x<1}} f'(x) = -\frac{4}{5}$; $f_d'(1) = \lim_{\substack{x\to 1\\ x>1}} f'(x) = 0$ și deci f nu este derivabilă în $x = 1$, conform corolarului teoremei lui Lagrange.

$$f''(x) = \begin{cases} \frac{20(3x^2-4)}{(4+2x^2)^3} & \text{pentru } x \in [0, 1), \\ 0 & \text{pentru } x \in (1, \infty). \end{cases}$$

$f''(x)$ nu se anulează pe $(0, 1)$.

Tabloul de variație pe $[0, \infty)$ este următorul:

x	0					1			∞
$f'(x)$		$-$	$-$	$-$	$-$ $\frac{4}{5}$	|	0	0	
$f''(x)$		$-$	$-$	$-$		|	0	0	0
$f(x)$	$\frac{3}{2}$	$\searrow$				1	1	1	

Graficul funcției este prezentat în fig. M.B.23:

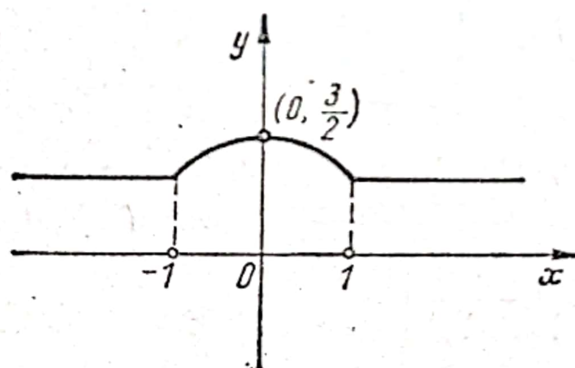


Fig. M.B.23

5°. Considerăm $\varphi : [0, 1] \to \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$, $\varphi(t) = 2 \operatorname{arctg} t$, $\varphi'(t) = \frac{2}{1+t^2}$.

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{2\cos x + 3} = \int_0^1 \frac{1}{2\frac{1-t^2}{1+t^2} + 3} \cdot \frac{2}{1+t^2} dt = 2\int_0^1 \frac{1}{5+t^2} dt = \frac{2}{\sqrt{5}} \operatorname{arctg} \frac{t}{\sqrt{5}} \Big|_0^1 =$$

$$= \frac{2}{\sqrt{5}} \operatorname{arctg} \frac{1}{\sqrt{5}}.$$

XII. 1°. Fie M, N, P, Q mijloacele laturilor $[AB]$, $[BC]$, $[CD]$ și $[DA]$ respectiv (v. fig. M.B.24). Coarda comună $[BB']$ a cercurilor care au diametrele $[AB]$ și $[BC]$ este perpendiculară pe linia centrelor, deci este perpendiculară pe MN.

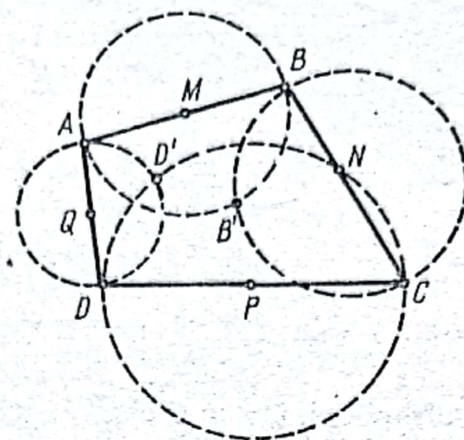


Fig. M.B.24

Analog coarda comună $[DD']$ cercurilor care au diametrele $[DC]$ și $[AD]$ este perpendiculară pe linia centrelor celor două cercuri care este PQ. Să observăm că $[MN]$ și $[PQ]$ sînt linii mijlocii în triunghiurile ABC și ADC, deci avem $MN \parallel AC$ și $PQ \parallel AC$, deci $MN \parallel PQ$. Rezultă că $BB' \parallel DD'$. Mai mult, punctele A, B' și C sînt coliniare deoarece avem $m(\widehat{AB'B}) = m(\widehat{BB'C}) = 90°$. Analog se constată că D' este pe diagonala $[AC]$.

2°. *Cazul 1.* N este pe cercul dat între A și M, iar M între B și N (v. fig. M.B.25). În acest caz să observăm că $ABMN$ este trapez isoscel cu laturile neparalele congruente $[AB] \equiv [MN]$. Dacă notăm $\{P\} = AM \cap BN$ avem $m(\widehat{APB}) = \dfrac{m(\widehat{AB}) + m(\widehat{MN})}{2} = 90°$. Rezultă că punctul P aparține cercului de diametru $[AB]$. Ținînd cont că P este în interiorul cercului, deducem că locul lui P este un arc de cerc care se obține prin intersecția discului determinat de cercul dat și cercul de diametru $[AB]$.

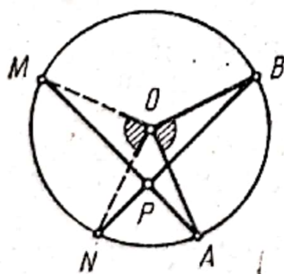


Fig. M.B.25

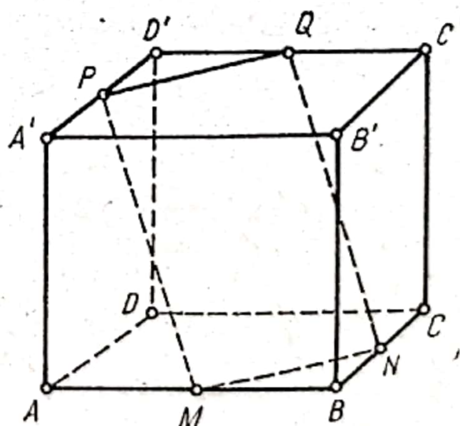


Fig. M.B.26

Cazul 2. N este pe cercul dat între B și M. În acest caz rezultă $AM \parallel BN$, deci locul este mulțimea vidă $\emptyset$.

3°. Să observăm mai întîi că $MNPQ$ (vezi fig. M.B.26) este un paralelogram. Într-adevăr, MN este linie mijlocie în triunghiul ABC, deci $MN \parallel AC$. La fel

avem $PQ \parallel A'C'$. Dar $AC \parallel A'C'$ aşa încît deducem $MN \parallel PQ$. Mai mult, $MN = PQ = \frac{AC}{2} = \frac{A'C'}{2}$. Folosind teorema lui Pitagora obţinem imediat: $MN = PQ = \frac{\sqrt{a^2+b^2}}{2}$, $MP = NQ = \frac{1}{2}\sqrt{4c^2 + a^2 + b^2}$, $MQ = \sqrt{b^2 + c^2}$ şi $PN = \sqrt{a^2 + c^2}$. Să presupunem $MN < PM$ şi să notăm $\{O\} = MQ \cap PN$. Atunci $\alpha = m(\widehat{MON}) < 90°$ şi avem:

$$\cos\alpha = \frac{MO^2 + NO^2 - MN^2}{2MO \cdot NO}.$$

Prin calcul rezultă: $\cos\alpha = \frac{c^2}{\sqrt{(b^2+c^2)(a^2+c^2)}}$. Aria paralelogramului $MNPQ$ este:

$$\sigma[MNPQ] = \frac{1}{2} MQ \cdot PN \sin\alpha = \frac{1}{2}\sqrt{a^2b^2 + b^2c^2 + a^2c^2}.$$

4°. Notăm cu V vîrful piramidei, iar cu O şi O' centrele bazelor cubului, astfel că O este şi centrul bazei piramidei date. Fie M mijlocul unei laturi a pătratului piramidei şi N intersecţia lui VM cu una din laturile cubului (v. fig. M.B.27).

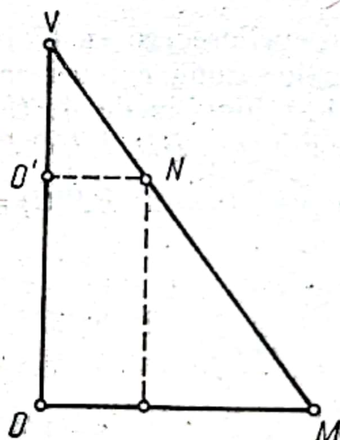


Fig. M.B.27

Dacă notăm cu x lungimea laturii cubului înscris în piramidă avem $OO' = 2\,O'N = x$. Din asemănarea triunghiurilor $\triangle VO'N$ cu $\triangle VOM$ deducem: $\frac{h-x}{h} = \frac{\frac{x}{2}}{\frac{a}{2}}$, de unde rezultă $x = \frac{ah}{a+h}$.

5°. Ecuaţia se mai scrie: $2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2} = \sin^3\frac{x}{2}$. Avem imediat soluţia $x = 2k\pi$, $k \in \mathbf{Z}$. Celelalte soluţii sînt date de ecuaţia: $2\cos\frac{x}{2} = \sin^2\frac{x}{2}$, care este echivalentă cu ecuaţia: $\cos^2\frac{x}{2} + 2\cos\frac{x}{2} - 1 = 0$ care ne mai dă soluţiile:

$$x = 4k\pi \pm 2\arccos(\sqrt{2} - 1).$$

XIII. 1°. a) Discriminantul ecuaţiei este:

$\Delta = 4(m^2 + 2m + 1)^2 - 8m(m^2 + 1) = 4(m^4 - 4m^3 + 6m^2 - 4m + 1) = 4m^2\left[m^2 - 4m + 6 - \frac{4}{m} + \frac{1}{m^2}\right] = 4m^2\left[\left(m + \frac{1}{m}\right)^2 - 4\left(m + \frac{1}{m}\right) + 4\right] = 4m^2\left[\left(m + \frac{1}{m}\right) - 2\right]^2$, deci ecuaţia are rădăcini reale.

b) Inegalitatea se exprimă în funcţie de m ($m \neq 0$) astfel $\frac{2(m+1)^2}{m^2+1} \leqslant 4$ care este echivalentă cu $(m-1)^2 \geqslant 0$. Deci inegalitatea are loc pentru orice $m \in \mathbf{R} \setminus \{0\}$.

2°. Notăm $\log_2 x = y$ ($x > 0$) şi observăm că: $\log_{16} x = \frac{y}{4}$. Ecuaţia devine:

$$2\sqrt[3]{2\left(\frac{y}{4}\right)^2} - \sqrt[3]{y} - 6 = 0.$$

Dacă facem substituţia $z = \sqrt[3]{y}$ rezultă ecuaţia în z de gradul al doilea: $z^2 - z - 6 = 0$, care are rădăcinile $z_1 = 3$, $z_2 = -2$. Revenind la substituţiile făcute obţinem $y_1 = 27$ şi $y_2 = -8$, de unde rezultă că rădăcinile ecuaţiei date sînt $x_1 = 2^{27}$ şi $x_2 = 2^{-8}$.

3°. Înlocuind $\cos 2x = 1 - 2\sin^2 x$, rezultă că ecuaţia dată este echivalentă cu ecuaţia $2\sin^2 x + 13\sin x + 6 = 0$. Rezultă $\sin x = -\frac{1}{2}$ şi $\sin x = -6$. Obţinem soluţia reală $x = k\pi + (-1)^{k+1}\frac{\pi}{6}$, $k \in \mathbf{Z}$.

4°. a) Aplicînd teorema bisectoarei rezultă: (1) $\frac{AP}{BP} = \frac{AM}{BM}$ şi (2) $\frac{AQ}{CQ} = \frac{AM}{MC}$. Din ipoteză avem $BM = CM$, aşa încît (1) şi (2) implică: (3) $\frac{AP}{BP} = \frac{AQ}{CQ}$, deci $PQ \| BC$ (v. fig. M.B.28). b) Din $PQ \| BC$ deducem: (4) $\frac{AR}{AM} = \frac{PR}{BM}$ şi (5) $\frac{AR}{AM} = \frac{QR}{CM}$.

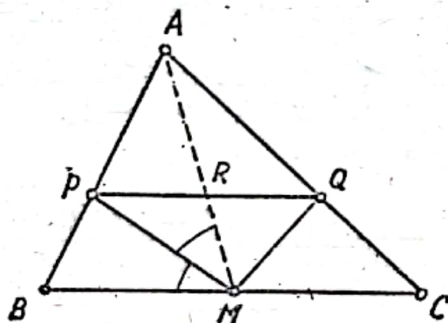


Fig. M.B.28

Avînd în vedere că $BM = CM$ din (4) şi (5) rezultă $PR = QR$, deci R este mijlocul lui $[PQ]$. Pe de altă parte, MP şi MQ fiind bisectoarele a două unghiuri adiacente suplimentare, avem $PM \perp QM$. În triunghiul dreptunghic PMQ mediana MR satisface relaţia $2RM = PQ$.

XIV. 1°. Ecuaţia în necunoscuta y va avea suma rădăcinilor:

$$y_1 + y_2 = x_1 + x_2 + \frac{x_1 + x_2}{x_1 x_2} = -p - \frac{p}{q} = -p\left(\frac{1+q}{q}\right) \text{ şi produsul:}$$

$$y_1 y_2 = x_1 x_2 + \frac{1}{x_1 x_2} + \frac{x_1^2 + x_2^2}{x_1 x_2} = \frac{p^2 + q^2 - 2q + 1}{q}.$$

Ecuaţia căutată este:

$$qy^2 + p(1+q)y + p^2 + q^2 - 2q + 1 = 0, \text{ unde } q \neq 0.$$

2°. Notînd cu a primul termen şi cu q raţia progresiei rezultă ecuaţia $a(1 + q + q^2 + q^3) = 75$, de unde obţinem pentru $a = 5$, ecuaţia satisfăcută de raţia q: $q^3 + q^2 - 14 = 0$, care are soluţie reală $q = 2$. Celelalte două soluţii date de ecuaţia $q^2 + 3q + 7 = 0$ sînt complexe. Progresia este 5, 10, 20, 40.

3°. Ecuaţia se mai scrie $\sin x(2\cos x + m) = 0$. Rezultă că ecuaţia admite soluţia: $x = k\pi$, $k \in \mathbf{Z}$ şi soluţia $x = 2k\pi \pm \arccos\left(-\frac{m}{2}\right)$. A doua soluţie este reală dacă $m \in [-2, 2]$. În cazul $m = 0$ soluţia generală a ecuaţiei este: $x = \frac{k\pi}{2}$, unde $K \in \mathbf{Z}$. În cazurile $m = \pm 1$ soluţia generală este $x = k\pi$, unde $K \in \mathbf{Z}$.

4°. Fie $A_1A_2A_3A_4A_5A_6$ hexagonul rezultat avînd laturile de lungime a şi $H_2 = B_1B_2B_3B_4B_5B_6$ hexagonul determinat de mijloacele laturilor $[A_1A_2], \ldots, [A_6A_1]$ respectiv. Să notăm cu O centrul cercului circumscris hexagonului dat. Observăm că $[OB_i]$ $(i = 1,6)$ sînt apotemele hexagonului dat şi au lungimea $a' = \frac{a\sqrt{3}}{3}$. Se constată imediat că hexagonul H_2 are toate laturile egale cu apotema hexagonului dat H_1 şi toate unghiurile de 120°, deci este de asemenea un hexagon regulat. Raportul ariilor este pătratul raportului de asemănare, deci este 3.

XV. 1°. Din ecuaţie avem: $x_1 + x_2 = \frac{1+m}{1+m^2}$; $x_1 \cdot x_2 = \frac{m(1-m)}{1+m^2}$. Inecuaţiile se pot scrie: $-1 \leqslant \frac{x_1+x_2+1}{x_1x_2} \leqslant 1$. Pentru $m \in \mathbf{R} \setminus \{0, 1\}$ obţinem: $-1 \leqslant \frac{m^2+m+2}{m(1-m)} \leqslant 0$. Trinomul m^2+m+2 este pozitiv pentru orice m real, aşa încît inegalitatea a doua: $\frac{m^2+m+2}{m(1-m)} \leqslant 0$, are loc dacă trinomul $m(1-m)$ este negativ, deci pentru $m \in (-\infty, 0) \cup (1, \infty)$. Prima inegalitate: $-1 \leqslant \frac{m^2+m+2}{m(1-m)}$, este echivalentă cu inegalitatea: $\frac{2(m+1)}{m(1-m)} \geqslant 0$. Avem $m + 1 \geqslant 0$ şi $m(1-m) > 0$ pentru $m \in (0, 1)$. Avem $m + 1 \leqslant 0$ şi $m(1-m) < 0$ pentru $m \in (-\infty, -1]$. În concluzie cele două inegalităţi sînt satisfăcute pentru $m \in (-\infty, -1]$.

2°. Pentru orice $k \in \mathbf{N}^*$ avem:

$$(*) \qquad \frac{1}{(k+1)\sqrt{k} + k\sqrt{k+1}} = \frac{(k+1)\sqrt{k} - k\sqrt{k+1}}{k(k+1)^2 - k^2(k+1)} =$$

$$= \frac{(k+1)\sqrt{k} - k\sqrt{k+1}}{k(k+1)} = \frac{1}{\sqrt{k}} - \frac{1}{\sqrt{k+1}}.$$

Membrul stîng se poate scrie:

$$S_n = \left(\frac{1}{1} - \frac{1}{\sqrt{2}}\right) + \left(\frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{1}{\sqrt{3}}\right) + \ldots + \left(\frac{1}{\sqrt{n}} - \frac{1}{\sqrt{n+1}}\right) = 1 - \frac{1}{\sqrt{n+1}} = 1 - \frac{\sqrt{n+1}}{n+1}$$

pentru orice $n \in \mathbf{N}^*$.

Egalitatea se poate demonstra şi prin metoda inducţiei. Pentru $n = 1$ egalitatea se scrie: $\frac{1}{2\sqrt{1} + 1\sqrt{2}} = 1 - \frac{\sqrt{2}}{2}$, care este evidentă dacă raţionalizăm numitorul din membrul stîng. Presupunem că egalitatea este adevărată pentru un n oarecare şi s-o demonstrăm pentru $n + 1$. Avem:

$$S_{n+1} = \frac{1}{2\sqrt{1} + 1\sqrt{2}} + \frac{1}{3\sqrt{2} + 2\sqrt{3}} + \ldots + \frac{1}{(n+1)\sqrt{n} + n\sqrt{n+1}} +$$

$$+ \ldots + \frac{1}{(n+2)\sqrt{n+1} + (n+1)\sqrt{n+2}} = S_n + \frac{1}{(n+2)\sqrt{n+1} + (n+1)\sqrt{n+2}}.$$

$$S_{n+1} = 1 - \frac{\sqrt{n+1}}{n+1} + \frac{1}{\sqrt{n+1}} - \frac{1}{\sqrt{n+2}} = 1 - \frac{1}{\sqrt{n+2}}.$$

3°. Ecuaţia se mai scrie pentru orice $x \in (0, \infty)$ sub forma:

$$5^{\lg x} - \frac{1}{3} \cdot 3^{\lg x} = 3 \cdot 3^{\lg x} - \frac{1}{5} \cdot 5^{\lg x}$$

care este echivalentă cu ecuaţia:

$$\left(1 + \frac{1}{5}\right)5^{\lg x} = \left(3 + \frac{1}{3}\right)3^{\lg x} \text{ sau } \frac{6}{5} \cdot 5^{\lg x} = \frac{10}{3} \cdot 3^{\lg x}.$$

Rezultă: $\left(\frac{5}{3}\right)^{\lg x} = \left(\frac{5}{3}\right)^2$, de unde obţinem $\lg x = 3$. Soluţia este $x = 100$.

4°. Avînd în vedere că înmulţirea matricilor este asociativă, ecuaţia se mai scrie:

$$A(A - (x + t)I_2) + (xt - yz)I_2 = 0.$$

Avem:

$$A - (x + t)\,I_2 = \begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} x + t & 0 \\ 0 & x + t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -t & y \\ z & -x \end{pmatrix}.$$

Pe de altă parte,

$$A\begin{pmatrix} -t & y \\ z & -x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -t & y \\ z & -x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} yz - xt & 0 \\ 0 & yz - tx \end{pmatrix} =$$

$$= (yz - xt)I_2 = -(xt - yz)I_2,$$

care ne arată că ecuaţia este verificată pentru orice numere reale x, y, z şi t. Ecuaţia $A^2 = I_2$ este echivalentă cu:

$$\begin{pmatrix} x^2 + yz & xy + yt \\ xz + tz & yz + t^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

care ne conduce la sistemul:

$$(*) \qquad \begin{cases} x^2 + yz = 1; \\ xy + yt = 0; \\ xz + tz = 0; \\ yz + t^2 = 1. \end{cases}$$

Scăzînd ultima ecuaţie din prima obţinem ecuaţia: $(x - t)(x + t) = 0$, deci avem $x = t$ sau $x = -t$. Dacă $x = t$ sistemul se reduce la ecuaţiile: $x^2 + yz = 1$; $xy = 0$; $xz = 0$, care ne conduce la matricile:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}; \quad \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}; \quad \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}; \quad \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Dacă $x = -t$ sistemul $(*)$ este echivalent cu ecuaţia $x^2 + yz = 1$. Orice matrice de forma $A = \begin{pmatrix} x & y \\ z & -x \end{pmatrix}$ care satisface condiţia: $x^2 + yz = 1$, $x, y, z \in \mathbf{Z}$ are proprietatea $A^2 = I_2$. Pentru orice $a \in \mathbf{Z}$ matricea $A = \begin{pmatrix} a & 1 + a \\ 1 - a & -a \end{pmatrix}$ are proprietatea $A^2 = I_2$.

XVI. 1°. Facem substituția $y = 2^{x-2}$ și obținem ecuația: $\lg 2 + \lg(y^2 + 9) \leqslant \leqslant 1 + \lg(y+1)$, care este echivalentă cu ecuația: $\lg \frac{y^2+9}{y+1} \leqslant \lg 5$, de unde inecuația:

$$\frac{y^2+9}{y+1} \leqslant 5 \Leftrightarrow \frac{y^2-5y+4}{y+1} \leqslant 0$$

în care $y > 0$. Rezultă $y \in [1, 4]$. Revenind la substituție obținem inecuațiile:

$$1 \leqslant 2^{x-2} \leqslant 2^2,$$

care ne dă $x \in [2, 4]$.

2°. Scriind toți termenii din stînga ecuațiilor în baza a obținem sistemul:

$$\begin{cases} \log_a x + \frac{1}{2}\log_a y = \frac{3}{2}; \\ \frac{1}{2}\log_a x + \log_a y = \frac{5}{2}. \end{cases}$$

Facem substituția $u = \log_a x$ și $v = \log_a y$. Obținem:

$$\begin{cases} 2u + v = 3; \\ u + 2v = 5, \end{cases}$$

care are soluția unică: $u = \frac{1}{3}$; $v = \frac{7}{3}$. Revenind la substituție, obținem:

$$x = \sqrt[3]{a}; \quad y = \sqrt{a^7} = a^2\sqrt[3]{a}, \quad \text{unde } a > 0.$$

3°. Se verifică imediat că termenul din mijloc este media aritmetică a celorlalți doi. Rația progresiei este:

$$r = \frac{x+a-1}{2x} - \frac{a}{x+1} = \frac{x^2 - ax + a - 1}{2x(x+1)}.$$

Pentru $a = 2$ rezultă $r = \frac{(x-1)^2}{2x(x+1)}$. Avem de rezolvat sistemul de inecuații: $1 \leqslant \frac{(x-1)^2}{2x(x+1)} \leqslant 2$, care are soluțiile $x \in \left[\frac{-2-\sqrt{5}}{2}, \frac{3-2\sqrt{3}}{3}\right]$.

4°. Prin substituția $z = \frac{x+i}{x-i}$ obținem: $z^3 + z^2 + z + 1 = 0$, cu soluțiile $z_1 = -1$, $z_2 = i$ și $z_3 = -i$. Revenind la substituție obținem: $x_1 = 0$; $x_2 = 1$; $x_3 = -1$.

5°. Deoarece $\sin x \neq 0$ avem:

$$\sin^2 x + 2\sin x\cos^2 x + 1 - 2\sin x = 0,$$

care este echivalentă cu ecuația:

$$(1 - \sin x)(1 + \sin x + 2\sin^2 x) = 0.$$

Rezultă $\sin x = 1$ cu soluția $x \in \left\{2k\pi \pm \frac{\pi}{2} \,\middle|\, k \in \mathbf{Z}\right\}$. Ecuația $2\sin^2 x + \sin x + 1 = 0$ nu are soluții reale.

XVII. 1°. Se verifică imediat că termenul din mijloc este media aritmetică a celorlalți doi termeni. Pentru $m = -7$ rația este $r = \frac{x+7}{x(x-1)}$.

Din condiția $r = 3$ rezultă ecuația: $3x^2 - 4x - 7 = 0$, cu soluțiile: $x_1 = -1$; $x_2 = \frac{7}{3}$.

2°. Substituția $y = 3^x$ conduce la inecuațiile: $\frac{1}{3} \leqslant \frac{y+1}{y^2+1} \leqslant \frac{1}{2}$, unde $y > 0$. Se obține: $y \in \left[1 + \sqrt{2}, \frac{3+\sqrt{17}}{2}\right]$; $x \in \left[\log_3(1+\sqrt{2}), \log_3\left(\frac{3+\sqrt{17}}{2}\right)\right]$.

3. Ecuația admite și rădăcina $z = 2 + i$, așa încît polinomul din stînga ecuației se divide prin polinomul $z^2 - 4z + 5$. Prin împărțire directă obținem ca rest polinomul de gradul I, $(a+4)z$, care se anulează pentru $a = -4$. Cîtul împărțirii este $z^2 + 1$, așa încît celelalte două soluții sînt $z_3 = i$ și $z_4 = -i$.

4°. Dacă notăm $\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2} = t$ obținem ecuația: $6t^2 - 5t + 1 = 0$, cu soluțiile: $t_1 = \frac{1}{2}$; $t_2 = \frac{1}{3}$.

XVIII. 1°. Relația dată se mai scrie:

$$\begin{pmatrix} x - 2y + z - t & 2x - y + 3z - 3t \\ x + y + z & 2x + (a-1)y + 2z + at \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Formăm sistemul:

$$\begin{cases} x - 2y + z - t = 0; \\ 2x - y + 3z - 3t = 0; \\ x + y + z + t = 0; \\ x + (a-1)y + 2z + at = 0. \end{cases}$$

Avem un sistem liniar omogen care va admite și soluții diferite de cea banală dacă determinantul matricii coeficienților este nul. Deci avem de rezolvat ecuația:

$$\begin{vmatrix} 1 & -2 & 1 & -1 \\ 2 & -1 & 3 & -3 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & a-1 & 2 & a \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow \begin{vmatrix} 1 & -3 & 0 & -2 \\ 2 & -3 & 1 & -5 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & a-3 & 0 & a-2 \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow \begin{vmatrix} -3 & 0 & -2 \\ -3 & 1 & -5 \\ a-3 & 0 & a-2 \end{vmatrix} = 0$$

$$\begin{vmatrix} -3 & -2 \\ a-3 & a-2 \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow a = 0.$$

2°. Practic avem de rezolvat inecuația: $\left|\frac{2x^2 - x}{x^2 + x + 1}\right| < 2$, care conduce la sistemul de inecuații:

$$\begin{cases} \frac{2x^2 - x}{x^2 + x + 1} < 2; \\ \frac{2x^2 - x}{x^2 + x + 1} > -2. \end{cases}$$

Întrucît $x^2 + x + 1 > 0$, $(\forall)\, x \in \mathbb{R}$, rămîne de rezolvat:

$$\begin{cases} -3x - 2 < 0 \\ 4x^2 + x + 2 > 0 \end{cases} \Rightarrow x > -\frac{2}{3}.$$

3°. Condițiile sînt:

$$\begin{cases} x+2>0, \\ x^2+2x>0 \\ x \neq 1, \\ x>0, \end{cases} \quad \text{de unde } x \in (0,\ 1) \cup (1,\ \infty).$$

Ecuația se mai scrie:

$$\frac{1}{2}\log_x(x+2)+1+\log_x(x+2)=4 \Leftrightarrow \frac{3}{2}\log_x(x+2)=3 \Leftrightarrow \log_x(x+2)=2 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x^2=x+2,$$

de unde reținem $x=2$, unica soluție a ecuației date.

4°. Demonstrăm prin reducere la absurd că $\mathbf{R}_1$ este parte stabilă în raport cu $*$. Fie $x \neq 1$, $y \neq 1$. Admitem că $x * y = 1$. Deci:

$$x+y-xy=+1; \quad xy-x-y+1=0; \quad (x-1)(y-1)=0, \text{ imposibil.}$$

Verificăm asociativitatea operației. Fie $x,\ y,\ z \in \mathbf{R}_1$:

$$(x*y)*z=\left[\frac{1}{2}(x+y-xy+1)\right]*z=\frac{1}{2}\left[\frac{1}{2}(x+y-xy+1)+z-\right.$$

$$\left.-\frac{1}{2}(xz+xy-xyz+z)+1\right]=\frac{1}{2}\left[\frac{1}{2}(x+y+z-xy-xz-yz+xyz)+\frac{3}{2}\right];$$

$$x*(y*z)=x*\left[\frac{1}{2}(y+z-yz+1)\right]=\frac{1}{2}\left[x+\frac{1}{2}(y+z-yz+1)-\right.$$

$$\left.-\frac{1}{2}x(y+z-yz+1)+1\right]=(x*y)*z, \text{ și astfel legea e asociativă.}$$

$$x*y=\frac{1}{2}(x+y-xy+1)=\frac{1}{2}(y+x-yx+1)=y*x,$$

de unde avem comutativitatea operației. Fie $e \in \mathbf{R}_1$ elementul neutru. Trebuie ca pentru $(\forall)x \in \mathbf{R}_1$ să avem:

$$x*e=x \Rightarrow \frac{1}{2}(x+e-ex+1)=x; \quad e(1-x)=x-1 \text{ și } e=-1.$$

Să arătăm că pentru $(\forall)x \in \mathbf{R}_1$ există $x' \in \mathbf{R}_1$ cu $x*x'=e$.

Deci $\frac{1}{2}(x+x'-xx'+1)=-1$, de unde $x'=\frac{x+3}{x-1}$ care este în $\mathbf{R}_1$. În concluzie $(\mathbf{R}_1,\ *)$ este grup abelian.

5°. Avînd coeficienții reali polinomul va admite și rădăcina $-1-i$, deci se va divide cu x^2+2x+2. Avem:

$$f=(X^2+2x+2)[X^2+(m-2)]+(n-2m+4)X+p-2m+4.$$

Formăm sistemul:

$$\begin{cases} f(1)=-15; \\ n-2m+4=0; \\ p-2m+4=0; \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} m+n+p=-18 \\ n=-4+2m \\ p=-4+2m \end{cases}, \text{ de unde } m=-2,\ n=-8,\ p=-8.$$

Rădăcinile ecuației $f(x)=0$ sînt furnizate de: $(X^2+2x+2)(x^2-4)=0$ și deci: $x_1=-1+i$; $x_2=-1-i$; $x_3=2$; $x_4=-2$.

XIX. 1°. Determinantul matricii coeficienţilor este:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & a & a^2 \\ 1 & b & b^2 \\ 1 & c & c^2 \end{vmatrix} = (b-a)(c-a)(c-b).$$

Cazul 1. $a \neq b \neq c \neq a$. Sistemul este compatibil determinat, rezolvabil cu regula lui Cramer.

Avem: $\Delta x = \begin{vmatrix} a^3 & a & a^2 \\ b^3 & b & b^2 \\ c^3 & c & c^2 \end{vmatrix} = abc. \begin{vmatrix} a^2 & 1 & a \\ b^2 & 1 & b \\ c^2 & 1 & c \end{vmatrix} = -abc(b-a)(c-a)(b-c).$

$$\Delta y = \begin{vmatrix} 1 & a^3 & a^2 \\ 1 & b^3 & b^2 \\ 1 & c^3 & c^2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & a^3 & a^2 \\ 0 & b^3-a^3 & b^2-a^2 \\ 0 & c^3-a^3 & c^2-a^2 \end{vmatrix} =$$

$$= (b-a)(c-a)\begin{vmatrix} a^2+ab+b^2 & a+b \\ a^2+ac+c^2 & a+c \end{vmatrix} = (b-a)(c-a)(b-c)(ab+bc+ac).$$

$$\Delta z = \begin{vmatrix} 1 & a & a^3 \\ 1 & b & b^3 \\ 1 & c & c^3 \end{vmatrix} = (b-a)(c-a)(c-b)(a+b+c).$$

Deci: $x = \dfrac{\Delta x}{\Delta} = abc$; $y = \dfrac{\Delta y}{\Delta} = -(ab+bc+ac)$; $z = \dfrac{\Delta z}{\Delta} = a+b+c$.

Cazul 2. $a = b \neq c$. Matricea coeficienţilor are rangul 2 deoarece avem minorul: $\begin{vmatrix} 1 & b \\ 1 & c \end{vmatrix} = c - b \neq 0$. Singurul minor caracteristic este $\begin{vmatrix} 1 & a & a^3 \\ 1 & b & b^3 \\ 1 & c & c^3 \end{vmatrix} = 0$.

Sistemul este deci compatibil simplu nedeterminat cu necunoscute principale x şi y; necunoscuta secundară z. Se rezolvă: $\begin{cases} x + by = b^3 - b^2z; \\ x + cy = c^3 - c^2z. \end{cases}$ Rezultă:

$$\begin{cases} x = bc(\alpha - b - c); \\ y = b^2 + bc + c^2 - \alpha(b+c); \\ z = \alpha,\ \alpha \in \mathbf{R}. \end{cases}$$

Analog se tratează cazurile $a \neq b = c$ şi $a = c \neq b$.

Cazul 3. $a = b = c$ în care sistemul se reduce la o ecuaţie, este deci compatibil dublu nedeterminat cu soluţiile:

$$\begin{cases} x = a^3 - a\alpha - a^2\beta; \\ y = \alpha; \\ z = \beta,\ \alpha,\ \beta \in \mathbf{R}. \end{cases}$$

2°. Utilizînd algoritmul de împărţire a două polinoame putem scrie:

$$aX^4 + bX^3 + 1 = (X^2 - 2X + 1)[a^2X^2 + (2a+b)X + (3a+2b)] + \\ + (4a+3b)X + 1 - 3a - 2b.$$

Pentru divizibilitate punem condiţiile:

$$\begin{cases} 4a + 3b = 0; \\ 1 - 3a - 2b = 0, \end{cases} \text{ de unde } a = 3 \text{ şi } b = 4.$$

Ecuația devine

$(x^2 - 2x + 1)(3x^2 - 4x + 1) = 0$, cu rădăcinile: $x_1 = x_2 = x_3 = 1$; $x_4 = \frac{1}{3}$.

3°. Avem: $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n^2\left(1 + \frac{1}{n}\right)^2}{n^2\left(1 + \frac{2}{n}\right)} = 1$;

$$b_n = \frac{2^2}{1\cdot 3}\cdot\frac{3^2}{2\cdot 4}\cdot\frac{4^2}{3\cdot 5}\cdot\ldots\cdot\frac{n^2}{(n-1)(n+1)}\cdot\frac{(n+1)^2}{n(n+2)}.$$

Făcînd simplificările corespunzătoare obținem:

$$b_n = \frac{2(n+1)}{n+2}, \text{ de unde } \lim_{n\to\infty} b_n = 2.$$

$$4°.\ f'(x) = -\frac{3}{4}e^{\frac{-3x}{4}}\cdot\sqrt{x^3+1} + e^{\frac{-3x}{4}}\frac{3x^2}{2\sqrt{x^3+1}} =$$

$$= -\frac{3}{4}\frac{e^{\frac{-3x}{4}}}{\sqrt{x^3+1}}(x^3 + 1 - 2x^2).$$

$f'(x) = 0 \Rightarrow x^3 - 2x^2 + 1 = 0$ cu rădăcinile: $x_1 = 1$; $x_{2,3} = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}$.

Din tabloul:

x		1		$\frac{1+\sqrt{5}}{2}$		$+\infty$
$f'(x)$		0	$+$	0	$-$	
$f(x)$		$f(1)$	$\nearrow$	$f\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)$	$\searrow$	0

obținem că $x = 1$ este punct de minim iar $x = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ este punct de maxim.

5°. Utilizînd metoda integrării prin părți avem:

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} x(\sin x)'\,dx = x\sin x\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} - \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x\,dx = \frac{\pi}{2} - 1.$$

XX. 1°. Fie x_1, x_2, x_3, x_4 rădăcinile ecuației. Utilizînd relațiile lui Viète avem:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = -2; \\ (x_1 + x_2)(x_3 + x_4) + x_1x_2 + x_3x_4 = m; \\ x_1x_2(x_3 + x_4) + x_3x_4(x_1 + x_2) = -2; \\ x_1x_2x_3x_4 = 1; \\ x_1 + x_2 = x_3 + x_4. \end{cases}$$

Notînd: $x_1 + x_2 = S$; $x_1x_2 = P_1$; $x_3x_4 = P_2$, obținem:

$$\begin{cases} 2S = -2; \\ S^2 + P_1 + P_2 = m; \\ P_1S + P_2S = -2; \\ P_1P_2 = 1; \end{cases} \quad \text{sau} \quad \begin{cases} P_1 = P_2 = 1; \\ S = -1; \\ m = 3; \end{cases}$$

x_1 și x_2 sînt rădăcinile ecuației $x^2 + x + 1 = 0$. La fel x_3 și x_4. În concluzie: $m = 3$;
$x_1 = x_3 = -\frac{1}{2} + \frac{i\sqrt{3}}{2}$; $x_2 = x_4 = -\frac{1}{2} - \frac{i\sqrt{3}}{2}$.

2°. Fie $f: [-2, 5] \to \mathbf{R}$. $f(x) = (x+1)\, e^{-|x|}$. Funcția f este continuă pe $[-2, 5]$ și integrabilă atît pe $[-2, 0]$ cît și pe $[0, 5]$. Avem:

$$\int_{-2}^{5} f(x)\, dx = \int_{-2}^{0} f(x)\, dx + \int_{0}^{5} f(x)\, dx = \int_{-2}^{0} (x+1)e^{x}\, dx + \int_{0}^{5} (x+1)e^{-x}\, dx.$$

Fiecare integrală se calculează prin părți și avem:

$$\int_{-2}^{5} f(x)\, dx = xe^{n}\Big|_{-2}^{0} + \left[-(x+1)e^{-x}\Big|_{0}^{5} + \int_{0}^{5} e^{-x}\, dx\right] = 2 + \frac{2}{e^2} - \frac{7}{e^5}.$$

3°. Graficul nu intersectează axa Oy, iar intersecția cu Ox este punctul de coordonate $(1, 0)$:

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ x>0}} f(x) = -\infty; \quad \lim_{x\to\infty} f(x) = 0.$$

Deci $x = 0$ este asimptotă verticală la dreapta, iar $y = 0$ este asimptotă orizontală. f este continuă și derivabilă pe $(0, \infty)$.

$$f'(x) = \frac{1 - \ln x}{x}, \quad f'(x) = 0 \Rightarrow x = e.$$

$$f''(x) = \frac{-2 + \ln x}{x^2}, \quad f''(x) = 0 \Rightarrow x = e^2.$$

Tabloul de variație este următorul:

x	0		1		e		e^2			$+\infty$
$f'(x)$		+	+	+	0	−	−		−	−
$f''(x)$		−	−	−	−	−	0	+	+	+
$f(x)$	$-\infty$	↗	↗ 0	↗	$\frac{1}{e}$	↘	$\frac{2}{e^2}$	↘		0

$x = e$ este punct de maxim.

$x = e^2$ este punct de inflexiune.

Graficul funcției este prezentat în fig. M.B.29.

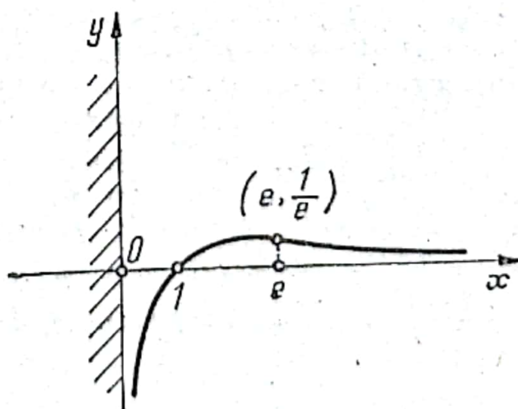


Fig. M.B.29

4°. Întrucît $c = -(a+b)$ rămîne de calculat:

$$\lim_{n\to\infty} [a(\sqrt{n+a} - \sqrt{n-a-b}) + b(\sqrt{n+b} - \sqrt{n-a-b})] =$$
$$= \lim_{n\to\infty}\left[a\cdot\frac{n+a-n+a+b}{\sqrt{n+a}+\sqrt{n-a-b}} + b\cdot\frac{n+b-n+a+b}{\sqrt{n+b}+\sqrt{n-a-b}}\right] =$$
$$= \lim_{n\to\infty} \frac{a(2a+b)}{\sqrt{n}\left(\sqrt{1+\frac{a}{n}}+\sqrt{1-\frac{a+b}{n}}\right)} + \frac{b(a+2b)}{\sqrt{n}\left(\sqrt{1+\frac{b}{n}}+\sqrt{1-\frac{a+b}{n}}\right)} = 0.$$

5°. Determinantul se mai scrie:

$$\begin{vmatrix} a_1+b_1\mathrm{i} & \mathrm{i}(a_1+b_1\mathrm{i}) & c_1 \\ a_2+b_2\mathrm{i} & \mathrm{i}(a_2+b_2\mathrm{i}) & c_2 \\ a_3+b_3\mathrm{i} & \mathrm{i}(a_3+b_3\mathrm{i}) & c_3 \end{vmatrix} = 0,$$

deoarece coloanele prima şi a doua sînt proporţionale.

XXI. 1°. Prin ipoteză avem relaţiile:

$$a_1 + a_2 + \ldots + a_{n-1} = a(n-1)^2 + b(n-1);$$
$$a_1 + a_2 + \ldots + a_n = an^2 + bn,$$

pentru orice $n \geqslant 2$. Scăzîndu-le obţinem: $a_n = a + b + 2a(n-1)$. Făcînd $n = 1$ în relaţia dată prin ipoteză obţinem: $a_1 = a + b$, deci $a_n = a_1 + 2a(n-1)$, ceea ce reprezintă formula termenului general al unei progresii aritmetice cu primul termen $a_1 = a + b$ şi raţia $r = 2a$.

2°. Fie $f(x) = a_nx^n + a_{n-1}x^{n-1} + a_{n-2}x^{n-2} + \ldots + a_0$, $a_n \neq 0$, o funcţie polinomială de grad n. Atunci:

$$f(x+2) = a_n(x+2)^n + a_{n-1}(x+2)^{n-1} + a_{n-2}(x+2)^{n-2} + \ldots + a_0 =$$
$$= a_n(x^n + C_n^1x^{n-1}2 + C_n^2x^{n-2}2^2 + \ldots) + a_{n-1}(x^{n-1} + C_{n-1}^1x^{n-2}2 + \ldots) +$$
$$+ a_{n-2}(x^{n-2} + \ldots) + \ldots + a_0 = a_nx^n + (2na_n + a_{n-1})x^{n-1} + (2n(n-1)a_n +$$
$+ 2(n-1)a_{n-1} + a_{n-2})x^{n-2} + \ldots + a_0$; am pus în evidenţă coeficienţii termenilor x^n, x^{n-1} şi x^{n-2}. Analog, avem:

$$f(x+1) = a_n(x+1)^n + a_{n-1}(x+1)^{n-1} + a_{n-2}(x+1)^{n-2} + \ldots + a_0 =$$
$$= a_n(x^n + C_n^1x^{n-1} + C_n^2x^{n-2} + \ldots) + a_{n-1}(x^{n-1} + C_{n-1}^1x^{n-2} + \ldots) + a_{n-2}(x^{n-2}a + \ldots) +$$
$$+ \ldots + a_0 = a_n x^n + (na_n + a_{n-1})x^{n-1} + \left(\frac{n(n-1)}{2}a_n + (n-1)a_{n-1} +\right.$$
$$\left. + a_{n-2}\right)x^{n-2} + \ldots + a_0.$$ Efectuînd calculele obţinem:

$$g(x) = f(x+2) - 2f(x+1) + f(x) = (a_n - 2a_n + a_n)x^n +$$
$$+ (2na_n + a_{n-1} - 2na_n - 2a_{n-1} + a_{n-1})x^{n-1} + (2n(n-1)a_n + 2(n-1)a_{n-1} +$$
$$+ a_{n-2} - n(n-1)a_n - 2(n-1)a_{n-1} - 2a_{n-2} + a_{n-2})x^{n-2} + \ldots =$$
$= n(n-1)a_nx^{n-2} + \ldots$, deci grad $g(x) = n - 2 (a_n \neq 0)$, adică $g(x)$ este polinomială de grad $n-2$. În cazul particular, $n = 3$, avem: $f(x) = a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0$, $g(x) = a_3(x+2)^3 + a_2(x+2)^2 + a_1(x+2) + a_0 - 2(a_3(x+1)^3 + a_2(x+1)^2 + a_1(x+1) + a_0) + a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0 = 6a_3x + 8a_3 + 4a_2 + 2a_1 + a_0 - 2(a_3 + a_2 + a_1 + a_0) + a_0 = 6a_3x + 6a_3 + 2a_2 = 6x + 24$. Obţinem: $6a_3 = 6$, $6a_3 + 2a_2 = 24$ şi, din condiţiile $f(0) = 5$, $f(1) = 23$, rezultă: $a_0 = 5$, $a_3 + a_2 + a_1 + a_0 = 23$. Rezultă: $a_3 = 1$, $a_2 = 9$, $a_1 = 8$, $a_0 = 5$.

3°. Avem: $f\left(\frac{1}{\mathrm{e}}\right) = \dfrac{-2-1}{\frac{1}{\mathrm{e}^2}} = -3\mathrm{e}^2$. Deoarece $2{,}718 < \mathrm{e} < 2{,}7183$ obţinem $-22{,}167 < -3\mathrm{e}^2 < -22{,}162$, deci $f\left(\frac{1}{\mathrm{e}}\right) \approx -22{,}16$, cu două zecimale exacte.

Pentru a determina numărul de soluţii reale ale ecuaţiei $f(x) = m$, $m \in \mathbf{R}$, avem (în general) două metode.

Metoda I (grafică). Ecuaţia $f(x) = m$ este echivalentă cu sistemul $y = f(x)$, $y = m$, deci vom trasa graficul funcţiei f şi îl vom intersecta pe acesta cu dreptele de ecuaţie $y = m$, $m \in \mathbf{R}$. Avem:

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ x>0}} \frac{2\ln x - 1}{x^2} = -\infty \text{ şi } \lim_{x\to\infty} \frac{2\ln x - 1}{x^2} \overset{\frac{\infty}{\infty}}{=} \lim_{x\to\infty} \frac{\frac{2}{x}}{2x} = 0.$$

Rezultă $x = 0$ asimptotă verticală şi $y = 0$ asimptotă orizontală. Evident $f(x) = 0$ pentru $2\ln x - 1 = 0$, adică $x = e^{\frac{1}{2}} = \sqrt{e}$. Calculăm:

$$f'(x) = \frac{4(1 - \ln x)}{x^3} \text{ şi } f''(x) = \frac{4(3\ln x - 4)}{x^4}.$$

Tabloul de variaţie este următorul:

x	0		$\sqrt{e}$		e		$e^{\frac{4}{3}}$		$+\infty$
$f'(x)$		+		+	0	−	−	−	−
$f(x)$	$-\infty$	↗	0	↗	$\frac{1}{e^2}$	↘	$\frac{5}{3e^{\frac{8}{3}}}$	↘	0
$f''(x)$		−		−	−		0	+ +	+

Graficul funcţiei este prezentat în fig. M.B.30.

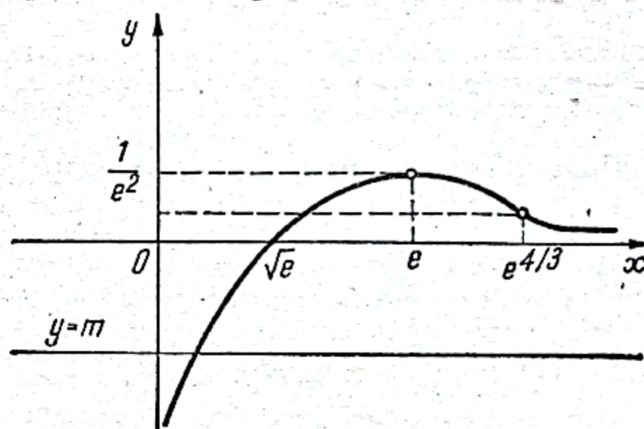


Fig. M.B.30

Din grafic rezultă următoarele cazuri:

a) Dacă $m \in (-\infty, 0]$, ecuaţia are o soluţie reală;

b) Dacă $m \in \left(0, \frac{1}{e^2}\right)$, ecuaţia are două soluţii reale distincte;

c) Dacă $m = \frac{1}{e^2}$, ecuaţia are o soluţie dublă $x = e$;

d) Dacă $m \in \left(\frac{1}{e^2}, +\infty\right)$, ecuaţia nu are soluţii reale.

Metoda II (cu şirul lui Rolle). Se consideră funcţia $g(x) = f(x) - m$, $g: (0, \infty) \to \mathbf{R}$ şi $m \in \mathbf{R}$, parametru. Calculăm: $g'(x) = f'(x) = \frac{4(1 - \ln x)}{x^3} = 0$, de unde $x = e$. Se scrie şirul lui Rolle:

x	0	e	∞
$g(x)$	$-\infty$	$\frac{1}{e^2} - m$	$-m$

Avem: $\frac{1}{e^2} - m = 0$ pentru $m = \frac{1}{e^2}$ și $-m = 0$ pentru $m = 0$. Apar mai multe cazuri pe care le scriem în tabloul următor:

m \ x	0	e	$+\infty$	Observații
$m \in (-\infty, 0]$	$-$	$+$	$+$	o rădăcină reală
$m \in \left(0, \frac{1}{e^2}\right)$	$-$	$+$	$-$	două rădăcini reale
$m = \frac{1}{e^2}$	$-$	0	$-$	o rădăcină reală dublă
$m \in \left(\frac{1}{e^2}, +\infty\right)$	$-$	$-$	$-$	nici o rădăcină reală

4°. Funcția g este continuă fiind compunerea a două funcții continue cos: $\mathbf{R} \to \mathbf{R}$ și $f: \mathbf{R} \to \mathbf{R}$. Dacă $g(x) = 1$, $(\forall)x \in \mathbf{R}$, avem $\cos f(x) = 1$, $(\forall)x \in \mathbf{R}$, deci $f(x) = 2k_x\pi$, unde $k_x \in \mathbf{Z}$ este un întreg, care poate să depindă de x. Presupunem că f nu este constantă; atunci există cel puțin două puncte $x, x' \in \mathbf{R}$ astfel încît $f(x) = 2k_x\pi$, $f(x') = 2k_{x'}\pi$ cu $k_x \neq k_{x'}$, $(k_x, k_{x'} \in \mathbf{Z})$. Funcția f fiind continuă are proprietatea Darboux, deci ia orice valoare cuprinsă între $2k_x\pi$ și $2k_{x'}\pi$, absurd, deoarece f ia numai valori multipli întregi de 2π. Rezultă că f este constantă.

5°. Aplicăm metoda de integrare prin părți și alegem: $f(x) = x$, $g'(x) = \sin x$. Rezultă $f'(x) = 1$ și $g(x) = -\cos x$. Obținem:

$$\int_0^{2\pi} x \sin x \, dx = -x \cos x \Big|_0^{2\pi} + \int_0^{2\pi} \cos x \, dx = -2\pi + \sin x \Big|_0^{2\pi} = -2\pi.$$

XXII. 1°. Folosim notațiile uzuale $BC = a$, $AC = b$, $AB = c$ etc. (v. fig. M.B.31).

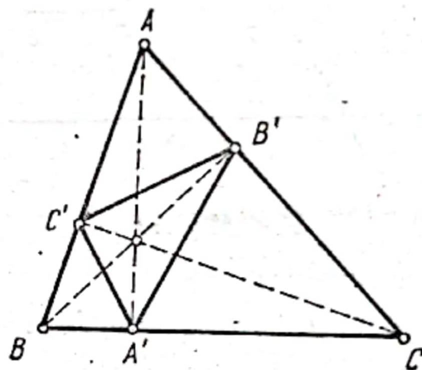


Fig. M.B.31

În triunghiul dreptunghic $AA'B$ avem: $BA' = AB \cos B = c \cos B$. Analog rezultă: $A'C = b \cos C$, $B'A = c \cos A$, $B'C = a \cos C$, $C'A = b \cos A$, $C'B = a \cos B$. Deoarece $m(\widehat{BB'C}) = m(\widehat{BC'C}) = 90°$ rezultă că patrulaterul $BC'B'C$ este inscriptibil. Atunci $\widehat{AB'C'} = \widehat{ABC}$ (au același suplement, pe $\widehat{C'B'C}$). Triunghiurile $AB'C'$ și ABC sînt asemenea avînd unghiul A comun și $\widehat{AB'C'} = \widehat{ABC}$. Rezultă $\frac{B'C'}{BC} = \frac{AB'}{AB} = \cos A$, deci $B'C' = a \cos A$. Analog se arată că patrulaterele $ACA'C'$, $ABA'B'$ sînt inscriptibile, de unde rezultă că $\triangle BA'C' \sim \triangle ABC$ și

$\triangle CA'B' \sim \triangle ABC$. De aici obținem, ca mai sus, că $A'C' = b \cos B$ și $A'B' = c \cos C$. Pentru calculul ariei triunghiului ortic $A'B'C'$ procedăm astfel: avem $\widehat{AB'C'} \equiv \hat{B}$ și $\widehat{CB'A'} \equiv \hat{B}$, deci $m(\widehat{A'B'C'}) = \pi - 2B$. Atunci $\sigma(A'B'C') = \frac{A'B' \cdot B'C' \sin(\widehat{A'B'C'})}{2} = \frac{a\, c \cos A \cos C \sin 2B}{2}$.

2°. Unim P cu O și A cu P (v. fig. M.B.32). Avem:

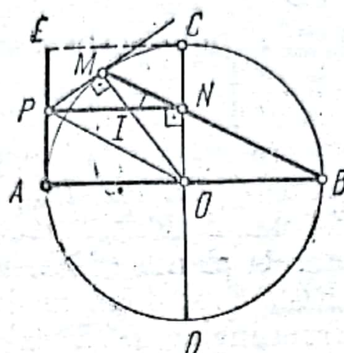


Fig. M.B.32

$\widehat{INM} \equiv \widehat{OBM}$ (corespondente) și $\widehat{OBM} \equiv \widehat{OMB}$ (ΔOBM este evident isoscel). Rezultă $\widehat{INM} \equiv \widehat{OMB}$, deci $\triangle MIN$ este isoscel. De aici obținem $[IN] \equiv [IM]$. Apoi $\widehat{OIN} \equiv \widehat{MIP}$ (opuse la vîrf), deci triunghiurile dreptunghice OIN și IMP sînt congruente (cazul CU). Rezultă $[OI] \equiv [IP]$ și $\widehat{ION} \equiv \widehat{IPM}$. Dar $\widehat{OIP} \equiv \widehat{MIN}$ (opuse la vîrf, deci $\widehat{IOP} = \widehat{IMN}$, de unde avem $MN \parallel OP$, deci $ONMP$ este trapez. Apoi, $\widehat{ION} + \widehat{IOP} \equiv \widehat{IPM} + \widehat{IPO}$, deci $ONMP$ este trapez isoscel. Obținem de aici că $PN = OM =$ raza $=$ constant, deci P se află pe paralela la diametrul OC dusă prin A, adică pe tangenta în A la cercul dat. Deoarece N parcurge raza $[OC]$ rezultă, evident, că P parcurge segmentul $[AE]$ din tangenta în A la cerc, unde E este intersecția tangentelor în A și C la cercul dat.

3°. Observăm că: $1 + \sin 2x = \cos^2 x + \sin^2 x + 2 \sin x \cos x = (\cos x + \sin x)^2$ și că: $1 - \sin 2x = \cos^2 x + \sin^2 x - 2 \sin x \cos x = (\cos x - \sin x)^2$. Atunci ecuația se scrie echivalent:

$$\sqrt{(\cos x + \sin x)^2} - \sqrt{(\cos x - \sin x)^2} = 2 \sin x,$$

deci $|\cos x + \sin x| - |\cos x - \sin x| = 2 \sin x$.

Studiem semnul funcțiilor $\cos x + \sin x$ și $\cos x - \sin x$:

x	$-\pi$		$-\frac{\pi}{4}$		$\frac{3\pi}{4}$		π
$\cos x + \sin x$		$-$	0	$+$	0	$-$	

;

x	$-\pi$		$-\frac{3\pi}{4}$		$\frac{\pi}{4}$		π
$\cos x - \sin x$		$-$	0	$+$	0	$-$	

Rezultă cazurile:

a) $x \in \left[-\pi, -\frac{3\pi}{4}\right]$. Ecuația devine: $-\cos x - \sin x + \cos x - \sin x = 2 \sin x$, sau $-2 \sin x = 2 \sin x$, adică $\sin x = 0$ și $x = -\pi$.

b) $x \in \left(-\frac{3\pi}{4}, -\frac{\pi}{4}\right)$. Ecuația devine: $-\cos x - \sin x - \cos x + \sin x = 2 \sin x$, sau $\cos x + \sin x = 0$, care nu are soluții în acest interval.

c) $x \in \left[-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}\right]$. Ecuaţia devine: $\cos x + \sin x - \cos x + \sin x = 2 \sin x$, sau $2 \sin x = 2 \sin x$, cu soluţiile $(\forall) x \in \left[-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}\right]$.

d) $x \in \left(\frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}\right)$. Ecuaţia devine: $\cos x + \sin x + \cos x - \sin x = 2 \sin x$, sau $\cos x - \sin x = 0$, care nu are soluţii în acest interval.

e) $x \in \left[\frac{3\pi}{4}, \pi\right]$. Ecuaţia devine: $-\cos x - \sin x + \cos x - \sin x = 2 \sin x$, sau $-2 \sin x = 2 \sin x$, adică $\sin x = 0$ şi $x = \pi$. În concluzie, soluţiile ecuaţiei sînt: $x \in \left[-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}\right] \cup \{-\pi, \pi\}$.

4°. Vom calcula distanţa între diagonala cubului $B'D$ şi diagonala unei feţe BC'. Ducem prin B' paralela BE la BC' ($E \in BC$) (v. fig. M.B.33). Deoarece $BC' \parallel BE$ rezultă $BC' \parallel$ planul $B'DE$. Atunci, distanţa cerută este distanţa de la punctul B (de exemplu) la planul $B'DE$. Vom calcula această distanţă h exprimînd volumul piramidei $BB'DE$ în două moduri. Avem: $BE = a$ ($B'C'BE$ paralelogram). În triunghiul dreptunghic DCE calculăm: $DE^2 = DC^2 + CE^2 = a^2 + 4a^2 = 5a^2$, deci $DE = a\sqrt{5}$. În triunghiul $BB'E$ avem: $B'E^2 = a^2 + a^2 = 2a^2$, deci $B'E = a\sqrt{2}$. Apoi $BD = a\sqrt{2}$ şi $B'D^2 = BD^2 + BB'^2 = 3a^2$, deci $B'D = a\sqrt{3}$. Deoarece $DB'^2 + B'E^2 = 5a^2 = DE^2$, triunghiul $DB'E$ este dreptunghic. Calculăm: $V = V_{B'BDE} = \frac{1}{3}\sigma(B'BE)\cdot DC = \frac{1}{3}\cdot\frac{a^2}{2}\cdot a = \frac{a^3}{6}$. Pe de altă parte avem: $V = \frac{1}{3}\sigma(B'DE)\cdot h = \frac{h}{3}\cdot\frac{a\sqrt{3}\cdot a\sqrt{2}}{2}$. Egalînd cele două expresii ale volumului aflăm pe h: $h = \frac{a}{\sqrt{6}} = \frac{a\sqrt{6}}{6}$.

5°. Fie M mijlocul muchiei $[VA]$ şi $MNPQ$ patrulaterul de secţiune (planul $MNPQ$ este perpendicular pe CV); v. fig. M.B.34. Avem: $AC = a\sqrt{2}$, deci

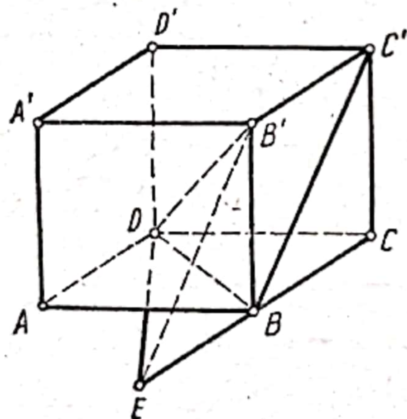


Fig. M.B.33

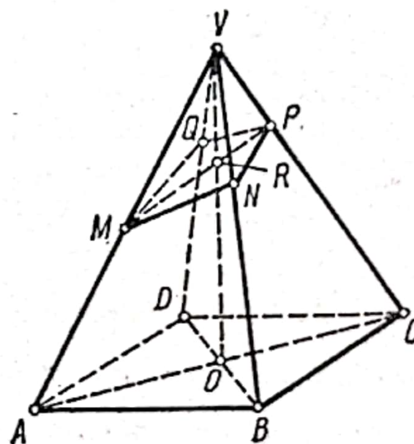


Fig. M.B.34

triunghiul VAC este echilateral. Ducem $AE \perp CV$; rezultă: $VO = AE = VA \cos 60° = \frac{a\sqrt{6}}{2}$ (fig. M.B.35). Deoarece $MP \perp V\,C$ rezultă $MP \parallel AE$, deci $[MP]$ este linie mijlocie în $\triangle VAE$; atunci $MP = \frac{AE}{2} = \frac{a\sqrt{6}}{4}$. Avem: $GE = \frac{1}{3} AE = \frac{a\sqrt{6}}{6}$ şi $RP = \frac{1}{2}\ GE = \frac{a\sqrt{6}}{12}$.

Analog $VP = \frac{1}{2}\ VE = \frac{a\sqrt{2}}{4}$. Apoi $MR = MP - RP = \frac{a\sqrt{6}}{6}$. Cum $QN \parallel BD$ avem: $\frac{QN}{BD} = \frac{VR}{VO} = \frac{1}{3}$, deci $QN = \frac{a\sqrt{2}}{3}$ și $QR = RN = \frac{a\sqrt{2}}{6}$. În triunghiul dreptunghic PRN rezultă: $NP = \sqrt{RP^2 + RN^2} = \sqrt{\frac{6a^2}{144} + \frac{2a^2}{36}} = \frac{a\sqrt{14}}{12} = QP$. În triunghiul dreptunghic MRN rezultă: $MN = \sqrt{MR^2 + RN^2} = \sqrt{\frac{6a^2}{36} + \frac{2a^2}{36}} = \frac{a\sqrt{2}}{3} = QM$. Atunci perimetrul lui $MNPQ$ este: $p = 2(MN + PN) = 2\left(\frac{a\sqrt{2}}{3} + \frac{a\sqrt{14}}{12}\right) = \frac{a(4\sqrt{2} + \sqrt{14})}{6}$. Aria lui $MNPQ$ este: $S = \frac{MP \cdot QN}{2} = \frac{a^2\sqrt{3}}{12}$. Volumul lui $VMNPQ$ este: $V_1 = \frac{1}{3}\ \sigma(MNPQ) \cdot VP = \frac{1}{3} \cdot \frac{a^2\sqrt{3}}{12} \cdot \frac{a\sqrt{2}}{4} = \frac{a^3\sqrt{6}}{144}$. Volumul piramidei $VABCD$ este: $V = \frac{1}{3}a^2 \cdot \frac{a\sqrt{6}}{2} = \frac{a^3\sqrt{6}}{6}$. Atunci: $\frac{V_1}{V} = \frac{1}{24}$, de unde $\frac{V_1}{V - V_1} = \frac{1}{24 - 1} = \frac{1}{23}$, deci $\frac{V_1}{V_2} = \frac{1}{23}$.

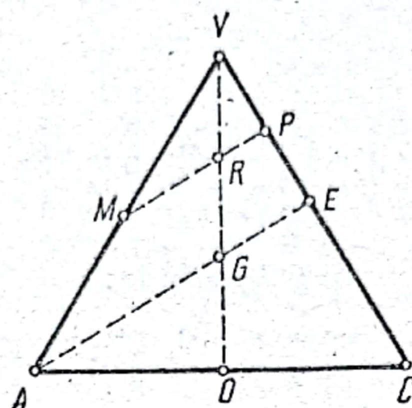


Fig. M.B.35

XXIII. 1°. a) Pentru ca f să fie strict crescătoare trebuie să fie îndeplinită condiția: $(\forall)x_1,\ x_2 \in \mathbf{R}$ cu $x_1 < x_2$ să avem $f(x_1) < f(x_2)$. Obținem $mx_1 < mx_2$ sau: $m(x_2 - x_1) > 0$ cînd $x_2 - x_1 > 0$, deci $m > 0$, adică $m \in (0, \infty)$.

b) Avem: $(f \circ f)(x) = f(f(x)) = m(mx) = m^2x$. Pentru ca $f \circ f = f$ trebuie ca $m^2x = mx$, $(\forall)x \in \mathbf{R}$, deci obținem: $m^2 = m$, de unde $m = 0$ sau $m = 1$.

2°. Din $(x^2 - 2x)(e^{x-2} - 1) = 0$ obținem: $x^2 - 2x = 0$, cu soluțiile $x_1 = 0$, $x_2 = 2$, sau $e^{x-2} - 1 = 0$, adică $e^{x-2} = e^0$, cu soluția $x_3 = 2$. În concluzie ecuația are soluția simplă $x_1 = 0$ și soluția dublă $x_2 = x_3 = 2$. Pentru rezolvarea inecuației facem tabloul următor:

x	$-\infty$			0		2			$+\infty$
$e^{x-2} - 1$		$-$	$-$		$-$	0	$+$	$+$	
$x^2 - 2x$		$+$	$+$	0	$-$	0	$+$	$+$	
$\frac{e^{x-2} - 1}{x^2 - 2x}$		$-$		|	$+$	|	$+$		

și obținem: $x \in (-\infty, 0)$.

3°. Avem:

$$A^2 = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 2 \end{pmatrix}; \quad A^3 = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & 0 \\ 4 & 0 & 4 \end{pmatrix}.$$

Din relația $A^3 = pA^2 + qA$ obținem:

$$\begin{pmatrix} 2p & 0 & 2p \\ 0 & p & 0 \\ 2p & 0 & 2p \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} q & 0 & q \\ 0 & q & 0 \\ q & 0 & q \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & 0 \\ 4 & 0 & 4 \end{pmatrix},$$

deci: $2p + q = 4$ și $p + q = 1$. Rezultă soluția: $p = 3$, $q = -2$.

4°. Avem: $f\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{16}{\pi^2} - 1$. Deoarece $3{,}141 < \pi < 3{,}1416$, obținem $1{,}621 < < \frac{16}{\pi^2} < 1{,}6212$, deci $f\left(\frac{\pi}{4}\right) \approx 0{,}62$, cu două zecimale exacte. Pentru calculul limitei observăm că apare cazul de nedeterminare $\infty - \infty$ și procedăm astfel:

$$f(x) = \frac{1}{x^2} - \frac{\cos^2 x}{\sin^2 x} = \frac{1}{x^2} - \frac{1 - \sin^2 x}{\sin^2 x} = \frac{1}{x^2} - \frac{1}{\sin^2 x} + 1 = \frac{\sin^2 x - x^2}{x^2 \sin^2 x} + 1.$$

Avem: $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x > 0}} f(x) = 1 + \lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x > 0}} \frac{\sin^2 x - x^2}{x^2 \sin^2 x}$. Am ajuns la cazul de nedeterminare $\frac{0}{0}$ și aplicăm regula lui l'Hôpital de patru ori:

$$\lim_{\substack{x \to 0 \\ x > 0}} \frac{\sin^2 x - x^2}{x^2 \sin^2 x} \overset{\frac{0}{0}}{=} \lim_{x \to 0} \frac{2 \sin x \cos x - 2x}{2x \sin^2 x + 2x^2 \sin x \cos x} = \lim_{x \to 0} \frac{\sin 2x - 2x}{x(1 - \cos 2x) + x^2 \sin 2x} \overset{\frac{0}{0}}{=}$$

$$= \lim_{x \to 0} \frac{2(\cos 2x - 1)}{1 - \cos 2x + 4x \sin 2x + 2x^2 \cos 2x} \overset{\frac{0}{0}}{=} \lim_{x \to 0} \frac{-4 \sin 2x}{6 \sin 2x + 12 x \cos 2x - 4x^2 \sin 2x} \overset{\frac{0}{0}}{=}$$

$$= \lim_{x \to 0} \frac{-8 \cos 2x}{12 \cos 2x + 12 \cos 2x - 24 x \sin 2x - 8x \sin 2x - 8x^2 \cos 2x} = \frac{-8}{24} = -\frac{1}{3}.$$

Rezultă $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x > 0}} f(x) = 1 - \frac{1}{3} = \frac{2}{3}$.

5°. Calculăm: $f'(x) = 2 + a \ln x + ax \cdot \frac{1}{x} = a + 2 + a \ln x$. Din $f'(1) = 1$ obținem: $a + 2 = 1$, deci $a = -1$. Rezultă $f(x) = 2x - x \ln x$ și $f'(x) = 1 - \ln x$. Pe intervalul $[1, e]$ avem următorul tablou de variație al funcției f:

x	1				e
$f'(x)$	+	+	+	+	0
$f(x)$	2		$\nearrow$		e

Rezultă că $f(x) > 0$ pe $[1, e]$, deci aria cerută este:

$$A = \int_1^e f(x)\, dx = \int_1^e (2x - x \ln x)\, dx = x^2 \Big|_1^e - \int_1^e x \ln x\, dx = e^2 - 1 - J,$$

unde $J = \int_1^e x \ln x \, dx$. Integrăm prin părți: $f(x) = \ln x, g'(x) = x$, de unde $f'(x) = \frac{1}{x}$ și $g(x) = \frac{x^2}{2}$. Rezultă:

$$J = \frac{x^2}{2} \ln x \Big|_1^e - \int_1^e \frac{x}{2} dx = \frac{e^2}{2} - \frac{x^2}{4}\Big|_1^e = \frac{e^2}{2} - \frac{e^2}{4} + \frac{1}{4} = \frac{e^2+1}{4}.$$

Atunci aria cerută este: $A = e^2 - 1 - \frac{e^2+1}{4} = \frac{3e^2-5}{4}$.

XXIV. 1°. Unim E cu C și ducem mediana $AA'(A' \in BC)$; v. fig. M.B.36.

a) Avem: $m(\widehat{ABC}) = m\left(\frac{\widehat{AC}}{2}\right) = m(\widehat{AEC})$.

b) În triunghiul dreptunghic ADB avem: $m(\widehat{BAD}) = \frac{\pi}{2} - m(\widehat{ABC})$. Avem: $m(\widehat{ACE}) = m\left(\frac{\widehat{AE}}{2}\right) = \frac{\pi}{2}$; în triunghiul dreptunghic ACE rezultă:

$$m(\widehat{CAE}) = \frac{\pi}{2} - m(\widehat{AEC}) = \frac{\pi}{2} - m(\widehat{ABC}) = m(\widehat{BAD}).$$

c) Deoarece $m(\widehat{BAD}) = m(\widehat{A'AC})$, rezultă $m(\widehat{A'AC}) = m(\widehat{EAC})$, deci dreptele AE și AA' coincid. Rezultă că diametrul $[AE]$ trece prin mijlocul A' al laturii $[BC]$. Dacă $AE \perp BC$ rezultă $m(\widehat{DAA'}) = 0$, imposibil (căci $m(\widehat{DAA'}) = m\left(\frac{\hat{A}}{3}\right)$). Rezultă că [BC] este diametru (adică A' coincide cu O), deci $m(\widehat{BAC}) = \frac{\pi}{2}$.

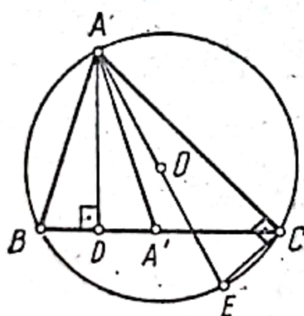


Fig. M.B.36

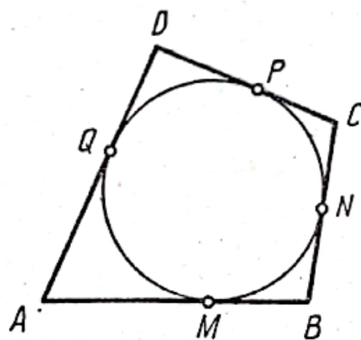


Fig. M.B.37

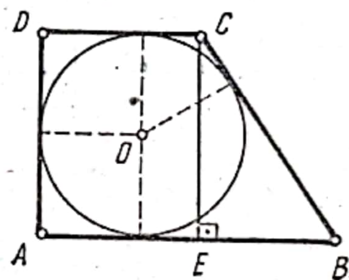


Fig. M.B.38

2°. Fie patrulaterul $ABCD$ circumscriptibil și fie M, N, P, Q punctele de tangență ale laturilor $[AB]$, $[BC]$, $[CD]$, $[DA]$ la cerc (v. fig. M.B.37). Deoarece tangentele duse dintr-un punct exterior la un cerc sînt congruente avem: $AM = AQ$, $MB = BN$, $CP = CN$, $DP = DQ$. Adunînd cele patru relații obținem: $(AM + MB) + (CP + PD) = (BN + CN) + (AQ + DQ)$, deci $AB + CD = BC + AD$. Fie acum $ABCD$ un trapez dreptunghic circumscriptibil (v. fig. M.B.38). Notăm: $AB = B$, $CD = b$, $AD = CE = l$ și $BC = x$. Avem: $BE = B - b$; din triunghiul dreptunghic BEC rezultă: $(B-b)^2 + l^2 = x^2$. Efectuînd calculele obținem: $B^2 + b^2 - 2Bb + l^2 = x^2$. Din cele demonstrate anterior avem relația: $B + b = l + x$, pe care o ridicăm la pătrat: $B^2 + b^2 + 2Bb = l^2 + x^2 + 2lx$. Scădem din această relație relația anterioară și obținem: $4Bb = 2l^2 + 2lx$, sau $2Bb = l(l + x)$, deci $2Bb = l(B + b)$, adică aria lui $ABCD$: $S = \frac{1}{2} l(B + b) = Bb$.

3°. Se impun condițiile: $\cos x \neq 0$, $\sin x \neq 0$, $\operatorname{tg} x \neq -1$, $\operatorname{ctg} x \neq -1$, de unde rezultă $x \neq 2k\pi \pm \frac{\pi}{2}$, $x \neq k\pi$, $x \neq k\pi - \frac{\pi}{4}$, cu $k \in \mathbf{Z}$.

Înlocuind $\operatorname{tg} x = \frac{\sin x}{\cos x}$ și $\operatorname{ctg} x = \frac{\cos x}{\sin x}$ ecuația devine:

$$\frac{\sin^2 x}{\sin x + \cos x} - \frac{\cos^2 x}{\sin x + \cos x} = \sqrt{2} \text{ sau } \frac{\sin^2 x - \cos^2 x}{\sin x + \cos x} = \sqrt{2},$$

adică $\sin x - \cos x = \sqrt{2}$. Putem scrie: $\sin x - \sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \sqrt{2}$, deci $2 \sin\left(x - \frac{\pi}{4}\right) \cdot \cos\frac{\pi}{4} = \sqrt{2}$, de unde $\sin\left(x - \frac{\pi}{4}\right) = 1$. Rezultă că: $x - \frac{\pi}{4} = 2k\pi + \frac{\pi}{2}$, $k \in \mathbf{Z}$, sau încă: $x = (2k+1)\pi - \frac{\pi}{4}$, $k \in \mathbf{Z}$, soluții care nu sînt acceptabile, datorită condițiilor de existență impuse mai sus. Rezultă că ecuația dată nu are soluții.

4°. Ducem apotema $[VM]$ (M mijlocul lui AB) și $AN \perp VB$, $CN \perp VB$. Unghiul diedru căutat este unghiul $\widehat{ANC}$ (v. fig. M.B.39). În triunghiul dreptunghic VOA avem: $OA^2 = VA^2 - VO^2 = 100 - 64 = 36$, deci $OA = 6$ cm. Rezultă $AB = OA = OB = 6$ cm. Atunci $AM = 3$ cm, deci $VM^2 = VA^2 - AM^2 = 100 - 9 = 91$, de unde $VM = \sqrt{91}$. Aria laterală este: $A_l = 6 \cdot \sigma_{(VAB)} = 6 \cdot \frac{VM \cdot AB}{2} = 3 \cdot 6\sqrt{91} = 18\sqrt{91}$ cm². Apoi: $AC = OA\sqrt{3} = 6\sqrt{3}$ cm și $AB \cdot VM = VB \cdot AN$, de unde $AN = \frac{AB \cdot VM}{VB} = \frac{6 \cdot \sqrt{91}}{10} = \frac{3\sqrt{91}}{5}$ cm. Avem $CN = AN$. Notînd cu α unghiul $\widehat{ANC}$, din teorema cosinusului în triunghiul ANC, obținem: $\cos \alpha = \frac{AN^2 + NC^2 - AC^2}{2AN \cdot NC} = -\frac{59}{91}$. Rezultă

$$\alpha = \arccos\left(-\frac{59}{91}\right) = \pi - \arccos\frac{59}{91}.$$

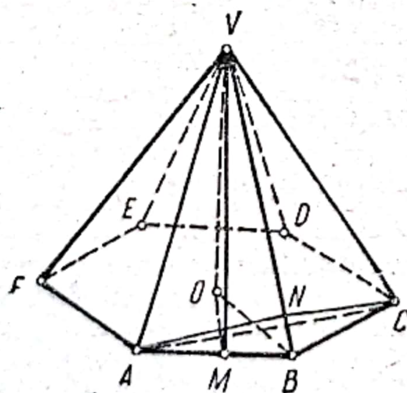


Fig. M.B.39

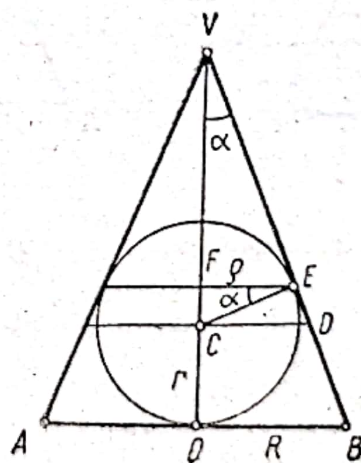


Fig. M.B.40

5°. O secțiune prin figură arată ca în fig. M.B.40. În $\triangle VOB$ avem: $\operatorname{tg} \alpha = \frac{R}{h}$, deci $R = h \operatorname{tg} \alpha$. În $\triangle VEC$ avem: $\sin \alpha = \frac{r}{h - r}$, de unde $r = \frac{h \sin \alpha}{1 + \sin \alpha}$. În $\triangle CEF$ avem: $\cos \alpha = \frac{\rho}{r}$, deci $\rho = r \cos \alpha = \frac{h \sin \alpha \cos \alpha}{1 \pm \sin \alpha}$. În $\triangle VCD$

avem: $CD = (h - r)\operatorname{tg}\alpha$. Volumul conului mic determinat de planul (P) este: $V_1 = \frac{\pi \cdot CD^2(h-r)}{3} = \frac{\pi(h-r)^3 \operatorname{tg}^2\alpha}{3}$. Volumul conului este: $V = \frac{\pi R^2 h}{3} = \frac{\pi h^3 \operatorname{tg}^2\alpha}{3}$.

Punînd condiția $V = 2V_1$ obținem: $h^3 = 2(h-r)^3$, deci $h = \sqrt[3]{2}(h-r)$. Înlocuind pe r obținem: $1 + \sin\alpha = \sqrt[3]{2}$, deci $\sin\alpha = \sqrt[3]{2} - 1$ și $\alpha = \arcsin(\sqrt[3]{2} - 1)$.

XXV. 1°. Ecuația are sens numai dacă $x \in [-9, 97]$. Fie $u = \sqrt[4]{97 - x} \geqslant 0$ și $v = \sqrt{9 + x} \geqslant 0$. Atunci:

$$\begin{cases} u + v = 8; \\ u^4 + v^2 = 106, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} v = 8 - u; \\ u^4 + u^2 - 16u - 42 = 0. \end{cases}$$

Ultima ecuație admițind soluția $u = 3$, avem: $(u - 3)(u^3 + 3u^2 + 10u + 14) = 0$. Cum $u \geqslant 0$, rezultă $u^3 + 3u^2 + 10u + 14 > 0$, deci singura soluție reală este $u = 3$, prin urmare $x = 16 \in [-9, 97]$.

2°. Matricea sistemului fiind $A = \begin{pmatrix} a & a+1 & a+2 \\ b & b+1 & b+2 \\ 1 & c & c^2 \end{pmatrix}$, obținem $\det A =$ $= (a - b)(c - 1)^2$ și distingem trei cazuri:

i) Dacă $a \neq b$ și $c \neq 1$, atunci $\det A \neq 0$, deci sistemul este compatibil determinat; în plus:
$\Delta_x = c(c-1)^2(a-b)$; $\Delta_y = (b-a)(c-1)^2(2c+1)$; $\Delta_z = (a-b)(c-1)^2(c+2)$, prin urmare: $x = c$; $y = -(2c+1)$; $z = c + 2$ sînt soluțiile sistemului.

ii) Dacă $a = b$, atunci oricare ar fi $c \in \mathbf{R}$, rangul matricii A este egal cu 2 Într-adevăr, presupunînd că rangul lui A ar fi mai mic decît 2, atunci ar trebui ca $ac - a - 1 = 0$ și $ac^2 - a - 2 = 0$, cu $a \neq 0$; din prima egalitate obținem $c = \frac{a+1}{a}$, care înlocuită în cea de a doua conduce la $1 = 0$, ceea ce este fals. Analog, se arată că rangul matricii extinse a sistemului este tot 2. Prin urmare, soluția sistemului se găsește exprimînd două din necunoscute în funcție de cea de a treia; exemplu:

$$x = \frac{(a+1)c^3 - (a+3)c + [a(c+2) - (a+1)c^2]z}{a + 1 - ac};$$

$$y = \frac{a + 3 - ac^3 - (a + 2 - ac^2)z}{a + 1 - ac}, \text{ cu } z \in \mathbf{R}.$$

iii) Dacă $a \neq b$ și $c \neq 1$, atunci $\det A = 0$ și $\operatorname{rang} A = 2$, deoarece $\begin{vmatrix} b & b+1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} \neq 0$. Minorul caracteristic este nul, deci sistemul este compatibil nedeterminat, soluțiile putînd avea forma: $x = t - 2$; $y = 3 - 2t$; $z = t$, cu $t \in \mathbf{R}$.

3°. Fie a, b și c cele trei rădăcini întregi ale lui $f(X)$, astfel încît $a = 3p$, $b = 3q + 1$ și $c = 3r + 2$; în plus, $f(X) = (X - a)(X - b)(X - c)g(X)$, unde $g(X) \in \mathbf{Z}(X)$. Fie $n \in \mathbf{Z}$; pentru $n = 3h$, cu $h \in \mathbf{Z}$, $f(n) = 3(h - p)(n - b)(n - c)g(n)$ este divizibil cu 3; pentru $n = 3h + 1$, cu $h \in \mathbf{Z}$, $f(n) = 3(n - a)(h - q)(n - c)g(n)$ este divizibil cu 3; pentru $n = 3h + 2$, cu $h \in \mathbf{Z}$, $f(n) = 3(n - a)(n - b)(h - r)g(n)$ este divizibil cu 3. Cum n a fost un întreg arbitrar ales, rezultă că oricare ar fi $n \in \mathbf{Z}$, $f(n)$ este divizibil cu 3.

4°. Cum a este o rădăcină a ecuației date, avem: (1) $a^3 - a - 1 = 0$, și, prin ipoteză: (2) $2a^2 - a = b$. Sumînd prima egalitate, înmulțită cu 2, cu cea de a doua, înmulțită cu $-a$, obținem, după efectuarea calculelor: (3) $a^2 - 2a + ab - 2 = 0$. În continuare, adunînd pe (2) cu (3), înmulțită cu -2, găsim: (4) $a(3 - 2b) = b - 4$.

Dar $3-2b \neq 0$. Într-adevăr, dacă admitem că $3-2b=0$, atunci, din (2), obținem $a^2 = \frac{2a+3}{4}$ și, dacă ținem cont de această valoare în (1), găsim $a^2 = \frac{2a+8}{4}$, ultimele două egalități fiind însă incompatibile. Atunci, din (4), avem $a = \frac{b-4}{3-2b}$, valoare care înlocuită în (2) conduce la egalitatea: $b^3 - 4b^2 + 9b - 11 = 0$. Prin urmare, polinomul căutat este $g(X) = X^3 - 4X^2 + 9X - 11$.

5°. Considerînd $x = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ a & b & c & d & e \end{pmatrix}$, unde $\{a, b, c, d, e\} = \{1, 2, 3, 4, 5\}$, avem: $x\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ b & c & a & e & d \end{pmatrix}$ și $\sigma x = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ \sigma(a) & \sigma(b) & \sigma(c) & \sigma(d) & \sigma(e) \end{pmatrix}$. Dar $\sigma x = x\sigma$, deci: $\sigma(a) = b$; $\sigma(b) = c$; $\sigma(c) = a$; $\sigma(d) = e$ și $\sigma(e) = d$. Ultimele două egalități arată că $\{d, e\} = \{4, 5\}$, fiind de studiat următoarele trei cazuri:

i) Dacă $a = 1$, atunci $\sigma(1) = b$, $\sigma(b) = c$ și $\sigma(c) = 1$, deci $b = 2$ și $c = 3$, prin urmare găsim soluțiile:

$$x_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \end{pmatrix}, \quad x_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \end{pmatrix}.$$

ii) Dacă $a = 2$, atunci $\sigma(2) = b$, $\sigma(b) = c$ și $\sigma(c) = 2$, deci $b = 3$ și $c = 1$, prin urmare:

$$x_3 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 3 & 1 & 4 & 5 \end{pmatrix}, \quad x_4 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 3 & 1 & 5 & 4 \end{pmatrix}.$$

iii) Dacă $a = 3$, atunci $\sigma(3) = b$, $\sigma(b) = c$ și $\sigma(c) = 3$, deci $b = 1$ și $c = 2$, de unde:

$$x_5 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 1 & 2 & 4 & 5 \end{pmatrix} \quad x_6 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 1 & 2 & 5 & 4 \end{pmatrix}.$$

XXVI. 1°. Sînt de analizat două cazuri:

i) Dacă $x_0 \geqslant a$, atunci $x_1 - a = \frac{a(x_0 - a)}{x_0 + a} \geqslant 0$, adică $x_1 \geqslant a$ și, prin inducție matematică, se arată că $x_n \geqslant a$, $(\forall) n \geqslant 1$. Într-adevăr, presupunînd că $x_{n-1} \geqslant a$, atunci $x_n = \frac{2ax_{n-1}}{x_{n-1} + a} \geqslant \frac{2ax_{n-1}}{x_{n-1} + x_{n-1}} = a$. În plus, $x_{n+1} - x_n = \frac{x_n(a - x_n)}{x_n + a} \leqslant 0$, $(\forall) n \in \mathbb{N}$, deoarece $a - x_n \leqslant 0$ și $x_n > 0$, $(\forall) n \in \mathbb{N}$. Rezultă că șirul $(x_n)_{n \geqslant 0}$ este mărginit inferior și descrescător, deci convergent. Notînd $\alpha = \lim\limits_{n \to \infty} x_n$ și trecînd la limită în relația de recurență găsim că: $\alpha = \frac{2a\alpha}{\alpha + a}$, de unde $\alpha = 0$ sau $\alpha = a$. Cum $x_n \geqslant a > 0$, $(\forall) n \in \mathbb{N}$, rezultă că $\alpha > 0$, deci $\alpha = a$, prin urmare $\lim\limits_{n \to \infty} x_n = a$.

ii) Dacă $0 < x_0 < a$, atunci $x_1 - a = \frac{a(x_0 - a)}{x_0 + a} < 0$, deci $x_1 < a$; în plus, $x_1 = \frac{2ax_0}{x_0 + a} > 0$; așadar $0 < x_1 < a$. Procedînd prin inducție se arată, fără dificultate, că $0 < x_n < a$, $(\forall) n \in \mathbb{N}$. În acest caz: $x_{n+1} - x_n = \frac{x_n(a - x_n)}{x_n + a} > 0$, $(\forall) n \in \mathbb{N}$, deoarece $a - x_n > 0$ și $x_n > 0$. Prin urmare, și în acest caz, șirul $(x_n)_{n \geqslant 0}$ este convergent, fiind mărginit și monoton (chiar strict monoton, fiind strict crescător). Notînd $\beta = \lim\limits_{n \to \infty} x_n$ și trecînd la limită în relația de recurență, găsim $\beta = \frac{2a\beta}{\beta + a}$,

de unde $\beta = 0$ sau $\beta = a$; dar $\beta \neq 0$ deoarece $0 < x_n < a$, $(\forall) n \in \mathbf{N}$ și $(x_n)_{n \geq 0}$ este strict crescător, deci $\lim\limits_{n \to \infty} x_n = a$.

Așadar, în oricare din situații șirul considerat este convergent și are limita a, atunci cînd $a > 0$ și $x_0 > 0$.

2°. Observînd că funcția f este periodică, avînd perioada principală 2π, conchidem că este suficient să studiem restricția lui f la intervalul $[0, 2\pi]$. Fie $g : [0, 2\pi] \to \mathbf{R}$, $g(x) = \lambda + \cos x - \sin x$. Cum $g'(x) = 0$, atunci și numai atunci cînd $x \in \left\{\frac{3\pi}{4}, \frac{7\pi}{4}\right\}$, pentru $x = \frac{3\pi}{4}$, $g\left(\frac{3\pi}{4}\right) = \lambda - \sqrt{2}$ fiind minim global al lui g, iar pentru $x = \frac{7\pi}{4}$, $g\left(\frac{7\pi}{4}\right) = \lambda + \sqrt{2}$ fiind maxim global al lui g, rezultă $\lambda - \sqrt{2} \leq g(x) \leq \lambda + \sqrt{2}$, $(\forall) x \in [0, 2\pi]$ și sînt de analizat trei cazuri:

i) Dacă $\lambda \leq -\sqrt{2}$, atunci $g(x) \leq 0$, deci $\lambda + \cos x \leq \sin x$, $(\forall) x \in [0, 2\pi]$; prin urmare $f(x) = \sin x$, $(\forall) x \in [0, 2\pi]$, f fiind evident derivabilă peste tot.

ii) Dacă $\lambda \in (-\sqrt{2}, \sqrt{2})$, cum $\lambda - \sqrt{2} < 0$ și $\lambda + \sqrt{2} > 0$, rezultă că ecuația $g(x) = 0$ are o rădăcină în intervalul $\left(\frac{3\pi}{4}, \frac{7\pi}{4}\right)$. Fie x_0 rădăcina respectivă; atunci, pentru $x \in \left(\frac{3\pi}{4}, x_0\right)$, $g(x) < 0$, deci $f(x) = \sin x$, iar pentru $x \in \left(x_0, \frac{7\pi}{4}\right)$, $g(x) \geq 0$, deci $f(x) = \lambda + \cos x$. Prin urmare:

$$f(x) = \begin{cases} \sin x \text{ dacă } x \in \left(\frac{3\pi}{4}, x_0\right), \\ \lambda + \cos x \text{ dacă } x \in \left(x_0, \frac{7\pi}{4}\right), \end{cases}$$

dar f nu este derivabilă în x_0. Într-adevăr, cum $f_s'(x_0) = \cos x_0$ și $f_d'(x_0) = -\sin x_0$, dacă ar avea loc egalitatea $f_s'(x_0) = f_d'(x_0)$, atunci ar rezulta $\cos x_0 = -\sin x_0$, adică $x_0 \in \left\{\frac{3\pi}{4}, \frac{7\pi}{4}\right\}$ ceea ce este fals, deoarece $x_0 \in \left(\frac{3\pi}{4}, \frac{7\pi}{4}\right)$. Așadar, în acest caz, f nu este derivabilă pe $[0, 2\pi]$.

iii) Dacă $\lambda \geq \sqrt{2}$, atunci $g(x) \geq 0$, deci $\lambda + \cos x \geq \sin x$, $(\forall) x \in [0, 2\pi]$, prin urmare $f(x) = \lambda + \cos x$, $(\forall) x \in [0, 2\pi]$, funcția f fiind derivabilă peste tot. Așadar, f este derivabilă pe $\mathbf{R}$ dacă și numai dacă

$$\lambda \in (-\infty, -\sqrt{2}] \cup [\sqrt{2}, \infty).$$

3°. Cum $\lim\limits_{x \to \infty} \frac{x + \sqrt{x}}{x - \sqrt{x}} = 1$ și $\lim\limits_{x \to \infty} \frac{2\sqrt{x}}{x - \sqrt{x}} = 0$, rezultă $\lim\limits_{x \to \infty} \left(1 + \frac{2\sqrt{x}}{x - \sqrt{x}}\right)^{\frac{x - \sqrt{x}}{2\sqrt{x}}} = e$.

Pe de altă parte, $\lim\limits_{x \to \infty} \left(\frac{2\sqrt{x}}{x - \sqrt{x}} \cdot x\right) = \lim\limits_{x \to \infty} \frac{2\sqrt{x}}{1 - \frac{1}{\sqrt{x}}} = \infty$. Prin urmare:

$$\lim_{x \to \infty} \left(\frac{x + \sqrt{x}}{x - \sqrt{x}}\right)^x = \lim_{x \to \infty} \left[\left(1 + \frac{2\sqrt{x}}{x - \sqrt{x}}\right)^{\frac{x - \sqrt{x}}{2\sqrt{x}}}\right]^{\frac{2\sqrt{x}}{x - \sqrt{x}} \cdot x} = \infty.$$

4°. Ecuaţia $f(x) = 0$, avînd singura soluţie pe $x = 1$, rezultă că graficul lui f întîlneşte axa Ox numai în punctul de coordonate $(1, 0)$. Cum $\lim\limits_{\substack{x\to 1\\ x<1}} f(x) = \lim\limits_{\substack{x\to 1\\ x<1}} \frac{-\ln x}{\sqrt{x}} = 0$, $\lim\limits_{\substack{x\to 1\\ x>1}} f(x) = \lim\limits_{\substack{x\to 1\\ x>1}} \frac{\ln x}{\sqrt{x}} = 0$ şi $f(1) = 0$, rezultă că funcţia f este continuă în punctul $x = 1$, deci este continuă pe tot domeniul de definiţie. Pe de altă parte:

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ x>0}} f(x) = \lim_{\substack{x\to 0\\ x>0}} f(x) \frac{-\ln x}{\sqrt{x}} = \infty;$$

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = \lim_{x\to\infty} \frac{\ln x}{\sqrt{x}} = 0,$$

deci dreapta $x = 0$ (adică axa Oy) este asimptotă verticală, iar dreapta $y = 0$ (adică axa Ox) este asimptotă orizontală. Cum

$$\lim_{x\to 1} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = \lim_{x\to 1} \frac{|\ln x|}{\sqrt{x}(x-1)}, \text{ iar}$$

$$\lim_{\substack{x\to 1\\ x<1}} \frac{|\ln x|}{x-1} = \lim_{\substack{x\to 1\\ x<1}} \frac{-\ln x}{x-1} = \lim_{\substack{x\to 1\\ x<1}} \left(-\frac{1}{x}\right) = -1 \quad \text{şi}$$

$$\lim_{\substack{x\to 1\\ x>1}} \frac{|\ln x|}{x-1} = \lim_{\substack{x\to 1\\ x>1}} \frac{\ln x}{x-1} = \lim_{\substack{x\to 1\\ x>1}} \frac{1}{x} = 1,$$

rezultă că funcţia f nu este derivabilă în $x = 1$, acesta fiind un punct unghiular al graficului lui f. Pentru orice $x \in (0, \infty)\setminus\{1\}$, funcţia f este derivabilă şi cum

$$f(x) = \begin{cases} -\frac{\ln x}{\sqrt{x}} & \text{dacă } x \in (0, 1], \\ \frac{\ln x}{\sqrt{x}} & \text{dacă } x \in (1, \infty), \end{cases}$$

avem:

$$f'(x) = \begin{cases} \frac{\ln x - 2}{2x\sqrt{x}} & \text{dacă } x \in (0, 1), \\ \frac{2 - \ln x}{2x\sqrt{x}} & \text{dacă } x \in (1, \infty). \end{cases}$$

Pentru $x \in (0, 1)$, $f'(x) < 0$. Pentru $x \in (1, \infty)$, ecuaţia $f'(x) = 0$ are soluţia $x = e^2$, semnul funcţiei f' fiind dat de cel al expresiei $2 - \ln x$; în acest caz: $f'(x) > 0$ dacă $x \in (1, e^2)$ şi $f'(x) < 0$ dacă $x \in (e^2, \infty)$; în plus, $f(e^2) = \frac{2}{e}$ este valoarea funcţiei în punctul de maxim. Cum

$$f''(x) = \begin{cases} \frac{-3\ln x + 8}{4x^2\sqrt{x}} & \text{dacă } x \in (0, 1), \\ \frac{3\ln x - 8}{4x^2\sqrt{x}} & \text{dacă } x \in (1, \infty), \end{cases}$$

rezultă că $f''(x) > 0$, pentru $x \in (0, 1)$, deoarece inegalitatea $\frac{-3\ln x + 8}{4x^2\sqrt{x}} > 0$ este echivalentă cu $\ln x < \frac{8}{3}$, care este adevărată pentru că $\ln x < 0$; pentru $x \in (1, \infty)$,

ecuaţia $f''(x) = 0$ are soluţia $x = e^{\frac{8}{3}}$, deci $f''(x) < 0$ dacă $x \in (1, e^{\frac{8}{3}})$ şi $f''(x) > 0$ dacă $x \in (e^{\frac{8}{3}}, \infty)$; în plus, $f(e^{\frac{8}{3}}) = \frac{8}{3e^{\frac{4}{3}}}$ este valoarea ordonatei punctului de inflexiune. Tabloul variaţiei funcţiei f este următorul:

x	0		1			e^2		$e^{\frac{8}{3}}$		
$f'(x)$	$-$	$-$		$+$	$+$	0	$-$	$-$	$-$	$-$
$f(x)$	∞	$\searrow$	0	$\nearrow$		$\frac{2}{e}$	$\searrow$	$\frac{8}{3e^{\frac{4}{3}}}$	$\searrow$	0
$f''(x)$		$+$	$+$	$-$	$-$		$-$	0	$+$	$+$

iar graficul acesteia redat în fig. M.B.41.

5°. Fie $f : [0, 1] \to \mathbf{R}$, $f(x) = e^{x^2} + e^{1-x^2}$. Atunci $f'(x) = 2x(e^{x^2} - e^{1-x^2})$ şi ecuaţia $f'(x) = 0$ are soluţiile $x = 0$ şi $x = \frac{\sqrt{2}}{2}$. Semnul funcţiei f' fiind dat de cel al expresiei $e^{x^2} - e^{1-x^2}$, rezultă că $f'(x) \leqslant 0$ dacă $x \in \left[0, \frac{\sqrt{2}}{2}\right]$ şi $f'(x) \geqslant 0$ dacă $x \in \left[\frac{\sqrt{2}}{2}, 1\right]$. Prin urmare, funcţia f este crescătoare pe primul interval şi descrescătoare pe cel de al doilea; în plus, $f\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = 2\sqrt{e}$ şi $f(1) = 1 + e$. Aşadar $2\sqrt{e} \leqslant f(x) \leqslant 1 + e$, $(\forall) x \in [0, 1]$ şi, integrînd această dublă egalitate pe intervalul respectiv, găsim:

$$\int_0^1 2\sqrt{e}\, dx \leqslant \int_0^1 f(x)\, dx \leqslant \int_0^1 (1 + e)\, dx,$$

de unde rezultă imediat cerinţa din enunţ.

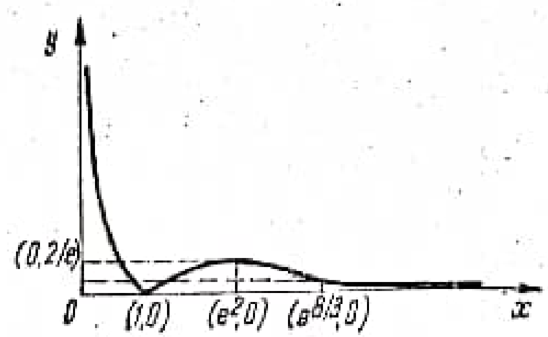


Fig. M.B.41

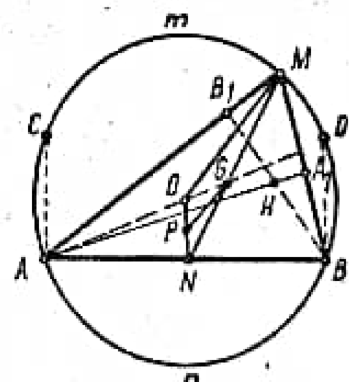


Fig. M.B.42

XXVII. 1°. Pentru a determina locul geometric al punctului H, notăm cu A_1 şi B_1 picioarele înălţimilor triunghiului, duse din vîrfurile A şi, respectiv, B (v. fig. M.B.42). Patrulaterul MA_1HB_1 este inscriptibil, deoarece $m(\widehat{AA_1M}) = m(\widehat{BB_1M}) = 90°$; prin urmare, $m(\widehat{AHB}) = 180° - m(\widehat{AMB}) = \text{const}$, $m(\widehat{AMB})$ fiind constantă. Deci, cînd M parcurge arcul $\widehat{CmD} \subset \mathscr{C}(O, r)$, H va parcurge un arc

de cerc, avînd capetele în A și B și fiind situat de aceeași parte a dreptei AB ca și M, iar cînd M parcurge arcul $\widehat{CnD} \subset \mathcal{C}(O, r)$, H va parcurge tot un arc de cerc, într-o situație similară celei anterioare cu excepția a două puncte (simetricele punctelor C și D față de AB care corespund cazurilor cînd $\triangle ABM$ este degenerat, adică $M \equiv A$ sau $M \equiv B$). Se arată apoi, fără dificultate, că arcele parcurse de H aparțin aceluiași cerc, simetricul lui $\mathcal{C}(O, r)$, fără două puncte, față de dreapta AB, care este însuși locul geometric al lui H. Pentru a determina locul geometric al lui G, considerăm mediana $[MN]$ ($N \in AB$, $AN \equiv BN$) și construim $GP \parallel OM$ ($P \in NO$). Cum triunghiurile GNP și MNO sînt asemenea, avînd valoarea raportului de asemănare egală cu $\frac{1}{3}$, rezultă că P este fix (N și O fiind fixe), iar $PG = \frac{1}{3} MO = \frac{1}{3} r = \text{const.}$ Prin urmare, locul geometric al punctului G este cercul de centru P și rază $r' = \frac{1}{3} r$, adică $\mathcal{C}(P, r')$, fără două puncte, care corespund cazurilor cînd $\triangle ABM$ este degenerat, adică $M \equiv A$ sau $M \equiv B$.

2°. *Metoda I.* Fie $AD \perp (OBC)$ și $DE \perp OC$, $DF \perp OB$ ($E \in OC$, $F \in OB$); v. fig. M.B.43. Conform teoremei celor trei perpendiculare, avem că $AE \perp OC$

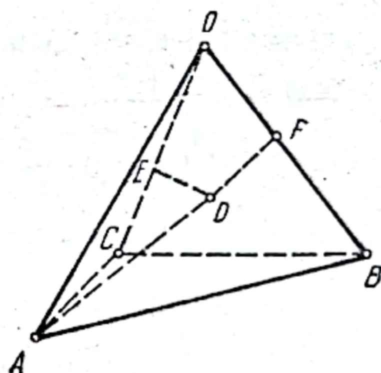


Fig. M.B.43

și $AF \perp OB$. Mai mult, triunghiurile ADE și AFD sînt dreptunghice. Rezultă că $\operatorname{tg}(\widehat{AOC}) = \frac{AE}{OE} > \frac{ED}{OE} = \operatorname{tg}(\widehat{DOC})$, deoarece $AE > ED$ (ca ipotenuză în triunghiul dreptunghic ADE). Analog: $\operatorname{tg}(\widehat{AOB}) = \frac{AF}{OF} > \frac{DF}{OF} = \operatorname{tg}(\widehat{DOB})$. Funcția tangentă fiind crescătoare pe $\left[0 \frac{\pi}{2}\right]$, rezultă $m(\widehat{AOC}) > m(\widehat{DOC})$ și $m(\widehat{AOB}) > m(\widehat{DOB})$, de unde, prin adunarea membru cu membru a celor două inegalități, găsim: $m(\widehat{AOB}) + m(\widehat{AOC}) > m(\widehat{DOC}) + m(\widehat{DOB}) = m(\widehat{BOC})$, adică inegalitatea din enunț.

Notă. În aplicarea raționamentului făcut s-a considerat că $D \in \operatorname{Int}(\widehat{BOC})$, cazul cînd $D \notin \operatorname{Int}(\widehat{BOC})$ fiind evident deoarece măsura proiecției unuia dintre cele două unghiuri $\widehat{AOC}$ și $\widehat{AOB}$ este mai mare decît $m(\widehat{BOC})$.

Metoda II. Dacă $m(\widehat{AOC}) > m(\widehat{BOC})$, problema este rezolvată. Să analizăm ce se întîmplă dacă $m(\widehat{AOC}) \leqslant m(\widehat{BOC})$. Atunci există un punct $D \in \operatorname{Int}(\widehat{BOC})$ astfel încît $OD = OA$ și $m(\widehat{AOC}) = m(\widehat{COD})$. Planul (ADC) intersectează semidreapta

$[OB$ în punctul B'. Rezultă că triunghiurile OCD și OAC sînt congruente, deci $[CA] \equiv [CD]$. În triunghiul ACB' avem $AC + AB' > CB' = CD + DB'$, deci $AB' > DB'$. În triunghiurile AOB' și DOB' avem $[OD] \equiv [OA]$, $[OB']$ latură comună și $AB' > DB'$. Așadar, $m(\widehat{AOB'}) > m(\widehat{DOB'})$, prin urmare: $m(\widehat{AOC}) + m(\widehat{AOB}) >$ $> m(\widehat{COD}) + m(\widehat{DOB}) = m(\widehat{BOC})$, deci tocmai inegalitatea cerută.

3°. Fie ABC un triunghi pentru care $\sigma[ABC] = 1$. Prin reducere la absurd, presupunem că există două laturi, fie acestea AB și AC, avînd lungimile strict mai mici decît $\sqrt{2}$. Atunci:

$$1 = \sigma[ABC] = \frac{AB \cdot AC \cdot \sin(\widehat{BAC})}{2} \leqslant \frac{AB \cdot AC}{2} < \frac{\sqrt{2} \cdot \sqrt{2}}{2} = 1.$$

adică $1 < 1$, fapt imposibil, prin urmare cel puțin două laturi ale triunghiului respectiv au lungimile mai mari sau egale cu $\sqrt{2}$.

4°. Pentru $n = 1$, ecuația dată devine $\cos x - \sin x = 1$, de unde $\cos\left(x + \frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}$, adică $x + \frac{\pi}{4} = \pm\frac{\pi}{4} + 2k\pi$, $k \in \mathbf{Z}$, echivalent cu $x \in \{2k\pi \mid k \in \mathbf{Z}\} \cup \left\{2k\pi - \frac{\pi}{2} \,\middle|\, k \in \mathbf{Z}\right\}$.

Pentru $n \geqslant 2$, sînt de analizat două cazuri:

i) Dacă $n = 2p$, $p \in \mathbf{N}^*$, ecuația devine $\cos^{2p} x - \sin^{2p} x = 1$. Pe de altă parte, $0 \leqslant \cos^{2p} x \leqslant 1$ și $-1 \leqslant -\sin^{2p} x \leqslant 0$, deci $\cos^{2p} x - \sin^{2p} x \leqslant 1$, $(\forall)\, x \in \mathbf{R}$, egalitatea avînd loc atunci și numai atunci cînd $\cos^{2p} x = 1$ și $\sin^{2p} x = 0$, adică dacă și numai dacă $x \in \{k\pi \mid k \in \mathbf{Z}\}$.

ii) Dacă $n = 2p + 1$, ecuația dată devine: (1) $\cos^{2p+1} x - \sin^{2p+1} x = 1$. Pe de altă parte, oricare ar fi $x \in \mathbf{R} \setminus \left\{\frac{k\pi}{2} \,\middle|\, k \in \mathbf{Z}\right\}$, avem:

$$|\cos^{2p+1} x| = |\cos x|^{2p+1} < |\cos x|^2 = \cos^2 x,$$

deci $\cos^{2p+1} x < \cos^2 x$; analog, găsim $-\sin^{2p+1} x < \sin^2 x$. Cum

$$\cos^{2p+1} x - \sin^{2p+1} x < \cos^2 x + \sin^2 x = 1,$$

rezultă că oricare ar fi $x \in \mathbf{R} \setminus \left\{\frac{k\pi}{2} \,\middle|\, k \in \mathbf{Z}\right\}$ nu satisface (1). Observînd că $x = 0$ și $x = \frac{3\pi}{2}$ verifică (1), dar $x = \frac{\pi}{2}$ și $x = \pi$ nu, cum $\cos^{2p+1} x - \sin^{2p+1} x$ este periodică, avînd perioada principală 2π, rezultă că $x \in \{2k\pi \mid k \in \mathbf{Z}\} \cup \left\{\frac{3\pi}{2} + 2k\pi \,\middle|\, k \in \mathbf{Z}\right\}$ sînt soluții ale ecuației (1).

5°. Ecuația hiperbolei raportată la axele sale este (H): $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} - 1 = 0$, cu $a > 0$. Cum punctul de coordonate $(1, 0)$ aparține hiperbolei (H), trebuie să aibă loc egalitatea $\frac{1}{a^2} - \frac{0}{b^2} = 1$, deci $a = 1$, deoarece $a > 0$. Pe de altă parte, dreptele (d_1) și (d_2) sînt asimptote la hiperbolă, deci $\frac{b}{a} = 2$, adică $b = 2$, deoarece $a = 1$. Prin urmare, hiperbola (H) are ecuația $4x^2 - y^2 - 4 = 0$.

XXVIII. 1°. Fie $k \in \mathbf{N}$, $k < 1989$; atunci:

$$T_{k+1} = C_{1989}^{k}\left(\sqrt{x\sqrt{x}}\right)^{1989-k}\left(\frac{2}{\sqrt[3]{x}}\right)^{k},$$

adică

$$T_{k+1} = C_{1989}^{k} x^{\frac{3}{4}(1989-k)} \cdot 2^{k} \cdot (x)^{-\frac{k}{3}},$$

termenii respectivi fiind independenți de x atunci și numai atunci cînd

$$\frac{3}{4}(1989-k) - \frac{k}{3} = 0,$$

de unde $k = 1\,377$, valoare care îndeplinește condițiile cerute asupra lui k. Așadar, în dezvoltarea considerată, există un singur termen independent de x, anume T_{1378}, a cărui valoare este

$$T_{1378} = C_{1989}^{1377} \cdot 2^{1377}.$$

2°. Fie $x_1, x_2 \in \mathbf{R}$, $x_1 < x_2$. Atunci $x_1^3 < x_2^3$ și, cum $a > 0$, avem:

$$f(x_1) = x_1^3 + \frac{x_1}{a} < x_2^3 + \frac{x_2}{a} = f(x_2),$$

adică:

$$f(x_1) < f(x_2),$$

prin urmare funcția f este strict crescătoare, deci injectivă. Fie acum $y \in \mathbf{R}$: să arătăm că există $x \in \mathbf{R}$, astfel încît să avem $y = f(x)$. Acest fapt este imediat, deoarece ecuația $x^3 + \frac{x}{a} = y$ este o ecuație algebrică (polinomială), cu coeficienți reali și de grad impar (trei), prin urmare admite cel puțin o rădăcină reală, numărul rădăcinilor complexe fiind — în cazul problemei date — egal cu doi. Așadar, funcția f este surjectivă. Fiind injectivă și surjectivă, rezultă că f este bijectivă.

Observație. În condițiile utilizării unor elemente de Analiză matematică, problema respectivă putea fi rezolvată după cum urmează. Funcția f este continuă și derivabilă pe $\mathbf{R}$, fiind o funcție polinomială. Cum

$$f'(x) = 3x^2 + \frac{1}{a} > 0,$$

rezultă că f este strict crescătoare pe $\mathbf{R}$, deci (strict) monotonă; fiind și continuă, rezultă că este bijectivă deoarece $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$ și $\lim\limits_{x \to \infty} f(x) = +\infty$.

3°. Fie M punctul de intersecție al bisectoarelor unghiurilor $\widehat{BCD}$ și $\widehat{ADC}$. Atunci M este egal depărtat de laturile $[BC]$, $[CD]$ și, respectiv, $[AD]$; notăm cu h distanța respectivă. Pe de altă parte:

$$(*) \qquad \sigma_{(ABCD)} = \sigma_{(ADM)} + \sigma_{(MDC)} + \sigma_{(MBC)}$$

atunci și numai atunci cînd M se află pe $[AB]$; în caz contrar, egalitatea (1) fiind evident înlocuită de o inegalitate. Dar $(*)$ se mai scrie ca:

$$\frac{h \cdot (AB + CD)}{2} = \frac{AD \cdot h}{2} + \frac{CD \cdot h}{2} + \frac{BC \cdot h}{2},$$

care este echivalentă cu relația (1) din enunț.

Notă. Pentru obținerea egalității (1) din enunț s-ar fi putut proceda prin a arăta că dacă M se află pe $[AB]$, atunci triunghiurile MAD și BMC sînt isoscele de unde se obținea, fără dificultate, relația respectivă.

Pentru calculul lungimii diagonalelor, se are în vedere că din proprietatea de inscriptibilitate a trapezului $ABCD$, rezultă că acesta este isoscel, de unde găsim valoarea $a\sqrt{3}$, unde cu a am notat jumătate din lungimea lui $[AB]$.

4°. Cum $A = \pi - (B + C)$, rezultă $\cos A = -\cos(B + C)$. Pe de altă parte:

$$\sin B + \sin C = 2\sin\frac{B+C}{2}\cos\frac{B-C}{2};$$

deci inegalitatea din enunț este adevărată atunci și numai atunci cînd:

$$4\sin^2\frac{B+C}{2} - 4\sin\frac{B+C}{2}\cos\frac{B-C}{2} + 1 \geqslant 0,$$

adică dacă și numai dacă:

$$\left(2\sin\frac{B+C}{2} - \cos\frac{B-C}{2}\right)^2 + \sin^2\frac{B-C}{2} \geqslant 0,$$

ultima fiind adevărată deoarece toți termenii din suma respectivă sînt nenegativi. Pentru $A = \frac{2\pi}{3}$ și $B = C = \frac{\pi}{6}$, inegalitatea din enunț este satisfăcută cu egalitate.

XXXIX. 1°. Utilizînd relațiile lui Viète avem:

$$\begin{cases} a + b + c = a; \\ ab + bc + ac = b; \\ abc = c; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b + c = 0; \\ b(c-1) = 0; \\ c(ab-1) = 0. \end{cases}$$

Rezolvînd acest sistem obținem:

$$\begin{cases} a = -1; \\ b = -1; \\ c = 1; \end{cases} \quad \text{sau} \quad \begin{cases} a \in \mathbb{R}; \\ b = 0; \\ c = 0. \end{cases}$$

2°. Polinomul are coeficienți reali, admite și rădăcina $x_2 = 1 - i$, deci se va divide cu $[x - (i + 1)][x - (1 - i)] = x^2 - 2x + 2$. Utilizînd algoritmul împărțirii a două polinoame obținem:

$$2X^3 - X^2 + aX + b = (2X + 3)(X^2 - 2X + 2) + (a + 2)X + b - 6.$$

Pentru a avea restul 0 trebuie ca $a = -2$ și $b = 6$. În aceste condiții: $x_3 = -\frac{3}{2}$ și

$$x_1^4 + x_2^4 + x_3^4 = (1 + i)^4 + (1 - i)^4 + \left(-\frac{3}{2}\right)^4 = (2i)^2 + (-2i)^2 + \\ + \frac{81}{16} = -8 + \frac{81}{16} = -\frac{47}{16}.$$

3°. Avem: $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\x>0}} f(x) = \ln 1 = 0$; $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\x>0}} \frac{1}{\ln x} = 0$ și deci $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\x>0}} \frac{f(x)}{\ln x} = 0$.

Pentru $x_n = \frac{n\pi}{2} \to \infty$, $f(x_n) = \ln\left(1 + \left|\frac{\sin n\pi}{2}\right|\right)$ nu are limită, deci $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)$ nu există.

4°. Funcţia nu este nici pară, nici impară. Graficul nu intersectează axele:

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ x>0}} f(x) = 0; \qquad \lim_{\substack{x\to 1\\ x<1}} f(x) = +\infty.$$

$x = 1$ asimptotă verticală.

$$f'(x) = \frac{1}{2}\cdot\frac{x(3-2x)}{(1-x)^2}\cdot\sqrt{\frac{1-x}{x}}\,; \quad \lim_{\substack{x\to 0\\ x>0}} f'(x) = 0.$$

Tabloul de variaţie este următorul:

x		0		1	
$f'(x)$	—	0	+		—
$f(x)$		0	↗	∞	

Graficul funcţiei este prezentat în fig. M.B.44.

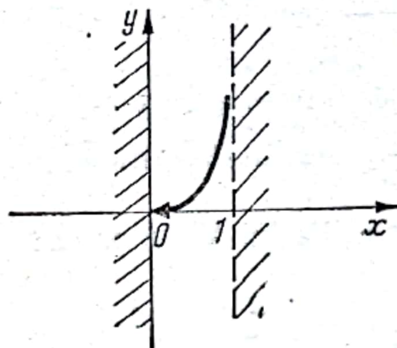


Fig. M.B.44

5°. Avem: $\dfrac{1}{x^3+x^2+x+1} = \dfrac{1}{(x+1)(x^2+1)} = \dfrac{A}{x+1} + \dfrac{Bx+C}{x^2+1}$.

Efectuînd calculele obţinem: $A = \frac{1}{2}$; $B = -\frac{1}{2}$, $C = \frac{1}{2}$. Deci:

$$I = \frac{1}{2}\int_1^2 \frac{1}{x+1}\,dx - \frac{1}{2}\int_1^2 \frac{x-1}{x^2+1}\,dx = \frac{1}{2}\ln(x+1)\Big|_1^2 - \frac{1}{4}\int_1^2 \frac{2x}{x^2+1}\,dx +$$

$$+ \frac{1}{2}\int_1^2 \frac{dx}{1+x^2} = \frac{1}{2}\ln\frac{3}{2} - \frac{1}{4}\ln(1+x^2)\Big|_1^2 + \frac{1}{2}\operatorname{arctg} x\Big|_1^2 =$$

$$= \ln\sqrt[4]{\frac{9}{10}} - \frac{\pi}{8} + \frac{1}{2}\operatorname{arctg} 2$$

XXX. 1°. Avem de rezolvat ecuaţia: $\sqrt{x+3} = x+1$. Punînd condiţia $x \geqslant -1$ putem ridica ambii membri la pătrat. Obţinem: $x+3 = x^2+2x+1 \Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow x^2+x-2=0$ cu soluţiile: $x_1 = -2$; $x_2 = 1$. Reţinem deci $x = 1$. Pentru $\log_{\frac{1}{2}} f(x) \leqslant 0 = \log_{\frac{1}{2}} 1$ punem condiţiile: $f(x) > 0$; $f(x) \geqslant 1$. Rămîne de rezolvat $f(x) \geqslant 1$, adică: $\sqrt{x+3} \geqslant x+2$. Evident convine $(\forall)x$, $x \in [-3, -2]$. Căutăm soluţii $x > -2$. Avem:

$$x+3 \geqslant x^2+4x+4 \Leftrightarrow x^2+3x+1 \leqslant 0 \Rightarrow x \in \left[\frac{-3-\sqrt{5}}{2}, \frac{-3+\sqrt{5}}{2}\right].$$

Reţinem în acest caz $x \in \left[-2, \dfrac{-3+\sqrt{5}}{2}\right]$. Soluţia inecuaţiei este deci $x \in \left[-3, \dfrac{-3+\sqrt{5}}{2}\right]$.

2°. Inegalitatea se mai scrie: $100\cdot 2^n + 500 < 101\cdot 2^n + 202 \Leftrightarrow 2^n > 298$. Ţinînd cont de faptul că $2^8 = 256$ şi $2^9 = 512$ rezultă valoarea căutată $n = 9$.

3°. Deoarece toate coloanele matricii A se regăsesc în B avem rang $A \leqslant$ $\leqslant$ rang $B \leqslant 3$.

$$\det A = \begin{vmatrix} 1 & -2 & -2 \\ 3 & 1 & p \\ 3 & -1 & 1 \end{vmatrix} = 21 - 5p.$$

Dacă $p \neq \frac{21}{5}$, atunci rang A = rang $B = 3$ pentru $(\forall) q \in \mathbf{R}$. Dacă $p = \frac{21}{5}$, atunci rang $A = 2$, întrucît $\begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 3 & 1 \end{vmatrix}$ este un minor nenul al lui A. Pentru a avea şi rang $B = 2$ punem condiţia:

$$\begin{vmatrix} 1 & -2 & 4 \\ 3 & 1 & 4 \\ 3 & -1 & q \end{vmatrix} = 0, \text{ de unde } q = \frac{44}{7}.$$

În concluzie matricile au acelaşi rang pentru $p \neq \frac{21}{5}, q \in \mathbf{R}$ sau $p = \frac{21}{5}, q = \frac{44}{7}$.

4°. Fie $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$. Trebuie ca:

$$\begin{cases} f'(1) = 0; \\ f(1) = 1; \\ f'(0) = 0; \\ f(0) = 3; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3a + 2b + c = 0; \\ a + b + c + d = 1; \\ c = 0; \\ d = 3; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 4; \\ b = -6; \\ c = 0; \\ d = 0; \end{cases} \text{ şi } f(x) = 4x^3 - 6x^2 + 3.$$

$$f(0) = 3; \lim_{x \to -\infty} f(x) = -\infty; \lim_{x \to \infty} f(x) = +\infty.$$

f este continuă şi derivabilă pe $\mathbf{R}$:

$$f'(x) = 12x(x-1); \ f'(x) = 0 \Rightarrow x_1 = 0; \ x_2 = 1.$$

Putem forma şirul lui Rolle pentru a rezolva ecuaţia $f(x) = 0$:

x	$-\infty$	0	1	$+\infty$
$f(x)$	$-\infty$	3	1	$+\infty$

Rezultă că există o singură rădăcină a ecuaţiei $f(x) = 0$ şi avem $x_0 \in (-\infty, 0)$. Întrucît $f(-1) = -7$, avem $x_0 \in (-1, 0)$.

$$f''(x) = 24x - 12. \ f''(x) = 0 \Rightarrow x = \frac{1}{2}.$$

Tabloul de variaţie este următorul:

x	$-\infty$		-1		x_0		0		$\frac{1}{2}$		1		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	$+$		$+$		0	$-$	$-$	$-$	0	$+ + +$	
$(f''x)$		$-$	$-$		$-$				0		$+$	$+ +$	
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	-7	$\nearrow$	0	$\nearrow$	3	$\searrow$	2	$\searrow$	1	$\nearrow$	$+\infty$

Graficul funcţiei este prezentat în fig. M.B.45.

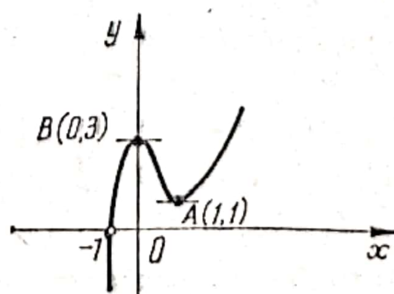


Fig. M.B.45

5°. Utilizînd metoda integrării prin părți putem scrie:

$$I_n = \int_{-n}^{0} (2x-3)(e^x)'\,dx = (2x-3)e^x\Big|_{-n}^{0} - 2\int_{-n}^{0} e^x\,dx = \frac{2n+5}{e^n} - 5.$$

Fie $g: \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, $g(x) = \dfrac{2x+5}{e^x} - 5$. Pentru calculul $\lim\limits_{x\to\infty} g(x)$ utilizăm regula lui l'Hôpital și avem:

$$\lim_{x\to\infty} g(x) = -5 + \lim_{x\to\infty} \frac{2x+5}{e^x} = -5 + \lim_{x\to\infty} \frac{2}{e^x} = -5.$$

Deci pentru orice șir $(x_n)_{n\in\mathbf{N}} \subset \mathbf{R}$, cu $x_n \to \infty$, avem $\lim\limits_{n\to\infty} g(x_n) = -5$. Alegem $x_n = n (\forall) n \in \mathbf{N}$. Obținem: $\lim\limits_{n\to\infty} I_n = \lim\limits_{n\to\infty} g(n) = -5$.

XXXI. 1°. Împărțind ambii membri ai ecuației cu $9^x \neq 0$ avem: $\left(\frac{2}{3}\right)^{2x} + 2\left(\frac{2}{3}\right)^x = 3$. Fie $\left(\frac{2}{3}\right)^x = y$, $y > 0$. Rezolvăm $y^2 + 2y - 3 = 0$ și se obține $y_1 = 1$, $y_2 = -3$. Reținem $\left(\frac{2}{3}\right)^x = 1$, de unde $x = 0$.

2°. Sistemul este liniar omogen și admite soluție banală: $x = y = z = 0$. Căutăm și alte soluții. Observăm că ε este rădăcină cubică a unității și deci:

$$\varepsilon^2 + \varepsilon + 1 = 0;\ \varepsilon^3 = 1 \text{ cu } \varepsilon \neq 1.$$

Determinantul matricii coeficienților este:

$$\begin{vmatrix} 1 & \varepsilon & \varepsilon^2 \\ \varepsilon^2 & 1 & \varepsilon \\ \varepsilon & \varepsilon^2 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1+\varepsilon+\varepsilon^2 & 1+\varepsilon+\varepsilon^2 & 1+\varepsilon+\varepsilon^2 \\ \varepsilon^2 & 1 & \varepsilon \\ \varepsilon & \varepsilon^2 & 1 \end{vmatrix} = 0.$$

Sistemul admite deci și soluții diferite de cea banală. Rangul matricii coeficienților este 1. Avem necunoscuta principală x și necunoscute secundare y și z. Obținem soluția: $x = -\varepsilon\alpha - \varepsilon^2\beta$; $y = \alpha$; $z = \beta$; $\alpha, \beta \in \mathbf{C}$.

3°. $A^2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. Fie $X = \begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix}$.

$$A^2X = XA^2 \Leftrightarrow \begin{pmatrix} x+z & y+t \\ z & t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x & x+y \\ y & z+t \end{pmatrix}, \text{ de unde } \begin{cases} x+z = x; \\ y+t = x+y; \\ t+z = t. \end{cases}$$

Deci $\begin{cases} z = 0; \\ x = t; \\ y \in \mathbf{R}, \end{cases}$ și matricile căutate au forma $X = \begin{pmatrix} x & y \\ 0 & x \end{pmatrix}$, cu $x, y \in \mathbf{R}$.

Pentru a doua cerință a problemei considerăm, la fel $Y = \begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix}$.

$$A^2Y - AY^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} x+z & y+t \\ z & t \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} x & x+y \\ z & z+t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

și deci $\begin{cases} z = 1; \\ t - x = 0; \\ -z = 1, \end{cases}$ contradicție. Deci nu există matrici Y cu proprietatea cerută.

1°. $x^3 - x^2 - x + 1 = 0 \Leftrightarrow (x-1)(x^2-1) = 0$, $x_1 = x_2 = 1$, $x_3 = -1$. Funcţia nu este nici pară nici impară. Intersecţiile cu Ox sînt punctele de coordonate $(1, 0)$ şi $(-1, 0)$. Intersecţia cu Oy este $(0, 1)$.

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = \lim_{x\to\infty} x\sqrt[3]{1 - \frac{1}{x} - \frac{1}{x^2} + \frac{1}{x^3}} = \infty;$$

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} x\sqrt[3]{1 - \frac{1}{x} - \frac{1}{x^2} + \frac{1}{x^3}} = -\infty.$$

Graficul nu prezintă asimptote verticale sau orizontale.
Căutăm asimptotele oblice la $-\infty$ şi la $+\infty$ de tipul $y = mx + n$:

$$m = \lim_{x\to-\infty} \frac{f(x)}{x} = 1;$$

$$n = \lim_{x\to-\infty}\left(\sqrt[3]{x^3 - x^2 - x + 1} - x\right) = \lim_{x\to-\infty} \frac{x^3 - x^2 - x + 1 - x^3}{\sqrt[3]{(x^3-x^2-x+1)^2} + x\sqrt[3]{x^3-x^2-x+1} + x^2} =$$

$$= \lim_{x\to-\infty} \frac{x^2\left(-1 - \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2}\right)}{x^2\left[\sqrt[3]{\left(1 - \frac{1}{x} - \frac{1}{x^2} + \frac{1}{x^3}\right)^2} + \sqrt[3]{1 - \frac{1}{x} - \frac{1}{x^2} + \frac{1}{x^3}} + 1\right]} = -\frac{1}{3}.$$

Deci $y = x - \frac{1}{3}$ este asimptotă oblică la $-\infty$. Analog se arată că această dreaptă este asimptotă şi la $+\infty$. f e continuă pe $\mathbf{R}$.

$$f'(x) = \frac{3x+1}{3\sqrt[3]{(x-1)(x+1)^2}}.$$ Deci f nu este derivabilă în $x = 1$ şi $x = -1$.

$$f'(x) = 0 \Rightarrow x = -\frac{1}{3}.$$

$$f''(x) = -\frac{8}{27}\frac{x+1}{\sqrt[3]{(x-1)^4(x+1)^5}}.$$

Tabloul de variaţie este următorul:

x	$-\infty$		-1		$-\frac{1}{3}$		0		1		∞
$f'(x)$		+ + +	$+\infty \mid +\infty$	+	0	− −	−	−	$-\infty \mid \infty$	+ + +	
$f''(x)$		+ + +	$\mid$		−	−	−		$\mid$	− − −	
$f(x)$	$-\infty$	↗	0	↗	$\frac{\sqrt[3]{32}}{3}$	↘	1	↘	0	↗	$+\infty$

Graficul funcţiei este prezentat în fig. M.B.46.

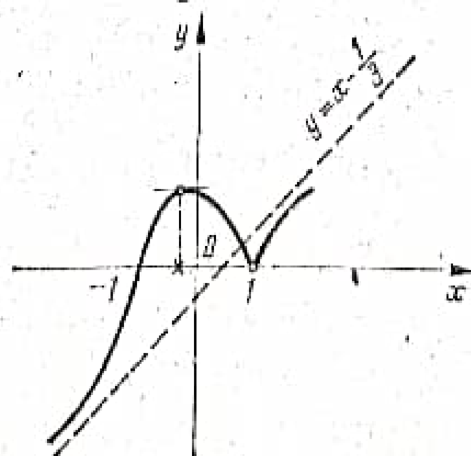


Fig. M.B.46

5°. Utilizînd metoda integrării prin părţi avem:

$$I = -xe^{1-x}\Big|_0^1 + \int_0^1 e^{1-x}\,dx = -1 + (-e^{1-x})\Big|_0^1 = e.$$

XXXII. 1°. Ecuaţia are sens pentru $x \in (1, \infty)$ şi avem: $\log_{x^2}(x-1) = \log_x 8$, care este echivalentă cu: $\frac{1}{2}\log_x(x-1) = \log_x 8$, de unde rezultă soluţia $x = 65$.

2°. Pentru $n = 1$ egalitatea este evidentă. Presupunem că este adevărată pentru $n = p$ şi să demonstrăm că este adevărată pentru $n = p + 1$ $(p \in \mathbf{N})$. Avem:

$$2^2 + 4^2 + \ldots + (2p)^2 + (2p+2)^2 = \frac{2p(p+1)(2p+1)}{3} + (2p+2)^2 =$$
$$= \frac{2p(p+1)(2p+1) + 3(2p+2)^2}{3} = \frac{2(p+1)(2p^2+7p+6)}{3} = \frac{2(p+1)(p+2)(2p+3)}{3}.$$

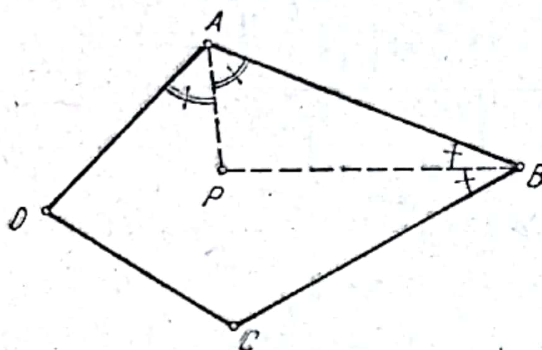


Fig. M.B.47

3°. Fie P intersecţia bisectoarelor unghiurilor $\hat{A}$ şi $\hat{B}$ ale patrulaterului $ABCD$. Astfel avem:

$$m(\widehat{APB}) = 180° - \frac{1}{2}m(\hat{A}) - \frac{1}{2}m(\hat{B}) = \frac{360° - m(\hat{A}) - m(\hat{B})}{2} \text{ (v. fig. M.B.47).}$$

Dacă ţinem seamă că $m(\hat{A}) + m(\hat{B}) + m(\hat{C}) + m(\hat{D}) = 360°$ deducem că: $m(\widehat{APB}) = \frac{1}{2}m(\hat{C}) + \frac{1}{2}m(\hat{D})$.

4°. Ţinînd seama de formula $\cos 2x = 1 - 2\sin^2 x$ ecuaţia devine:

$$4(m+1)\sin^2 x - 4m\sin x + m - 1 = 0.$$

Discriminantul ecuaţiei este: $\Delta = 16m^2 - 16(m+1)(m-1) = 16$; prin urmare avem: $\sin x = \frac{4m \pm 4}{8(m+1)}$, care ne conduce la $\sin x = \frac{1}{2}$ cu soluţia:

$$(1)\ x = k + (-1)^k\frac{\pi}{6},\ k \in \mathbf{Z}, \text{ independentă de } m.$$

Mai avem: $\sin x = \frac{m-1}{2(m+1)}$, $m \neq -1$, care are soluţii reale dacă sînt satisfăcute inegalităţile: $-1 \leqslant \frac{m-1}{2(m+1)} \leqslant 1$, $m \neq -1$; acestea sînt satisfăcute pentru $m \in (-\infty, -3] \cup (-1, \infty)$. În concluzie, dacă $m \in (-3, -1]$ avem numai soluţiile (1). Dacă $m \in (-\infty, -3] \cup (-1, \infty)$ avem soluţiile (1) şi soluţiile:

$$x = k\pi + (-1)^k \arcsin\left[\frac{m-1}{2(m+1)}\right],\ k \in \mathbf{Z}.$$

XXXIII. 1°. Ecuația se mai scrie: $2m(x^3-1)+(2-7m)(x-1)x=0$, $m \in \mathbf{R}\setminus\{0\}$, adică $(x-1)[2m(x^2+x+1)+(2-7m)x]=0$, de unde $x=1$ și $2mx^2+(2-5m)x+2m=0$, $m \in \mathbf{R}\setminus\{0\}$. Discriminantul ultimei ecuații fiind $\Delta \equiv (2-5m)^2-16m^2=(2-9m)(2-m)$, rezultă că $\Delta=0$ pentru $m=\frac{2}{9}$ și $m=2$, $\Delta>0$ pentru $m \in \left(-\infty, \frac{2}{9}\right) \cup (2, \infty)$ și $\Delta<0$ pentru $m \in \left(\frac{2}{9}, 2\right)$. Pe de altă parte, suma rădăcinilor ecuației respective de gradul II este $S=\frac{2-5m}{2m}$, iar produsul $P=\frac{2-5m}{2m}$, dacă $m \neq 0$; $S>0$ și $P<0$ dacă $m \in (-\infty, 0) \cup \left(\frac{2}{5}, \infty\right)$, $S<0$ și $P>0$ dacă $m \in \left(0, \frac{2}{5}\right)$ și $S=P=0$ dacă $m=\frac{2}{5}$. Prin urmare, ecuația dată are o rădăcină egală cu 1 iar pentru celelalte două rezultatele sînt conforme cu cele indicate în tabelul următor:

m	Δ	S	P	Natura și semnele rădăcinilor ecuației: $2mx^2+(2-5m)x+2m=0$, $m \in \mathbf{R}\setminus\{0\}$.
$m<0$	+	+	−	Rădăcini (reale), de semne contrare, cea mai mare în modul fiind strict pozitivă.
$m=0$				Ecuația nu este definită (prin ipoteză, $m \neq 0$).
$0<m<\frac{2}{9}$	+	−	+	Rădăcini reale, distincte, (ambele) strict negative.
$m=\frac{2}{9}$	0	−	+	Rădăcini reale, egale, strict negative.
$\frac{2}{9}<m<\frac{2}{5}$	−	−	+	Rădăcini complexe.
$m=\frac{2}{5}$	0	0	0	Ambele rădăcini egale cu zero.
$m>\frac{2}{5}$	+	+	−	Rădăcini (reale) de semne contrare, cea mai mare în modul fiind strict pozitivă.

2°. Ținem seama că: $\log_2(9-2^x)>3-x \Leftrightarrow \log_2(9-2^x)>\log_2 2^{3-x} \Leftrightarrow 9-2^x>2^3\cdot 2^{-x} \Leftrightarrow 2^{2x}-9\cdot 2^x+8<0$ și punînd $y=2^x>0$, găsim inecuația: $y^2-9y+8<0$, care este adevărată atunci și numai atunci cînd $y \in (1, 8)$. Prin urmare, inecuația dată este verificată de acele valori ale lui $x \in \mathbf{R}$ pentru care $2^x \in (1, 8)$, adică pentru $x \in (0, 3)$, care verifică și condiția $9-2^x>0$.

3°. Dacă $x_1=1+\sqrt{3}$ este rădăcină a lui f, atunci și $x_2=1-\sqrt{3}$ este rădăcină a aceluiași polinom, prin urmare:

$$\begin{cases} f(1+\sqrt{3})=(1+\sqrt{3})^4+a(1+\sqrt{3})+b=0; \\ f(1-\sqrt{3})=(1-\sqrt{3})^4+a(1-\sqrt{3})+b=0. \end{cases}$$

de unde $a=-16$ și $b=-12$. Admițînd ca rădăcini pe x_1 și x_2, polinomul dat se divide prin $(X-x_1)(X-x_2)$, adică prin X^2-2X-2, deci f poate fi pus sub forma: $f=(X^2-2X-2)(X^2+2X+6)$; prin urmare $x_3=-1-i\sqrt{5}$ și $x_4=-1+i\sqrt{5}$ sînt celelalte două rădăcini ale lui.

4°. Adunînd membru cu membru primele sau ultimele două ecuații ale sistemului, obținem $x = 0$. Pentru $x = 0$, toate ecuațiile sistemului sînt de forma: $-y + z = 1$; $y = z - 1$, $z \in \mathbf{R}$. Așadar, sistemul este verificat de valorile $(0, t-1, t)$, unde $t \in \mathbf{R}$.

5°. Notăm mai întîi faptul că $(\mathbf{Q}, +)$ este grup abelian. Fie $M(x, y)$, $P(p, q) \in M_2$; atunci

$$M(x, y) + P(p, q) = \begin{pmatrix} x+y & 4y \\ -y & x-y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} p+q & 4q \\ -q & p-q \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} (x+p)+(y+q) & 4(y+q) \\ -(y+q) & (x+p)-(y+q) \end{pmatrix} \in M_2,$$

deci operația „+" este bine definită pe M_2. Fie acum $M(x, y)$, $P(p, q)$, $S(u, v) \in M_2$; atunci este ușor de arătat că:

$[M(x, y) + P(p, q)] + S(u, v) = M(x, y) + [P(p, q) + S(u, v)]$, deoarece $(x+p)+u = x+(p+u)$ și $(y+q)+v = y+(q+v)$. În continuare, se verifică fără dificultate că $O(0, 0)$ este elementul neutru, iar $M'(-x, -y)$ este simetricul lui $M(x, y)$. Deci $(M_2, +)$ este grup. Rămîne să arătăm că grupul respectiv este și abelian. Evident, $M(x, y) + P(p, q) = P(p, q) + M(x, y)$, deoarece $x + p = p + x$ și $y + q = q + y$, demonstrația fiind completă.

Notă. Observația făcută la început, precum că $(\mathbf{Q}, +)$ este grup abelian este esențială în tot cursul demonstrației. Fără îndoială că prin semnul „+" am marcat operații distincte de adunare — într-un caz pentru numere raționale, în altul pentru matrici — dar credem că nu există pericol de confuzie, notațiile întrebuințate fiind suficient de clare, de altfel uzitate și în manualele școlare.

XXXIV. 1°. Notînd $y = x^3$, ecuația devine $y^2 - 9y + 8 = 0$, ale cărei rădăcini sînt $y_1 = 1$ și $y_2 = 8$. Prin urmare, soluțiile ecuației date sînt: $x_1 = 1$, $x_2 = \alpha$, $x_3 = \bar{\alpha}$; $x_4 = 2$, $x_5 = 2\alpha$ și $x_6 = 2\bar{\alpha}$, unde α și $\bar{\alpha}$ sînt rădăcinile cubice ale unității:

$$\left(\alpha = \frac{-1 + i\sqrt{3}}{2}, \ \bar{\alpha} = \frac{-1 - i\sqrt{3}}{2}\right).$$

2°. Din condițiile $1 + x \geqslant 0$ și $1 - x \geqslant 0$, găsim că ecuația are sens numai pentru $x \in [-1, 1]$. Pe de altă parte:

$$\sqrt{1+x} - \sqrt{1-x} > 0 \Leftrightarrow \sqrt{1+x} > \sqrt{1-x} \Leftrightarrow x > 0.$$

Pentru $x \in (0, 1]$ ridicăm la pătrat ambii membri ai ecuației date și găsim $2\sqrt{1-x^2} = 1$ sau, printr-o nouă ridicare la pătrat, $4(1-x^2)=1$, de unde $x^2 = \frac{3}{4}$, adică $x = \frac{\sqrt{3}}{2} \in (0, 1]$, și $x = -\frac{\sqrt{3}}{2} \notin (0, 1]$. Pentru $x \in [-1, 0]$, avem $\sqrt{1+x} - \sqrt{1-x} \leqslant 0$, deci egalitatea din ecuația dată nu poate avea loc. Prin urmare, singura soluție a ecuației respective este $x = \frac{\sqrt{3}}{2}$.

3°. Inecuația respectivă are sens numai dacă $x > 0$; în plus, valoarea $x = 1$ nu satisface inegalitatea strictă. Sînt de analizat două cazuri:

i) Pentru $x \in (0, 1)$, logaritmînd, avem:

$$x^{\sqrt{x}} < \sqrt{x^x} \Leftrightarrow \sqrt{x}\log_x x > x \log_x \sqrt{x} \Leftrightarrow \sqrt{x} > \frac{x}{2} \Leftrightarrow x > \frac{x^2}{4} \Leftrightarrow 4x - x^2 > 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x \in (0, 1);$$

ii) Pentru $x > 1$, găsim:

$$x^{\sqrt{x}} < \sqrt{x}^{x} \Leftrightarrow \sqrt{x} < \frac{x}{2} \Leftrightarrow x^2 - 4x > 0 \Leftrightarrow x \in (4, \infty).$$

În concluzie, inecuația dată este verificată de toate valorile $x \in (0, 1) \cup (4, +\infty)$.

4°. Scriind relațiile între rădăcinile și coeficienții ecuației respective (relațiile lui Viète), la care adăugăm condiția din ipoteză, avem:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = -m; \\ (x_1 + x_2)x_3 + x_1x_2 = -16; \\ x_1x_2x_3 = 48; \\ x_1 + x_2 = 0, \end{cases}$$

de unde: $x_3 = -m$; $x_1x_2 = 16$; $x_1x_2x_3 = 48$; $x_1 + x_2 = 0$. Rădăcinile ecuației nu pot fi nule (fapt evident, pentru că $x=0$ nu o verifică), deci $x_3 = \frac{x_1x_2x_3}{x_1x_2} = \frac{48}{-16} = -3$, prin urmare $m = 3$. Din $x_1 + x_2 = 0$ și $x_1x_2 = -16$ găsim că $x_1, x_2 \in \{-4, 4\}$ cu $x_1 = -x_2$. Așadar soluțiile ecuației date sînt elementele mulțimii $\{-4, -3, 4\}$.

XXXV. 1°. Se impun condițiile: $x > 0$, $x \neq 1$ și apoi se transformă toți logaritmii în baza 6. Notînd $u = \log_6 x$ avem:

$$\log_{\frac{1}{6}}\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{\log_6 \frac{1}{x}}{\log_6 \frac{1}{6}} = \log_6 x = u; \quad \log_x 6 = \frac{1}{\log_6 x} = \frac{1}{u};$$

$$\log_{\frac{1}{\sqrt{x}}}\left(\frac{1}{6}\right) = \frac{\log_6 \frac{1}{6}}{\log_6 \frac{1}{\sqrt{x}}} = \frac{2}{\log_6 x} = \frac{2}{u}; \quad \log_{\sqrt{6}} x = \frac{\log_6 x}{\log_6 \sqrt{6}} = 2u.$$

Ecuația dată devine: $u^2 + \frac{1}{u^2} + 2\left(u + \frac{1}{u}\right) + \frac{3}{4} = 0$, care este o ecuație reciprocă. Se face substituția $u + \frac{1}{u} = t$ și obținem $4t^2 + 8t - 5 = 0$, de unde $t_1 = \frac{1}{2}$ și $t_2 = -\frac{5}{2}$. Rezultă ecuațiile: $u + \frac{1}{u} = \frac{1}{2}$ cu soluții nereale și $u + \frac{1}{u} = -\frac{5}{2}$ cu soluțiile $u_1 = -2$, $u_2 = -\frac{1}{2}$. Obținem: $\log_6 x = -2$, deci $x_1 = \frac{1}{36}$ și $\log_6 x = -\frac{1}{2}$, deci $x_2 = \frac{1}{\sqrt{6}}$, ambele soluții acceptabile.

2°. *Metoda I.* Scriem relațiile lui Viète: $x_1 + x_2 + x_3 = -\frac{m}{2}$, $x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3 = 2$, $x_1x_2x_3 = -2$ și adăugăm condiția $x_1 = x_2$. Rezultă sistemul: $2x_1 + x_3 = -\frac{m}{2}$, $x_1^2 + 2x_1x_3 = 2$, $x_1^2x_3 = -2$. Din ultima ecuație avem: $x_1x_3 = -\frac{2}{x_1}$ și, înlocuind în a doua ecuație obținem: $x_1^2 - \frac{2}{x_1} = 2$, deci $x_1^3 - 2x_1 - 4 = 0$. Singura soluție reală a ecuației obținute este $x_1 = 2$ (se poate aplica Horner). Rezultă: $x_2 = 2$, $x_3 = -\frac{1}{2}$ și $m = -7$.

Metoda II. Notăm $P(x) = 2x^3 + mx^2 + 4x + 4$ și α rădăcina dublă. Se impun condițiile: $P(\alpha) = 0$, $P'(\alpha) = 0$, $P''(\alpha) \neq 0$. Rezultă: $2\alpha^3 + m\alpha^2 + 4\alpha + 4 = 0$, $6\alpha^2 + 2m\alpha + 4 = 0$, $12\alpha + 2m \neq 0$. Eliminînd pe m între primele două relații rezultă: $\alpha^3 - 2\alpha - 4 = 0$, de unde $\alpha = 2$ etc.

3°. Notînd cu a_n termenul general al șirului dat și amplificînd cu conjugata ultimei paranteze avem:

$$a_n = n^k\left(a^{\frac{1}{n}} - 1\right) \cdot \frac{\frac{n-1}{n} - \frac{n+1}{n+2}}{\sqrt{\frac{n-1}{n}} + \sqrt{\frac{n+1}{n+2}}} = \frac{n^k\left(a^{\frac{1}{n}} - 1\right)}{n(n+2)} \cdot \frac{-2}{\sqrt{\frac{n-1}{n}} + \sqrt{\frac{n+1}{n+2}}} =$$

$$= \frac{n^{k-2}}{n+2} \cdot \frac{a^{\frac{1}{n}} - 1}{\frac{1}{n}} \cdot \frac{-2}{\sqrt{\frac{n-1}{n}} + \sqrt{\frac{n+1}{n+2}}}.$$

Deoarece $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{-2}{\sqrt{\frac{n-1}{n}} + \sqrt{\frac{n+1}{n+2}}} = -1$ și $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a^{\frac{1}{n}} - 1}{\frac{1}{n}} = \ln a$, rezultă că $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = (-\ln a) \cdot \lim\limits_{n} \frac{n^{k-2}}{n+2}$. Pentru $k = 0, 1, 2$ avem: $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$; pentru $k=3$ avem: $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = -\ln a$, iar pentru $k \geqslant 4$ rezultă: $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = -\infty$ dacă $a > 1$, sau $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = +\infty$ dacă $a < 1$.

4°. a) Funcția f este indefinit derivabilă pe intervalele $(-\infty, -1)$, $(-1, 1)$, $(1, \infty)$ ca restricție de funcții elementare. Trebuie ca f să fie indefinit derivabilă și în punctele ± 1. Să impunem mai întîi condiția ca f să fie continuă în $x = 1$. Avem: $f(1-0) = \lim\limits_{\substack{x\to 1\\ x<1}} e^{\frac{1}{x^2-1}} = 0$ și $f(1+0) = \lim\limits_{\substack{x\to 1\\ x>1}} P(x) = P(1) = f(1)$. Obținem condiția $P(1) = 0$. Analog rezultă $P(-1) = 0$. Apoi avem:

$$f'(x) = \begin{cases} -\frac{2x}{(x^2-1)^2} e^{\frac{1}{x^2-1}} & \text{dacă } |x| < 1, \\ P'(x) & \text{dacă } |x| > 1. \end{cases}$$

Cum f' trebuie să existe și să fie continuă în punctele ± 1, rezultă condițiile:

$$f'(1-0) = \lim_{\substack{x\to 1\\ x<1}} \frac{-2x}{(x^2-1)} e^{\frac{1}{x^2-1}} = 0 = f'(1+0) = P'(1);$$

analog avem $P'(-1) = 0$. Presupunem că avem:

$$f^{(k)}(x) = \begin{cases} R_k(x)\, e^{\frac{1}{x^2-1}} & \text{dacă } |x| < 1, \\ P^{(k)}(x) & \text{dacă } |x| > 1, \end{cases}$$

unde $R_k(x)$ este o funcție rațională în x. Atunci rezultă:

$$f^{(k+1)}(x) = \begin{cases} \left[R_k'(x) - \frac{2x}{(x^2-1)^2} R_k(x)\right] e^{\frac{1}{x^2-1}} & \text{dacă } |x| < 1, \\ P^{(k+1)}(x) & \text{dacă } |x| > 1, \end{cases}$$

deci $R_{k+1}(x) = R_k'(x) - \frac{2x}{(x^2-1)^2} R_k(x)$ este tot o funcție rațională în x, adică orice derivată are forma indicată mai sus. Impunem condițiile ca $f^{(k)}(x)$ să existe și să fie continuă în punctele ± 1:

$$f^{(k)}(1-0) = \lim_{\substack{x\to 1\\ x<1}} R_k(x)\, e^{\frac{1}{x^2-1}} = 0 = f^{(k)}(1+0) = P^{(k)}(1);$$

analog avem $P^{(k)}(-1) = 0$. În concluzie am obținut condițiile $P^{(k)}(\pm 1) = 0$, $(\forall) k \in \mathbf{N}$. Presupunem $P \neq 0$ și fie $n = \text{grad } P$ și $a_n \neq 0$ primul coeficient al lui $P(x)$. Avem: $P^{(n)}(x) = n! a_n \neq 0$, contradicție cu condiția $P^{(n)}(\pm 1) = 0$. Rezultă $P = 0$ și funcția:

$$f(x) = \begin{cases} e^{\frac{1}{x^2-1}} & \text{dacă } |x| < 1, \\ 0 & \text{dacă } |x| \geqslant 1, \end{cases}$$

este indefinit derivabilă pe $\mathbf{R}$.

b) Dacă $|x| > 1$, atunci $\left|\frac{1}{x}\right| < 1$, deci $f\left(\frac{1}{x}\right) = e^{\frac{1}{\frac{1}{x^2}-1}} = e^{\frac{x^2}{1-x^2}}$. Obținem funcția:

$$g(x) = \begin{cases} e^{\frac{x^2}{1-x^2}} & \text{dacă } |x| > 1, \\ x^2 - 1 & \text{dacă } |x| \leqslant 1. \end{cases}$$

Deoarece $g(-x) = g(x)$ (g funcție pară), graficul este simetric față de axa Oy. Avem:

$$\lim_{x \to +\infty} g(x) = \lim_{x \to +\infty} e^{\frac{x^2}{1-x^2}} = e^{-1} = \frac{1}{e},$$

deci $y = \frac{1}{e}$ este asimptotă orizontală la $+\infty$ (deci și la $-\infty$). Calculăm:

$$g'(x) = \begin{cases} \frac{2x}{(1-x^2)^2} e^{\frac{x^2}{1-x^2}} & \text{dacă } |x| > 1, \\ 2x & \text{dacă } |x| < 1. \end{cases}$$

Rezultă tabloul de variație:

x	$-\infty$			-1			0			1				$+\infty$
$g'(x)$		$-$	$-$	$0 \mid -2$	$-$		0	$+$		$+2 \mid 0$	$+$	$+$	$+$	
$g(x)$	$1/e$	$\searrow$		0	$\searrow$		-1	$\nearrow$		0		$\nearrow$		$1/e$

și graficul din fig. M.B.48.

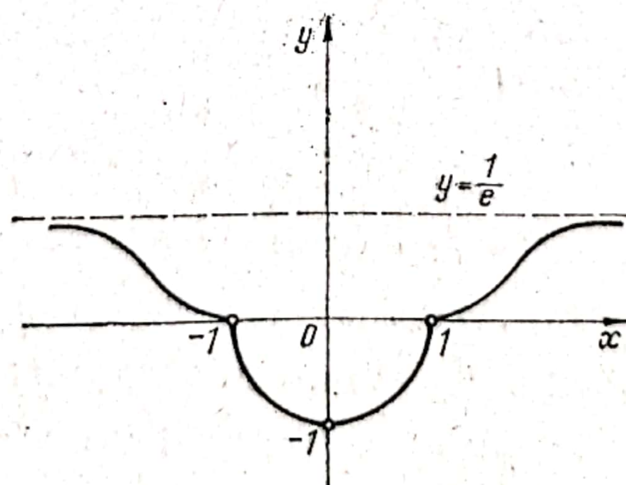


Fig. M.B.48

5°. Pe intervalul [1, 3] avem: $x-1 \geqslant 0$ și $x-3 \leqslant 0$, deci:

$$|(x-1)(x-2)(x-3)| = \begin{cases} (x-1)(x-2)(x-3) & \text{dacă } x \in [1, 2], \\ -(x-1)(x-2)(x-3) & \text{dacă } x \in (2, 3]. \end{cases}$$

Rezultă:

$$I = \int_1^3 |(x-1)(x-2)(x-3)|\, dx =$$

$$= \int_1^2 (x-1)(x-2)(x-3)\, dx - \int_2^3 (x-1)(x-2)(x-3)\, dx.$$

O primitivă a funcției $(x-1)(x-2)(x-3) = x^3 - 6x^2 + 11x - 6$ este $\frac{x^4}{4} - 2x^3 + \frac{11}{2}x^2 - 6x$. Făcînd calculele obținem: $I = \frac{1}{2}$.

XXXVI. 1°. a) Fie $[AA']$, $[BB']$ înălțimi in triunghiul MAB și $H = AA' \cap BB'$ ortocentrul ($A' \in MB$, $B' \in MA$). A treia înălțime $[MM']$ ($M' \in AB$) trece prin H și taie cercul $\mathcal{C}(O, r)$ in punctul M_1. Unim A cu M_1 (v. fig. M.B.49).

Avem: $m(\widehat{M_1AB}) = m\left(\frac{\widehat{M_1B}}{2}\right) = m(\widehat{M'MB})$. Dar $m(\widehat{M'MB}) = \frac{\pi}{2} - m(\hat{B}) = m(\widehat{A'AB})$, deci $\widehat{M_1AB} \equiv \widehat{A'AB}$. Deoarece $[AM']$ este latură comună, triunghiurile dreptunghice HAM' și M_1AM' sint congruente, deci $[HM'] \equiv [M'M_1]$. Rezultă că H este simetricul lui M_1 față de dreapta AB. Cind M parcurge cercul $\mathcal{C}(O, r)$ (fără punctele A și B cind $\triangle MAB$ este degenerat), punctul M_1 parcurge cercul $\mathcal{C}(O, r)$ fără punctele C și D. Cum simetricul unui cerc față de o dreaptă este evident tot un cerc, rezultă că H parcurge cercul simetric față de AB al cercului $\mathcal{C}(O, r)$ fără două puncte C' și D'.

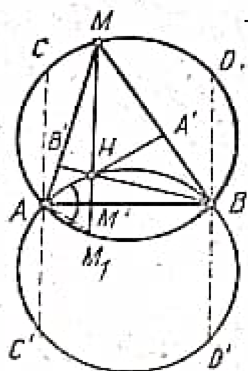


Fig. M.B.49

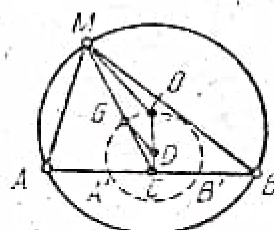


Fig. M.B.50

b) Fie C mijlocul lui $[AB]$ și ducem $GD \parallel OM$ ($G \in [MC]$ este centrul de greutate al triunghiului MAB, iar $D \in [OC]$); v. fig. M.B.50. Rezultă: $\frac{CD}{CO} = \frac{CG}{CM} = \frac{GD}{OM} = \frac{1}{3}$, de unde avem: punctul D este fix $\left(CD = \frac{1}{3}CO\right)$ și $GD = \frac{1}{3}OM = \frac{r}{3}$, deci locul geometric al punctului G este cercul $\mathcal{C}\left(D, \frac{r}{3}\right)$ fără două puncte A', B' $\left(\text{punctele de intersecție ale cercului } \mathcal{C}\left(D, \frac{r}{3}\right) \text{ cu dreapta } AB,\right.$ care corespund cazurilor de degenerare ale triunghiului MAB cind M este în A sau $\left.B\right)$.

2°. *Metoda I.* Avem: $m(\widehat{BAA_1}) = m\left(\frac{\widehat{BA_1}}{2}\right) = m\left(\frac{\widehat{MA_1}}{2}\right)$ și $m(\widehat{CAA_1}) =$ $= m\left(\frac{\widehat{CA_1}}{2}\right) = m\left(\frac{\widehat{NA_1}}{2}\right)$. Dar $\widehat{BAA_1} \equiv \widehat{CAA_1}$ și, cum, în același cerc la arce congruente corespund coarde congruente, rezultă $[BA_1] \equiv [A_1N]$ și $[A_1M] \equiv [CA_1]$; v. fig. M.B.51. Deoarece patrulaterul ABA_1N este inscriptibil rezultă $\widehat{NA_1C} \equiv \widehat{BAC}$; deoarece ACA_1M este inscriptibil rezultă $\widehat{MA_1B} \equiv \widehat{BAC}$. Atunci: $\widehat{NA_1C} \equiv \widehat{MA_1B}$ și $\triangle BA_1M \equiv \triangle NA_1C$, deci $[BM] \equiv [CN]$.

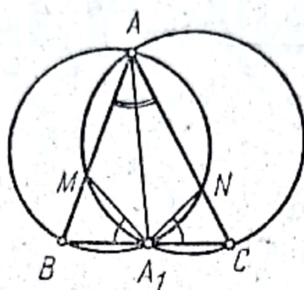


Fig. M.B.51

Metoda II. Puterea punctului C față de cercul ABA_1 este: $CA_1 \cdot CB = CN \cdot CA$. Puterea punctului B față de cercul ACA_1 este: $BA_1 \cdot BC = BM \cdot BA$. Teorema bisectoarei în triunghiul ABC dă: $\frac{CA}{AB} = \frac{CA_1}{BA_1}$ sau $\frac{CA}{CA_1} = \frac{BA}{BA_1}$. Scriem primele două relații sub forma: $\frac{CA}{CA_1} = \frac{CB}{CN}$, $\frac{BA}{BA_1} = \frac{CB}{BM}$. Ținînd seama de a treia relație rezultă: $\frac{CB}{CN} = \frac{CB}{BM}$, deci $[BM] \equiv [CN]$.

3°. Notăm $\operatorname{tg} x = t$, $x \neq (2k+1)\frac{\pi}{2}$, $k \in \mathbf{Z}$. Deoarece $\sin 2x = \frac{2\operatorname{tg} x}{1 + \operatorname{tg}^2 x}$, $\cos 2x = \frac{1 - \operatorname{tg}^2 x}{1 + \operatorname{tg}^2 x}$ rezultă ecuația: $mt^2 - 6mt + 2 - m = 0$, cu soluțiile $t_{1,2} =$ $= \frac{3m \pm \sqrt{10m^2 - 2m}}{m}$. Dacă $m \in (-\infty, 0) \cup [1/5, \infty)$ soluțiile sînt reale și avem: $x = k\pi + \operatorname{arctg} t_{1,2}$, $k \in \mathbf{Z}$. Pentru $m = 0$ în ecuația inițială se obține $\cos 2x = -1$, adică $x = (2k+1)\frac{\pi}{2}$, $k \in \mathbf{Z}$.

4°. O secțiune axială prin figură arată astfel:

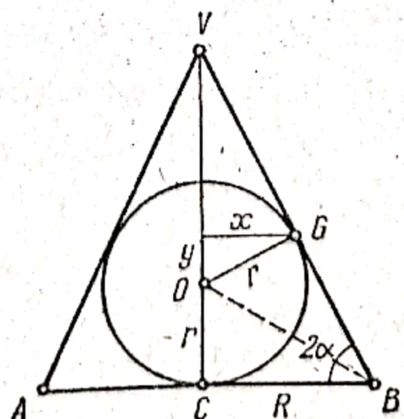


Fig. M.B.52

Metoda I. Aria sferei este $4\pi r^2$; aria totală a conului este $\pi R(R+G)$. Avem: $r = R \operatorname{tg} \alpha$, $G = \frac{R}{\cos 2\alpha}$. Condiția din enunț devine: $\frac{R^2 \operatorname{tg}^2\alpha}{R\left(R + \frac{R}{\cos 2\alpha}\right)} = \frac{1}{9}$,

sau $10 \cos^2 2\alpha - 7 \cos 2\alpha + 1 = 0$, de unde rezultă $\cos 2\alpha = \frac{1}{2}$ sau $\cos 2\alpha = \frac{1}{5}$.

Se observă că avem:

$$x = r \sin 2\alpha = R \operatorname{tg} \alpha \sin 2\alpha = 2R \sin^2\alpha; \ y = r \cos 2\alpha = R \operatorname{tg} \alpha \cos 2\alpha.$$

Apoi: $V_{cil} = 2\pi x^2 y = 8\pi R^3 \frac{\sin^5\alpha \cos 2\alpha}{\cos \alpha}$ și $V_{con} = \frac{1}{3}\pi R^2 \cdot R \operatorname{tg} 2\alpha = \frac{2\pi R^3}{3} \cdot \frac{\sin \alpha \cos \alpha}{\cos 2\alpha}$.

Obținem: $\frac{V_{cil}}{V_{con}} = \frac{12 \cos^2 2\alpha \sin^4\alpha}{\cos^2\alpha}$. Pentru $\cos 2\alpha = \frac{1}{2}$ se obține $\frac{V_{cil}}{V_{con}} = \frac{1}{4}$, iar pentru $\cos 2\alpha = \frac{1}{5}$ se obține $\frac{V_{cil}}{V_{con}} = \frac{16}{125}$.

Metoda II. Condiția din enunț devine $R(R+G) = 9r^2$. Avem relațiile: $\frac{r}{R} = \frac{G-R}{h} = \frac{h-r}{G}$; $h^2 = G^2 - R^2$, unde h este înălțimea conului. Se deduce ecuația: $10R^2 - 7RG + G^2 = 0$ cu soluțiile $G = 2R$ și $G = 5R$. Apoi avem: $\frac{y}{R} = \frac{x}{h} = \frac{r}{G}$, de unde obținem: $\frac{V_{cil}}{V_{con}} = \frac{6r^3h}{RG^3}$. Pentru $G=2R$ se obține $\frac{V_{cil}}{V_{con}} = \frac{1}{4}$, iar pentru $G = 5R$ se obține $\frac{V_{cil}}{V_{con}} = \frac{16}{125}$.

5°. Avem: $\sin A \sin B = \frac{1}{2}(\cos(A-B) - \cos(A+B))$ și $\cos(A+B) = -\cos C$. Relația dată devine: $4\cos^2 C + 4\cos(A-B)\cos C + 1 = 0$. Se impune condiția $\Delta \geqslant 0$, adică $\cos^2(A-B) \geqslant 1$, deci $\cos(A-B) = \pm 1$. Dacă $\cos(A-B) = 1$, atunci $A = B$. Rezultă: $4\cos^2 C + 4\cos C + 1 = 0$, de unde $A = B = \frac{\pi}{6}$ și $C = \frac{2\pi}{3}$. Relația $\cos(A-B) = -1$ nu este posibilă într-un triunghi. Menționăm că relația $4\cos^2 C + 4\cos(A-B)\cos C + 1 = 0$ se putea scrie echivalent: $[2\cos C + \cos(A-B)]^2 + \sin^2(A-B) = 0$, care este echivalentă cu două relații: $\sin(A-B) = 0$ și $2\cos C + \cos(A-B) = 0$ etc; se obține astfel o altă variantă de rezolvare.

XXXVII. 1°. Se impun condițiile: $x > 0$, $y > 0$. Logaritmînd, de exemplu, în baza e, rezultă sistemul: $\sqrt{y} \ln x = x \ln y$, $\sqrt{x} \ln y = y \ln x$. Din prima ecuație avem: $\ln y = \frac{\sqrt{y}}{x} \ln x$ și, înlocuind în ecuația a doua, se obține $\sqrt{x} \cdot \frac{\sqrt{y}}{x} \ln x = y \ln x$, adică $(\sqrt{xy} - 1)\ln x = 0$. Dacă $\ln x = 0$ rezultă $x = 1$, care conduce la $y = 1$. Dacă $\ln x \neq 0$ (adică $x \neq 1$), atunci avem $\sqrt{xy} - 1 = 0$, deci $y = \frac{1}{x}$. Înlocuind în prima ecuație se obține $x\sqrt{x} + 1 = 0$, care nu are soluții reale ($x > 0$). În concluzie, singura soluție a sistemului este: $x = 1$, $y = 1$.

2°. Polinoamele au forma: $P(X) = aX^2 + bX + c$, cu $a \neq 0$. Egalitatea din enunț devine: $(aX^2 + bX + c)^3 = aX^6 + bX^3 + c$. Identificînd coeficienții lui X^6, X^5 etc., rezultă $b = 0$, $c = 0$ și $a = \pm 1$, deci $P(X) = X^2$ sau $P(X) = -X^2$.

3°. Avem egalitatea: $x^n-(\sin x)^n=(x-\sin x)(x^{n-1}+x^{n-2}\cdot\sin x+\ldots+\sin^{n-1}x)$ şi limita din enunţ se poate scrie astfel:

$$\lim_{x\to 0}\frac{x^n-(\sin x)^n}{x^{n+2}}=\lim_{x\to 0}\frac{x-\sin x}{x^3}\cdot\lim_{x\to 0}\frac{x^{n-1}+x^{n-2}\sin x+\ldots+\sin^{n-1}x}{x^{n-1}}=$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{x-\sin x}{x^3}\cdot\lim_{x\to 0}\left[1+\frac{\sin x}{x}+\ldots+\left(\frac{\sin x}{x}\right)^{n-1}\right]=n\cdot\lim_{x\to 0}\frac{x-\sin x}{x^3},$$

deoarece $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1$. Limita rămasă de calculat are o nedeterminare de tipul $\frac{0}{0}$ şi aplicăm regula lui l'Hôpital de două ori:

$$\lim_{x\to 0}\frac{x-\sin x}{x^3}\overset{\frac{0}{0}}{=}\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{3x^2}\overset{\frac{0}{0}}{=}\frac{1}{3}\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{2x}=\frac{1}{6}\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=\frac{1}{6}.$$

Deci $\lim\limits_{x\to 0}\frac{x^n-(\sin x)^n}{x^{n+2}}=\frac{n}{6}$.

4°. a) Fie $x=c+d\sqrt{5}$, $x'=c'+d'\sqrt{5}\in L$, deci $c, d, c', d'\in\mathbf{Q}$. Atunci $x+x'=(c+c')+(d+d')\sqrt{5}\in L$ (căci $c+c'$, $d+d'\in\mathbf{Q}$) şi $x\cdot x'=(cc'+5dd')+(cd'+c'd)\sqrt{5}\in L$ (căci $cc'+5dd'$, $cd'+c'd\in\mathbf{Q}$). Deci L este parte stabilă a lui $\mathbf{R}$ în raport cu adunarea şi înmulţirea. Fie $A=\begin{pmatrix}a & 5b\\ b & a\end{pmatrix}$, $A'\begin{pmatrix}a' & 5b'\\ b' & a'\end{pmatrix}\in K$, deci $a, b, a', b'\in\mathbf{Q}$. Atunci: $A+A'=\begin{pmatrix}a+a' & 5(b+b')\\ b+b' & a+a'\end{pmatrix}\in K$, căci $a+a'$, $b+b'\in\mathbf{Q}$ şi $A\cdot A'=\begin{pmatrix}aa'+5bb' & 5(ab'+a'b)\\ ab'+a'b & aa'+5bb'\end{pmatrix}\in K$, căci $aa'+5bb'$, $ab'+a'b\in\mathbf{Q}$. Deci K este parte stabilă a lui $M_2(\mathbf{Q})$ în raport cu adunarea şi înmulţirea matricilor.

b) Adunarea pe L este asociativă deoarece adunarea pe $\mathbf{R}$ este asociativă. Elementul neutru la adunare este $0=0+0\cdot\sqrt{5}\in L$. Opusul elementului oarecare $x=c+d\sqrt{5}\in L$ este elementul $-x=-c-d\sqrt{5}\in L$. Deoarece adunarea este comutativă pe L (adunarea este comutativă pe $\mathbf{R}$), rezultă că L este grup abelian faţă de adunare. Înmulţirea pe L este asociativă deoarece înmulţirea pe $\mathbf{R}$ este asociativă. Elementul neutru la înmulţire este $1=1+0\cdot\sqrt{5}\in L$, deci L este monoid faţă de înmulţire. Apoi, înmulţirea este distributivă faţă de adunare pe L deoarece aceeaşi proprietate are loc pe $\mathbf{R}$. Rezultă că L este un inel. În sfîrşit, fie $(\forall)x=c+d\sqrt{5}\in L$, $x\neq 0$. Atunci $c^2-5d^2\neq 0$; într-adevăr, dacă $c^2-5d^2=0$ şi $d\neq 0$, rezultă $\frac{c^2}{d^2}=5$, de unde $\sqrt{5}=\left|\frac{c}{d}\right|\in\mathbf{Q}$, contradicţie; rezultă $d=0$ şi apoi $c=0$, deci $x=0$, contradicţie. Atunci $x'=\frac{c}{c^2-5d^2}-\frac{d}{c^2-5d^2}\sqrt{5}\in L$ şi avem: $x'\cdot x=x\cdot x'=\frac{(c+d\sqrt{5})(c-d\sqrt{5})}{c^2-5d^2}=1$, adică x are invers la înmulţire. Rezultă că L este corp (chiar corp comutativ). Adunarea pe K este asociativă deoarece adunarea pe $M_2(\mathbf{Q})$ este asociativă. Elementul neutru la adunare este matricea $0=\begin{pmatrix}0 & 5\cdot 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}\in K$. Opusul elementului $A=\begin{pmatrix}a & 5b\\ b & a\end{pmatrix}\in K$ este elementul $-A=\begin{pmatrix}-a & 5(-b)\\ -b & a\end{pmatrix}\in K$. Deoarece adunarea este comutativă pe K (adunarea matricilor pe $M_2(\mathbf{Q})$ este comutativă), rezultă că K este grup abelian faţă de

adunare. Înmulţirea pe K este asociativă deoarece înmulţirea matricilor din $M_2(Q)$ este asociativă. Elementul neutru la înmulţire este $I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 5\cdot 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \in K$, deci K este monoid faţă de înmulţire. Apoi, înmulţirea este distributivă faţă de adunare pe K deoarece aceeaşi proprietate are loc pe $M_2(Q)$. Rezultă că K este un inel. În sfîrşit, fie $(\forall) A = \begin{pmatrix} a & 5b \\ b & a \end{pmatrix} \in K$, $A \neq 0$. Atunci det $A = a^2 - 5b^2 \neq 0$ (altfel, ca mai sus, rezultă $a = 0$ şi $b = 0$, deci $A = 0$, contradicţie). Rezultă că A este inversabilă şi avem:

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} \dfrac{a}{a^2 - 5b^2} & \dfrac{-5b}{a^2 - 5b^2} \\ \dfrac{-b}{a^2 - 5b^2} & \dfrac{a}{a^2 - 5b^2} \end{pmatrix} \in K,$$

$A \cdot A^{-1} = A^{-1} \cdot A = I_2$. Atunci K este corp (chiar comutativ).

c) Definim $f: L \to K$ prin:

$$f(a + b\sqrt{5}) = \begin{pmatrix} a & 5b \\ b & a \end{pmatrix}, \ (\forall) x = a + b\sqrt{5} \in L.$$

Aplicaţia f este injectivă. Într-adevăr, fie x, $x' \in L$ cu $f(x) = f(x')$. Dacă $x = a + b\sqrt{5}$, $x' = a' + b'\sqrt{5}$, atunci avem: $f(x) = \begin{pmatrix} a & 5b \\ b & a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a' & 5b' \\ b' & a' \end{pmatrix} = f(x')$, deci $a = a'$ şi $b = b'$, adică $x = x'$. Aplicaţia f este surjectivă; într-adevăr, $(\forall) A = \begin{pmatrix} a & 5b \\ b & a \end{pmatrix} \in K$ avem $x = a + b\sqrt{5} \in L$ astfel încît $f(x) = A$. Rezultă că f este bijectivă. Apoi, $(\forall) x$, $x' \in L$ avem:

$$x = a + b\sqrt{5}; \quad x' = a' + b'\sqrt{5}; \quad x + x' = (a + a') + (b + b')\sqrt{5};$$

$$x \cdot x' = (aa' + 5bb') + (ab' + a'b)\sqrt{5} \text{ şi atunci:}$$

$$f(x + x') = \begin{pmatrix} a + a' & 5(b + b') \\ b + b' & a + a' \end{pmatrix} = f(x) + f(x');$$

$$f(x \cdot x') = \begin{pmatrix} aa' + 5bb' & 5(ab' + a'b) \\ ab' + a'b & aa' + 5bb' \end{pmatrix} = f(x) \cdot f(x'),$$

deci f este izomorfism de corpuri.

5°. Avem:

$$f(x) = \int_0^x \left(\frac{1}{\cos^2 t} - 1 + \frac{\sin t}{\cos t} \right) dt = \operatorname{tg} x - x + \ln(\cos x),$$

pentru $x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right)$. Deoarece $f'(x) = \dfrac{1}{\cos^2 x} - 1 + \dfrac{\sin x}{\cos x} = \operatorname{tg} x + \operatorname{tg}^2 x$, rezultă $f'(x) > 0$, pentru $x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$, deci f este strict crescătoare şi, prin urmare, injectivă. Apoi, deoarece f este continuă pe $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ şi, deoarece $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x > 0}} f(x) = 0$, $\lim\limits_{\substack{x \to \frac{\pi}{2} \\ x < \frac{\pi}{2}}} f(x) = +\infty$, conform proprietăţii lui Darboux, rezultă că $f: \left(0, \frac{\pi}{2}\right) \to (0, \infty)$ este şi surjectivă, deci f este bijectivă.

XXXVIII. 1°. Fie α unghiul obtuz al paralelogramului și β unghiul său ascuțit (v. fig. M.B.53). Teorema cosinusului ne dă relațiile:

$$AC^2 = AD^2 + DC^2 - 2AD \cdot DC \cos \alpha$$

$$BD^2 = AD^2 + AB^2 - 2AD \cdot AB \cos \beta.$$

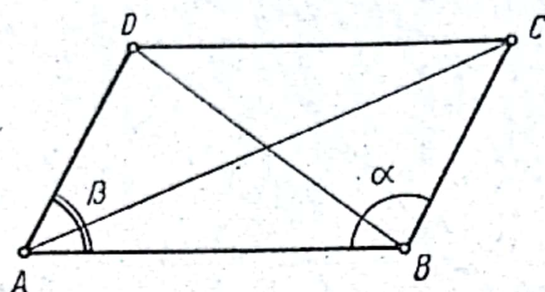


Fig. M.B.53

Deoarece $\cos \alpha = -\cos \beta$, prin adunarea celor două relații obținem: $AC^2 + BD^2 = 2(AB^2 + AD^2)$. Prin înmulțirea relațiilor anterioare se obține:

$$AC^2 \cdot BD^2 = (AB^2 + AD^2)^2 - 4AD^2 \cdot AB^2 \cos^2\alpha.$$

Înlocuind $AC^2 \cdot BD^2 = AB^4 + AD^4$ se obține: $\cos^2\alpha = \frac{1}{2}$, deci $\cos \alpha = -\frac{1}{\sqrt{2}}$ (α obtuz), de unde $\alpha = \frac{3\pi}{4}$.

2°. Ducem $O_1N' \parallel AN$. Teorema lui Pitagora în triunghiul O_1O_2N' ne dă (v. fig. M.B.54):

$$O_1N'^2 = (a + x)^2 - (x - a)^2 = 4ax, \text{ deci } O_1N' = 2\sqrt{ax}.$$

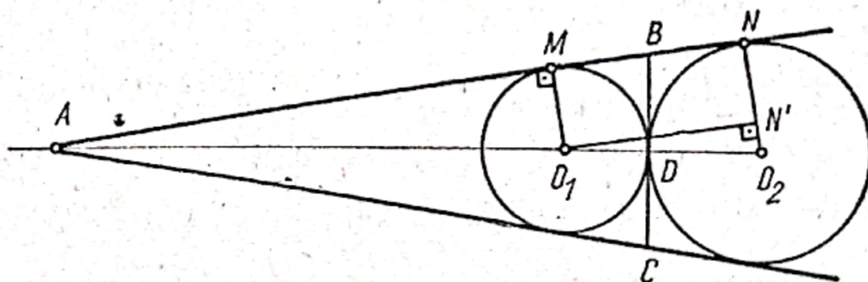


Fig. M.B.54

Avem: $BM = BD = BN$, deci $BC = 2BD = MN = 2\sqrt{ax}$. Apoi $\Delta O_1O_2N' \sim \Delta ABD$, deci $\frac{x-a}{\sqrt{ax}} = \frac{x+a}{AB}$, de unde rezultă: $AB = \frac{(x+a)\sqrt{ax}}{x-a} = AC$. Corpul generat prin rotație este un con ce are volumul $V = \frac{1}{3}\pi BD^2 \cdot AD = \frac{\pi}{3} \cdot ax \cdot \frac{2ax}{x-a}$ (deoarece $AD^2 = AB^2 - BD^2$). Condiția din enunț devine $\frac{x^2}{x-a} = 4a$, cu soluția $x = 2a$.

3°. Fie ABC planul perpendicular pe OM, ce trece prin M. Avem: $OA \perp$ planul OBC, deci $BC \perp OA$ (v. fig. M.B.55). Fie $A' = AM \cap BC$. Deoarece

$BC \perp OM$ rezultă că BC este perpendiculară pe planul OAA'. Prin urmare $AA' \perp BC$, adică $[AM]$ este înălţimea din A în triunghiul ABC. Analog, $OB \perp$ planul OAC, deci $AC \perp OB$. Fie $B' = BM \cap AC$. Deoarece $AC \perp OM$ rezultă că AC este perpendiculară pe planul OBB'. Prin urmare $BB' \perp AC$, deci $[BM]$ este înălţimea din B în triunghiul ABC. Atunci M este ortocentrul triunghiului ABC.

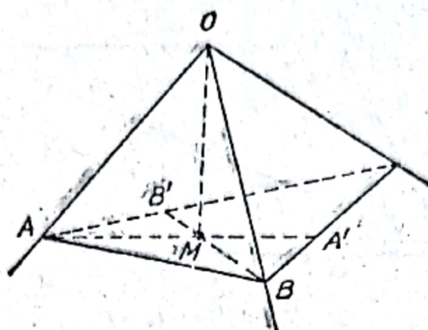


Fig. M.B.55

4°. Impunem condiţiile: $\cos x \neq 0$, $\sin x \neq 0$, deci $x \neq k\frac{\pi}{2}$, cu $k \in \mathbf{Z}$. Înlocuind $\operatorname{tg} x = \frac{\sin x}{\cos x}$ şi $\operatorname{ctg} x = \frac{\cos x}{\sin x}$, ecuaţia devine: $(\sin x + \cos x)\sqrt{2} = \frac{1}{\sin x \cos x}$. Notăm $\sin x + \cos x = t$ şi, prin ridicare la pătrat, obţinem: $\sin x \cos x = \frac{1}{2}(t^2 - 1)$. Rezultă ecuaţia $t^3 - t - \sqrt{2} = 0$, cu unica soluţie reală $t = \sqrt{2}$. Deci $\sin x + \cos x = \sqrt{2}$ sau $\sin x + \sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \sqrt{2}$, de unde obţinem: $2 \sin\frac{\pi}{4}\cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right) = \sqrt{2}$, adică $\cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right) = 1$, cu soluţiile $x = 2k\pi + \frac{\pi}{4}$, $k \in \mathbf{Z}$ (toate acceptabile).

5°. Deoarece $\operatorname{ctg}\left(\frac{\pi}{4} - B\right) = \frac{\operatorname{ctg} B + 1}{\operatorname{ctg} B - 1}$, relaţia dată devine: $1 + \frac{\operatorname{ctg} B + 1}{\operatorname{ctg} B - 1} = \frac{2}{1 - \operatorname{ctg} C}$ sau $\operatorname{ctg} B \operatorname{ctg} C = 1$, deci $\cos(B + C) = 0$. Rezultă $B + C = \frac{\pi}{2}$, deci triunghiul este dreptunghic în A.

XXXIX. 1°. Impunem condiţiile: $x, y \in \mathbf{N}$, $x \geqslant y + 1$. Aplicînd formulele: $C_n^k = \frac{n!}{k!(n-k)!}$, $A_n^k = \frac{n!}{(n-k)!}$, din ipotezele problemei rezultă sistemul:

$$\begin{cases} 2 \cdot \dfrac{(x-1)!}{y!(x-y-1)!} = \dfrac{(x-1)!}{(y-1)!(x-y)!} + \dfrac{x!}{y!(x-y)!}; \\ \left(\dfrac{x!}{(x-y-1)!}\right)^2 = \dfrac{x!}{(x-y)!} \cdot \dfrac{(x+1)!}{(x-y)!}. \end{cases}$$

După simplificări sistemul devine: $x = 3y$; $(x - y)^2 = x + 1$. Obţinem ecuaţia: $4y^2 - 3y - 1 = 0$, cu soluţiile $y_1 = 1$, $y_2 = -\frac{1}{4}$. Convine doar $y = 1$ şi rezultă $x = 3$.

2°. Tabla înmulţirii în inelul claselor de resturi modulo 7 este următoarea:

$\cdot$	$\hat{0}$	$\hat{1}$	$\hat{2}$	$\hat{3}$	$\hat{4}$	$\hat{5}$	$\hat{6}$
$\hat{0}$	$\hat{0}$	$\hat{0}$	$\hat{0}$	$\hat{0}$	$\hat{0}$	$\hat{0}$	$\hat{0}$
$\hat{1}$	$\hat{0}$	$\hat{1}$	$\hat{2}$	$\hat{3}$	$\hat{4}$	$\hat{5}$	$\hat{6}$
$\hat{2}$	$\hat{0}$	$\hat{2}$	$\hat{4}$	$\hat{6}$	$\hat{1}$	$\hat{3}$	$\hat{5}$
$\hat{3}$	$\hat{0}$	$\hat{3}$	$\hat{6}$	$\hat{2}$	$\hat{5}$	$\hat{1}$	$\hat{4}$
$\hat{4}$	$\hat{0}$	$\hat{4}$	$\hat{1}$	$\hat{5}$	$\hat{2}$	$\hat{6}$	$\hat{3}$
$\hat{5}$	$\hat{0}$	$\hat{5}$	$\hat{3}$	$\hat{1}$	$\hat{6}$	$\hat{4}$	$\hat{2}$
$\hat{6}$	$\hat{0}$	$\hat{6}$	$\hat{5}$	$\hat{4}$	$\hat{3}$	$\hat{2}$	$\hat{1}$

Pentru aflarea celui mai mare divizor comun în inelul $\mathbf{Z}_7[X]$ se utilizează algoritmul lui Euclid. Împărţim polinomul f la polinomul $\hat{5}g = X^2 + \hat{5}$ şi avem: $f = (X^2 + \hat{5})(X^2 + \hat{6}X) + (X + \hat{3})$. Acum împărţim polinomul $\hat{5}g = X^2 + \hat{5}$ la restul $X + \hat{3}$ şi obţinem: $X^2 + \hat{5} = (X + \hat{3})(X + \hat{4})$. Rezultă că cel mai mare divizor comun al polinoamelor f şi g este polinomul $X + \hat{3}$.

3°. Avem: $x_0 > 0$; presupunem $x_n > 0$ şi atunci rezultă că $x_{n+1} = \frac{x_n}{1 + nx_n^2} > 0$, deci $x_n > 0$, $(\forall) n \in \mathbf{N}$. Apoi, pentru orice $n \geqslant 1$, avem:

$$x_{n+1} - x_n = \frac{x_n}{1 + nx_n^2} - x_n = \frac{-nx_n^3}{1 + nx_n^2} < 0,$$

deci $x_{n+1} < x_n$, adică şirul $(x_n)_{n \geqslant 1}$ este monoton descrescător. Deoarece $0 < x_n \leqslant x_0$ pentru $n \geqslant 0$, rezultă că şirul (x_n) este şi mărginit, deci convergent. Fie $l = \lim\limits_{n \to \infty} x_n$. Scriind relaţia de recurenţă sub forma: $x_{n+1} = \dfrac{\frac{x_n}{n}}{+ x_n^2}$ şi trecînd la limită rezultă $l = 0$. Notăm $y_n = nx_n$, deci $y_0 = 0$, $y_1 = x_1 = x_0$ şi $y_2 = 2x_2 = \frac{2x_1}{1 + x_1^2} \leqslant 1$. Presupunem că $y_n \leqslant 1$ $(n \geqslant 2)$. Avem relaţia: $y_{n+1} = \frac{(n+1)y_n}{y_n^2 + n}$ $\left(\text{obţinută din relaţia } x_{n+1} = \frac{x_n}{1 + nx_n^2} \text{ prin înlocuirile } x_n = \frac{y_n}{n},\ x_{n+1} = \frac{y_{n+1}}{n+1}\right)$.

Rezultă atunci că:

$$y_{n+1} - 1 = \frac{(1 - y_n)(y_n - n)}{y_n^2 + n} \leqslant 0, \text{ deci } y_{n+1} \leqslant 1, \text{ adică } y_n \leqslant 1, \quad (\forall) n \geqslant 2.$$

Calculăm diferența:

$$y_{n+1} - y_n = \frac{(n+1)y_n}{y_n^2 + n} - y_n = \frac{y_n(1 - y_n^2)}{y_n^2 + n} \geqslant 0,$$

deci șirul $(y_n)_{n \geqslant 2}$ este și monoton crescător; atunci rezultă (y_n) convergent. Fie $l_1 = \lim_{n\to\infty} y_n$. Deoarece $y_n = nx_n = \frac{1}{x_{n+1}} - \frac{1}{x_n}$ și deoarece $y_n = \frac{n}{\frac{1}{x_n}}$, aplicînd Stolz-Cesàro, avem:

$$l_1 = \lim_{n\to\infty} y_n = \lim_{n\to\infty} \frac{(n+1) - n}{\frac{1}{x_{n+1}} - \frac{1}{x_n}} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{y_n} = \frac{1}{l_1}.$$

Deci $l_1^2 = 1$, de unde $l_1 = 1$ (evident $l_1 \geqslant 0$).

4°. Avem o nedeterminare de forma 1^∞. Prin urmare, putem scrie:

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{4}} (2 - \operatorname{tg} x \sqrt{\operatorname{ctg} x})^{\frac{1}{\sin x - \cos x}} =$$

$$= \lim_{x\to\frac{\pi}{4}} (1 + (1 - \operatorname{tg} x \sqrt{\operatorname{ctg} x}))^{\frac{1}{1 - \operatorname{tg} x\sqrt{\operatorname{ctg} x}} \cdot \frac{1 - \operatorname{tg} x \sqrt{\operatorname{ctg} x}}{\sin x - \cos x}} =$$

$$= e^{\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{4}} \frac{1 - \operatorname{tg} x\sqrt{\operatorname{ctg} x}}{\sin x - \cos x}} = e^{\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{4}} \frac{1 - \operatorname{tg}^2 x \operatorname{ctg} x}{(\sin x - \cos x)(1 + \operatorname{tg} x \sqrt{\operatorname{ctg} x})}} =$$

$$= e^{\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{4}} \frac{(\cos x - \sin x)}{\cos x(\sin x - \cos x)(1 + \operatorname{tg} x\sqrt{\operatorname{ctg} x})}} = e^{\frac{-\sqrt{2}}{2}}.$$

5°. a) Notăm: $u(x) = f(x) - g(x)$, $x \in [0, 1]$ și calculăm:

$$u'(x) = \operatorname{arctg} x - \frac{x}{1 + x^2}; \quad u''(x) = \frac{2x^2}{(1 + x^2)^2} \geqslant 0, \text{ pentru } x \in [0, 1].$$

Rezultă că u' este crescătoare pe intervalul $[0, 1]$ și, cum $u'(0) = 0$, $u'(x) \geqslant 0$, pentru $x \in [0, 1]$. Rezultă că u este crescătoare pe intervalul $[0, 1]$ și, cum $u(0) = 0$, rezultă $u(x) \geqslant 0$, pentru $x \in [0, 1]$. În concluzie, avem:

$$h(x) = f(x) = x \operatorname{arctg} x \text{ pentru } x \in [0, 1].$$

b) Deoarece $f(x) \geqslant g(x)$ pentru $x \in [0, 1]$, rezultă că aria cerută este: $S = \int_0^1 (f(x) - g(x))\mathrm{d}x$. Avem:

$\int f(x)\,\mathrm{d}x = \frac{x^2}{2} \operatorname{arctg} x - \frac{x}{2} + \frac{1}{2} \operatorname{arctg} x + \mathcal{C}$ (calculată prin integrare prin părți)

și $\int g(x)\,\mathrm{d}x = x \ln(1 + x^2) - 2x + 2 \operatorname{arctg} x + \mathcal{C}$ (calculată, de asemenea, prin integrare prin părți). Efectuînd calculele obținem: $S = \frac{3}{2} - \frac{\pi}{4} - \ln 2$.

XL. 1°. Completăm semicercul dat la un cerc și fie M', respectiv N', punctele în care dreptele AM, respectiv BN, taie din nou cercul (v. fig. M.B.56). Ducem $OP \perp MM'$ și $OQ \perp NN'$; OP și OQ sînt în prelungire deoarece $MM' \parallel NN'$. Avem: $\triangle AOP \equiv \triangle BOQ$ deoarece sînt dreptunghice, $[AO] \equiv [OB]$ și $\widehat{AOP} \equiv \widehat{BOQ}$ (opuse la vîrf). Rezultă $[OP] \equiv [OQ]$ și $[AP] \equiv [BQ]$. Atunci $[MM'] \equiv [NN']$ ca fiind coarde egal depărtate de centrul cercului. Rezultă $MP = NQ = PM'$; ținînd seama și de relația $AP = BQ$ obținem $BN = NQ - BQ = PM' - AP = AM'$. Puterea punctului A față de cerc este: $AM \cdot AM' = R^2 - OA^2$. Obținem: $AM \cdot BN = R^2 - OA^2 = \text{const.}$

2°. Deoarece triunghiul ABC este isoscel bisectoarea $[AD]$ este și mediatoare. Unim N cu C și M cu A (v. fig. M.B.57). Avem $[BN] \equiv [NC]$ (deoarece

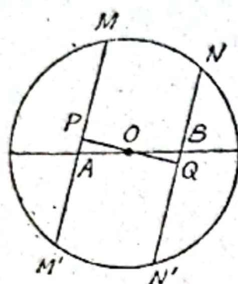


Fig. M.B.56

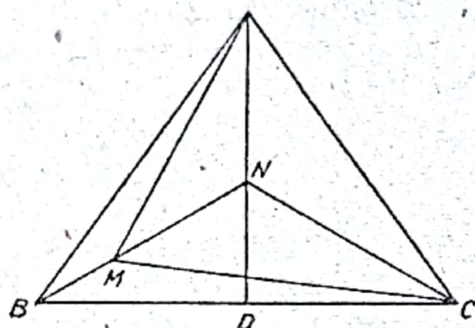


Fig. M.B.57

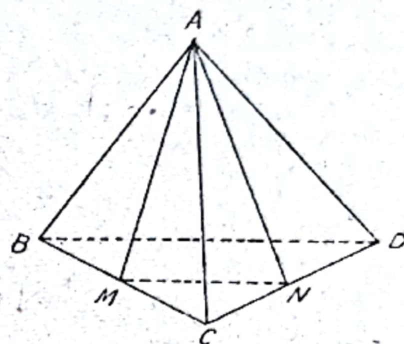


Fig. M.B.58

$N \in [AD]$ mediatoarea lui BC). Rezultă: $m(\widehat{NBC}) = m(\widehat{NCB}) = 30°$, de unde $m(\widehat{BNC}) = 120°$. Avem: $m(\widehat{ACB}) = 50°$, $m(\widehat{MCN}) = m(\widehat{BCN}) - m(\widehat{MCB}) = 30° - 10° = 20°$ și $m(\widehat{ACN}) = m(\widehat{ACB}) - m(\widehat{NCB}) = 50° - 30° = 20°$, deci $m(\widehat{MCN}) = m(\widehat{ACN}) = 20°$. Apoi $m(\widehat{NAC}) = 40°$, deci $m(\widehat{ANC}) = 180° - (40° + 20°) = 120° = m(\widehat{MNC})$. Deoarece triunghiurile MNC și ANC au și latura $[NC]$ comună, rezultă $\triangle MNC \equiv \triangle ANC$. Atunci $[AC] \equiv [MC]$, adică $\triangle ACM$ este isoscel. Deoarece $m(\widehat{ACM}) = 40°$, obținem $m(\widehat{AMC}) = 70°$.

3°. Înlocuind $\sin x \cos x = \frac{\sin 2x}{2}$ și $\cos^2 x = \frac{1 + \cos 2x}{2}$, ecuația dată devine: $\cos 2x + 3 \sin 2x + 3 = 0$. Deoarece $x = (2k+1)\frac{\pi}{2}$, $k \in \mathbf{Z}$, nu sînt soluții ale ecuației putem face substituția $\operatorname{tg} x = t$ $(x \neq (2k+1)\frac{\pi}{2}, k \in \mathbf{Z})$ și înlocuim $\cos 2x = \frac{1 - t^2}{1 + t^2}$, $\sin 2x = \frac{2t}{1 + t^2}$ în ecuația de mai sus. Obținem ecuația: $\frac{1 - t^2}{1 + t^2} + \frac{6t}{1 + t^2} + 3 = 0$ sau $t^2 + 3t + 2 = 0$, cu soluțiile $t_1 = -1$, $t_2 = -2$. Rezultă $\operatorname{tg} x = -1$ cu soluțiile $x = k\pi - \frac{\pi}{4}$, $k \in Z$ și $\operatorname{tg} x = -2$ cu soluțiile $x = l\pi - \operatorname{arctg} 2$, $l \in \mathbf{Z}$, toate acceptabile.

4°. Planul cerut va tăia planul BCD după o dreaptă MN paralelă cu BD (deoarece este paralel cu BD); v. fig. M.B.58. Dacă notăm cu h lungimea înălțimii din vîrful A, avem: $V_{AMCN} = \frac{1}{3}\sigma(MCN) \cdot h$ și $V_{ABCD} = \frac{1}{3}\sigma(BCD) \cdot h$.

Impunînd condiția din enunț $\frac{V_{AMCN}}{V_{ABCD}} = \frac{1}{2}$, obținem relația: $\frac{\sigma(MCN)}{\sigma(BCD)} = \frac{1}{2}$. Dar $\triangle MCN \sim \triangle BCD$, deci putem scrie: $\frac{\sigma(MCN)}{\sigma(BCD)} = \left(\frac{CM}{CB}\right)^2$. Rezultă $\left(\frac{CM}{CB}\right)^2 = \frac{1}{2}$, deci $CM = \frac{CB}{\sqrt{2}} = \frac{CB\sqrt{2}}{2}$. Cunoscînd lungimea segmentului $[CM]$, aflăm punctul M, apoi ducem paralela la BD prin M și fie N intersecția acesteia cu CD. Planul AMN este planul căutat.

5°. Din teorema sinusurilor în triunghiul ABC avem: $a = 2R \sin A$, $b = 2R \sin B$, $c = 2R \sin C$. Înlocuind în relația dată rezultă:

$$\sin B \cdot \frac{\sin B}{\cos B} = \frac{\sin^2 B}{\sin A \sin C},$$

sau $\sin^2 B(\cos B - \sin A \sin C) = 0$. Dar $\sin B \neq 0$ într-un triunghi, deci $\cos B = \sin A \sin C$. Avem $\cos B = \cos(\pi - (A + C)) = -\cos(A + C)$, de unde rezultă relația: $\cos(A + C) + \sin A \sin C = 0$ sau $\cos A \cdot \cos C = 0$. Atunci $\cos A = 0$ și $A = \frac{\pi}{2}$ sau $\cos C = 0$ și $C = \frac{\pi}{2}$, deci $\triangle ABC$ este dreptunghic în A sau în C.

XLI. 1°. Matricea A va fi inversabilă dacă $\det A \neq 0$, $(\forall)x \in \mathbb{R}$. Avem: $\det A = (1 - m)x^2 + 2x + 3 - 2m$. Condiția de mai sus exprimă faptul că trinomul obținut nu are rădăcini reale, deci $\Delta < 0$. Rezultă inegalitatea: $1 - (1 - m)(3 - 2m) < 0$, cu soluțiile $m \in \left(-\infty, \frac{1}{2}\right) \cup (2, \infty)$.

2°. Scriem relațiile lui Viète: $x_1 + x_2 + x_3 = 0$; $x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3 = -1$, $x_1x_2x_3 = a$, dar nu calculăm direct expresiile din inegalitatea dată de problemă, deoarece sînt calcule prea complicate. Procedăm astfel: notăm $S_k = x_1^k + x_2^k + x_3^k$, $(\forall)k \geqslant 1$. Avem:

$$S_1 = x_1 + x_2 + x_3 = 0 \text{ și } S_2 = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 =$$
$$= (x_1 + x_2 + x_3)^2 - 2(x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3) = 2.$$

Apoi scriem că x_1, x_2, x_3 sînt rădăcini ale ecuației date și avem relațiile: $x_1^3 = x_1 + a$, $x_2^3 = x_2 + a$, $x_3^3 = x_3 + a$. Înmulțim aceste relații respectiv cu x_1^{k-3}, x_2^{k-3}, x_3^{k-3} $(k \geqslant 3)$ și adunîndu-le, obținem: $S_k = S_{k-2} + a \cdot S_{k-3}$. Din această relație obținem recursiv sumele: $S_3 = S_1 + 3a = 3a$, $S_4 = S_2 + aS_1 = 2$, $S_5 = S_3 + a \cdot S_2 = 3a + 2a = 5a$, $S_6 = S_4 + a \cdot S_3 = 3a^2 + 2$. Se obține inecuația: $3a^2 + 2 \geqslant 5a$, cu soluțiile $a \in \left(-\infty, \frac{2}{3}\right] \cup [1, \infty)$.

3°. Pentru a calcula ușor derivatele de orice ordin ale funcției date descompunem fracția rațională în fracții simple:

$$\frac{1}{x^2 - 3x + 2} = \frac{A}{x - 2} + \frac{B}{x - 1}, \ (\forall)x \in \mathbb{R} \setminus \{1, 2\}.$$

Obținem: $1 = (A + B)x - A - 2B$, deci $A + B = 0$ și $-A - 2B = 1$. Rezultă: $A = 1$, $B = -1$, deci avem descompunerea: $f(x) = \frac{1}{x - 2} - \frac{1}{x - 1}$. Rezultă:

$$f'(x) = -\frac{1}{(x - 2)^2} + \frac{1}{(x - 1)^2} = (-1)\left[\frac{1}{(x - 2)^2} - \frac{1}{(x - 1)^2}\right];$$

$$f''(x) = (-1)^2 2!\left[\frac{1}{(x - 2)^3} - \frac{1}{(x - 1)^3}\right], \ (\forall)x \in \mathbb{R} \setminus \{1, 2\},$$

Presupunem că avem:

$$f^{(k)}(x) = (-1)^k k!\left[\frac{1}{(x-2)^{k+1}} - \frac{1}{(x-1)^{k+1}}\right], \ (\forall) x \in \mathbb{R}\setminus\{1, 2\}.$$

Derivînd încă o dată, obținem:

$$f^{(k+1)}(x) = (-1)^{k+1}(k+1)!\left[\frac{1}{(x-2)^{k+2}} - \frac{1}{(x-1)^{k+2}}\right], \ (\forall) x \in \mathbb{R}\setminus\{1, 2\},$$

ceea ce arată că formula de mai sus este corectă. Atunci:

$$\frac{1}{k!} f^{(k)}(n+3) = \left(-\frac{1}{n+2}\right)^{k+1} - \left(-\frac{1}{n+1}\right)^{k+1}.$$

Notăm: $u = -\frac{1}{n+2}$; $v = -\frac{1}{n+1}$, și șirul din enunț se scrie:

$$a_n = n^2\left(\sum_{k=0}^{n} u^{k+1} - \sum_{k=0}^{n} v^{k+1}\right) = n^2\left(u \cdot \frac{1-u^{n+1}}{1-u} - v \cdot \frac{1-v^{n+1}}{1-v}\right).$$

Înlocuind pe u și v cu expresiile lor, obținem:

$$a_n = n^2\left[-\frac{1}{n+2} \cdot \frac{1-\left(-\frac{1}{n+2}\right)^{n+1}}{1+\frac{1}{n+2}} + \frac{1}{n+1} \cdot \frac{1-\left(-\frac{1}{n+1}\right)^{n+1}}{1+\frac{1}{n+1}}\right] =$$

$$= n^2\left[\frac{1-\left(-\frac{1}{n+1}\right)^{n+1}}{n+2} - \frac{1-\left(-\frac{1}{n+2}\right)^{n+1}}{n+3}\right] =$$

$$= \frac{n^2}{(n+2)(n+3)}\left[1 + (-1)^{n+1}\frac{1}{(n+2)^n} + (-1)^n \cdot \frac{n+3}{n+4} \cdot \frac{1}{(n+1)^n}\right].$$

Atunci $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 1$.

4°. Avem: $m = \lim\limits_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim\limits_{x\to\infty} \frac{\sqrt[3]{ax^3+bx^2}}{x} = \lim\limits_{x\to\infty} \sqrt[3]{a + \frac{b}{x}} = \sqrt[3]{a}$. Rezultă $\sqrt[3]{a} = 2$, deci $a = 8$. Apoi:

$$n = \lim_{x\to\infty}[f(x) - mx] = \lim_{x\to\infty}\left(\sqrt[3]{8x^3+bx^2} - 2x\right) =$$

$$= \lim_{x\to\infty} \frac{(8x^3+bx^2) - 8x^3}{\sqrt[3]{(8x^3+bx^2)^2} + 2x\sqrt[3]{8x^3+bx^2} + 4x^2} =$$

$$= \lim_{x\to\infty} \frac{bx^2}{x^2\left[\sqrt[3]{\left(8+\frac{b}{x}\right)^2} + 2\sqrt[3]{8+\frac{b}{x}} + 4\right]} = \frac{b}{12}.$$

Rezultă $\frac{b}{12} = -\frac{1}{3}$, deci $b = -4$. Observăm că graficul funcției are aceeași asimptotă și la $-\infty$, deci a fost suficient de studiat cazul $x \to \infty$ (sau $x \to -\infty$).

5°. Explicitînd modulul putem scrie:

$$f(x) = \begin{cases} (1+x)e^{x-1} & \text{dacă } x \in (-\infty, 1), \\ (1+x)e^{1-x} & \text{dacă } x \in [1, \infty). \end{cases}$$

Deoarece $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to\infty} \frac{1+x}{e^{x-1}} = 0$ şi $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = 0$, rezultă că $y = 0$ este asimptotă orizontală la ambele ramuri. Calculăm:

$$f'(x) = \begin{cases} (x+2)e^{x-1} & \text{dacă } x \in (-\infty, 1), \\ -xe^{1-x} & \text{dacă } x \in (1, \infty). \end{cases}$$

Tabloul de variaţie este următorul:

x	$-\infty$		-2		-1		0		1		$+\infty$
$f'(x)$		$-$ $-$	0	$+$		$+$		$+$	$3 \mid -1$	$-$ $-$	$-$
$f(x)$	0	$\searrow$	$-1/e^3$	$\nearrow$	0	$\nearrow$	$1/e$	$\nearrow$	2	$\searrow$	0

Graficul este următorul:

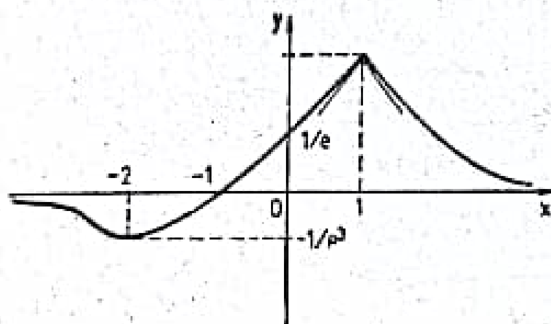


Fig. M.B.59

Aria cerută este:

$$A = \int_0^1 (1+x)e^{x-1}\,dx + \int_1^2 (1+x)e^{1-x}\,dx = 1 + \left(3 - \frac{4}{e}\right) = 4 - \frac{4}{e}.$$

XLII. 1°. Fie I punctul de intersecţie al laturilor neparalele ale trapezului, P şi Q intersecţia dreptei OI cu bazele. Ducem prin O paralela EF la bazele trapezului (v. fig. M.B.60). Avem egalităţile: $\frac{EO}{AB} = \frac{DE}{DA} = \frac{CF}{CB} = \frac{OF}{AB}$, deci $EO = OF$.

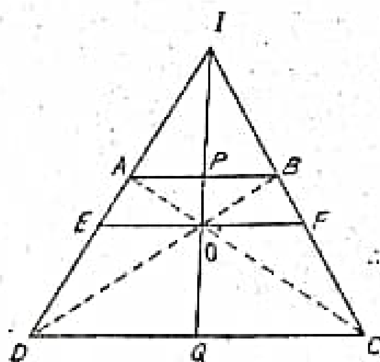


Fig. M.B.60

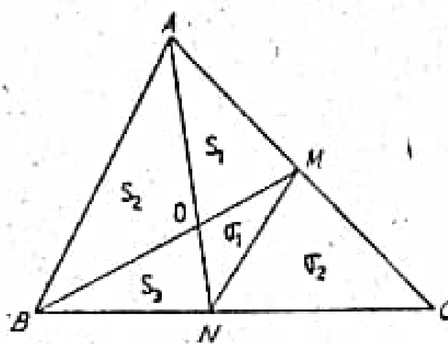


Fig. M.B.61

Avem, de asemenea, egalităţile: $\frac{AP}{EO} = \frac{IP}{IO} = \frac{PB}{OF}$, de unde rezultă: $AP = PB$ (deoarece $EO = OF$), adică P este mijlocul lui $[AB]$. Apoi avem: $\frac{EO}{DQ} = \frac{IO}{IQ} = \frac{OF}{QC}$, deci $DQ = QC$, adică Q este mijlocul lui $[CD]$.

2°. Notăm $\sigma_1 =$ aria OMN şi $\sigma_2 =$ aria CMN (v. fig. M.B.61). Deoarece triunghiurile AOB şi BON au aceeaşi înălţime din B, iar triunghiurile AOM

și OMN au aceeași înălțime din M, obținem egalitățile: $\frac{S_2}{S_3} = \frac{AO}{ON} = \frac{S_1}{\sigma_1}$, deci $\sigma_1 = \frac{S_1 \cdot S_3}{S_2}$. Deoarece triunghiurile ABN și ANC au aceeași înălțime din A, iar triunghiurile MBN și MNC au aceeași înălțime din M, obținem egalitățile: $\frac{S_2 + S_3}{S_1 + \sigma_1 + \sigma_2} = \frac{BN}{NC} = \frac{S_3 + \sigma_1}{\sigma_2}$. Rezultă $\frac{S_2 - \sigma_1}{S_1 + \sigma_1} = \frac{S_3 + \sigma_1}{\sigma_2}$, de unde obținem la final:

$$\sigma_2 = \frac{S_1S_3(S_1 + S_2)(S_2 + S_3)}{S_2(S_2^2 - S_1S_3)}.$$

3°. Ecuația se scrie echivalent:

$$\cos^2 x + 4 \sin x \cos x - 2 \sin^2 x = 2(\cos^2 x + \sin^2 x) \text{ sau}$$

$$4 \sin^2 x - 4 \sin x \cos x + \cos^2 x = 0,$$

de unde rezultă: $(2 \sin x - \cos x)^2 = 0$. Obținem: $2 \sin x - \cos x = 0$, deci $\operatorname{tg} x = \frac{1}{2}$ ($\cos x \neq 0$, căci altfel obținem și $\sin x = 0$, contradicție). Rezultă soluțiile: $x = k\pi + \operatorname{arctg} \frac{1}{2}$, $k \in \mathbf{Z}$.

4°. Fie M, N, P, Q intersecțiile planului de secțiune π cu muchiile $[AC]$, $[AD]$, $[BD]$, $[BC]$ și fie E mijlocul muchiei $[CD]$. Deoarece $AB \parallel \pi$, rezultă $AB \parallel MQ$ și $AB \parallel NP$, deci $MQ \parallel NP$ (v. fig. M.B.62). Deoarece $CD \parallel \pi$, rezultă $CD \parallel MN$ și $CD \parallel QP$, deci $MN \parallel QP$. Rezultă că patrulaterul $MNPQ$ este un paralelogram.

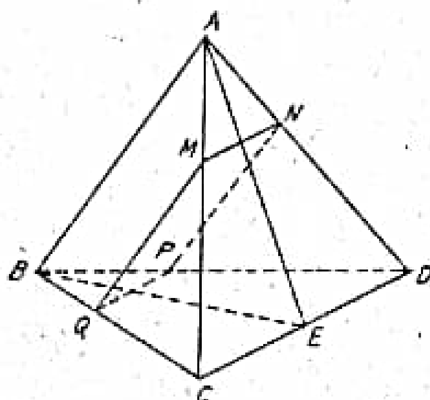


Fig. M.B.62

Avem: $CD \perp AE$ și $CD \perp BE$ (tetraedrul $ABCD$ este regulat), deci $CD \perp$ planul ABE, de unde rezultă că $CD \perp AB$. Atunci patrulaterul $MNPQ$ este un dreptunghi. Fie $PQ = x$. Deoarece $\triangle BPQ$ este echilateral rezultă $BQ = x$ și $CQ = a - x$, deci $MQ = a - x$ ($\triangle CMQ$ este echilateral). Atunci $\sigma(MNPQ) = x(a - x)$. Maximul ariei este atins pentru $x = \frac{a}{2}$ și aria maximă este $\frac{a^2}{4}$.

5°. Fie V volumul tetraedrului și S aria unei fețe. Dacă h este înălțimea tetraedrului și d_1, d_2, d_3, d_4 sînt distanțele la fețe, atunci avem:

$$V = \frac{S \cdot d_1}{3} + \frac{S \cdot d_2}{3} + \frac{S \cdot d_3}{3} + \frac{S \cdot d_4}{3} = \frac{S \cdot h}{3}.$$

Rezultă: $d_1 + d_2 + d_3 + d_4 = h = \text{const.}$

XLIII. 1°. Pentru $m \neq 0$ discriminantul ecuației $f(x) = 0$ este: $\Delta = -4m^2 + 4m + 1$. Rădăcinile discriminantului sînt $m_{1,2} = \frac{1 \mp \sqrt{2}}{2}$. Suma S și produsul P al rădăcinilor ecuației $f(x) = 0$ sînt $S = -\frac{2m+1}{m}$, respectiv $P = \frac{2m-1}{m}$ $(m \neq 0)$. Natura și semnul rădăcinilor rezultă din următorul tabel:

m	Semnul lui Δ	Semnul lui P	Semnul lui S	Natura rădăcinilor
$m \in \left(-\infty, \frac{1-\sqrt{2}}{2}\right)$	$-$	$+$	$+$	Nu avem rădăcini reale
$m = \frac{1-\sqrt{2}}{2}$	0	$+$	$+$	$x_1 = x_2 > 0$
$m \in \left(\frac{1-\sqrt{2}}{2}, 0\right)$	$+$	$+$	$+$	$x_1 \neq x_2$, $x_1 > 0$, $x_2 > 0$
$m = 0$	Ecuația se reduce la o ecuație de gradul I cu rădăcina $x = 1$			
$m \in \left(0, \frac{1}{2}\right)$	$+$	$-$	$-$	$x_1, x_2 \in \mathbf{R}$, $x_1 < 0$, $x_2 > 0$ $\lvert x_1 \rvert > x_2$
$m = \frac{1}{2}$	$+$	0	$-$	$x_1 = 0$, $x_2 < 0$
$m \in \left(\frac{1}{2}, \frac{1+\sqrt{2}}{2}\right)$	$+$	$+$	$-$	$x_1, x_2 \in \mathbf{R}$, $x_1 < 0$, $x_2 < 0$
$m = \frac{1+\sqrt{2}}{2}$	0	$+$	$-$	$x_1 = x_2 < 0$
$m \in \left(\frac{1+\sqrt{2}}{2}, +\infty\right)$	$-$	$+$	$-$	Nu avem rădăcini reale

2°. Funcția $g : \mathbf{N} \to \mathbf{N}$ satisface condiția $g(3n + 1) = n$. Ecuația $3n + 1 = x$ ne conduce la considerarea funcției $g : \mathbf{N} \to \mathbf{N}$, $g(n) = \left[\frac{n-1}{3}\right]$ pentru $n \geqslant 1$ și $g(0) = 0$. Astfel avem $(g \circ f)(n) = g(3n + 1) = \left[\frac{3n+1-1}{3}\right] = n$, deci funcția g satisface proprietatea cerută. Să arătăm acum că orice funcție $g : \mathbf{N} \to \mathbf{N}$ cu proprietatea $g \circ f = 1_{\mathbf{N}}$ satisface și proprietatea $f \circ g \neq 1_{\mathbf{N}}$. Procedăm prin reducere la absurd. Dacă $f \circ g = 1_{\mathbf{N}}$ și din faptul că $g \circ f = 1_{\mathbf{N}}$ rezultă că funcția f este inversabilă, deci bijectivă, ceea ce este absurd, deoarece f nu este surjectivă (numerele de forma $3n$ și $3n + 2$ nu sînt în imaginea funcției f).

3°. Să considerăm determinantul:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & a+b \\ a^2 & b^2 & a^2+b^2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ a & b-a & b \\ a^2 & b^2-a^2 & b^2 \end{vmatrix} = ab(a-b).$$

Avem mai multe cazuri. *Cazul 1.* $a \neq b$, $ab \neq 0$, avem un sistem compatibil determinat ale cărui soluţii sînt date de regula Cramer:

$$x = \frac{\Delta x}{\Delta} = \frac{a(b-c)(a-b-c)}{ab(a-b)} = \frac{(b-c)(a-b-c)}{b(a-b)};$$

$$y = \frac{\Delta y}{\Delta} = \frac{b(c-a)(b-c-a)}{ab(a-b)} = \frac{(b-c)(a-b-c)}{b(a-b)};$$

$$z = \frac{\Delta z}{\Delta} = \frac{(b-a)(c-a)(c-b)}{ab(a-b)} = \frac{(b-c)(c-a)}{ab}.$$

Cazul 2. $a = b \neq 0$. Matricea coeficienţilor necunoscutelor este:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & a & 2a \\ a^2 & a^2 & 2a^2 \end{pmatrix}.$$

Avem minorul $\begin{vmatrix} 1 & a \\ a & 2a \end{vmatrix} = a \neq 0$ şi rang $A = 2$. Minorul caracteristic este:

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & 2a & c \\ a^2 & 2a^2 & c^2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ a & a & c-a \\ a^2 & a^2 & c^2-a^2 \end{vmatrix} = a(c-a)\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ a & c+a \end{vmatrix} = ac(c-a).$$

Dacă $c \neq 0$ şi $c \neq a$ sistemul este incompatibil. Pentru $c = 0$ sistemul devine:

$$\begin{cases} x + y + z = 1; \\ ax + ay + 2az = 0; \\ a^2x + a^2y + 2a^2z = 0; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x + y + z = 1; \\ x + y + 2z = 0; \\ x + y + 2z = 0; \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = \alpha; \\ y = 2 - \alpha; \quad \alpha \in \mathbf{R}. \\ z = -1; \end{cases}$$

Pentru $c = a$ sistemul devine:

$$\begin{cases} x + y + z = 1; \\ ax + ay + 2az = a; \\ a^2x + a^2y + 2a^2z = a^2; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x + y + z = 1; \\ x + y + 2z = 1; \\ x + y + 2z = 1; \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = \alpha; \\ y = 1 - \alpha; \quad \alpha \in \mathbf{R}. \\ z = 0 \end{cases}$$

Cazul 3. $a = b = 0$ avem rang $A = 1$. Pentru $c \neq 0$ sistemul este imposibil. Dacă $c = 0$ sistemul este compatibil, dublu nedeterminat şi avem $x = 1 - \alpha - \beta$, $y = \alpha$, $z = \beta$, unde $\alpha, \beta \in \mathbf{R}$.

Cazul 4. $a = 0$, $b \neq 0$. Rangul matricii coeficienţilor necunoscutelor este rang $A = 2$, deoarece avem minorul $\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & b \end{vmatrix} = b \neq 0$. Minorul caracteristic este:

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & b & c \\ 0 & b^2 & c^2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} b & c \\ b^2 & c^2 \end{vmatrix} = bc(c-b).$$

Dacă $c \neq 0$ şi $c \neq b$ sistemul este incompatibil. Pentru $c = 0$ sistemul este compatibil şi simplu nedeterminat avînd soluţia $x = \frac{b-c}{b}$, $y = \frac{c}{b} - \alpha$, $z = \alpha$, unde $\alpha \in \mathbf{R}$. Pentru $c = b$ rezultă de asemenea un sistem compatibil şi simplu nedeterminat.

Cazul 5. $a \neq 0$, $b = 0$. Discuţia este analoagă cazului 3.

4°. Trebuie să determinăm a și b astfel încît legea de compoziție să fie asociativă și să admită element neutru. Prin calcul obținem:

$$(x * y) * z = (xy - az + by) * z = xyz - axy - axz + byz + a^2x - aby + bz$$

și în mod analog:

$$x * (y * z) = xyz - axy + bxy + byz - ax - aby + b^2z.$$

Legea de compoziție este asociativă dacă avem:

$$-(a + b)xz + a(a + 1)x + b(1 - b)z = 0$$

pentru orice $x, y, z \in \mathbb{R}$. Pentru $x = 0$ și z oarecare obținem condiția necesară $b(1 - b) = 0$. Pentru $x = 1$ și $z = 0$ obținem condiția necesară $a(a + 1) = 0$. În sfîrșit, avem și condiția necesară $a + b = 0$. Cele trei condiții obținute sînt și condiții suficiente, după cum se vede imediat. Sistemul:

$$\begin{cases} a + b = 0; \\ a(a + 1) = 0; \\ b(1 - b) = 0; \end{cases}$$

are soluțiile $(0, 0)$ și $(-1, 1)$. În cazul $a = 0$ și $b = 0$ legea este $x * y = xy$ cu elementul neutru $e = 1$. Orice număr real nenul este inversabil. Dacă $a = -1$ și $b = 1$, legea de compoziție este $x * y = xy + x + y$. Elementul neutru satisface ecuația $xe + x + e = x$, deci $e = 0$. În acest caz orice element din mulțimea $\mathbb{R} \setminus \{-1\}$ este inversabil.

5°. *Metoda I.* Avem descompunerea: $S_n = (1 + C_n^1 + C_n^2 + \ldots + C_n^n) + (C_n^1 + 2C_n^2 + \ldots + nC_n^n)$, care se mai scrie: $S_n = (1 + 1)^n + S'_n = 2^n + S'_n$, unde $S'_n = C_n^1 + 2C_n^2 + \ldots + nC_n^n$. Dacă ținem seama de formula $C_n^k = C_n^{n-k}$ putem scrie: $S'_n = nC_n^0 + (n - 1)C_n^1 + (n - 2)C_n^2 + \ldots + C_n^1$. Rezultă: $2S'_n = n(C_n^0 + C_n^1 + \ldots + C_n^n)$ sau $2S'_n = n \cdot 2^n$, deci $S'_n = n \cdot 2^{n-1}$ așa încît: $S_n = 2^n + n \cdot 2^{n-1} = (n + 2)2^{n-1}$.

Metoda II. Considerăm identitatea:

$$x(1 + x)^n = x(1 + C_n^1x + C_n^2x^2 + \ldots + C_n^nx^n), \quad (\forall)x \in \mathbb{R}.$$

Prin derivare obținem:

$$(1 + x)^n + nx(1 + x)^{n-1} = 1 + 2C_n^1x + 3C_n^2x^2 + \ldots + (n + 1)C_n^nx^n.$$

Înlocuind $x = 1$ rezultă:

$$2^n + n \cdot 2^{n-1} = 1 + 2C_n^1 + \ldots + (n + 1)C_n^n = S_n,$$

deci $S_n = (n + 2)2^{n-1}$.

XLIV. 1°. Folosind inegalitățile de la punctul 2° avem:

$$0 < \ln \ln 3 - \ln \ln 2 < \frac{1}{2 \ln 2};$$

$$0 < \ln \ln 4 - \ln \ln 3 < \frac{1}{n \ln 3};$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$0 < \ln \ln(n + 1) - \ln \ln n < \frac{1}{n \ln n}.$$

Prin adunare obţinem:

$$a_n = \frac{1}{2\ln 2} + \frac{1}{3\ln 3} + \dots + \frac{1}{n\ln n} > \ln\ln(n+1) - \ln\ln 2.$$

Prin urmare avem:

$$\lim_{n\to\infty} a_n \geqslant \lim_{n\to\infty}(\ln\ln(n+1) - \ln\ln 2) = +\infty,$$

deci $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = +\infty$.

2°. Pentru orice număr întreg $k \geqslant 2$ putem considera funcţia $f: [k, k+1] \to \mathbf{R}$, $f(x) = \ln\ln x$ (teorema lui Lagrange), deci există $c \in [k, k+1]$ astfel încît $f(k+1) - f(k) = f'(c)$. Astfel obţinem: $\ln\ln(k+1) - \ln\ln k = \frac{1}{c\ln c}$. Pe de altă parte avem: $k\ln k < c\ln c < (k+1)\ln(k+1)$, care ne conduce la inegalităţile:

$$0 < \frac{1}{(k+1)\ln(k+1)} < \ln\ln(k+1) - \ln\ln k < \frac{1}{k\ln k}.$$

3°. Se observă că sîntem în cazul de nedeterminare 1^∞. Putem scrie:

$$a_n = \lim_{x\to 0}(1 + \mathrm{tg}^2 x + \mathrm{tg}^2 2x + \dots + \mathrm{tg}^2 nx)^{\frac{1}{n^3x^2}} =$$

$$= \lim_{x\to 0}\left[(1 + \mathrm{tg}^2 x + \mathrm{tg}^2 2x + \dots + \mathrm{tg}^2 nx)^{\frac{1}{\mathrm{tg}^2 x + \dots + \mathrm{tg}^2 nx}}\right]^{\frac{\mathrm{tg}^2 x + \dots + \mathrm{tg}^2 nx}{n^3x^2}} =$$

$$= \lim_{x\to 0} \mathrm{e}^{\frac{\mathrm{tg}^2 x + \dots + \mathrm{tg}^2 nx}{n^3x^2}}.$$

Pe de altă parte avem:

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{\mathrm{tg}^2 x}{x^2} + 2^2\frac{\mathrm{tg}^2 2x}{2^2x^2} + \dots + n^2\frac{\mathrm{tg}^2 nx}{n^2x^2}\right) = (1 + 2^2 + \dots + n^2) = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}.$$

Rezultă:

$$a_n = \mathrm{e}^{\frac{n(n+1)(2n+1)}{6n^3}};\ \lim_{n\to\infty} a_n = \mathrm{e}^{\frac{1}{3}} = \sqrt[3]{\mathrm{e}}.$$

4°. Funcţia nu este pară şi nici impară. Intersecţia cu axele ne dă punctele $(0, 0)$, $(1, 0)$. Avem imediat: $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$; $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = +\infty$. Funcţia f se mai poate scrie astfel:

$$f(x) = \begin{cases} (x-1)\arcsin\frac{-x}{\sqrt{x^2+1}} & \text{pentru } x < 0, \\ 0 & \text{pentru } x = 0, \\ (x-1)\arcsin\frac{x}{\sqrt{x^2+1}} & \text{pentru } x > 0. \end{cases}$$

Se vede imediat că f este continuă pe $\mathbf{R}$:

$$f(0) = f(1); \quad \lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty; \quad \lim_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$$

$$f'(x) = \begin{cases} -\left[\arcsin \dfrac{x}{\sqrt{x^2+1}} + (x-1)\dfrac{1}{x^2+1}\right] & \text{pentru } x < 0, \\ \arcsin \dfrac{x}{\sqrt{x^2+1}} + \dfrac{x-1}{x^2+1} & \text{pentru } x > 0. \end{cases}$$

$$f_s'(0) = \lim_{\substack{x \to 0 \\ x < 0}} f'(x) = 1; \; f_d'(0) = \lim_{\substack{x \to 0 \\ x > 0}} f'(x) = -1,$$

deci f nu este derivabilă în $x = 0$. Derivînd funcția $f'(x)$ pentru $x \in \mathbf{R} \setminus \{0\}$, obținem:

$$f''(x) = \begin{cases} -\dfrac{2(x+1)}{(x^2+1)^2} & \text{pentru } x < 0, \\ \dfrac{2(x+1)}{(x^2+1)^2} & \text{pentru } x > 0. \end{cases}$$

Evident că $f'(x) > 0$ pentru $x \in (-\infty, 0) \cup [1, +\infty)$. Avînd $f(0) = f(1)$, $f''(x) > 0$ pentru $x \in (0, 1]$ și aplicînd teorema lui Rolle se obține că există un punct unic $x_0 \in (0, 1)$ pentru care $f'(x_0) = 0$. Graficul nu are asimptote verticale sau orizontale. Căutăm asimptote oblice de tipul $y = mx + n$.

$$m = \lim_{x \to \infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \to \infty} \frac{x-1}{x} \arcsin \frac{x}{\sqrt{x^2+1}} = \frac{\pi}{2}.$$

$$n = \lim_{x \to \infty} \left[f(x) - \frac{\pi}{2} x\right] = \lim_{x \to \infty} \left[-\arcsin \frac{x}{\sqrt{x^2+1}} + x\left(\arcsin \frac{x}{\sqrt{x^2+1}} - \frac{\pi}{2}\right)\right] =$$

$$= -\frac{\pi}{2} + \lim_{x \to \infty} \frac{\arcsin \dfrac{x}{\sqrt{x^2+1}} - \dfrac{\pi}{2}}{\dfrac{1}{x}}.$$

Aplicînd regula lui L'Hôpital obținem:

$$n = -\frac{\pi}{2} + \lim_{x \to \infty} \frac{\dfrac{1}{x^2+1}}{-\dfrac{1}{x^2}} = -\frac{\pi}{2} - 1.$$

Deci asimptota oblică la $+\infty$ este dreapta de ecuație (d_1): $y = \frac{\pi}{2} x - 1 - \frac{\pi}{2}$.

Prin calcule similare se obține asimptota oblică la $-\infty$ de ecuație (d_2): $y = \frac{\pi}{2} x + 1 - \frac{\pi}{2}$.

Tabloul de variaţie al funcţiei este următorul:

x	$-\infty$		-1		0		x_0		1		$+\infty$
$f'(x)$	$+$	$+$	$\frac{\pi}{4}$	$+$	$1 \mid -1$	$-$	0	$+$	$\frac{\pi}{4}$	$+$	$+$
$f''(x)$	$+$	$+$	0	$-$	$- \mid$	$+$	$+$	$+$	$+$	$+$	$+$
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	$-\frac{\pi}{2}$	$\nearrow$	0	$\searrow$	$f(x_0)$	$\nearrow$	0	$\nearrow$	$+\infty$

Graficul funcţiei este prezentat în fig. M.B.63.

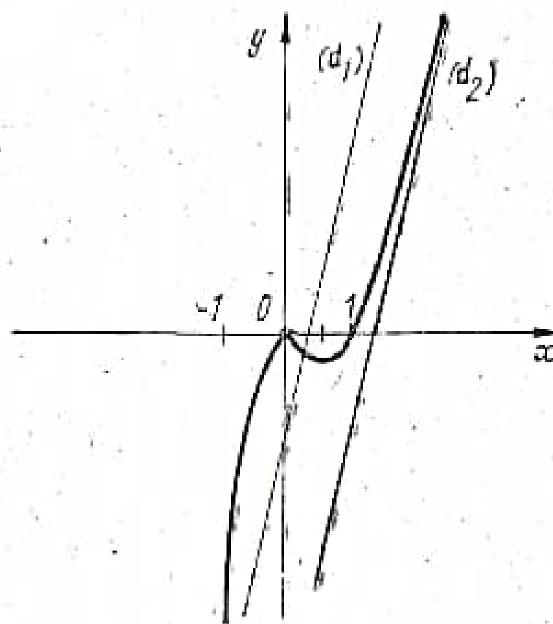


Fig. M.B.63

5°. Considerăm $\varphi: \left[\frac{a-b}{2}, \frac{b-a}{2}\right] \to [a, b]$, $\varphi(t) = \frac{a+b}{2} - t$, $\varphi'(t) = -1$.

$$I_n = \int_{\frac{b-a}{2}}^{\frac{a-b}{2}} \left(\frac{b-a}{2} - t\right)^n \left(\frac{b-a}{2} + t\right)^n (-1)\, dt.$$

Cu notaţia $c = \frac{b-a}{2}$ avem:

$$I_n = \int_{-c}^{c} (c^2 - t^2)^n\, dt = 2\int_0^c (c^2 - t^2)^n\, dt.$$

Integrăm prin părţi pentru a stabili o relaţie de recurenţă între termenii şirului $(I_n)_{n \geq 1}$. Fie: $u(t) = (c^2 - t^2)^n$, $v'(t) = 1$ şi $u'(t) = -2nt(c^2 - t^2)^{n-1}$, $v(t) = t$. Atunci:

$$I_n = 2t(c^2 - t^2)^n \Big|_0^c + 4n\int_0^c t^2(c^2 - t^2)^{n-1}\, dt = -4n\int_0^c (c^2 - t^2 - c^2)(c^2 - t^2)^{n-1}\, dt =$$

$$= -4n\int_0^c (c^2 - t^2)^n\, dt + 4nc^2\int_0^c (c^2 - t^2)^{n-1}\, dt; \quad I_n = -2nI_n + 2nc^2 I_{n-1},$$

$I_n = \frac{2n}{2n+1} c^2 I_{n-1}$ sau $I_n = \frac{2n}{2n+1}\left(\frac{b-a}{2}\right)^2 I_{n-1}$ pentru $n \geq 2$. Independent de

această relație avem: $I_1 = \int_a^b (x-a)(b-x)\,dx = \frac{(b-a)^3}{6}$, așa încît pentru $n \geq 2$ rezultă:

$$I_n = \frac{2n}{2n+1}\left(\frac{b-a}{2}\right)^2 I_{n-1} = \frac{2n}{2n+1}\left(\frac{b-a}{2}\right)^2 \cdot \frac{2(n-1)}{2n-1}\left(\frac{b-a}{2}\right)^2 I_{n-2} = \ldots =$$

$$= \frac{2n}{2n+1}\left(\frac{b-a}{2}\right)^2 \frac{2(n-1)}{2n-1}\left(\frac{b-a}{2}\right)^2 \ldots \frac{2\cdot 2}{2\cdot 2+1}\left(\frac{b-a}{2}\right)^2 \cdot I_1 =$$

$$= \frac{2^{n-1}\cdot(2\cdot 3\ldots n)}{5\cdot 7\ldots(2n+1)}\cdot\left(\frac{b-a}{2}\right)^{2n-2}\frac{(b-a)^3}{6} = \frac{(b-a)^{2n+1}\cdot n!}{2^n\cdot 3\cdot 5\ldots(2n+1)}.$$

Deci $I_n = (b-a)^{2n+1}\cdot\frac{(n!)^2}{(2n+1)!}$.

Avem de calculat $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{I_n}$. Notăm $x_n = \frac{(n!)^2}{(2n+1)!}$ și avem:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{x_{n+1}}{x_n} = \lim_{n\to\infty}\frac{[(n+1)!]^2}{(2n+3)!}\cdot\frac{(2n+1)!}{(n!)^2} = \lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)^2}{(2n+2)(2n+3)} = \frac{1}{4}.$$

Deci $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{x_n} = \frac{1}{4}$. Putem scrie:

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{I_n} = \lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{(b-a)^{2n+1}x_n} = \lim_{n\to\infty}\left[(b-a)^{2+\frac{1}{n}}\cdot\sqrt[n]{x_n}\right] = \frac{(b-a)^2}{4}.$$

XLV. 1°. a) Să observăm că $EA \perp AB$ și $AD = BD$. Atunci $m(\widehat{BAD}) = m(\widehat{ABD}) = 90° - m(\widehat{AEB})$. Mai avem $m(\widehat{DAE}) = 90° - m(\widehat{BAD})$, așa încît rezultă $m(\widehat{DAE}) = m(\widehat{AED})$. Deci $\triangle AED$ este isoscel cu $AD = DE$. Prin urmare $AD = BD = DE$ și astfel D este mijlocul lui $[EB]$ (v. fig. M.B.64).

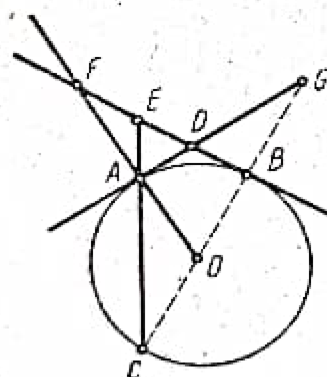


Fig. M.B.64

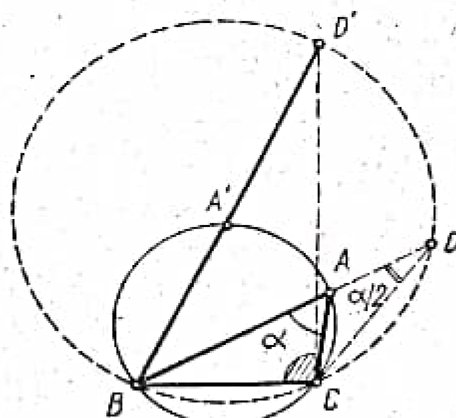


Fig. M.B.65

b) Triunghiurile dreptunghice AOG și BOF sînt congruente avînd $[AO] \equiv [BO]$ și un unghi comun. Rezultă $[OF] \equiv [OG]$ așa încît triunghiurile AOB și FOG sînt isoscele și au un unghi comun. Deducem că sînt triunghiuri asemenea, ceea ce implică $AB \parallel FG$. Deoarece $AC \perp AB$ rezultă și $AC \perp FG$. În triunghiul CFG avem $EC \perp FG$ și $FB \perp CG$, deci E este ortocentru. Rezultă $EG \perp FC$.

2°. *Metoda 1.* Din ipoteză rezultă că A descrie un arc capabil de unghiul dat $\alpha = m(\hat{A})$ în fiecare din semiplanele determinate de dreapta BC. În figura M.B.65

am desenat arcul descris de A în unul din cele două semiplane. Fie A o poziție a vîrfului variabil și D pe dreapta AB astfel încît $AC = AD$ și $A \in [BD]$. Rezultă că $m(\widehat{BDC}) = \frac{\alpha}{2}$, deci punctul D descrie un arc capabil de unghiul $\frac{\alpha}{2}$ construit pe BC. Perimetrul triunghiului ABC este maxim cînd $BD = AB + AC$ are valoarea maximă, deci cînd BD devine diametru. Fie D' punctul diametral opus lui B în al doilea cerc și A' intersecția primului cerc cu BD'. Avem $BC \perp CD'$ și $A'C = A'D'$. Rezultă imediat că A' este mijlocul lui $[BD']$. Prin urmare avem $BA' = A'C$ care ne spune că perimetrul este maxim cînd triunghiul dat este isoscel. Triunghiul care se poate obține analog în semiplanul opus este congruent cu $BA'C$.

Metoda II. Din teorema sinusurilor în triunghiul ABC avem: $L = BC + AC + AB = 2R(\sin\alpha + \sin B + \sin C)$, în care R este raza cercului pe care variază A. Deci L are valoarea maximă cînd $\sin B + \sin C$ are valoarea maximă sau $2\sin\frac{B+C}{2}\cos\frac{B-C}{2}$ are valoarea maximă. Deoarece $B + C = \pi - \alpha$ rezultă că $\sin\frac{B+C}{2} = \cos\frac{\alpha}{2}$ este o constantă. Prin urmare L este maxim cînd $\cos\frac{B-C}{2}$ are valoarea maximă, ceea ce se realizează pentru $B \equiv C$, deci în cazul triunghiului isoscel înscris în cercul determinat mai sus.

3°. a) Fie M mijlocul înălțimii $[SO]$ și P, respectiv, Q proiecțiile lui M pe (SAB) și SA (v. fig. M.B.66). Triunghiul MPQ este dreptunghic în P, deoarece

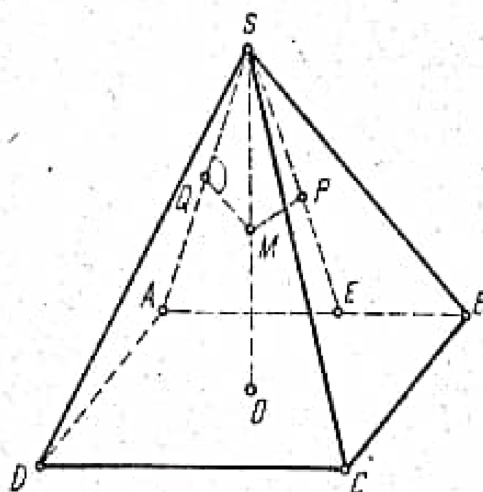


Fig. M.B.66

MP este perpendiculară pe planul SAB, așa încît $MP < MQ$, deci $p < q$. Fie E intersecția lui SP cu AB. Avem $\triangle SMP \sim \triangle SEO$, de unde:

(1) $\frac{MP}{OE} = \frac{SM}{SE}$. Din triunghiul dreptunghic SOE rezultă:

$$SE = \sqrt{h^2 + \frac{a^2}{4}} = \frac{1}{2}\sqrt{4h^2 + a^2}.$$

Avînd în vedere că $SM = \frac{h}{2}$ și $EO = \frac{a}{2}$ din (1) rezultă: (2) $p = MP = \frac{ah}{2\sqrt{4h^2 + a^2}}$.

Din asemănarea triunghiurilor SMQ și SOA deducem: (3) $q = MQ = \frac{ah}{2\sqrt{2h^2 + a^2}}$;

comparînd (2) și (3) rezultă $q > p\sqrt{2}$.

b) Pentru calculul volumului în funcție de p și q este necesar să determinăm din sistemul format de ecuațiile (2) și (3) pe a și h în funcție de p și q. Prin împărțire avem:

$$\frac{q}{p}=\frac{\sqrt{4h^2+a^2}}{\sqrt{2h^2+a^2}} \quad \text{sau} \quad \frac{q^2}{p^2}=\frac{4h^2+a^2}{2h^2+a^2},$$

de unde: (4) $\frac{p^2}{q^2-p^2}=1+\frac{a^2}{2h^2}$. Rezultă $2h^2=\frac{a^2(q^2-p^2)}{2p^2-q^2}$ și prin înlocuire în (3), obținem $q=\frac{h\sqrt{2p^2-q^2}}{2p}$, de unde (5) $h=\frac{2pq}{\sqrt{2p^2-q^2}}$. Ținînd seama de (4) rezultă (6) $a^2=\frac{8p^2q^2}{q^2-p^2}$. Volumul piramidei este $V=\frac{1}{3}a^2h$. Înlocuind h și a^2 din (5) și (6) obținem: $V=\frac{16p^3q^3}{3(q^2-p^2)\sqrt{2p^2-q^2}}$.

4°. Presupunem că C nu este mijlocul lui $[AB]$ și notăm cu E, respectiv, F punctele de tangență ale cercului inscris cu AM și BM. Avem: $ME=MF$, $EA=AC$ și $BC=BF$, așa incit obținem (v. fig. M.B.67):

$$|MA-MB|=|AC-BC|=\text{const.}$$

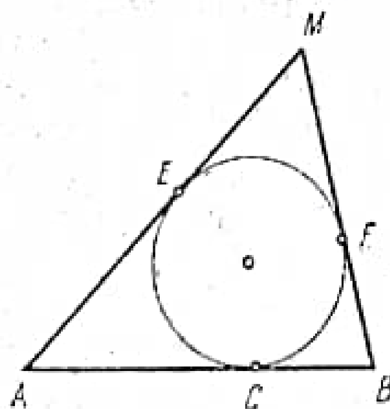


Fig. M.B.67

Rezultă că locul lui M este o hiperbolă cu focarele în punctele A și B. În cazul particular cînd C este mijlocul segmentului $[AB]$, M descrie mediatoarea lui $[AB]$ din care se scoate punctul C.

5°. Avem: $\arcsin:[-1, 1]\to\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$;

$\arccos:[-1, 1]\to[0, \pi]$.

Putem avea soluții numai dacă $0\leqslant ax\leqslant 1$ și $0\leqslant bx\leqslant 1$. Se observă că pentru $ab<0$ nu avem soluții. Analizăm situația $ab\geqslant 0$. Pentru $a=0$ ecuația $\arccos bx=0$ ne dă $bx=1$. Dacă $b=0$ nu avem soluții, iar pentru $b\neq 0$ avem soluția $x=\frac{1}{b}$. Pentru $b=0$ ecuația devine $\arcsin ax=\frac{\pi}{2}$, de unde $ax=1$ cu soluție numai dacă $a\neq 0$ și deci $x=\frac{1}{a}$. Studiem cazul $ab>0$ cu $a>0$ și $b>0$. Condițiile se mai scriu:

$$\begin{cases} 0\leqslant x\leqslant \frac{1}{a}; \\ 0\leqslant x\leqslant \frac{1}{b}. \end{cases} \quad (*)$$

Întrucît avem arcsin ax și arccos bx în $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$, iar funcția sin este bijectivă pe acest interval, ecuația este echivalentă cu sin (arcsin ax) = sin (arccos bx), de unde:

$$ax = \sqrt{1 - b^2x^2} \text{ și deci } x^2 = \frac{1}{a^2 + b^2}.$$

Reținem doar $x = \frac{1}{\sqrt{a^2 + b^2}}$, care satisface restricțiile (*). Printr-un raționament similar obținem pentru cazul $a < 0$, $b < 0$ soluția $x = -\frac{1}{\sqrt{a^2 + b^2}}$.

XLVI. 1°. Avem restricția $x + y \geqslant 0$. Notăm $\sqrt{x + y} = t$, $\sqrt[3]{x - y} = z$, $t \geqslant 0$. Sistemul devine: $\begin{cases} t + z = 6; \\ t\,|z| = 8. \end{cases}$ Rezolvăm ecuația: $|z|(6-z) = 8 \Leftrightarrow z|z| - 6|z| + 8 = 0$.

Cazul 1. $z \geqslant 0$. Avem $z^2 - 6z + 8 = 0$, de unde $z_1 = 2$, $z_2 = 4$ și de aici $t_1 = 4$, respectiv, $t_2 = 2$. În continuare rezolvăm două sisteme:

$$(1) \begin{cases} \sqrt{x + y} = 2; \\ \sqrt[3]{x - y} = 4, \end{cases} \text{ și } \quad 2) \begin{cases} \sqrt{x + y} = 4; \\ \sqrt[3]{x - y} = 2. \end{cases}$$

(1) conduce la $\begin{cases} x + y = 4; \\ x - y = 64, \end{cases}$ de unde $x = 34$, $y = -30$.

(2) se mai scrie $\begin{cases} x + y = 16; \\ x - y = 4, \end{cases}$ deci $x = 10$, $y = 6$.

Cazul 2. $z < 0$. Avem $-z^2 + 6z + 8 = 0$, $z^2 - 6z - 8 = 0$ cu rădăcinile $z_1 = 3 - \sqrt{17}$, $z_2 = 3 + \sqrt{17}$. Reținem doar $z_1 = 3 - \sqrt{17} < 0$ și deci $t = 3 + \sqrt{17}$. Rămîne de rezolvat:

$$\begin{cases} \sqrt{x + y} = 3 + \sqrt{17}; \\ \sqrt[3]{x - y} = 3 - \sqrt{17}, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x + y = 26 + 6\sqrt{17}; \\ x - y = 180 - 44\sqrt{17}, \end{cases} \text{ și } \begin{cases} x = 103 - 19\sqrt{17}; \\ y = -77 + 25\sqrt{17}. \end{cases}$$

Deci soluțiile sistemului sînt:

$$\begin{cases} x = 34; \\ y = -30, \end{cases} \quad \begin{cases} x = 10; \\ y = 6, \end{cases} \quad \begin{cases} x = 103 - 19\sqrt{17}; \\ y = -77 + 25\sqrt{17}. \end{cases}$$

2°. x_1, x_2, x_3 fiind rădăcini ale ecuației avem

$$(*) \begin{cases} x_1^3 + ax_1^2 + x_1 + 1 = 0; \\ x_2^3 + ax_2^2 + x_2 + 1 = 0; \\ x_3^3 + ax_3^2 + x_3 + 1 = 0. \end{cases}$$

Relațiile între rădăcini și coeficienți sînt:

$$x_1 + x_2 + x_3 = -a;$$
$$x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3 = 1;$$
$$x_1x_2x_3 = -1.$$

Sumînd relațiile (*) obținem:

$$x_1^3 + x_2^3 + x_3^3 = -a(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2) - (x_1 + x_2 + x_3) - 3 = -a[(x_1 + x_2 + x_3)^2 - 2(x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3)] + a - 3 = -a^3 + 3a - 3.$$

Înmulțind relațiile (*) cu x_1, x_2, respectiv x_3 și sumînd avem:

$$x_1^4 + x_2^4 + x_3^4 = -a(x_1^3 + x_2^3 + x_3^3) - (x_1^2 + x_2^2 + x_3^2) - (x_1 + x_2 + x_3) =$$
$$= a - (a^2 - 2) + a = -a^2 + 2a + 2.$$

Vom determina a din relațiile:

$$\begin{cases} -a^3 + 3a - 3 = -1; \\ -a^2 + 2a + 2 = 4a - 1, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a^3 - 3a + 2 = 0; \\ a^2 + 2a - 3 = 0, \end{cases}$$

cu soluția comună $a = 1$. Ecuația dată este deci: $x^3 + x^2 + x + 1 = 0$, de unde $(x + 1)(x^2 + 1) = 0$, cu rădăcinile: $x_1 = -1$; $x_2 = i$, $x_3 = -i$.

3°. Fie A punctul din spațiu. Notăm cu A_1 respectiv A_2 proiecțiile lui A pe d și d'. Există un plan unic α ce conține AA_1 și este perpendicular pe d și un plan unic β ce conține AA_2 și este perpendicular pe d'. Planele α și β se intersectează după o dreaptă Δ ce conține pe A și este perpendiculară atît pe d cît și pe d'. Planele α și β avînd punctul comun A nu pot fi paralele.

4°. Considerăm triunghiul ABC, cu $m(\hat{A}) = 90°$ și $AC = b$; $BC = a$, $AB = c$. Presupunem $AB < AC$. Avem $a + c = 2b$ și aplicînd teorema sinusurilor: $a + a \sin C = 2a \sin B$, de unde $1 + \sin C = 2 \sin B$. Ținînd cont de faptul că $B + C = \frac{\pi}{2}$, avem $\sin C = \cos B$. Rezultă că avem: $1 + \cos B = 2 \sin B \Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow 1 + 2\cos^2\frac{B}{2} - 1 = 4 \sin\frac{B}{2}\cos\frac{B}{2}$. Unghiul $\hat{B}$ fiind unghi ascuțit, rezultă $\cos\frac{B}{2} = 2 \sin\frac{B}{2} \Leftrightarrow \operatorname{tg}\frac{B}{2} = \frac{1}{2}$. Rezultă $B = 2 \operatorname{arctg}\frac{1}{2}$ și $C = \frac{\pi}{2} - 2 \operatorname{arctg}\frac{1}{2}$.

XLVII. 1°. Notînd $t = \left(\frac{3}{2}\right)^{x-y} > 0$, prima ecuație a sistemului dat se scrie: $t - \frac{1}{t} = \frac{65}{36}$, echivalentă cu $36t^2 - 65t - 36 = 0$, de unde $t_1 = \frac{9}{4} > 0$ și $t_2 = -\frac{4}{9} < 0$, cea de a doua valoare a lui t nefiind acceptată. Din $\left(\frac{3}{2}\right)^{x-y} = \frac{9}{4}$, găsim $x - y = 2$, prin urmare rezolvarea problemei respective revine la aflarea soluției sistemului: $x - y = 2$; $xy - x + y = 118$. Adunînd cele două ecuații, găsim $xy = 120$. Dar $x = y + 2$, deci $(y + 2)y = 120$, de unde $y_1 = -12$ și $y_2 = 10$; corespunzător, obținem $x_1 = -10$ și $x_2 = 12$, prin urmare $(x, y) \in \{(-10, -12), (12, 10)\}$ constituie soluțiile sistemului dat.

2°. Ținem seama că $a_n = a_1 q^{n-1}$, $(\forall) n \geqslant 2$, unde a_1 este primul termen al progresiei geometrice, iar q rația acesteia. Atunci: $a_5 = a_1 q^4$; $a_4 = a_1 q^3$; $a_2 = a_1 q$ și sistemul dat se mai scrie:

$$\begin{cases} a_1 q^4 - a_1 = 15; \\ a_1 q^3 - a_1 q = 6, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a_1(q^4 - 1) = 15; \\ a_1 q(q^2 - 1) = 6, \end{cases}$$

ultima egalitate confirmînd că $a_1 \neq 0$ și $q \notin \{-1, 0, 1\}$; împărțind membru cu membru cele două ecuații ale ultimului sistem, obținem: $\frac{q^2 + 1}{q} = \frac{15}{6}$, echivalentă cu $6q^2 - 15q + 6 = 0$, de unde $q_1 = \frac{1}{2}$ și $q_2 = 2$. Pentru $q_1 = \frac{1}{2}$, găsim $a_1 = -16$ $\left(\text{deoarece, de exemplu, } a_1 = \frac{15}{q^4 - 1}\right)$, deci primii cinci termeni ai progresiei geometrice respective vor fi: $a_1 = -16$; $a_2 = -8$; $a_3 = -4$; $a_4 = -2$; $a_5 = -1$. Pentru $q_2 = 2$, avem $a_1 = 1$ și, corespunzător: $a_1 = 1$; $a_2 = 2$; $a_3 = 4$; $a_4 = 8$; $a_5 = 16$.

3°. Ținînd seama că $\sin 3x - \sin x = 2 \sin x \cos 2x$, ecuația se scrie: $2 \sin x \cos 2x - \cos 2x = 0$, de unde $\cos 2x = 0$ sau $2 \sin x - 1 = 0$, adică $x \in \left\{ k\pi \pm \frac{\pi}{4} \middle| k \in \mathbf{Z} \right\}$ sau $x \in \left\{ (-1)^k \frac{\pi}{6} + k\pi \middle| k \in \mathbf{Z} \right\}$; prin urmare soluțiile ecuației sînt valorile $x \in \left\{ k\pi \pm \frac{\pi}{4} \middle| k \in \mathbf{Z} \right\} \cup \left\{ (-1)^k \frac{\pi}{6} + k\pi \middle| k \in \mathbf{Z} \right\}$.

4°. 1. a) Cum $CB \parallel AD$ și DC este secantă acestora (v. fig. M.B.68), rezultă $\widehat{ADC} \equiv \widehat{BCD}$ (ca alterne interne), deci $m(\widehat{ADE}) = m(\widehat{BCE})$, deoarece $E \in CD$.

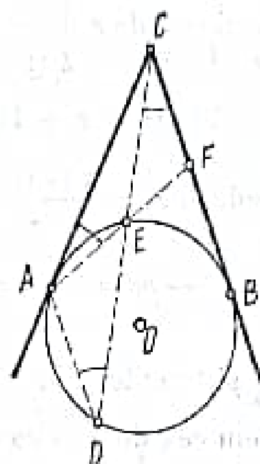


Fig. M.B.68

Pe de altă parte, unghiul ADE este inscris și în cercul considerat, iar unghiul CAE este format de coarda $[AE]$ și tangenta CA la același cerc; prin urmare, $m(\widehat{ADE}) = m\left(\frac{\widehat{AE}}{2}\right) = m(\widehat{CAE})$, egalitatea cerută fiind imediată din egalitățile pe care le-am obținut.

1. b) Din asemănarea triunghiurilor CAF și ECF (avînd un unghi comun și alte două congruente), avem: $\frac{AC}{EC} = \frac{CF}{EF} = \frac{FA}{CF}$, iar din ultima egalitate rezultă cea din enunț.

2. Dacă $ADBC$ este romb, atunci CD este bisectoarea unghiului ACB, trece prin O și $AC \equiv AD$, prin urmare triunghiurile DAE și CAO sînt congruente fiind dreptunghice ($m(\widehat{DAE}) = m(\widehat{CAO}) = 90°$), avînd laturile $[AC]$ și $[AD]$ congruente și unghiurile $\widehat{ADE}$ și $\widehat{ACO}$ de asemenea congruente. Rezultă că $ADBC$ este romb dacă distanța OC este egală cu diametrul cercului considerat.

XLVIII. 1°. Ținem seama că $2 - \sqrt{3} = \frac{(2-\sqrt{3})(2+\sqrt{3})}{2+\sqrt{3}} = \frac{1}{2+\sqrt{3}}$ și ecuația devine: $\left(\sqrt{2+\sqrt{3}}\right)^x + \frac{1}{\left(\sqrt{2+\sqrt{3}}\right)^x} = 4$, adică:

$$\left(\sqrt{2+\sqrt{3}}\right)^{2x} - 4\left(\sqrt{2+\sqrt{3}}\right)^x + 1 = 0.$$

Punînd $t = \left(\sqrt{2+\sqrt{3}}\right)^x > 0$, obținem ecuația $t^2 - 4t + 1 = 0$, care admite soluțiile $t_1 = 2 + \sqrt{3}$ și $t_2 = 2 - \sqrt{3}$. Revenind la substituția făcută, găsim $\left(\sqrt{2+\sqrt{3}}\right)^x = 2 + \sqrt{3}$, de unde $x = 2$; analog, din $\left(\sqrt{2+\sqrt{3}}\right)^x = 2 - \sqrt{3}$,

obținem $(2+\sqrt{3})^{\frac{x}{2}} = \frac{1}{2+\sqrt{3}}$, adică $(2+\sqrt{3})^{\frac{x}{2}+1} = 1$, de unde $\frac{x}{2}+1=0$, deci $x=-2$.

2°. Considerăm prima ecuație și ținem seama că:

$x^4-2x^3-x+2=0 \Leftrightarrow x(x^3-1)-2(x^3-1)=0 \Leftrightarrow (x-1)(x-2)(x^2+x+1)=0$.

Prin urmare, soluțiile acesteia sînt:

$$x_1=1;\ x_2=2;\ x_3=\frac{-1+i\sqrt{3}}{2};\ x_4=\frac{-1-i\sqrt{3}}{2}.$$

Cum $x_1=1$ și $x_2=2$ verifică și cea de a doua ecuație, înseamnă că membrul din stînga al acesteia se divide cu x^2-3x+2 și găsim că aceasta se mai scrie:

$$(x^2-3x+2)(x^2-x+1)=0,$$

de unde obținem și celelalte două soluții $x_5=\frac{1+i\sqrt{3}}{2}$ și $x_6=\frac{1-i\sqrt{3}}{2}$ (deduse din $x^2-x+1=0$).

3°. Din condițiile $\Delta' \equiv (m-1)^2-m(m-1)=-m+1 \leqslant 0$ și $m>0$ găsim $m\in[1,+\infty)$.

4°. Scăzînd prima ecuație a sistemului din ultima înmulțită cu $\hat{5}$, obținem $\hat{4}x+\hat{9}z=\hat{1}$, iar din aceasta scădem cea de a doua ecuație înmulțită cu $\hat{4}$, găsim $\hat{8}z=\hat{4}$, de unde $z=\hat{6}$. Ținînd cont de valoarea găsită în cea de a doua ecuație a sistemului avem $x+\hat{7}=\hat{2}$, de unde $x=\hat{6}$, și înlocuind, de exemplu, ambele valori în cea de a treia ecuație obținem $y=\hat{3}$. Așadar, soluția căutată este: $x=\hat{6}$; $y=\hat{3}$; $z=\hat{6}$.

XLIX. 1°. Ridicînd la pătrat ambii membri ai primei ecuații și ținînd cont că suma pătratelor necunoscutelor este egală cu 14 (conform ecuației a doua), obținem: (1) $xy+xz+yz=1$. Apoi, ridicînd la cub ambii membri ai primei ecuații și ținînd seama că suma cuburilor necunoscutelor este egală cu 34 (vezi ecuația a treia), găsim:

$$(2)\quad x^2y+xy^2+x^2z+y^2z+xz^2+yz^2+2xyz=10.$$

Pe de altă parte, înmulțind membru cu membru primele două ecuații, avem:

$$(3)\quad x^3+xy^2+xz^2+x^2y+y^3+yz^2+x^2z+y^2z+z^3=56.$$

Ținînd cont de ecuația a treia a sistemului în (3), obținem:

$$(4)\quad xy^2+xz^2+x^2y+yz^2+x^2z+y^2z=22,$$

și făcînd diferența dintre (4) și (2), găsim: (5) $xyz=-6$. Așadar, sistemul dat este echivalent cu următorul:

$$\begin{cases} x+y+z=4; \\ xy+xz+yz=1; \\ xyz=-6, \end{cases}$$

ale cărui soluții sînt soluțiile ecuației atașate: (6) $u^3-4u^2+u+6=0$. Dar (6) se mai scrie: $(u-2)(u^2-2u-3)=0$, de unde $u_1=2$, $u_2=-1$, $u_3=3$. Cum, sistemul dat — ca de altfel și cel echivalent cu acesta — este simetric în x, y și z, rezultă că soluțiile sînt $x, y, z \in \{-1, 2, 3\}$, cu $x\neq y\neq z\neq x$, adică:

$(x, y, z)\in\{(-1, 2, 3), (-1, 3, 2), (2, -1, 3), (3, -1, 2), (2, 3, -1), (3, 2, -1)\}$.

2°. Cum $S_1 = \frac{1}{1\cdot 4} = \frac{1}{4}$, $S_2 = S_1 + \frac{1}{4\cdot 7} = \frac{1}{4} + \frac{1}{4\cdot 7} = \frac{2}{7}$, $S_3 = S_2 + \frac{1}{7\cdot 10} = \frac{2}{7} + \frac{1}{7\cdot 10} = \frac{3}{10}$ ş.a.m.d., să arătăm că: $S_k = \frac{k}{3k+1}$, $(\forall)\ k \in \mathbf{N},\ 1 \leqslant k \leqslant n$.
Presupunînd că $S_{n-1} = \frac{n-1}{3n-2}$, să dovedim că $S_n = \frac{n}{3n+1}$. Într-adevăr:

$$S_n = S_{n-1} + \frac{1}{(3n-2)(3n+1)} = \frac{n-1}{3n-2} + \frac{1}{(3n-2)(3n+1)} = \frac{n}{3n+1},$$

ceea ce completează demonstraţia.

Notă. Dacă în enunţ nu s-ar fi cerut, în mod expres, ca soluţia să fie dată „folosind inducţia matematică", atunci s-ar fi putut proceda şi astfel:

$\frac{1}{(3k-2)(3k+1)} = \frac{A}{3k-2} + \frac{B}{3k+1}$, $(\forall)k \in \mathbf{N}, 1 \leqslant k \leqslant n$, de unde $A = \frac{1}{3}$ şi $B = -\frac{1}{3}$.

Prin urmare: $\frac{1}{(3k-2)(3k+1)} = \frac{1}{3(3k-2)} - \frac{1}{3(3k+1)}$, $(\forall)\ k \in \mathbf{N},\ 1 \leqslant k \leqslant n$.

Dînd lui k valorile 1, 2, ..., n şi sumînd rezultatele găsim:

$$\frac{1}{1\cdot 4} = \frac{1}{3} - \frac{1}{3\cdot 4};$$

$$\frac{1}{4\cdot 7} = \frac{1}{3\cdot 4} - \frac{1}{3\cdot 7};$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$\frac{1}{(3n-2)(3n+1)} = \frac{1}{3(3n-2)} - \frac{1}{3(3n+1)}$$

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{(3k-2)(3k+1)} = \frac{n}{3n+1}.$$

3°. a) Observăm mai întîi că -1 este o rădăcină a primului polinom, deci împărţindu-l pe acesta la $X+1$ avem:

$$X^5 - 5X^4 - 6X^3 - 6X^2 - 7X - 1 = (X+1)(X^4 - 6X^3 - 6X - 1).$$

Pe de altă parte:

$$X^4 - 6X^3 - 6X - 1 = (X^4 - 1) - 6X(X^2 + 1) = (X^2 + 1)(X^2 - 6X - 1),$$

deci:

$$X^5 - 5X^4 - 6X^3 - 6X^2 - 7X - 1 = (X+1)(X^2+1)(X^2 - 6X - 1).$$

Dar -1, i şi $-i$ nu sînt rădăcini pentru cel de al doilea polinom. Împărţindu-l pe acesta la $X^2 - 6X - 1$, găsim că:

$$2X^4 - 16X^3 + 23X^2 - 2X - 1 = (X^2 - 6X - 1)(2X^2 - 4X + 1).$$

Prin urmare, c.m.m.d.c. căutat este polinomul $X^2 - 6X - 1$.

Notă. Altă rezolvare este dată de algoritmul lui Euclid.

b) Ţinem seama că ecuaţia se mai scrie sub formă:

$$(x^2 - 6x - 1)(2x^2 - 4x + 1) = 0,$$

(v. pct. a), deci $x^2 - 6x - 1 = 0$, de unde $x_1 = 3 - \sqrt{10}$, $x_2 = 3 + \sqrt{10}$ şi $2x^2 - 4x + 1 = 0$, de unde $x_3 = \frac{2-\sqrt{2}}{2}$, $x_4 = \frac{2+\sqrt{2}}{2}$.

4°. Ecuaţia are sens numai dacă $x > 0$ şi $x \neq 1$. Punînd $y = \log_x \sqrt[3]{4}$, ecuaţia se mai scrie: $y + 3 + 3y + 6y^2 = 5$, adică $3y^2 + 2y - 1 = 0$, de unde $y_1 = -1$ şi $y_2 = \frac{1}{3}$. Pentru $y = -1$, avem $\log_x \sqrt[3]{4} = -1$, adică $\log_x \sqrt[3]{4} = \log_x \frac{1}{x}$, de unde $x = \frac{1}{\sqrt[3]{4}}$, deci $x = 4^{-\frac{3}{4}}$. Pentru $y = \frac{1}{3}$, avem $\log_x \sqrt[3]{4} = \frac{1}{3}$, prin urmare $x^{\frac{1}{3}} = 4^{\frac{1}{3}}$, de unde $x = 4$.

5°. a) Pentru a arăta că legea respectivă este bine definită, să observăm mai întîi că din $-1 < x < 1$ şi $-1 < y < 1$ rezultă $-1 < xy < 1$, deci $0 < 1 + xy < 2$, pentru ceea ce ne interesează fiind important că $0 < 1 + xy$. Presupunînd prin absurd că $\frac{x + y}{1 + xy} \geqslant 1$ pentru $x, y \in (-1, 1)$, găsim: $x + y \geqslant 1 + xy \Leftrightarrow \Leftrightarrow (x - 1)(1 - y) \geqslant 0 \Leftrightarrow$ sau $x \geqslant 1$ şi $y \leqslant 1$ sau $x \leqslant 1$ şi $y \geqslant 1$, oricare din cele două alternative nefiind admise, deoarece $x, y \in (-1, 1)$. Analog, dacă pentru $x, y \in (-1, 1)$ presupunem că $\frac{x + y}{1 + xy} \leqslant -1$, cum $0 < 1 + xy$, ajungem la concluzia că sau $x \leqslant 1$ şi $y \geqslant 1$ sau $x \geqslant -1$ şi $y \leqslant -1$, nici una din variantele respective neputînd fi acceptată. Aşadar legea de compoziţie T este bine definită pe intervalul $(-1, 1)$. Că legea de compoziţie T determină pe $(-1, 1)$ o structură de grup abelian se verifică imediat. Într-adevăr:

$$\text{i)}\ (x \top y) \top z = \frac{x + y}{1 + xy} \top z = \frac{\frac{x + y}{1 + xy} + z}{1 + \frac{x + y}{1 + xy} \cdot z} = \frac{x + y + z + xyz}{1 + xy + xz + yz} =$$

$$= \frac{x(1 + yz) + (y + z)}{(1 + yz) + x(y + z)} = \frac{x + \frac{y + z}{1 + yz}}{1 + x \cdot \frac{y + z}{1 + yz}} = x \top (y \top z),\ (\forall) x, y, z \in (-1, 1);$$

$$\text{ii)}\ x \top 0 = \frac{x + 0}{1 + x \cdot 0} = x = \frac{0 + x}{1 + 0 \cdot x} = 0 \top x,\ (\forall) x \in (-1, 1);$$

$$\text{iii)}\ x \top x' = 0 \Leftrightarrow \frac{x + x'}{1 + xx'} = 0 \Leftrightarrow x' = -x;$$

acelaşi rezultat obţinem şi din $x' \top x = 0$, deci simetricul lui x este $x' = -x$, $(\forall) x \in (-1, 1)$;

$$\text{iv)}\ x \top y = \frac{x + y}{1 + xy} = \frac{y + x}{1 + yx} = y \top x,\quad (\forall) x, y \in (-1, 1).$$

Notă. Evident, dacă s-ar fi verificat condiţia iv) înainte de ii) şi iii) atunci în acestea ar fi fost suficient să folosim numai cîte o condiţie (de exemplu: $x \top y = 0$ şi $x \top x' = 0$ pentru a găsi elementul neutru şi, respectiv, simetricul), fără a mai fi fost necesar să probăm şi valabilitatea egalităţilor $0 \top x = 0$, respectiv $x' \top x = 0$.

b) Fie $p, q \in (0, \infty)$; atunci $f(p), f(q) \in (-1, 1)$ şi, din condiţia $f(p \cdot q) = f(p) \top f(q)$, găsim:

$$\frac{2mpq + (m - 1)(p + q) - 2}{(m^2 + 1)xy + (1 - m)(p + q) + 2} = \frac{mpq - 1}{pq + 1},$$

egalitate ce are loc pentru orice $p, q \in (0, \infty)$ atunci şi numai atunci cînd $m = 1$. În acest caz, $f : (0, \infty) \to (-1, 1)$, dat de $f(x) = \frac{x - 1}{x + 1}$ este izomorfismul căutat, fapt care se verifică uşor.

L. 1°. Se impun condițiile: $n > 0$, $n \neq 3$. Trecînd logaritmii în baza 3 obținem inecuația: $\frac{(\log_3 n)(2 - \log_3 n)}{\log_3 n - 1} > 0$, cu unica soluție $n = 8$. Termenul general din dezvoltarea binomului dat este $T_{k+1} = C_8^k(\sqrt{a})^{8-k}(-\sqrt[3]{b})^k$, deci avem $\frac{k}{3} = 2$, adică $k = 6$. Termenul cerut este $T_7 = C_8^6 ab^2 = 28ab^2$.

2°. Determinantul sistemului este $\Delta = (\beta - \alpha)(\gamma - \alpha)(\gamma - \beta)$. Dacă $\Delta \neq 0$ sistemul este compatibil determinat și soluția (unică) în acest caz se obține ușor:

$$x = \frac{(\beta - 1)(\gamma - 1)}{(\beta - \alpha)(\gamma - \alpha)};\ y = \frac{(\alpha - 1)(\gamma - 1)}{(\alpha - \beta)(\gamma - \beta)};\ z = \frac{(\alpha - 1)(\beta - 1)}{(\alpha - \gamma)(\beta - \gamma)}.$$

Dacă $\alpha = \beta \neq \gamma$ apar două cazuri: pentru $\alpha = 1$ sau $\gamma = 1$ sistemul este compatibil nedeterminat, iar pentru $\alpha \neq 1$ și $\gamma \neq 1$ sistemul este incompatibil (rezultă calculînd, de exemplu, determinanții caracteristici). Analog se discută cazurile $\alpha = \gamma \neq \beta$ și $\beta = \gamma \neq \alpha$. În cazul $\alpha = \beta = \gamma$ apar două situații: pentru $\alpha = 1$ sistemul este compatibil nedeterminat, iar pentru $\alpha \neq 1$ sistemul este incompatibil.

3°. *Metoda I.* Deoarece funcțiile polinomiale de grad $\leqslant 2$ nu au extreme distincte, rezultă grad $f \geqslant 3$. Vom arăta că pentru grad $f = 3$ problema are soluție (deci gradul minim va fi 3). Fie $f = aX^3 + bX^2 + cX + d$, $a \neq 0$, $a, b, c, d \in \mathbf{R}$. Se impun condițiile: $f'(1) = 0$, $f'(3) = 0$, $f(1) = 6$, $f(3) = 2$ și rezultă ecuațiile: $3a + 2b + c = 0$, $27a + 6b + c = 0$, $a + b + c + d = 6$, $27a + 9b + 3c + d = 2$. Obținem: $a = 1$, $b = -6$, $c = 9$, $d = 2$, deci $f = X^3 - 6X^2 + 9X + 2$. Studiind, de exemplu, semnul derivatei rezultă că f satisface condițiile cerute.
Metoda II. Deoarece f' are rădăcinile distincte 1 și 3 și are grad minim considerăm $f' = \alpha(X - 1)(X - 3)$. Atunci $f = \frac{\alpha}{3}X^3 - 2\alpha X^2 + 3\alpha X + \beta$. Impunînd condițiile $f(1) = 6$, $f(3) = 2$, rezultă $\alpha = 3$, $\beta = 2$, deci $f = X^3 - 6X^2 + 9X + 2$ și semnul derivatei arată că f satisface condițiile cerute.

4°. Folosind relația dată termenul general al șirului se scrie sub forma:

$$a_1(\sqrt[3]{n+1} - \sqrt[3]{n}) + a_2(\sqrt[3]{n+2} - \sqrt[3]{n}) + \ldots + a_k(\sqrt[3]{n+k} - \sqrt[3]{n}).$$

Deoarece $\sqrt[3]{n+j} - \sqrt[3]{n} = \frac{j}{\sqrt[3]{(n+j)^2} + \sqrt[3]{n(n+j)} + \sqrt[3]{n^2}}$, $j = 1, 2, \ldots, k$, rezultă că limita șirului este:

$$\lim_{n \to \infty} a_1(\sqrt[3]{n+1} - \sqrt[3]{n}) + \ldots + a_k(\sqrt[3]{n+k} - \sqrt[3]{n}) = 0 \ (k \text{ fixat}).$$

5°. Putem scrie:

$$\int_0^{\pi/2} \frac{\cos 2x}{1 + \cos x}\,dx = \int_0^{\pi/2} \frac{2\cos^2 x - 1}{1 + \cos x}\,dx = \int_0^{\pi/2} \frac{2\cos^2 x - 2 + 1}{1 + \cos x}\,dx =$$

$$= 2\int_0^{\pi/2} (\cos x - 1)\,dx + \int_0^{\pi/2} \frac{dx}{2\cos^2 \frac{x}{2}} = \left[2(\sin x - x) + \operatorname{tg}\frac{x}{2}\right]\Bigg|_0^{\pi/2} =$$

$$= 2\left(1 - \frac{\pi}{2}\right) + \operatorname{tg}\frac{\pi}{4} = 3 - \pi.$$

Integrala dată se putea calcula și cu ajutorul substituției $\operatorname{tg}\frac{x}{2} = t$, dar calculele erau mai complicate.

II. 1°. Folosind puterea punctelor M, N, P față de cerc (sau asemănări de triunghiuri) obținem relațiile (v. fig. M.B.69):

$$AM \cdot MQ = \frac{BC^2}{4}; \; BN \cdot NS = \frac{AC^2}{4}; \; CP \cdot PT = \frac{AB^2}{4}.$$

Putem scrie:

$$\frac{AM}{MQ} + \frac{BN}{NS} + \frac{CP}{PT} = \frac{AM^2}{AM \cdot MQ} + \frac{BN^2}{BN \cdot NS} + \frac{CP^2}{CP \cdot PT} = 4\left(\frac{AM^2}{BC^2} + \frac{BN^2}{AC^2} + \frac{CP^2}{AB^2}\right).$$

Notînd $BC = a$, $AC = b$, $AB = c$, din teorema medianei avem:

$$AM^2 = \frac{2(b^2 + c^2) - a^2}{4}; \; BN^2 = \frac{2(a^2 + c^2) - b^2}{4}; \; CP^2 = \frac{2(a^2 + b^2) - c^2}{4}.$$

Rezultă: $\frac{AM}{MQ} + \frac{BN}{NS} + \frac{CP}{PT} = 2\left(\frac{b^2}{a^2} + \frac{a^2}{b^2}\right) + 2\left(\frac{c^2}{b^2} + \frac{b^2}{c^2}\right) + 2\left(\frac{a^2}{c^2} + \frac{c^2}{a^2}\right) - 3.$

Deoarece $\frac{b^2}{a^2} + \frac{a^2}{b^2} \geqslant 2$, $\frac{c^2}{b^2} + \frac{b^2}{c^2} \geqslant 2$, $\frac{a^2}{c^2} + \frac{c^2}{a^2} \geqslant 2$, rezultă: $\frac{AM}{MQ} + \frac{BN}{NS} + \frac{CP}{PT} \geqslant 9.$

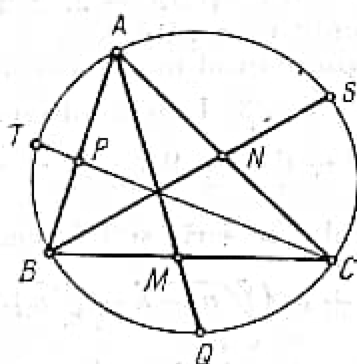


Fig. M.B.69

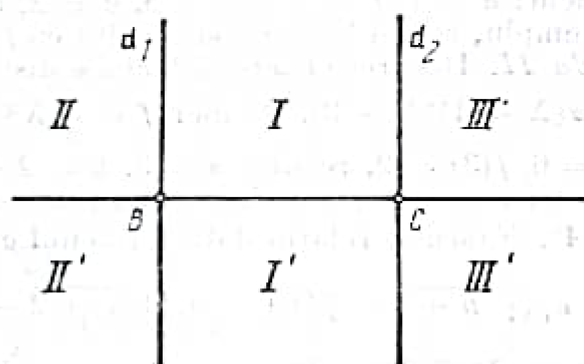


Fig. M.B.70

2°. Vom presupune că vîrful A se află în semiplanul superior determinat de dreapta BC. Cazul semiplanului inferior se tratează analog (evident A nu aparține dreptei BC, căci ABC nu ar fi triunghi). Din ipoteza $\text{tg } B + \text{tg } C = k = \text{const}$ rezultă că $m(\hat{B}) \neq \frac{\pi}{2}$ și $m(\hat{C}) \neq \frac{\pi}{2}$, deci vîrful A nu aparține dreptelor d_1 și d_2 perpendiculare în B, respectiv C pe BC. Observăm că valoarea constantei k nu poate fi zero. Într-adevăr, $k = 0$ implică $\text{tg } B + \text{tg } C = 0$, deci $\frac{\sin(B + C)}{\cos B \cos C} = 0$; rezultă $\sin(B + C) = 0$, adică $B + C = n\pi$, $n \in \mathbb{Z}$, imposibil. Împărțim planul în șase zone ca în fig. M.B.70. Dacă A se află în zonele I și I', atunci unghiurile $\hat{B}$ și $\hat{C}$ sînt ascuțite, deci $k = \text{tg } B + \text{tg } C > 0$. Dacă A se află în zona II, atunci unghiul $\hat{B}$ este obtuz și unghiul C este ascuțit, deci $\text{tg } B < 0$ și $\text{tg } C > 0$. Dar $\text{tg } B = -\text{tg}(\pi - B)$ și $\text{tg}(\pi - B) > \text{tg } C$, deoarece $\pi - B$ este unghi ascuțit și $\pi - B > C$, ca unghi exterior al triunghiului ABC. Rezultă $k = \text{tg } B + \text{tg } C = -\text{tg}(\pi - B) + \text{tg } C < 0$.

Analog, dacă A se află în zonele II', III, III' rezultă $k<0$. Fie acum A în zona I, deci $k>0$ și presupunem că unghiul A este ascuțit (dacă $\hat{A}$ este obtuz raționamentul nu se schimbă). Din fig. M.B.71 rezultă că unghiurile $\widehat{A'HC}$ și $\widehat{ABC}$ sînt congruente avînd același complement (pe $\widehat{A'CH}$). Analog, unghiurile $\widehat{A'HB}$ și $\widehat{ACB}$ sînt congruente avînd același complement (pe $\widehat{A'BH}$). Obținem relațiile:

$$\operatorname{tg} B=\frac{A'C}{A'H},\ \operatorname{tg} C=\frac{A'B}{A'H},\ \text{deci}\ \operatorname{tg} B+\operatorname{tg} C=\frac{A'C+A'B}{A'H}=\frac{BC}{A'H}.$$

Rezultă că $\operatorname{tg} B+\operatorname{tg} C=k=\text{const}$ dacă și numai dacă $A'H=\frac{BC}{k}=\text{const}$. Atunci locul geometric al lui H este reuniunea a două segmente paralele la dreapta BC, la distanța $\frac{BC}{k}$ de BC, cuprinse între dreptele d_1 și d_2, situate în zonele I și I' (A în semiplanul inferior se tratează la fel). Fie acum A în zona II, deci $k<0$ ($\operatorname{tg} B<0$ și $\operatorname{tg} C>0$). Cazurile A în zonele II', III și III' se fac analog. Din fig. M.B.72

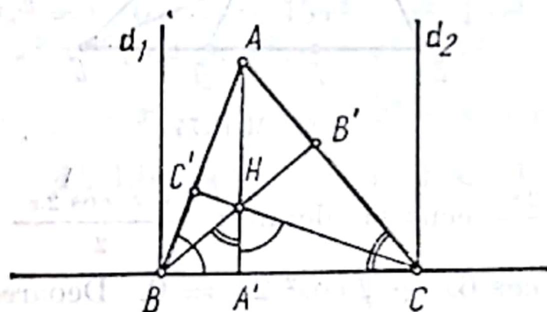


Fig. M.B.71

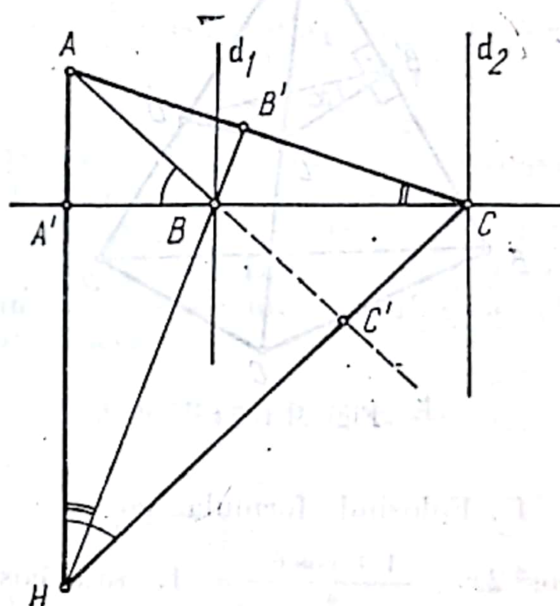


Fig. M.B.72

rezultă cu unghiurile $\widehat{A'HC}$ și $\widehat{ABA'}$ sînt congruente, avînd același complement (pe $\widehat{HAC'}$), și, analog, unghiurile $\widehat{A'HB}$ și $\widehat{ACB}$ sînt congruente avînd același complement (pe $\widehat{A'AC}$). Obținem relațiile: $\operatorname{tg}(\pi-B)=-\operatorname{tg} B=\frac{A'C}{A'H'}$, $\operatorname{tg} C=\frac{A'B}{A'H}$, deci $\operatorname{tg} B+\operatorname{tg} C=-\frac{A'C-A'B}{A'H}=-\frac{BC}{A'H}$. Rezultă că $\operatorname{tg} B+\operatorname{tg} C=k=\text{const}$ dacă și numai dacă $A'H=\frac{BC}{-k}=\text{const}$ $(-k>0)$. Atunci locul geometric al lui H în acest caz $(k<0)$ este reuniunea a patru semidrepte paralele la dreapta BC, la distanța $\frac{BC}{-k}$ de BC, situate în cele patru zone II, II', III și III'.

3°. Vom trata cazul $\alpha, \beta, \gamma \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$. Celelalte cazuri se rezolvă asemănător. Fie $B' \in AB$, $AB' = l$ şi ducem $B'C' \perp AB$, $B'D' \perp AB$ ($C' \in AC$, $D' \in AD$). Atunci unghiul diedru cerut este $\widehat{C'B'D'} = x$ (v. fig. M.B.73).
În triunghiurile dreptunghice $AB'C'$ şi $AB'D'$ avem:

$$AC' = \frac{l}{\cos\alpha}; \quad AD' = \frac{l}{\cos\gamma}; \quad B'C' = l\,\mathrm{tg}\,\alpha; \quad B'D' = l\,\mathrm{tg}\,\gamma.$$

În triunghiul $AC'D'$ avem: $C'D'^2 = AC'^2 + AD'^2 - 2AC' \cdot AD' \cos\beta$, iar în triunghiul $B'C'D'$ avem: $C'D'^2 = B'C'^2 + B'D'^2 - 2B'C' \cdot B'D' \cos x$. Rezultă:

$$\frac{l^2}{\cos^2\alpha} + \frac{l^2}{\cos^2\gamma} - \frac{2l^2\cos\beta}{\cos\alpha\cos\gamma} = l^2\,\mathrm{tg}^2\,\alpha + l^2\,\mathrm{tg}^2\,\gamma - 2l^2\,\mathrm{tg}\,\alpha\,\mathrm{tg}\,\gamma\cos x,$$

de unde $\cos x = \dfrac{\cos\beta - \cos\alpha\cos\gamma}{\sin\alpha\sin\gamma}$.

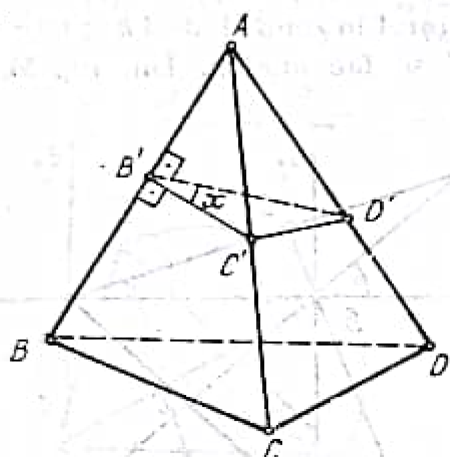


Fig. M.B.73

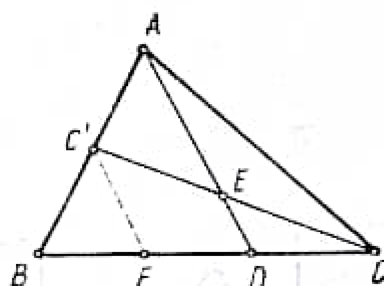


Fig. M.B.74

4°. Folosind formula $\cos^2 x = \dfrac{1 + \cos 2x}{2}$ ecuaţia devine: $\dfrac{1 + \cos 2x}{2} + \cos^2 2x + \dfrac{1 + \cos 6x}{2} = 1$, sau $\cos 2x + \cos 6x + 2\cos^2 2x = 0$. Deoarece $\cos 2x + \cos 6x = 2\cos 4x \cos 2x$ se obţine ecuaţia: $\cos 2x(\cos 4x + \cos 2x) = 0$, sau $\cos 2x(2\cos^2 2x + \cos 2x - 1) = 0$. Rezultă $\cos 2x = 0$, $\cos 2x = \dfrac{1}{2}$ sau $\cos 2x = -1$. Ţinînd seama de condiţiile $x \in [0, \pi]$ şi $\cos 2x \in \left[-\dfrac{1}{2}, \dfrac{1}{2}\right]$, rezultă soluţiile $x \in \left\{\dfrac{\pi}{6}, \dfrac{\pi}{4}, \dfrac{3\pi}{4}, \dfrac{5\pi}{6}\right\}$.

5°. Avem fig. M.B.74. *Metoda I.* Fie F mijlocul segmentului $[BD]$. $C'F$ este linie mijlocie în triunghiul ABD, deci $C'F \parallel AD$. Deoarece D este mijlocul lui $[FC]$ rezultă DE linie mijlocie în triunghiul $CC'F$, deci $DE \parallel C'F$. Din unicitatea paralelei dusă printr-un punct la o dreaptă rezultă că punctele A, E, D sînt coliniare. *Metoda II.* Se aplică reciproca teoremei lui Menelaus pentru triunghiul $BC'C$ şi punctele A, E, D. Avem: $\dfrac{AB}{AC'} = 2$, $\dfrac{EC'}{EC} = 1$, $\dfrac{DC}{DB} = \dfrac{1}{2}$, deci $\dfrac{AB}{AC'} \cdot \dfrac{EC'}{EC} \cdot \dfrac{DC}{DB} = 1$ şi atunci punctele A, E, D sînt coliniare.

LII. 1°. Folosim metoda inducției matematice. Pentru $n = 2$ avem inegalitatea $\frac{16}{3} < \frac{4!}{(2!)^2}$, care este evidentă. Presupunem că inegalitatea $\frac{4^n}{n+1} < \frac{(2n)!}{(n!)^2}$ este adevărată; să demonstrăm că inegalitatea $\frac{4^{n+1}}{n+2} < \frac{(2n+2)!}{((n+1)!)^2}$ este adevărată. Deoarece $\frac{(2n+2)!}{((n+1)!)^2} = \frac{(2n)!(2n+1)\cdot 2(n+1)}{(n!)^2(n+1)^2}$ este suficient să arătăm că $\frac{4}{n+2} < \frac{2(2n+1)}{(n+1)^2}$, adică $2n^2 + 4n + 2 < 2n^2 + 5n + 2$, ceea ce este evident.

2°. Se observă că dacă $x_1 = x_2 = x_3$, atunci $\Delta = 0$ (unde Δ este determinantul dat). Reciproc, calculînd Δ se obține:

$$\Delta = x_1^3 + x_2^3 + x_3^3 - 3x_1x_2x_3 = (x_1 + x_2 + x_3)(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 - x_1x_2 - x_2x_3 - x_1x_3) =$$

$$= -(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 - x_1x_2 - x_2x_3 - x_1x_3), \text{ deoarece } x_1 + x_2 + x_3 = -1.$$

Condiția $\Delta = 0$ revine la $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = x_1x_2 + x_2x_3 + x_1x_3$. Înmulțind cu 2 ultima egalitate și trecînd toți termenii în membrul stîng obținem:

$$x_1^2 - 2x_1x_2 + x_2^2 + x_1^2 - 2x_1x_3 + x_3^2 + x_2^2 - 2x_2x_3 + x_3^2 = 0,$$

sau $(x_1 - x_2)^2 + (x_1 - x_3)^2 + (x_2 - x_3)^2 = 0$, de unde rezultă $x_1 = x_2 = x_3$. Dacă rădăcinile sînt egale rezultă $x_1 = x_2 = x_3 = -\frac{1}{3}$ (deoarece $x_1 + x_2 + x_3 = -1$), de unde obținem: $a = x_1x_2 + x_2x_3 + x_1x_3 = \frac{1}{3}$ și $b = -x_1x_2x_3 = \frac{1}{27}$.

3°. Pentru orice $x \in A$ avem $x^6 = x$. Deoarece A este inel $-x \in A$ și avem: $(-x)^6 = -x$; dar $(-x)^6 = x^6 = x$, de unde rezultă $x = -x$, adică $x + x = 0$ (sau $2x = 0$). Deoarece A este inel $1 + x \in A$ și atunci avem: $(1 + x)^6 = 1 + x$, deci $1 + 6x + 15x^2 + 20x^3 + 15x^4 + 6x^5 + x^6 = 1 + x$. Dar $x^6 = x$ și $6x = 0$, $20x^3 = 0$, $6x^5 = 0$, $15x^2 = x^2$, $15x^4 = x^4$ (din $2x = 0$), de unde rezultă că: $x^4 + x^2 = 0$, adică $x^4 = -x^2 = x^2$. Atunci putem scrie:

$$x = x^6 = x^4 \cdot x^2 = x^2 \cdot x^2 = x^4 = x^2 \quad \text{pentru orice } x \in A.$$

4°. Limita este de tipul ∞^0. Putem scrie:

$$\lim_{x\to\infty}\left(\operatorname{tg}\frac{\pi x}{2x+1}\right)^{\frac{1}{x}} = e^{\lim\limits_{x\to\infty}\frac{\ln\left(\operatorname{tg}\frac{\pi x}{2x+1}\right)}{x}}.$$

Pentru calculul limitei $l = \lim\limits_{x\to\infty}\frac{\ln\left(\operatorname{tg}\frac{\pi x}{2x+1}\right)}{x}$ folosim regula lui l'Hôpital $\left(\text{cazul } \frac{\infty}{\infty}\right)$ și obținem:

$$l = \lim_{x\to\infty}\frac{\ln\left(\operatorname{tg}\frac{\pi x}{2x+1}\right)}{x} = \lim_{x\to\infty}\frac{\pi}{(2x+1)^2\cos\frac{\pi x}{2x+1}\sin\frac{\pi x}{2x+1}}.$$

Putem scrie:

$$l = 2\pi\cdot\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{1}{(2x+1)^2}}{\sin\frac{2\pi x}{2x+1}};$$

aplicînd din nou regula lui l'Hôpital $\left(\text{cazul } \frac{0}{0}\right)$ obținem:

$$l = 2\pi \cdot \lim_{x\to\infty} \frac{-2}{\pi(2x+1)\cdot\cos\frac{2\pi x}{2x+1}} = 0.$$

Atunci limita inițială este $e^l = e^0 = 1$.

5°. Pe intervalele $(-\infty, 1)$, $(1, \infty)$ restricțiile lui f sînt continue ca restricții de funcții elementare. Funcția f este continuă în punctul $x = 1$, deoarece limitele sale laterale în acest punct sînt egale cu $f(1) = 0$. Rezultă că f este continuă pe $\mathbf{R}$, deci admite primitive pe $\mathbf{R}$. Integrînd prin părți, rezultă că primitivele lui f pe intervalul $(-\infty, 1)$ au forma $-xe^{-x} + C_1$. Cu substituția $\varphi(x) = \ln x$, rezultă imediat că primitivele lui f pe intervalul $(1, \infty)$ au forma $\frac{1}{3}\ln^3 x + C_2$. Atunci primitivele lui f pe $\mathbf{R}$ au forma:

$$F(x) = \begin{cases} -xe^{-x} + C_1, & x \in (-\infty, 1); \\ \frac{1}{3}\ln^3 x + C_2, & x \in [1, \infty). \end{cases}$$

Deoarece F este continuă în $x = 1$ obținem $-\frac{1}{e} + C_1 = C_2$, deci primitivele lui f pe $\mathbf{R}$ au forma:

$$F(x) = \begin{cases} -xe^{-x} + C, & x \in (-\infty, 1); \\ \frac{1}{3}\ln^3 x + C - \frac{1}{e}, & x \in [1, \infty), \end{cases}$$

(am notat $C_1 = C$). Se verifică imediat că $F'(1) = f(1) = 0$.

LIII. 1°. Patrulaterul $ADME$ este inscriptibil deoarece $m(\widehat{DAE}) + m(\widehat{EMD}) = 90° + 90° = 180°$. Rezultă că unghiurile $\widehat{AED}$ și $\widehat{AMD}$ sînt congruente (v. fig. M.B.75). Analog avem că patrulaterul $DBFM$ este inscriptibil. Rezultă că unghiurile $\widehat{DFB}$ și $\widehat{DMB}$ sînt congruente. Unghiul $\widehat{AMB}$ este drept ca fiind înscris într-un semicerc. Atunci unghiurile $\widehat{AED}$ și $\widehat{FDB}$ sînt congruente, deci triunghiurile dreptunghice AED și BDF sînt asemenea. Rezultă:

$$\frac{AE}{BD} = \frac{AD}{BF}, \text{ deci } AE \cdot BF = AD \cdot BD = \text{const.}$$

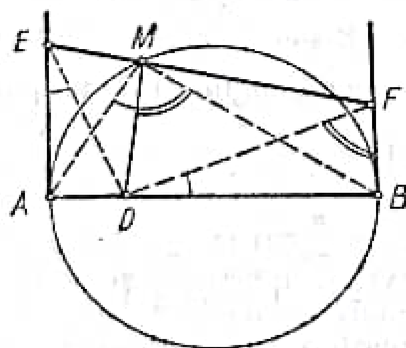


Fig. M.B.75

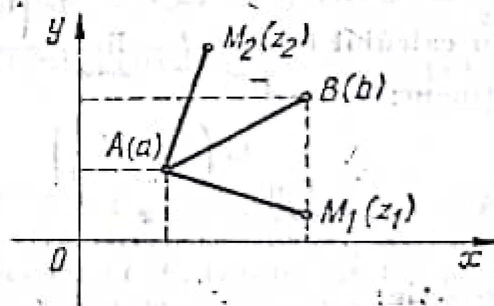


Fig. M.B.76

2°. Evident problema are două soluții (v. fig. M.B.76). Avem: $AB = |b - a| = 2$. Fie $z = x + yi$ afixul punctului M. Condiția $AB = AM$ devine $2 = |z - a|$ sau $(x-1)^2 + (y-1)^2 = 4$. Aplicînd teorema cosinusului în tri-

unghiul ABM: $BM^2 = AM^2 + AB^2 - 2AM \cdot AB \cos 45°$, în condițiile problemei, rezultă: $(x - \sqrt{3} - 1)^2 + (y - 2)^2 = 8 - 4\sqrt{2}$. Obținem sistemul de ecuații:

$$\begin{cases} (x-1)^2 + (y-1)^2 = 4; \\ (x-1)\sqrt{3} + (y-1) = 2\sqrt{2}, \end{cases}$$

cu soluțiile: $x_1 = 1 + \frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{2}$, $y_1 = 1 + \frac{\sqrt{2}-\sqrt{6}}{2}$; $x_2 = 1 + \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{2}$, $y_2 = 1 + \frac{\sqrt{2}+\sqrt{6}}{2}$, deci avem două puncte M_1, M_2 de afixe $z_1 = x_1 + y_1 i$, respectiv $z_2 = x_2 + y_2 i$.

3°. Notăm: $AB = a$, $AD = b$, $AA' = c$ și $AC' = d$ (v. fig. M.B.77). Avem: $\cos\alpha = \frac{a}{d}$, $\cos\beta = \frac{b}{d}$, $\cos\gamma = \frac{c}{d}$; atunci:

$$\frac{1}{\cos^2\alpha} + \frac{1}{\cos^2\beta} + \frac{1}{\cos^2\gamma} = d^2\left(\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2}\right).$$

Dar $d^2 = a^2 + b^2 + c^2$, deci:

$$\frac{1}{\cos^2\alpha} + \frac{1}{\cos^2\beta} + \frac{1}{\cos^2\gamma} = \left(\frac{a^2}{b^2} + \frac{b^2}{a^2}\right) + \left(\frac{b^2}{c^2} + \frac{c^2}{b^2}\right) + \left(\frac{c^2}{a^2} + \frac{a^2}{c^2}\right) + 3.$$

Folosind de trei ori inegalitatea evidentă $x^2 + \frac{1}{x^2} \geqslant 2$, rezultă inegalitatea cerută.

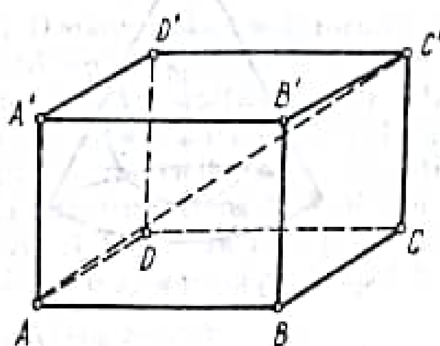


Fig. M.B.77

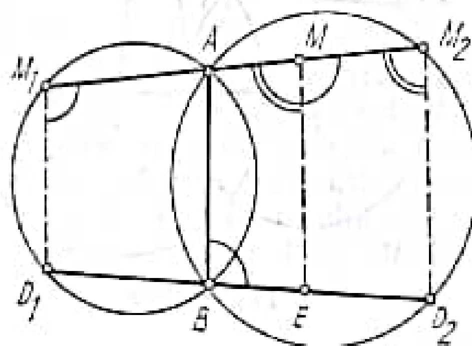


Fig. M.B.78

4°. *Metoda I.* Fie A și B punctele de intersecție ale cercurilor $\mathscr{C}_1$ și $\mathscr{C}_2$ și ducem prin A o dreaptă variabilă care taie a doua oară cercurile $\mathscr{C}_1$, $\mathscr{C}_2$ în M_1, respectiv M_2. Ducem prin B o dreaptă fixată (de exemplu perpendiculara pe AB) care taie a doua oară cercurile $\mathscr{C}_1$, $\mathscr{C}_2$ în punctele fixe D_1, respectiv D_2 (v. fig. M.B.78). Fie $M \in (M_1M_2)$ astfel încît $MM_1 = 2MM_2$ și fie $E \in (D_1D_2)$ astfel încît $ED_1 = 2ED_2$; punctul E este atunci fix. Deoarece patrulaterul AM_1D_1B este inscriptibil rezultă că $\widehat{AM_1D_1} \equiv \widehat{ABD_2}$. Deoarece patrulaterul AM_2D_2B este inscriptibil rezultă că $\widehat{ABD_2}$ și $\widehat{AM_2D_2}$ sînt suplementare. Atunci $\widehat{AM_1D_1}$ și $\widehat{AM_2D_2}$ sînt suplementare, deci $M_1D_1 \parallel M_2D_2$. Deoarece $\frac{MM_1}{MM_2} = 2 = \frac{ED_1}{ED_2}$ rezultă că $ME \parallel M_2D_2$. Atunci $\widehat{AME} \equiv \widehat{AM_2D_2}$ (unghiuri corespondente), deci $\widehat{ABE}$ și $\widehat{AME}$ sînt suplementare. Rezultă că patrulaterul $ABEM$ este inscriptibil și, cum A, B și E sînt fixe, M aparține cercului circumscris triunghiului fix ABE. Reciproc, fie M un punct pe cercul

circumscris triunghiului ABE. Dreapta MA taie din nou cercurile $\mathcal{C}_1$ și $\mathcal{C}_2$ în M_1, respectiv M_2. Din demonstrația anterioară știm că $M_1D_1 \parallel M_2D_2$. Deoarece patrulaterul $MABE$ este inscriptibil rezultă că $\widehat{AME}$ este suplementar cu $\widehat{ABE}$; dar $\widehat{ABE}$ este suplementar cu $\widehat{AM_2D_2}$, deci $\widehat{AME} \equiv \widehat{AM_2D_2}$, adică $ME \parallel M_2D_2$. Cum $\frac{ED_1}{ED_2} = 2$ rezultă $\frac{MM_1}{MM_2} = 2$, adică M este punct al locului geometric. În concluzie, locul geometric al lui M este cercul circumscris triunghiului fix ABE.

Metoda II. Fie A punctul de intersecție al cercurilor $\mathcal{C}_1$ și $\mathcal{C}_2$ prin care ducem secanta M_1M_2. Fie O_1, O_2 centrele celor două cercuri și fie $C \in (O_1O_2)$ astfel încît $O_1C = 2O_2C$. Fie O_1', O_2', P picioarele perpendicularelor din O_1, O_2, respectiv C pe M_1M_2 și fie $M \in (M_1M_2)$ astfel încît $MM_1 = 2MM_2$. Notăm $O_1'A = x$ și $O_2'A = y$. Avem: $AM = M_1M - M_1A = \frac{4y - 2x}{3}$ și $AP = O_1'P - O_1'A = \frac{2y - x}{3}$, deci $AP = \frac{1}{2}AM$. Atunci CP este înălțime și mediană în triunghiul ACM, deci triunghiul ACM este isoscel. Rezultă $CM = CA =$ const. Deoarece punctul C este fix rezultă că M aparține cercului de centru C și rază AC. Reciproc, dacă M aparține cercului de centru C și rază AC, triunghiul ACM rezultă isoscel, deci P este mijlocul segmentului $[AM]$. Ținînd seama de faptul că O_1' este mijlocul segmentului $[M_1A]$ și O_2' este mijlocul segmentului $[AM_2]$ rezultă (ca mai sus) că $M_1M = 2MM_2$, deci M este punct al locului geometric.

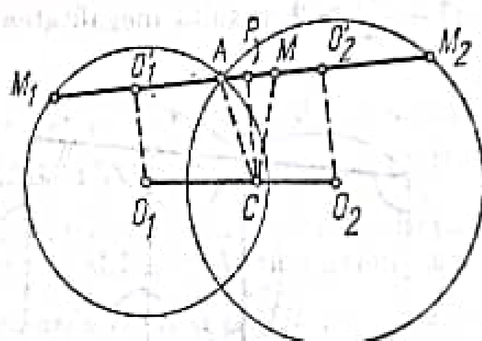


Fig. M.B.79

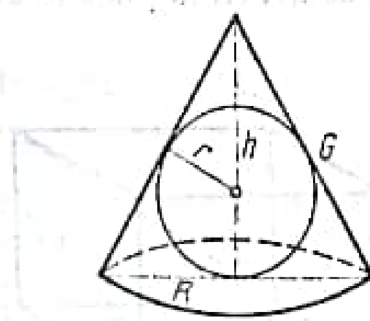


Fig. M.B.80

5°. Avem fig. M.B.80. Cu notațiile din figură putem scrie: $a = \pi R(R + G)$; $b = \frac{\pi R^2 h}{3}$; $C = 4\pi r^2$. Din asemănare de triunghiuri avem relația: $\frac{r}{R} = \frac{h - r}{G}$, deci $r = \frac{Rh}{R + G}$. Calculînd, obținem: $a^2c = 4\pi^3R^4h^2 = 36\pi b^2$.

LIV. 1°. Funcțiile exponențiale $x \to 2^x$, $x \to 4^x$ sînt strict crescătoare deoarece au baza supraunitară; rezultă că funcția f este strict crescătoare, deci injectivă. Avem: $\lim_{x \to -\infty} f(x) = 1$ și $\lim_{x \to \infty} f(x) = \infty$; funcția f fiind continuă are proprietatea lui Darboux, deci este surjectivă. Pentru calculul funcției inverse considerăm ecuația $4^x + 2^x + 1 = y$, $y \in (1, \infty)$. Notăm $2^x = t > 0$ și obținem: $t^2 + t + (1 - y) = 0$ cu unica soluție acceptabilă $t = \frac{-1 + \sqrt{4y - 3}}{2}$. Rezultă $2^x = \frac{-1 + \sqrt{4y - 3}}{2}$, deci funcția inversă este $g(y) = \log_2\left(\frac{\sqrt{4y - 3} - 1}{2}\right)$, $y \in (1, \infty)$. După calcule se obține $g'(3) = \frac{1}{3 \ln 2}$. Dar și direct, $g'(3) = \frac{1}{f'(0)} = \frac{1}{\ln 4 + \ln 2}$.

2°. Considerăm sistemul liniar şi omogen:

$$\begin{cases} \left(a-\frac{1}{2}\right)x+by+cz=0; \\ cx+\left(a-\frac{1}{2}\right)y+bz=0; \\ bx+cy+\left(a-\frac{1}{2}\right)z=0. \end{cases}$$

Sistemul are numai soluţia banală ($x=y=z=0$) dacă şi numai dacă determinantul Δ al sistemului este nenul. Notînd $a-\frac{1}{2}=a'$, obţinem:

$$\Delta = a'^3+b^3+c^3-3a'bc=(a'+b+c)(a'^2+b^2+c^2-a'b-a'c-bc)=$$
$$=\frac{a'+b+c}{2}\cdot(2a'^2+2b^2+2c^2-2a'b-2a'c-2bc)=$$
$$=\frac{a'+b+c}{2}\cdot[(a'-b)^2+(a'-c)^2+(b-c)^2].$$

Atunci, avem: $\Delta=0$ dacă şi numai dacă $a'+b+c=0$ sau $a'=b=c$ (adică $a'-b=a'-c=b-c=0$). Deoarece, $b, c\in \mathbf{Z}$, în ambele situaţii, ar rezulta $a'=a-\frac{1}{2}\in\mathbf{Z}$, ceea ce contrazice $a\in\mathbf{Z}$. Deci $\Delta\neq 0$ şi sistemul admite numai soluţia banală $x=y=z=0$.

3°. Deoarece ${}^tA\cdot A=E$ rezultă: $\det({}^tA\cdot A)=\det(E)=1$, deci $\det{}^tA\cdot\det A=1$. Dar $\det{}^tA=\det A$, de unde $(\det A)^2=1$, deci $\det A=\pm 1$. Vom verifica axiomele grupului. Avem: ${}^t(AB)(AB)={}^tB{}^tAAB={}^tBB=E$ pentru orice $A, B\in M$, deci M este parte stabilă a lui $M_2(\mathbf{R})$ în raport cu înmulţirea matricilor. Se cunoaşte că înmulţirea matricilor este asociativă. Apoi $E\in M$ este (evident) elementul neutru la înmulţire. Dacă $A\in M$, din proprietatea ${}^tA\cdot A=E$, rezultă $A^{-1}={}^tA$. Relaţia $A\cdot A^{-1}=E$ se mai poate scrie ${}^t(A^{-1})\cdot A^{-1}=E$, deci $A^{-1}\in M$. În concluzie M are o structură de grup faţă de înmulţire.

4°. Avem relaţia:

$$a_{2n}=\frac{1}{1^2}+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\dots+\frac{1}{(2n-1)^2}+\frac{1}{(2n)^2}=\left(\frac{1}{1^2}+\frac{1}{3^2}+\dots+\frac{1}{(2n-1)^2}\right)+$$
$$+\left(\frac{1}{2^2}+\frac{1}{4^2}+\dots+\frac{1}{(2n)^2}\right)=b_n+\frac{1}{4}\left(\frac{1}{1^2}+\frac{1}{2^2}+\dots+\frac{1}{n^2}\right)=b_n+\frac{1}{4}a_n.$$

Rezultă $b_n=a_{2n}-\frac{1}{4}a_n$, deci şirul (b_n) este convergent. Atunci

$$\lim_{n\to\infty} b_n=\lim_{n\to\infty}a_{2n}-\frac{1}{4}\lim_{n\to\infty}a_n=\frac{\pi^2}{6}-\frac{1}{4}\cdot\frac{\pi^2}{6}=\frac{\pi^2}{8}.$$

5°. Deoarece $\frac{1}{|x-1|}>0$ rezultă că $f(x)=\ln\left(1+\frac{1}{|x-1|}\right)>0$. Atunci aria cerută este: $A=\int_0^{1/2}\ln\left(1+\frac{1}{|x-1|}\right)dx=\int_0^{1/2}\ln\left(1+\frac{1}{1-x}\right)dx=$

$$=\int_0^{1/2}\ln\frac{2-x}{1-x}dx=\int_0^{1/2}\ln(2-x)\,dx-\int_0^{1/2}\ln(1-x)\,dx.$$

Integrînd prin părți, rezultă că o primitivă a funcției ln $(a-x)$ este $(x-a)\ln(a-x)-x$ pentru $x<a$. În acest caz avem:

$$A=[(x-2)\ln(2-x)-x]\Big|_0^{1/2}-[(x-1)\ln(1-x)-x]\Big|_0^{1/2}=\frac{3}{2}\ln\frac{4}{3}.$$

LV. 1°. Fie $[CD]$ diametrul perpendicular pe diametrul $[AB]$. Presupunem că M aparține arcului $\widehat{BC}$ (fără capetele B și C cînd triunghiul OMN nu există!); v. fig. M.B.81. Deoarece $m(\widehat{OMN})=90°$, rezultă că $m(\widehat{OMI})=45°$. Triunghiurile OMI și OBI sînt congruente deoarece OI este comună, $OM=OB$ (ca raze) și $\widehat{MOI}=\widehat{BOI}$. Atunci $m(\widehat{OBI})=45°$ și, cum O și B sînt fixe, rezultă că I aparține segmentului (BC). Mai precis, deoarece $m(\widehat{BOM})\in(0,90°)$, avem $m(\widehat{BOI})\in(0,45°)$, deci I aparține segmentului deschis (BI_0), unde I_0 este mijlocul segmentului $[BC]$. Reciproc, fie $I\in(BI_0)$ segment deschis. Atunci $m(\widehat{BOI})\in(0,45°)$. Construim unghiul BOM cu $m(\widehat{BOM})=2m(\widehat{BOI})\in(0,90°)$, deci M aparține arcului deschis $(\widehat{BC})$. Tangenta în M la cerc taie dreapta AB în N. Triunghiurile OMI și OBI sînt congruente deoarece OI este comună, $OM=OB$ (ca raze) și $m(\widehat{MOI})=m(\widehat{BOI})$. Atunci rezultă că $m(\widehat{OMI})=m(\widehat{OBI})=45°=\frac{1}{2}m(\widehat{OMN})$, deci MI este bisectoarea unghiului $\widehat{OMN}$. Obținem că I este centrul cercului înscris în triunghiul OMN (fiind la intersecția bisectoarelor MI și OI), deci I este punct al locului geometric. Datorită simetriei figurii (AB și CD sînt axe de simetrie) rezultă că, atunci cînd M aparține celorlalte trei arce deschise $(\widehat{AC})$, $(\widehat{AD})$ și $(\widehat{BD})$, punctul I descrie trei segmente deschise situate pe segmentele (AC), (AD) și (BD). În concluzie, locul geometric descris de I este format din patru jumătăți (segmente deschise) din laturile pătratului $ACBD$.

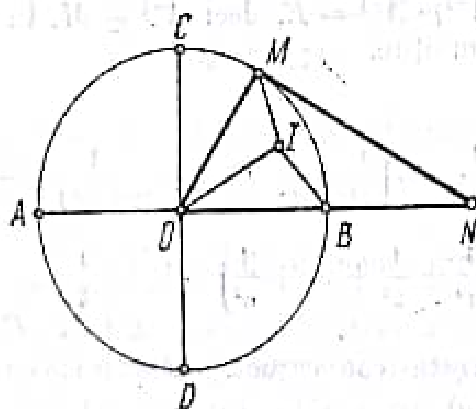


Fig. M.B.81

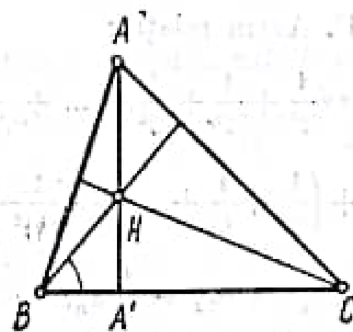


Fig. M.B.82

2°. Folosind formula $\operatorname{tg}(A+B)=\frac{\operatorname{tg}A+\operatorname{tg}B}{1-\operatorname{tg}A\operatorname{tg}B}$ rezultă:

$$\operatorname{tg}C=-\operatorname{tg}(A+B)=1,\quad \text{deci}\quad m(\hat{C})=\frac{\pi}{4}.$$

Deoarece $m(\widehat{HBA'})=\frac{\pi}{4}$, rezultă $HA'=BA'$. Dar $\operatorname{tg}B=\frac{AA'}{BA'}=2$, deci $AA'=2BA'=2HA'$, adică H este mijlocul înălțimii $[AA']$; v. fig. M.B.82.

3°. Avem fig. M.B.83. Din triunghiuri dreptunghice obținem imediat: $AC = \sqrt{AB^2+BC^2} = a\sqrt{5}$; $SB = \sqrt{SD^2+BD^2} = 3a$; $SA = a\sqrt{5}$; $SC = 2a\sqrt{2}$.

Rezultă $\cos(\widehat{ASB}) = \frac{\sqrt{5}}{3}$, $\cos(\widehat{CSB}) = \frac{2\sqrt{2}}{3}$. Notînd $SP = x$ și aplicînd teorema cosinusului în triunghiurile SAP și SCP obținem:

$$AP^2 = 5a^2 + x^2 - \frac{10\,ax}{3};\ CP^2 = 8a^2 + x^2 - \frac{16\,ax}{3}.$$

Triunghiul APC este dreptunghic în P dacă și numai dacă $AC^2 = AP^2 + CP^2$. Înlocuind segmentele calculate, rezultă ecuația $3x^2 - 13ax + 12a^2 = 0$, cu soluția acceptabilă $x = \frac{4a}{3}$.

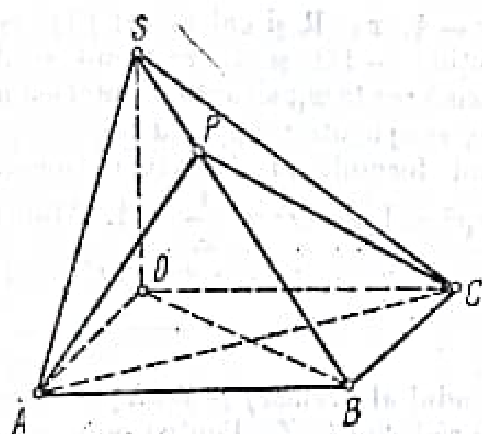


Fig. M.B.83

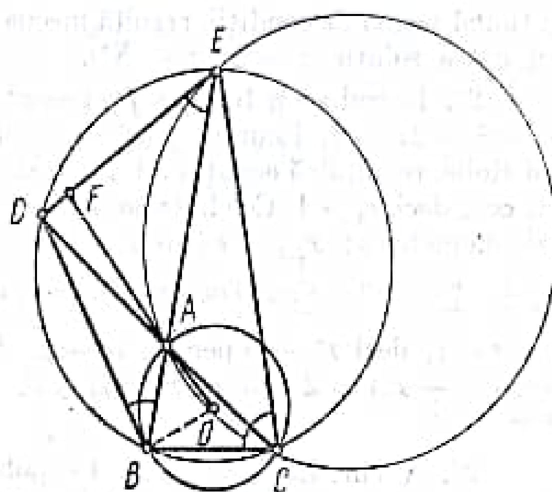


Fig. M.B.84

4°. Folosind formula $\cos\alpha + \cos\beta = 2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}$, rezultă $f(x) = 2\cos 4x \cdot \cos x - \cos x = \cos x(2\cos 4x - 1)$. Pentru $\cos x > 0$ putem scrie $\cos x = \sqrt{\frac{1+\cos 2x}{2}}$, deci avem: $f(x) = \sqrt{\frac{1+\cos 2x}{2}}(2\cos 4x - 1)$, pentru $\cos x > 0$.

Avem: $\cos\left(4\cdot\frac{\pi}{24}\right) = \cos\frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{2}$ și $\cos\left(2\cdot\frac{\pi}{24}\right) = \cos\frac{\pi}{12} = \sqrt{\frac{1+\cos\frac{\pi}{6}}{2}} = \frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$.

Rezultă $f\left(\frac{\pi}{24}\right) = \frac{\sqrt{4+\sqrt{6}+\sqrt{2}}}{2\sqrt{2}}(\sqrt{3}-1)$.

5°. a) Patrulaterul $BCED$ este inscriptibil. Rezultă $m(\widehat{DEB}) = m(\widehat{BCA})$ și $m(\widehat{DBE}) = m(\widehat{DCE})$. BD fiind tangentă la cercul circumscris triunghiului ABC avem: $m(\widehat{DBE}) = m(\widehat{BCA}) = m\left(\frac{\widehat{AB}}{2}\right)$ (se observă că AC este bisectoarea unghiului $\widehat{BCE}$). Rezultă $m(\widehat{DEB}) = m(\widehat{DCE}) = m\left(\frac{\widehat{AE}}{2}\right)$, deci DE este tangentă cercului circumscris triunghiului ACE (v. fig. M.B.84).

b) Fie F intersecția dreptelor AO și DE. Din ipoteză avem $m(\widehat{DBO}) = \frac{\pi}{2}$. Din punctul a) rezultă $m(\widehat{FOB}) = 2m(\widehat{BCA}) = m(\widehat{BCE})$. Cum unghiurile BDE și

BCE sînt suplementare obținem: $m(\widehat{FDB}) + m(\widehat{FOB}) = \pi$, deci $m(\widehat{DFO}) = \pi - m(\widehat{DBO}) = \frac{\pi}{2}$.

LVI. 1°. Impunem condițiile: $x \in N$, $x \geqslant 3$, $x \geqslant 4$, $x \geqslant 5$, deci $x \in \{5, 6, 7, \ldots\}$. Inecuațiile date se scriu echivalent sub forma:

$$x^3 \cdot 2^{x-4}\,(2C_x^3 - xC_x^4) < 0; \quad x^4 \cdot 2^{x-5}\,(x \cdot C_x^5 - 2C_x^4) < 0.$$

Deoarece $x > 0$ și $2^x > 0$ pentru orice $x \in R$, rezultă: $2C_x^3 - xC_x^4 < 0$; $xC_x^5 - 2C_x^4 < 0$. Înlocuind

$$C_x^3 = \frac{x(x-1)(x-2)}{6}, \; C_x^4 = \frac{x(x-1)(x-2)(x-3)}{24}, \; C_x^5 = \frac{x(x-1)(x-2)(x-3)(x-4)}{120}$$

și ținînd seama de condiții, rezultă inecuațiile: $-x^2 + 3x + 8 < 0$: $x^2 - 4x - 10 < 0$, cu unica soluție $x = 5$ ($x \in N$!).

2°. Introducem funcția $f(x) = x^3 - x^2 - x - 1$, $x \in R$ și calculăm: $f'(x) = 3x^2 - 2x - 1$. Ecuația $f'(x) = 0$ admite soluțiile $-1/3$ și 1. Folosind șirul lui Rolle, rezultă că ecuația admite o singură rădăcină reală x_1, situată în intervalul $(1, \infty)$, deci $x_1 > 1$. Celelalte soluții vor fi complex conjugate și se scriu sub formă trigonometrică: $x_{2,3} = r(\cos\alpha \pm i\sin\alpha)$. Folosind formula lui Moivre obținem: $x_2^n + x_3^n = 2r^n \cos n\alpha$. Dar $x_1 x_2 x_3 = 1$, de unde $x_1 r^2 = 1$, deci $r^2 = \frac{1}{x_1} < 1$. Atunci $0 < r < 1$, deci $r^n \to 0$ pentru $n \to \infty$. Rezultă $|r^n \cos n\alpha| = r^n |\cos n\alpha| \leqslant r^n$, deci: $\lim\limits_{n\to\infty}(x_2^n + x_3^n) = 2 \cdot \lim\limits_{n\to\infty}(r^n \cos n\alpha) = 0$.

3°. Avem: $Z_3 = \{\hat{0}, \hat{1}, \hat{2}\}$. Un polinom de gradul al treilea $f \in Z_3[X]$ este ireductibil peste Z_3 dacă și numai dacă f nu admite rădăcini în Z_3. Pentru polinomul dat $f = \hat{2}X^3 + (a + \hat{2})X + \hat{1}$ avem: $f(\hat{0}) = \hat{1} \neq \hat{0}$; $f(\hat{1}) = a + \hat{2}$ și $f(\hat{2}) = \hat{2} \cdot a$. Impunem condițiile $\hat{2} \cdot a \neq \hat{0}$ și $a + \hat{2} \neq \hat{0}$, deci $a \neq \hat{0}$ și $a \neq \hat{1}$; rezultă soluția $a = \hat{2}$.

4°. Pe intervalele $(-\infty, -1)$, $(-1, 0)$ $(0, \infty)$ funcția f este derivabilă fiind elementară pe fiecare din ele. Rămîne de studiat derivabilitatea în punctele $x = -1$ și $x = 0$. Deoarece $f(-1) = 0$, $\lim\limits_{\substack{x\to-1\\x<-1}} f(x) = 0$ și $\lim\limits_{\substack{x\to-1\\x>-1}} f(x) = \lim\limits_{\substack{x\to-1\\x>-1}} e^{\frac{1}{x^2+x}} = 0$, rezultă că f este continuă în $x = -1$. Analog avem: $f(0) = f(0-0) = f(0+0) = 0$, deci f este continuă și în $x = 0$. Rezultă f continuă pe R. Avem: $f'(x) = 0$, pentru $x \in (-\infty, -1) \cup (0, \infty)$ și $f'(x) = -\frac{2x+1}{(x^2+x)^2} e^{\frac{1}{x^2+x}}$, pentru $x \in (-1, 0)$. Avem: $\lim\limits_{\substack{x\to-1\\x<-1}} f'(x) = 0$ și $\lim\limits_{\substack{x\to-1\\x>-1}} f'(x) = \lim\limits_{\substack{x\to-1\\x>-1}} \left(-\frac{2x+1}{(x^2+x)^2} e^{\frac{1}{x^2+x}}\right) = 0$, deci f este derivabilă în $x = -1$. Analog rezultă f derivabilă și în $x = 0$, deci f este derivabilă pe R.

5°. Avem:

$$f(x) = \begin{cases} \sqrt{x^2 - 1} - x, & x \in (-\infty, -1); \\ \sqrt{1 - x^2} - x, & x \in [-1, 1]; \\ \sqrt{x^2 - 1} - x, & x \in (1, \infty). \end{cases}$$

Limitele la capete sînt următoarele:

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} (\sqrt{x^2-1} - x) = +\infty; \quad \lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to\infty} (\sqrt{x^2-1} - x) =$$

$$= \lim_{x\to\infty} \frac{-1}{\sqrt{x^2-1}+x} = 0$$

Rezultă: $y = 0$ asimptotă orizontală spre $+\infty$ şi, după calcule, $y = -2x$ asimptotă oblică spre $-\infty$. Derivata întîi are forma:

$$f'(x) = \begin{cases} \dfrac{x}{\sqrt{x^2-1}} - 1, & x \in (-\infty, -1); \\ -\dfrac{x}{\sqrt{1-x^2}} - 1, & x \in (-1, 1); \\ \dfrac{x}{\sqrt{x^2-1}} - 1, & x \in (1, \infty). \end{cases}$$

Funcţia f este continuă pe $\mathbf{R}$ şi derivabilă pe $\mathbf{R}\setminus\{-1, 1\}$; punctele $x = -1$ şi $x = 1$ sînt puncte de întoarcere. Graficul intersectează axa Ox în punctul $x = \frac{\sqrt{2}}{2}$ şi axa Oy în punctul $y = 1$. Rezultă tabloul de variaţie:

x	$-\infty$		-1		$-\frac{\sqrt{2}}{2}$		0		$\frac{\sqrt{2}}{2}$		1		$+\infty$
$f'(x)$	$-$	$-$	$-\infty$ ⋮ $+\infty$	$+$	0		$-$		$-$	$-\infty$		$+\infty$ $+$	$+$
$f(x)$	∞	↘	1	↗	$\sqrt{2}$	↘	1	↘	0	↘	-1	↗	0

Avem graficul din fig. M.B.85. Aria cerută este:

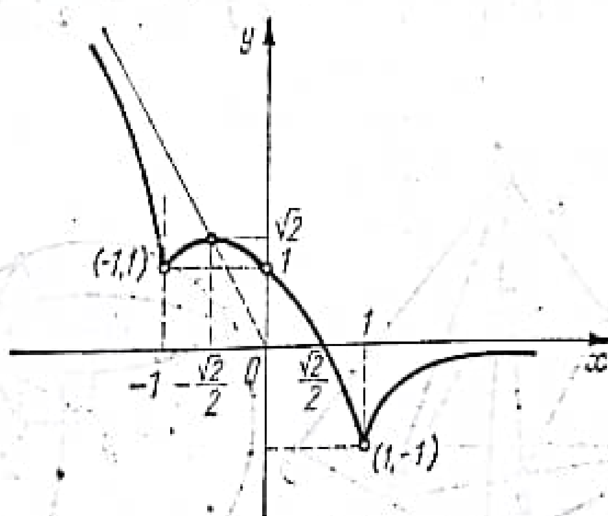


Fig. M.B.85

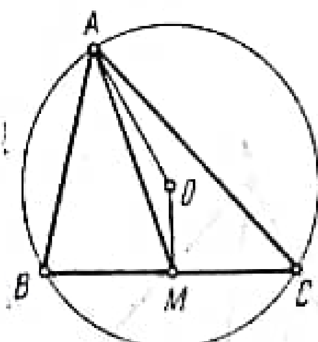


Fig. M.B.86

$$A = \int_{-1/2}^{1/2} f(x)\,dx = \int_{-1/2}^{1/2} (\sqrt{1-x^2} - x)\,dx = \frac{\pi}{6} + \frac{\sqrt{3}}{4}.$$

LVII. 1°. Avem fig. M.B.86. Teorema medianei dă:

$$AM^2 = \frac{2(AB^2 + AC^2) - BC^2}{4}.$$

În $\triangle OMB$ avem: $OM^2 = OB^2 - BM^2$. Rezultă $AM^2 - OM^2 = \frac{AB^2 + AC^2}{2} - OB^2 =$ $= \frac{k}{2} - R^2 = \text{const}$. Deoarece A şi O sînt fixe şi $AM^2 - OM^2 = \text{const}$, rezultă (vezi

manualul) că locul geometric al lui M este o dreaptă perpendiculară pe OA. În cazul problemei de față locul geometric este doar segmentul din acea dreaptă situat în interiorul cercului sau mulțimea vidă (dacă dreapta nu taie cercul).

2°. Notăm: $AB = c$; $AC = b$; $BC = b\sqrt{2}$. Avem: $\cos A = \dfrac{AB^2 + AC^2 - BC^2}{2AB \cdot AC}$, deci $\cos A = \dfrac{c^2 - b^2}{2bc}$. În triunghiul $AA'C$ avem: $\cos(\widehat{AA'C}) = \dfrac{AA'^2 + A'C^2 - AC^2}{2AA' \cdot A'C}$. Din teorema medianei rezultă: $AA'^2 = \dfrac{2(AB^2 + AC^2) - BC^2}{4} = \dfrac{c^2}{2}$. Obținem: $\cos(\widehat{AA'C}) = \dfrac{c^2 - b^2}{2bc} = \cos A$, de unde rezultă $\widehat{AA'C} \equiv \hat{A}$ (v. fig. M.B.87).

3°. Avem fig. M.B.88. Considerăm triunghiul ABN în care $BO = 2ON$. Ducem $OP \parallel MN$ ($P \in AB$). Deoarece $\dfrac{BO}{ON} = \dfrac{BP}{PM} = 2$, rezultă $BP = 2PM$, deci M este mijlocul lui AP ($BM = \dfrac{3}{4}AB$, de unde $PM = \dfrac{1}{4}AB = AM$). Atunci, în triunghiul AOP, MS este linie mijlocie, deci MN trece prin mijlocul S al înălțimii $[AO]$.

4°. Vom înmulți egalitatea dată cu $2\sin\dfrac{\pi}{7} \neq 0$, deci vom obține egalitatea echivalentă:

$$2\sin\frac{\pi}{7}\cos\frac{2\pi}{7} + 2\sin\frac{\pi}{7}\cos\frac{4\pi}{7} + 2\sin\frac{\pi}{7}\cos\frac{6\pi}{7} = -\sin\frac{\pi}{7}.$$

Folosind formula $2\sin x\cos y = \sin(x + y) + \sin(x - y)$, obținem:

$\left(\sin\dfrac{3\pi}{7} - \sin\dfrac{\pi}{7}\right) + \left(\sin\dfrac{5\pi}{7} - \sin\dfrac{3\pi}{7}\right) + \left(\sin\dfrac{7\pi}{7} - \sin\dfrac{5\pi}{7}\right) = -\sin\dfrac{\pi}{7}$, adică: $-\sin\dfrac{\pi}{7} = -\sin\dfrac{\pi}{7}$.

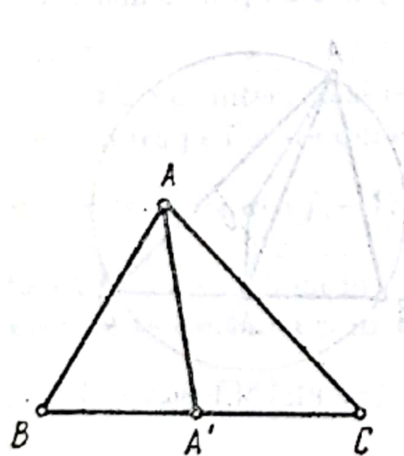


Fig. M.B.87

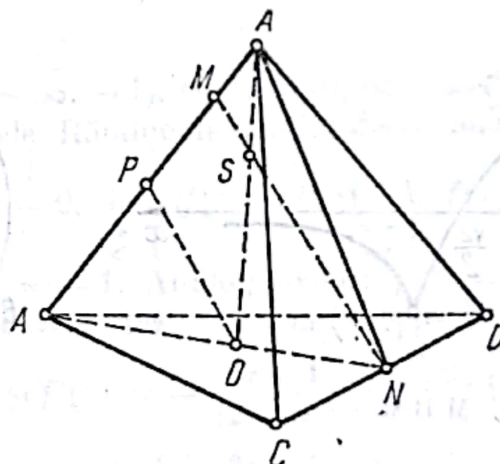


Fig. M.B.88

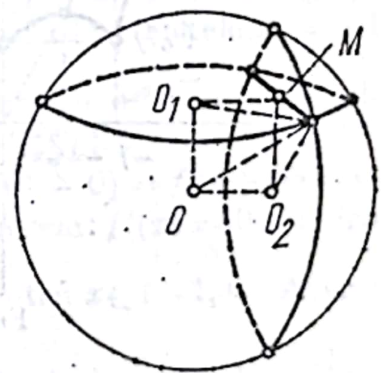


Fig. M.B.89

5°. Fie O centrul sferei, O_1 și O_2 centrele cercurilor de raze a, respectiv b și M piciorul perpendicularei dusă din O pe dreapta de intersecție a celor două plane (v. fig. M.B.89). Notăm: $OO_1 = x$, $OO_2 = y$ și fie R raza sferei; avem $OM = c$. Din triunghiuri dreptunghice rezultă relațiile: $x^2 + y^2 = c^2$; $x^2 + a^2 = R^2$; $y^2 + b^2 = R^2$. Adunînd ultimele două relații și ținînd seama de prima relație, rezultă: $2R^2 = a^2 + b^2 + c^2$, deci $R = \sqrt{\dfrac{a^2 + b^2 + c^2}{2}}$.



LVIII. 1°. Sistemul este echivalent cu:

$$\begin{cases}\sqrt{3x+y}=3x-11;\\ \sqrt{x-y}\ \ =17-3x,\end{cases}$$

şi condiţiile de existenţă sînt: $3x+y\geqslant 0$, $x-y\geqslant 0$, $3x\geqslant 11$, $17\geqslant 3x$. Rezultă că trebuie să avem îndeplinite condiţiile $\frac{11}{3}\leqslant x\leqslant\frac{17}{3}$, $-3x\leqslant y\leqslant x$. Prin ridicare la pătrat, sistemul devine:

$$\begin{cases}3x+y=9x^2-66x+121;\\ x-y=289-102x+9x^2.\end{cases}$$

Eliminînd necunoscuta y obţinem ecuaţia: $9x^2-86x+205=0$, care ne dă soluţiile $x_1=5$ şi $x_2=\frac{41}{9}$. Ambele soluţii satisfac condiţiile de existenţă. Pentru necunoscuta y obţinem: $y_1=1$ şi $y_2=-\frac{59}{9}$, care satisfac condiţiile de existenţă. Rezultă că sistemul are două soluţii: $(5, 1)$ şi $\left(\frac{41}{9}, -\frac{59}{9}\right)$.

2°. Trebuie să avem $|z^2-\mathrm{i}|=|z^2-3\mathrm{i}|$ cu condiţia $z^3\neq 3\mathrm{i}$. Punem $z=x+y\mathrm{i}$ şi obţinem:

$$|(x^2-y^2)+(2xy-1)\mathrm{i}|=|(x^2-y^2)+(2xy-3)\mathrm{i}|,$$

care este o relaţie echivalentă cu condiţia:

$$(x^2-y^2)^2+(2xy-1)^2=(x^2-y^2)^2+(2xy-3)^2.$$

Reducînd termenii asemenea rezultă că $z=x+y\mathrm{i}$ satisface condiţia $xy=1$ care ne spune că imaginea geometrică a lui z este o hiperbolă echilateră. Să arătăm că relaţia de condiţie $z^2\neq 3\mathrm{i}$ este satisfăcută de punctele hiperbolei $xy=1$. Într-adevăr, avem $z^2=x^2-y^2+2(xy)\mathrm{i}$ şi pentru punctele hiperbolei rezultă:

$$z^2=x^2-y^2+2\mathrm{i},\ \text{deci}\ z^2\neq 3\mathrm{i}.$$

3°. Avem simultan condiţiile:

$$\begin{cases}2C_n^{k+1}=C_n^k+C_n^{k+2};\\ 2C_n^{k+2}=C_n^{k+1}+C_n^{k+3};\end{cases}\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}\dfrac{2n!}{(k+1)!\,(n-k-1)!}=\dfrac{n!}{k!\,(n-k)!}+\dfrac{n!}{(k+2)!\,(n-k-2)!}\\[2ex] \dfrac{2n!}{(k+2)!\,(n-k-2)!}=\dfrac{n!}{(k+1)!\,(n-k-1)!}+\dfrac{n!}{(k+3)!\,(n-k-3)!}\end{cases}\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}\dfrac{2}{(k+1)(n-k-1)}=\dfrac{1}{(n-k)(n-k-1)}+\dfrac{1}{(k+1)(k+2)}\\[2ex] \dfrac{2}{(k+2)(n-k-2)}=\dfrac{1}{(n-k-2)(n-k-1)}+\dfrac{1}{(k+2)(k+3)}\end{cases}\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}2(n-k)(k+2)=(k+1)(k+2)+(n-k)(n-k-1)\\ 2(n-k-1)(k+3)=(k+1)(k+3)+(n-k-1)(n-k-2)\end{cases}\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}n^2+4k^2-4nk-5n+8k+2=0;\\ n^2+4k^2-4nk-9n+16k+14=0.\end{cases}$$

Prin scădere rezultă $4n-8k-12=0$, de unde obţinem $n=2k+3$. Înlocuind în ultima ecuaţie şi reducînd termenii asemenea rezultă $k=-2$, ceea ce este exclus prin ipoteză.

4°. Polinoamele din descompunere vor fi de grad $\geqslant 1$. Polinomul $P(x)$ fiind strict pozitiv nu are rădăcini reale, așa încît nu putem avea factori de gradul I. Mai rămîne de analizat descompunerea de forma: $P(x) = (x^2 + ax + b)(x^2 + cx + d)$. Prin identificarea coeficienților rezultă:

$$\begin{cases} a + c = 6; \\ ac + b + d = 13; \\ bc + ad = 12; \\ bd = 5. \end{cases}$$

Să arătăm că acest sistem nu are soluții în $\mathbf{Z}$. Din ultima relație deducem că avem posibilitățile: $(b, d) = (1, 5)$; $(b, d) = (5, 1)$; $(b, d) = (-1, -5)$ și $(b, d) = (-5, -1)$. Rezultă că $b + d = 6$ sau $b + d = -6$. Din primele două relații rezultă că trebuie să avem:

$$\begin{cases} a + c = 6; \\ ac = 7; \end{cases} \quad \text{sau} \quad \begin{cases} a + c = 6; \\ ac = 19. \end{cases}$$

Deducem că numerele a și c sînt soluțiile ecuației $t^2 - 6t + 7 = 0$ sau $t^2 - 6t + 19 = 0$. Prima ecuație are discriminantul $\Delta_1 = 8$, iar a doua $\Delta_2 = -40$. Rezultă că nu avem soluții în $\mathbf{Z}$.

5°. Considerăm două matrici $M(a_1, b_1)$ și $M(a_2, b_2)$ din $M_3(\mathbf{R})$. Prin înmulțire obținem o matrice de aceeași formă: $M(a_1, b_1) \cdot M(a_2, b_2) = M(a_3, b_3)$, în care $a_3 = a_1a_2 + 2b_1b_2$ și $b_3 = a_1b_2 + b_1a_2 + b_1b_2$. Mai mult, avem:

$$\det [M(a_1, b_1) \cdot M(a_2, b_2)] = \det M(a_1, b_1) \cdot \det M(a_2, b_2) = 1.$$

Deci G este o mulțime stabilă în raport cu operația de înmulțire a matricilor. Se observă că matricea unitate $I_3 = M(1, 0)$ aparține mulțimii G. Prin calcul direct obținem:

$$M^*(a, b) = \begin{pmatrix} a^2 - b^2 & b^2 - ab & b^2 - ab \\ b^2 - ab & a^2 - b^2 & b^2 - ab \\ b^2 - ab & b^2 - ab & a^2 - b^2 \end{pmatrix} = M(a^2 - b^2, b^2 - ab),$$

deci avem $M^*(a, b) \in G$. Matricea inversă este $M^{-1}(a, b) = M(a^2 - b^2, b^2 - ab)$, deci $M^{-1}(a, b) \in G$. În concluzie $(G, \cdot)$ este un grup. Se mai observă că înmulțirea este comutativă, deci avem un grup abelian.

LIX. 1°. Pentru orice $n \geqslant 1$ avem: $X_{n+1} < \frac{n}{n+1} X_n < X_n$, de unde rezultă că șirul este strict descrescător. Deci $X_n \in (0, X_1]$, $(\forall) n \geqslant 1$. Șirul fiind monoton și mărginit este convergent. Putem scrie:

$$X_n < \frac{n-1}{n} X_{n-1} < \frac{n-2}{n} X_{n-2} < \ldots < \frac{1}{n} X_1.$$

Aplicînd criteriul majorării avem: $\lim\limits_{n\to\infty} X_n = 0$.

2°. Domeniul maxim de definiție este $D = (-\infty, -1) \cup (-1, 0) \cup (0, +\infty)$. Observăm că f nu este nici pară și nici impară. Graficul funcției nu intersectează axele.

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty; \quad \lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty;$$

$$\lim_{\substack{x\to-1 \\ x<-1}} f(x) = -\infty; \quad \lim_{\substack{x\to-1 \\ x>-1}} f(x) = +\infty.$$

$$\lim_{\substack{x\to0 \\ x<0}} f(x) = 0; \quad \lim_{\substack{x\to0 \\ x>0}} f(x) = \lim_{\substack{x\to0 \\ x>0}} x^2 e^{\frac{1}{x}} = \lim_{t\to+\infty} \frac{1}{t^2} e^t = +\infty,$$

$\left(\text{unde am notat } t = \frac{1}{x},\ x > 0\right)$. Asimptotele verticale sînt date de ecuațiile $x = -1$, $x = 0$.

Pentru determinarea asimptotelor oblice avem:

$$m = \lim_{x \to -\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \to -\infty} \frac{x^2}{x(x+1)} e^{\frac{1}{x}} = 1;$$

$$n = \lim_{x \to -\infty} \left(\frac{x^2}{x+1} e^{\frac{1}{x}} - x \right) = \lim_{x \to -\infty} \frac{x^2 e^{\frac{1}{x}} - x^2 - x}{x+1}.$$

Dacă substituim $x = \frac{1}{t}$ $(t < 0)$ obținem:

$$n = \lim_{\substack{t \to 0 \\ t < 0}} \frac{e^t - 1 - t}{(1+t)t} = \lim_{\substack{t \to 0 \\ t < 0}} \frac{e^t - 1 - t}{t} = \lim_{\substack{t \to 0 \\ t < 0}} \frac{e^t - 1}{1} = 0.$$

În concluzie $y = x$ este asimptotică la $-\infty$. Analog se arată că $y = x$ este asimptotică la $+\infty$. Pentru calculul derivatelor avem:

$$f'(x) = \frac{2x(x+1) - x^2}{(x+1)^2} e^{\frac{1}{x}} - \frac{1}{x+1} e^{\frac{1}{x}} = \frac{e^{\frac{1}{x}}(x^2 + x - 1)}{(x+1)^2}.$$

Rădăcinile primei derivate sînt: $x_1 = -\frac{\sqrt{5}+1}{2}$, $x_2 = \frac{\sqrt{5}-1}{2}$.

$$f''(x) = \frac{(2x+1)(x+1)^2 - 2(x+1)(x^2+x-1)}{(x+1)^4} e^{\frac{1}{x}} - \frac{(x^2+x-1)}{(x+1)^2 x^2} e^{\frac{1}{x}} = \frac{(x^2+1) e^{\frac{1}{x}}}{x^2(x+1)^3}.$$

Ecuația $f''(x) = 0$ nu are soluții în D. Avem tabloul de variație:

x	$-\infty$		$-\frac{\sqrt{5}+1}{2}$		-1			0			$\frac{\sqrt{5}-1}{2}$			$+\infty$
$f'(x)$	+	+	0	−	−	−	−	−	−	−	0	+	+	
$f(x)$	$-\infty$	↗	a	↘	$-\infty$ |	$+\infty$	↘	0 |	$+\infty$	↘	b	↗		$+\infty$
$f''(x)$	−	−	−	−		+	+		+	+		+	+	

Graficul funcției este prezentat în fig. M.B.90.

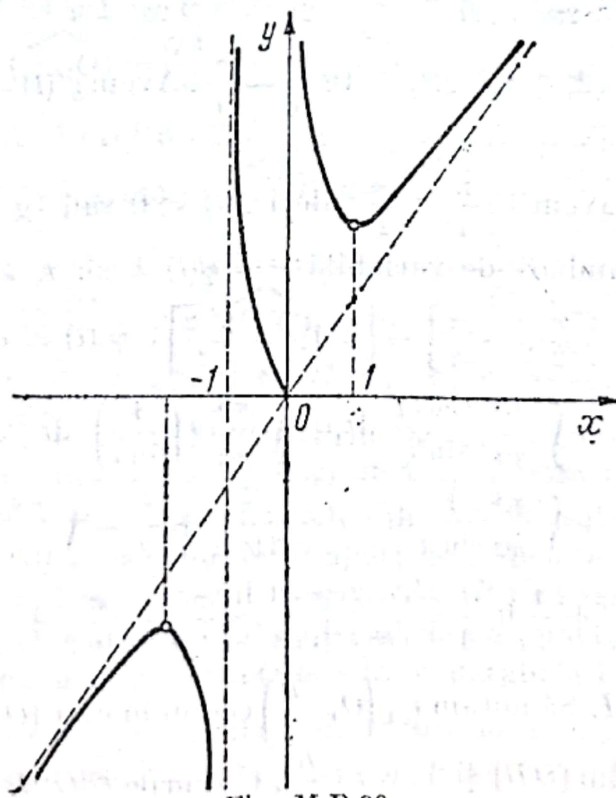


Fig. M.B.90

3°. Facem notaţia $t = \sin^2 x$ şi observăm că pentru orice $x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ avem $t \in [0, 1]$. Considerăm funcţia $f : [0, 1] \to \mathbf{R}, f(t) = t^n + (1-t)^n$ care este derivabilă şi avem $f'(t) = nt^{n-1} + n(1-t)^{n-1}$. Ecuaţia $f'(t) = 0$ are soluţia $t = \frac{1}{2}$. Pe intervalul $\left[0, \frac{1}{2}\right)$ avem $f'(t) < 0$, deci f este descrescătoare, iar pe intervalul $\left(\frac{1}{2}, 1\right]$ avem $f'(t) > 0$, deci f este crescătoare. Punctul $t = \frac{1}{2}$ este un punct de minim şi avem $f(t) \geqslant f\left(\frac{1}{2}\right)$ sau $f(t) \geqslant \frac{1}{2^{n-1}}$, $(\forall) t \in [0, 1]$. Avem $f(0) = f(1) = 1$, deci $f(t) \in (0, 1]$ pentru $t \in [0, 1]$. Dacă $a \in (0, 1]$ există $n \in \mathbf{N}$ astfel incit $\frac{1}{2^{n-1}} < a$ $\left(\text{putem lua } n > 1 + \log_2\left(\frac{1}{a}\right)\right)$. Deoarece f este continuă pe $[0, 1]$ rezultă că există $t_0 \in [0, 1]$ astfel incit $f(t_0) = a$. Funcţia $\sin^2 : \left[0, \frac{\pi}{2}\right] \to [0, 1]$ este bijectivă, aşa că există $x_0 \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ astfel incit $\sin^2 x_0 = t_0$. Prin urmare, $(\forall) a \in (0, 1]$ există $x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ şi $n \in \mathbf{N}$ astfel incit $\sin^{2n} x + \cos^{2n} x = a$.

4°. Considerăm funcţia $f : [2, +\infty) \to \mathbf{R}, f(t) = t \cos \frac{\pi}{t}$ care este continuă pe $[x, x+1] \subset [2, +\infty)$ şi derivabilă pe $(x, x+1)$. Aplicînd teorema lui Lagrange rezultă că există $c \in (x, x+1)$ astfel incit să avem: $f(x+1) - f(x) = f'(c)$ sau $f(x+1) - f(x) = \cos \frac{\pi}{c} + \frac{\pi}{c} \sin \frac{\pi}{c}$, unde c depinde de x. Problema revine la a dovedi că pentru $t > 2$ avem $\cos \frac{\pi}{t} + \frac{\pi}{t} \sin \frac{\pi}{t} > 1$. Această inegalitate este echivalentă cu inegalitatea:

$$2 \frac{\pi}{t} \sin \frac{\pi}{2t} \cos \frac{\pi}{2t} > 2\sin^2 \frac{\pi}{2t} \text{ sau } \operatorname{tg} \frac{\pi}{2t} < \frac{\pi}{t},\ t > 2.$$

Considerăm funcţia $g : (2, +\infty), g(t) = \operatorname{tg} \frac{\pi}{2t} - \frac{\pi}{t}$. Avem $g'(t) = \frac{\pi}{t^2}\left(1 - \frac{2}{\cos^2 \frac{\pi}{2t}}\right) < 0$, $t > 2$. Pentru $t = 2$ avem $\operatorname{tg} \frac{\pi}{4} < \frac{\pi}{2}$, deci $g(t) < 0$ sau $\operatorname{tg} \frac{\pi}{2t} < \frac{\pi}{t}$ pentru $t > 2$.

5°. Facem o schimbare de variabilă $x = \varphi(t) = \sin t$,

$$\varphi : \left[-\frac{\pi}{2}, -\frac{\pi}{4}\right] \to \left[-1, -\frac{\sqrt{2}}{2}\right],\ \varphi'(t) = \cos t.$$

$$I = \int_{-\pi/2}^{-\pi/4} \frac{t \cos t}{\sin^2 t}\, dt = \int_{-\pi/2}^{-\pi/4} t \left(\frac{1}{\sin t}\right)' dt =$$

$$= -\frac{t}{\sin t}\Bigg|_{-\pi/2}^{-\pi/4} + \int_{-\pi/2}^{-\pi/4} \frac{1}{\sin t}\, dt = -\frac{\pi}{2\sqrt{2}} + \frac{\pi}{2} - \int_{-\pi/2}^{-\pi/4} \frac{(\cos t)'}{1 - \cos^2 t}\, dt =$$

$$= \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{2\sqrt{2}} + \frac{1}{2} \ln \frac{1 - \cos t}{1 + \cos t}\Bigg|_{-\pi/2}^{-\pi/4} = \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{2\sqrt{2}} + \frac{1}{2} \ln \frac{2 - \sqrt{2}}{2 + \sqrt{2}}.$$

IX. 1°. *Metoda I.* Să notăm $\mathcal{C}_1\left(O_1, \frac{R}{2}\right)$ cercul în care $[OB]$ este diametrul, deci cu centrul în mijlocul lui $[OB]$ şi de rază $\frac{R}{2}$. Cercurile $\mathcal{C}(O, R)$ şi $\mathcal{C}_1\left(O_1, \frac{R}{2}\right)$ sînt tan-

gente interioare cu punctul de tangență în B (distanța dintre centre fiind egală cu diferența razelor). Rezultă că M este în exteriorul cercului $\mathcal{C}_1\left(O, \frac{R}{2}\right)$ (v. fig. M.B. 91). Presupunem că M este de aceeași parte cu B față de dreapta OA. Atunci avem $m(\widehat{OMA}) \leqslant \frac{1}{2} m(\widehat{OA}) = m(\widehat{OBA})$, unde $\widehat{OA}$ este arcul care nu-l conține pe B. Avem egalitate cînd M coincide cu B. Dacă M este de aceeași parte cu C față de OA, raționamentul se repetă și se are în vedere că $m(\widehat{OBA}) = m(\widehat{OCA})$.

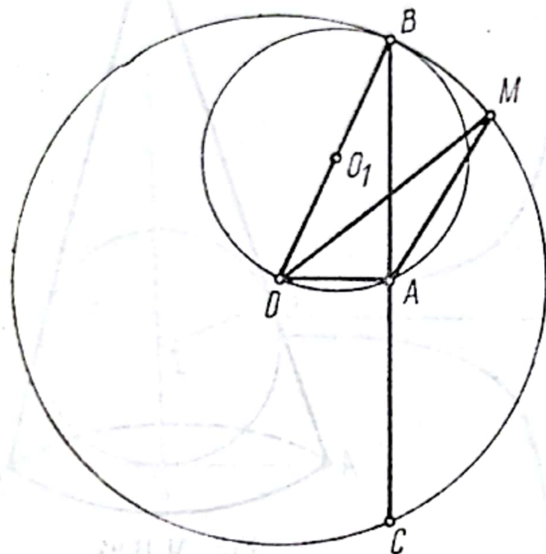


Fig. M.B.91

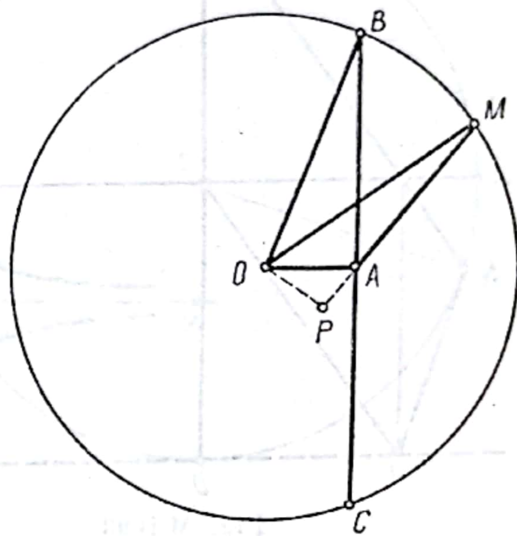


Fig. M.B.92

Metoda II. Unghiurile $\widehat{ABO}$ și $\widehat{AMO}$ sînt ascuțite deoarece au cîte o latură ($|BO$, respectiv, $|MO$) diametru în cercul dat. Fie P proiecția lui O pe AM. Avem (v. fig. M.B.92): $\sin(\widehat{ABO}) = \frac{OA}{R}$ și $\sin(\widehat{AMO}) = \frac{OP}{R}$. Din triunghiul dreptunghic OPA avem $OP \leqslant OA$. Rezultă că $\sin(\widehat{AMO}) \leqslant \sin(\widehat{ABO})$. Funcția sin este crescătoare pe $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$, deci avem $m(\widehat{AMO}) \leqslant m(\widehat{ABO})$.

2°. i) Patrulaterul $OMNP$ este inscriptibil deoarece $m(\widehat{OMP}) = m(\widehat{ONP}) = 90°$. Rezultă că avem $m(\widehat{MNO}) = m(\widehat{MPO})$. Din ipoteză $MP \parallel CO$, deci $m(\widehat{NMP}) = m(\widehat{NCO})$. Din triunghiul isoscel ONC rezultă $m(\widehat{NCO}) = m(\widehat{MNO})$. În consecință, obținem $m(\widehat{NMP}) = m(\widehat{MPO})$. Prin urmare $NM \parallel PO$, ceea ce arată că $OMNP$ este un trapez inscriptibil și deci un trapez isoscel.

ii) Deoarece $OMNP$ este trapez isoscel, diagonalele sale sînt congruente, deci $MP = ON = R$. Rezultă că punctul P aparține tangentei în D la cercul $\mathcal{C}(O, R)$, pe care o notăm cu d. Din trapezul isoscel $OMNP$ mai rezultă că $QO = QP$. Prin urmare Q este un punct variabil egal depărtat de un punct fix O și o dreaptă fixă d (v. fig. M.B.93). Rezultă că punctul Q se află pe parabola Γ de focar O și directoare dreapta d. Pe de altă parte, punctul Q este în interiorul unghiului $\widehat{AOD}$, fiind situat pe (ON). Rezultă că punctul Q aparține arcului de parabolă Γ din interiorul unghiului $\widehat{AOD}$, avînd capetele în A și mijlocul lui $[OD]$. Capetele arcului nu aparțin locului

deoarece $(ON]$ este în interiorul unghiului $\widehat{AOD}$. Fie Q un punct al acestui arc și N intersecția lui OQ cu cercul $\mathscr{C}(O, R)$. Se notează cu M și P intersecția paralelei prin Q la CD cu AO, respectiv d. Observăm că $MQ = NQ$, $QO = QP$, deci $\triangle OMQ \equiv \triangle QNP$ care ne arată că $NP \perp NO$. Prin urmare Q aparține locului căutat. În concluzie locul geometric este arcul parabolei Γ cuprins între A și mijlocul lui $[OD]$.

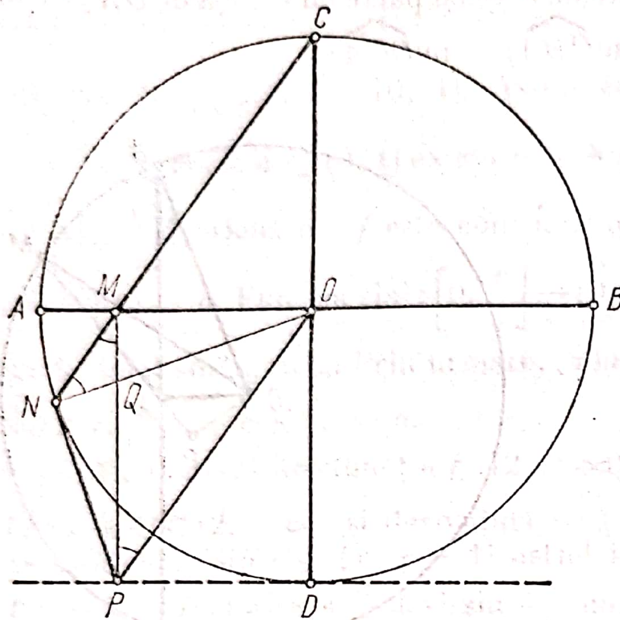


Fig. M.B.93

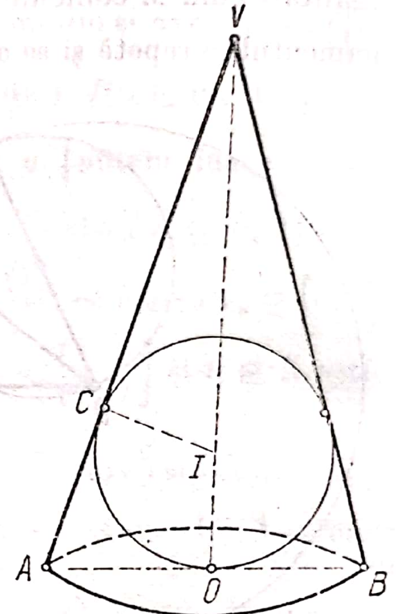


Fig. M.B.94

3°. Aria totală a conului este $\pi R(R+G)$, unde R este raza cercului de bază și G este lungimea generatoarei. Aria sferei de rază r este $4\pi r^2$. Vîrful V al conului se proiectează în centrul O al cercului de bază cu diametrul $[AB]$. Centrul sferei înscrise I este situat pe înălțimea $[VO]$, iar proiecția lui I pe VA este C. Din asemănarea triunghiurilor VIC și VOA rezultă imediat (v. fig. M.B.94): $\frac{r}{G-R} = \frac{R}{\sqrt{G^2-R^2}}$, de unde obținem $r = \frac{R(G-R)}{\sqrt{G^2-R^2}}$. Inegalitatea de demonstrat se scrie: $\frac{\pi R(R+G)}{4\pi r^2} \geqslant 2$. Înlocuind valoarea lui r de mai sus rezultă: $\frac{(R+G)^2}{4R(G-R)} \geqslant 2$, care este echivalentă cu inegalitatea evidentă: $(G-3R)^2 \geqslant 0$. Avem egalitate dacă și numai dacă $G = 3R$.

4°. Cele două drepte perpendiculare ne dau un reper cartezian în plan în raport cu care punctul M are coordonatele (x, y). Distanțele lui M la cele două axe sînt $|x|$ și $|y|$ așa încît avem relația metrică: $|x| + |y| = \frac{1}{|x|} + \frac{1}{|y|}$, $(x \neq 0, y \neq 0)$. Această relație metrică este echivalentă cu $|x| \cdot |y| = 1$. Rezultă că punctul $M(x, y)$ satisface ecuația $xy = 1$ sau ecuația $xy = -1$. Prin urmare locul geometric al punctului M este format din două hiperbole echilaterale reprezentate în fig. M.B.95.

5°. Înlocuim $\sin 3x = 3\sin x - 4\sin^3 x$ în ecuația dată și obținem: $m^2(3\sin x - 4\sin^3 x)^2 = \sin^2 x$, sau $\sin^2 x[m^2(3-4\sin^2 x)^2 - 1] = 0$. Observăm că: (1) $x = k\pi$, $k \in \mathbf{Z}$, este o soluție a ecuației date. Celelalte soluții sînt date de ecuațiile: (3) $m(3-4\sin^2 x) = 1$; (4) $m(3-4\sin^2 x) = -1$, unde $m > 0$. Ecuația (3) este echivalentă cu ecuația (3') $\sin^2 x = \frac{3m-1}{4m}$, $m > 0$. Pentru $m = \frac{1}{3}$ obținem solu-

ția (1). Ecuația (3') are soluții reale dacă $m \geqslant \frac{1}{3}$. Pentru $m < \frac{1}{3}$ (3') nu are soluții reale. Deci, mai obținem soluții diferite de (1):

(5) $$x = (-1)^k \arcsin \sqrt{\frac{3m-1}{4m}} + k\pi;$$

(6) $$x = (-1)^{k+1} \arcsin \left(\sqrt{\frac{3m-1}{4m}}\right) + k\pi, \text{ unde } m > \frac{1}{3}.$$

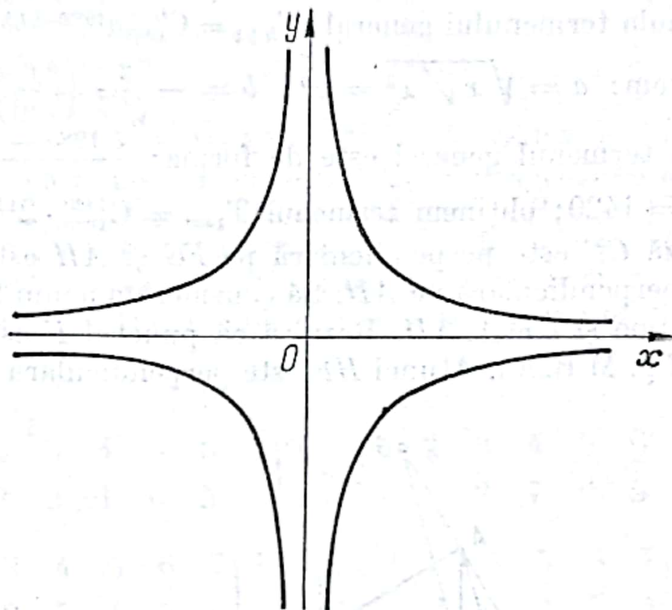


Fig. M.B.95

Din ecuația (4) rezultă: (4') $\sin^2 x = \frac{3m+1}{4m}$. Această ecuație are soluții reale dacă $0 \leqslant \frac{3m+1}{4m} \leqslant 1$. Prin ipoteză $m > 0$, așa încît prima inegalitate este satisfăcută. A doua inegalitate are loc pentru $m \geqslant 1$. Pentru $m = 1$ obținem: (7) $x = k\pi + \frac{\pi}{2}$. Pentru $m > 1$ rezultă soluțiile:

(8) $$x = (-1)^k \arcsin \sqrt{\frac{3m+1}{4m}} + k\pi;$$

(9) $$x = (-1)^{k+1} \arcsin \sqrt{\frac{3m+1}{4m}} + k\pi.$$

În concluzie, pentru $m \in \left(0, \frac{1}{3}\right]$ avem soluția (1), pentru $m \in \left(\frac{1}{3}, 1\right)$ avem soluțiile (1), (5) și (6). Pentru $m = 1$ soluțiile sînt date de (1), (5), (6) și (7). Pentru $m > 1$ soluțiile sînt date de (1), (5), (6), (8) și (9).

LXI. 1°. Presupunem că avem ordinea $m > n > p > q$, așa încît polinomul dat se scrie: $f(X) = X^q(X^a + X^b + X^c + 1)$, unde $a = m - q$, $b = n - q$, $c = p - q$, sînt numere naturale $\geqslant 1$. Polinomul $X^3 + X^2 + X + 1$ are rădăcina $X_1 = -1$. Prin împărțire cu $X + 1$ rezultă cîtul $X^2 + 1$ cu rădăcinile imaginare $X_2 = i$ și $X_3 = -i$. Pentru a determina a, b și c punem condiția ca $f(X)$ să fie divizibil cu $X^3 + X^2 + X + 1$. Prin urmare trebuie să avem: $f(-1) = 0$, $f(i) = 0$, $f(-i) = 0$. Condiția $(-1)^a + (-1)^b + (-1)^c + 1 = 0$ este satisfăcută dacă din

cele trei numere naturale (a, b, c), două sînt impare și unul este par. Notăm $a = 2a' + 1$, $b = 2b' + 1$ și $c = 2c'$, deci $f(X)$ se scrie: $f(X) = X^q(X^{2a'+1} + X^{2b'+1} + X^{2c'} + 1)$. Polinomul $f(X)$ admite rădăcina i dacă avem: $(-1)^{a'}\text{i} + (-1)^{b'}\text{i} + (-1)^{c'} + 1 = 0$. Rezultă că trebuie să avem c' impar, iar a' și b' de parități diferite. Luăm $a' = 2k + 1$, $b' = 2l$ și $c' = 2r + 1$. Polinomul devine: $f(X) = X^q(X^{4k+3} + X^{4l+1} + X^{4r+2} + 1)$. În concluzie: $m = q + 4k + 3$, $n = q + 4l + 1$, $p = q + 4r + 2$, unde q, k, l, r sînt numere naturale. Mai observăm că m, n, p și q pot fi numere naturale care împărțite la 4 să dea resturi diferite între ele.

2°. Avem formula termenului general: $\text{T}_{k+1} = \text{C}_{1988}^{k}a^{1988-k}b^{k}$, unde k este natural, $k \leqslant 1988$ și avem: $a = \sqrt{x\sqrt[3]{x^2}} = x^{\frac{5}{6}}$; $b = -\frac{2}{\sqrt[3]{x}} = -2x^{-\frac{1}{3}}$. Rezultă că exponentul lui x din termenul general este de forma: $\frac{5(1988 - k)}{6} - \frac{k}{3}$, care se anulează pentru $k = 1420$; obținem termenul $\text{T}_{1421} = \text{C}_{1988}^{1420} \cdot 2^{1420}$.

3°. Prin ipoteză CF este perpendiculară pe FG și AH este paralelă cu FG. Rezultă că CF este perpendiculară pe AH. Să considerăm acum triunghiul ACH în care $[AD]$ este înălțime și $CF \perp AH$. Rezultă că punctul F este ortocentrul triunghiului ACH (v. fig. M.B.96). Atunci HF este perpendiculară pe AC (din concu-

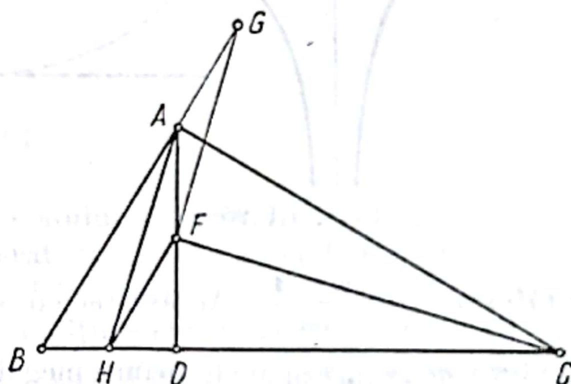


Fig. M.B.96

rența înălțimilor). Pe de altă parte $AB \perp AC$. Rezultă că HF și AB sînt paralele. În concluzie, patrulaterul $AGFH$ are laturile paralele două cîte două, deci este paralelogram.

4°. Avem arccos $:[-1, +1] \to [0, \pi]$ și arctg $: \mathbf{R} \to \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$. Rezultă că ecuația are sens pe domeniul $D = [-1, +1]$. Să observăm că imaginea lui D prin arctg este $\left[-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}\right]$ și avem $[0, \pi] \cap \left[-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}\right] = \left[0, \frac{\pi}{4}\right]$. Mai observăm că: arccos $: \left[\frac{\sqrt{2}}{2}, 1\right] \to \left[0, \frac{\pi}{4}\right]$ și arctg $: \left[\frac{\sqrt{2}}{2}, 1\right] \to \left[\alpha_0, \frac{\pi}{4}\right]$, cu $\alpha_0 = \text{arctg}\frac{\sqrt{2}}{2}$, sînt funcții bijective. Să notăm $\alpha = \text{arctg}\, x$. Ecuația devine $\cos\alpha = x$ și mai avem $\text{tg}\,\alpha = x$. Din formula fundamentală $\cos^2\alpha + \sin^2\alpha = 1$ și din $\text{tg}\,\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$ deducem că x satisface ecuația $x^2 + x^4 = 1$, din care reținem rădăcina pozitivă $x_0 = \sqrt{\frac{\sqrt{5} - 1}{2}}$. Mai trebuie arătat că $x_0 \in \left[\frac{\sqrt{2}}{2}, 1\right]$. Este evident că avem $\frac{\sqrt{5} - 1}{2} > \frac{1}{2}$ și $\frac{\sqrt{5} - 1}{2} < 1$.

LXII. 1°. Cum $\alpha > 0$, logaritmînd în baza e, prima ecuație a sistemului se mai scrie ca: $\frac{x}{y} \ln 2 = \frac{y}{x} \ln \alpha$, de unde: (1) $\frac{x^2}{y^2} = \frac{\ln \alpha}{\ln 2} > 0$, deoarece $x \neq 0$ și $y \neq 0$, iar $\ln 2 > 0$. Rezultă $\ln \alpha > 0$, deci $\alpha > 1$. Pe de altă parte: (2) $x^2 = y^\alpha$, și, ținînd cont de această egalitate în (1), obținem: (3) $y^{\alpha-2} = \frac{\ln \alpha}{\ln 2}$. Dacă $\alpha = 2$, atunci (3) este verificată pentru orice $y \in \mathbf{R} \setminus \{0\}$, iar din (2) găsim că $x = y$ sau $x = -y$. Dacă $\alpha \in (1, 2) \cup (2, +\infty)$, din (3) rezultă: $y = \left(\frac{\ln \alpha}{\ln 2}\right)^{\frac{1}{\alpha - 2}}$ și din (2) obținem: $x = \pm \left(\frac{\ln \alpha}{\ln 2}\right)^{\frac{\alpha}{2(\alpha-2)}}$.

2°. Cum $X^3 + 1 = (X + 1)(X^2 - X + 1)$, rezultă că P este divizibil cu $X^2 - X + 1$ dacă și numai dacă este divizibil cu $X - \omega$ și $X - \overline{\omega}$, unde $\omega^3 = -1 = \overline{\omega}^3$, cu $\omega \neq -1 \neq \overline{\omega}$. Pe de altă parte: $P = (X^3)^m - X(X^3)^n + X^2(X^3)^p$ și, dacă ținem seama că $P(\omega) = 0$ (sau $P(\overline{\omega}) = 0$), găsim: $(-1)^m - \omega(-1)^n + \omega^2(-1)^p = 0$, egalitate satisfăcută atunci cînd m, n și p au simultan aceeași paritate, cu alte cuvinte atunci cînd m, n și p sînt pari sau atunci cînd m, n și p sînt impari.

3°. Cum

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 7 & 3 & 2 & 1 & 6 & 5 & 4 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 4 & 3 & 2 & 7 & 6 & 5 & 1 \end{pmatrix} \text{ și}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 3 & 1 & 2 & 7 & 4 & 5 & 6 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 2 & 3 & 1 & 5 & 6 & 7 & 4 \end{pmatrix}, \text{ găsim:}$$

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 4 & 3 & 2 & 7 & 6 & 5 & 1 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 5 & 1 & 3 & 6 & 4 & 7 & 2 \end{pmatrix} \circ$$

$$\circ \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 2 & 3 & 1 & 5 & 6 & 7 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 4 & 2 & 6 & 7 & 1 & 3 & 5 \end{pmatrix}.$$

4°. Cum

$$X^2 = X \cdot X = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix};$$

$$X^3 = X \cdot X^2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}; \quad X^4 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = I,$$

rezultă, fără dificultate, că matricile respective formează un grup ciclic cu patru elemente.

5°. Ținem seama că

$$z_2 = \frac{1 - a + bi}{1 + a - bi} = \frac{(1 - a + bi)(1 + a + bi)}{(1 + a)^2 + b^2} = \frac{1 - a^2 - b^2 + 2bi}{(1 + a)^2 + b^2}.$$

deci

$$z_1 - z_2 = a + bi - \frac{1 - a^2 - b^2 + 2bi}{(1 + a)^2 + b^2} =$$

$$= \frac{a[(1 + a)^2 + b^2] + a^2 + b^2 - 1 + (a^2 + b^2 - 1 + 2a)bi}{(1 + a)^2 + b^2} \in \mathbf{R}$$

dacă și numai dacă $\mathrm{Im}(z_1 - z_2) = 0$, adică: (1) $(a^2 + b^2 - 1 + 2a)b = 0$. Analog, cum

$$z_2^2 = \frac{(1 - a^2 - b^2)^2 - 4b^2 + 4(1 - a^2 - b^2)bi}{[(1 + a)^2 + b^2]^2}$$

avem că $z_2^2 \in \mathbf{R}$ dacă și numai dacă (2) $(a^2 + b^2 - 1)b = 0$. Cum (1) și (2) trebuie să fie îndeplinite simultan, rezultă că: dacă $b = 0$, atunci condițiile respective sînt satisfăcute, iar $z_1 = a$, $(\forall)a \in \mathbf{R}$; dacă $b \neq 0$, atunci, din (2), avem (3) $a^2 + b^2 - 1 = 0$ și, dacă ținem seama de (3) în (1), obținem $a = 0$, valoare care, înlocuită în (3), conduce la $b = \pm 1$; prin urmare $z_1 = i$ sau $z_1 = -i$.

LXIII. 1°. Cum

$$\cos^6 x - \sin^6 x = (\cos^2 x)^3 - (\sin^2 x)^3 =$$

$$= (\cos^2 x - \sin^2 x)(\cos^4 x + \sin^2 x \cos^2 x + \sin^4 x) =$$

$$= [(\sin^2 x + \cos^2 x)^2 - \sin^2 x \cos^2 x]\cos 2x = \left[1 - \frac{(\sin 2x)^2}{4}\right]\cos 2x,$$

ecuația dată se mai scrie: $2\left[1 - \frac{(\sin 2x)^2}{4}\right]\cos 2x = 2 \sin 2x \cos 2x$, de unde:

a) $\cos 2x = 0$, adică: $2x = k\pi + \frac{\pi}{2}$, $(\forall)k \in \mathbf{Z}$, deci $x \in \left\{\frac{k\pi}{2} + \frac{\pi}{4} \mid k \in \mathbf{Z}\right\}$, sau

b) $1 - \frac{(\sin 2x)^2}{4} = \sin 2x$, echivalentă cu: (1) $(\sin 2x)^2 + 4 \sin 2x - 4 = 0$. Dar (1) se mai scrie ca: $(\sin 2x)^2 + 4 \sin 2x + 4 - 8 = 0$, adică: $(2 + \sin 2x)^2 - 8 = 0$, de unde: $2 + \sin 2x = \pm 2\sqrt{2}$, putînd fi acceptată numai situația (2) $\sin 2x = -2 + 2\sqrt{2}$, deoarece $\sin 2x \in [-1, 1]$, ecuația (2) fiind verificată pentru $2x = k\pi + (-1)^k \arcsin(-2 + 2\sqrt{2})$, $(\forall)k \in \mathbf{Z}$, ceea ce revine la: $x \in \left\{\frac{k}{2}\pi + \frac{(-1)^k}{2}\arcsin(-2 + 2\sqrt{2}) \mid k \in \mathbf{Z}\right\}$. Așadar, ecuația dată este verificată pentru $x \in \bigcup_{k \in \mathbf{Z}} \left\{\frac{k\pi}{2} + \frac{\pi}{4}, \frac{k}{2}\pi + \frac{(-1)^k}{2}\arcsin(-2 + 2\sqrt{2})\right\}$.

2°. Inecuația dată se mai scrie sub forma: $\left(\frac{3}{4}\right)^{-6x + 10 - x^3} < \left(\frac{3}{4}\right)^3$, echivalentă cu:

(1) $-6x + 10 - x^3 > 3$, deoarece $0 < \frac{3}{4} < 1$. Dar (1) se mai scrie: $x^3 + 6x - 7 < 0$, sau $(x^3 - 1) + 6(x - 1) < 0$, adică: $(x - 1)[(x^2 + x + 1) + 6] < 0$, aceasta avînd loc dacă și numai dacă $x < 1$, deoarece $x^2 + x + 1 > 0$, $(\forall)x \in \mathbf{R}$.

3°. Notînd n, $n + 1$, $n + 2$ și $n + 3$ $(n \in \mathbf{Z})$ cele patru numere întregi consecutive, condiția din enunț revine la: $(n + 3)^3 = n^3 + (n + 1)^3 + (n + 2)^3$, de unde, efectuînd calculele, găsim: $n^3 - 6n - 9 = 0$, adică: $n^3 - 27 - 6n + 18 = 0$, sau $(n - 3)(n^2 + 3n + 3) = 0$, deci $n = 3$, deoarece $n^2 + 3n + 3 > 0$, $(\forall)n \in \mathbf{Z}$. În consecință, numerele căutate sînt: 3, 4, 5 și 6.

4°. Menținînd notațiile din enunț, din condiția $A + B + C = \pi$, rezultă $A = \pi - (B + C)$, deci (1) $\sin A = \sin(B + C)$. Pe de altă parte, egalitatea din enunț se mai scrie sub forma:

$$\sin^2 A = 1 - \sin^2 B + 1 - \sin^2 C \quad \text{sau} \quad (2) \quad \sin^2 A = \cos^2 B + \cos^2 C.$$

Ținînd seama de (1) în (2) și efectuînd calculele, găsim:

$$\sin^2 B \cos^2 C + \cos^2 B \sin^2 C + 2 \sin B \cos B \sin C \cos C = \cos^2 B + \cos^2 C,$$

echivalentă cu:

$$(1 - \sin^2 B)\cos^2 C + (1 - \sin^2 C)\cos^2 B - 2 \sin B \cos B \sin C \cos C = 0,$$

de unde:

$$\cos^2 B \cos^2 C - \sin B \cos B \sin C \cos C = 0,$$

adică:

$$(\cos B \cos C - \sin B \sin C)\cos B \cos C = 0$$

sau (3) $\cos(B + C)\cos B \cos C = 0$. Dar (3) este adevărată dacă și numai dacă sau $B = \frac{\pi}{2}$ sau $C = \frac{\pi}{2}$ sau $B + C = \frac{\pi}{2}$ $\left(\text{adică } A = \frac{\pi}{2}\right)$, deoarece $\hat{A}$, $\hat{B}$, și $\hat{C}$ sînt unghiurile triunghiului ABC.

LXIV. 1°. Cum $\cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x = 1 - 2 \sin^2 x$, ecuația dată se mai scrie sub forma: (1) $\sin^4 x - 10 \sin^2 x + 9 = 0$. Notînd $t = \sin^2 x$, $t \in [0, 1]$, ecuația (1) devine: $t^2 - 10t + 9 = 0$, de unde $t_{1,2} = 5 \pm \sqrt{25 - 9}$, singura valoare acceptată fiind $t = 1$. Corespunzător, avem: $\sin^2 x = 1$, deci $\sin x = \pm 1$, adică:

$$x \in \left\{k\pi + \frac{\pi}{2} \mid k \in \mathbf{Z}\right\}.$$

2°. Facem mai întîi observația că inecuația dată are sens numai pentru $x > 0$; în plus este necesar ca $\log_a x \neq 5$ și $\log_a x \neq -1$, adică $x \neq a^5$ și $x \neq a^{-1}$. Notînd $\log_a x = t$, inecuația respectivă devine: $\frac{1}{5 - t} + \frac{2}{1 + t} < 1$, echivalentă cu:

$$\frac{11 - t}{(5 - t)(1 + t)} - 1 < 0 \quad \text{sau} \quad \frac{t^2 - 5t + 6}{(5 - t)(1 + t)} < 0,$$

de unde, folosind tabloul:

t	∞			-1		2				3		5		
$t^2 - 5t + 6$	+		+	+	+	0	−	−	−	0	+	+	+	+
$5 - t$	+		+	+	+	+	+		+	+	+	0	−	−
$1 + t$	−	−	−	0	+	+	+		+	+	+	+	+	+
$\frac{t^2 - 5t + 6}{(5 - t)(1 + t)}$	−	−	−	|	+	0	−	−	−	0	+	|	−	

găsim că $t \in (-\infty, -1) \cup (2, 3) \cup (5, +\infty)$. Prin urmare, cum $0 < a < 1$, din $t < -1$, rezultă $\log_a x < -1$, adică $\log_a x < \log \frac{1}{a}$, deci $x > \frac{1}{a}$; din $2 < t < 3$, găsim $a^3 < x < a^2$; din $t > 5$, obținem $x < a^5$. Așadar: $x \in (0, a^5) \cup (a^3, a^2) \cup (a^{-1}, \infty)$.

3°. Pentru calculul determinantului respectiv, pe care îl notăm cu D, vom aduna mai întîi liniile a doua, a treia şi a patra la prima linie, apoi vom da în factor pe $a+b+c+x$, după care vom scădea, succesiv, prima coloană din celelalte trei. Aşadar:

$$D=\begin{vmatrix} x & a & b & c \\ a & x & c & b \\ b & c & x & a \\ c & b & a & x \end{vmatrix}=(a+b+c+x)\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ a & x & c & b \\ b & c & x & a \\ c & b & a & x \end{vmatrix}=$$

$$=(a+b+c+x)\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ a & x-a & c-a & b-a \\ b & c-b & x-b & a-b \\ c & b-c & a-c & x-c \end{vmatrix}=$$

$$=(a+b+c+x)\begin{vmatrix} x-a & c-a & b-a \\ c-b & x-b & a-b \\ b-c & a-c & x-c \end{vmatrix}.$$

În continuare, vom aduna linia a doua la prima, pe a treia la a doua şi prima la cea de-a treia, astfel că obţinem:

$$D=(a+b+c+x)\begin{vmatrix} x-a-b+c & x-a-b+c & 0 \\ 0 & x+a-b-c & x+a-b-c \\ x-a+b-c & 0 & x-a+b-c \end{vmatrix},$$

de unde, dînd factori comuni pe fiecare linie, găsim:

$$D=(a+b+c+x)(x-a-b+c)(x+a-b-c)(x-a+b-c)\begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix}.$$

Cum ultimul determinant este diferit de zero (are valoarea 2), rezultă că $D=0$ atunci şi numai atunci cînd: $x=-a-b-c$, sau $x=a+b-c$, sau $x=-a+b+c$, sau $x=a-b+c$.

4°. Ecuaţia dată se mai scrie sub forma: (1) $\sin B-\sin C=\cos C-\cos B$. Transformînd diferenţele în produse, (1) devine:

$$\sin\frac{B-C}{2}\cos\frac{B+C}{2}=\sin\frac{B-C}{2}\sin\frac{B+C}{2}, \text{ de unde:}$$

a) $\sin\frac{B-C}{2}=0$, adică $B=C$, ceea ce este adevărat pentru triunghiurile isoscele;

b) $\sin\frac{B+C}{2}=\cos\frac{B+C}{2}$, adică $\frac{B+C}{2}=\frac{\pi}{4}$ (am ţinut cont că $\hat{B}$ şi $\hat{C}$ sînt unghiuri ale unui triunghi), deci $B+C=\frac{\pi}{2}$, ceea ce este adevărat în triunghiurile dreptunghice.

LXV. 1°. Din condiţiile:

$$\begin{cases} x>0,\ x\neq 1; \\ x+|x-2|>0; \\ 5x-6+5|x-2|>0, \end{cases}$$

găsim că ecuaţia are sens numai pentru $x \in (0, 1) \cup (1, \infty)$. Procedînd la schimbarea de bază, noua bază fiind x, avem:

$$\log_{\sqrt{x}}(x + |x-2|) = \frac{\log_x(x + |x-2|)}{\log_x \sqrt{x}} = 2\log_x(x + |x-2|),$$

astfel că ecuaţia dată devine:

$$2\log_x(x + |x-2|) = \log_x(5x - 6 + 5|x-2|),$$

echivalentă cu:

$$(1) \qquad (x + |x-2|)^2 = 5x - 6 + 5|x-2|,$$

cu $x > 0$, $x \neq 1$. Pentru $x \in (0, 1) \cup (1, 2)$, ecuaţia (1) se mai scrie ca:

$$(x + 2 - x)^2 = 5x - 6 + 5(2 - x),$$

adică $4 = 4$, ceea ce este adevărat, pentru orice x din domeniul considerat. Pentru $x \geqslant 2$, ecuaţia (1) ia forma:

$$(x + x - 2)^2 = 5x - 6 + 5(x - 2),$$

adică:

$$4x^2 - 8x + 4 = 10x - 16, \text{ sau } 2x^2 - 9x + 10 = 0, \text{ de unde}$$

$$x_{1,2} = \frac{9 \pm \sqrt{81 - 80}}{4}, \text{ deci } x_1 = 2 \text{ şi } x_2 = \frac{5}{2}.$$

Aşadar, soluţiile ecuaţiei date sînt valorile: $x \in (0, 1) \cup (1, 2] \cup \left\{\frac{5}{2}\right\}$.

2°. Fie $X = \begin{pmatrix} x & y \\ z & w \end{pmatrix}$. Atunci ecuaţia devine:

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x & y \\ z & w \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} x & y \\ z & w \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}, \text{ adică:}$$

$$\begin{pmatrix} 2x + z & 2y + w \\ x + 2z & y + 2w \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} x + y & -x + y \\ z + w & -z + w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}, \text{ sau}$$

$$\begin{pmatrix} x - y + z & x + y + w \\ x + z - w & y + z + w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}, \text{ de unde sistemul:}$$

$$\begin{cases} x - y + z = 1; \\ x + y + w = 1; \\ x + z - w = 1; \\ y + z + w = -1, \end{cases}$$

pentru care găsim soluţia: $x = \frac{7}{5}$, $y = -\frac{1}{5}$, $z = -\frac{3}{5}$, $w = -\frac{1}{5}$. Aşadar:

$$X = \begin{pmatrix} \frac{7}{5} & -\frac{1}{5} \\ -\frac{3}{5} & -\frac{1}{5} \end{pmatrix}$$

este soluţia căutată a ecuaţiei date.

3°. Vom proceda prin inducţie completă. Pentru $n = 3$, inegalitatea este adevărată deoarece: $8 = 2^3 > 2 \cdot 3 + 1 = 7$. Presupunem că inegalitatea cerută are loc pentru un n natural, $n \geqslant 3$, arbitrar ales, dar fixat. Atunci, să arătăm că are loc şi inegalitatea: $2^{n+1} > 2(n + 1) + 1$, adică: $2^{n+1} > 2n + 3$. Cum $2^{n+1} = 2 \cdot 2^n > 2(2n + 1) = 4n + 2 = 2n + 2 + 2n > 2n + 3$, deoarece $2n > 3$, $(\forall) n \in \mathbb{N}^* \setminus \{1, 2\}$, rezultă că inegalitatea din enunţ este adevărată pentru orice n natural, $n \geqslant 3$.

4°. Din relațiile lui Viète, scrise pentru ecuația dată, avem:

$$(1)\qquad \begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 3; \\ x_1x_2 + (x_1 + x_2)x_3 = a; \\ x_1x_2x_3 = -8, \end{cases}$$

unde cu x_1, x_2 și x_3 am notat rădăcinile ecuației respective. Presupunem, pentru a face o alegere, că: (2) $x_1x_2 = 2$; atunci, din ultima ecuație a sistemului (1), găsim: (3) $x_3 = -4$, valoare care, înlocuită în prima ecuație, conduce la: (4) $x_1 + x_2 = 7$. Ținînd seama de (2), (3) și (4) în cea de a doua ecuație a lui (1), obținem $a = -26$. Pe de altă parte, ecuația atașată sistemului format de ecuațiile (2) și (4) este de forma: $z^2 - 7z + 2 = 0$, de unde: $z_{1,2} = \frac{7 \pm \sqrt{49 - 8}}{2}$, prin urmare: $x_1 = \frac{7 + \sqrt{41}}{2}$, $x_2 = \frac{7 - \sqrt{41}}{2}$, $x_3 = -4$ sînt soluțiile căutate ale ecuației date.

LXVI. 1°. Se procedează prin inducție matematică (completă). Pentru $n = 1$, obținem: $1^3 = \left[\frac{1(1+1)}{2}\right]^2$, ceea ce este adevărat. Presupunînd că egalitatea din enunț este verificată pentru un $n \in \mathbf{N}^*$, arbitrar ales, dar fixat, să arătăm că:

$$(1)\qquad 1^3 + 2^3 + \dots + n^3 + (n+1)^3 = \left[\frac{(n+1)(n+2)}{2}\right]^2.$$

Potrivit ipotezei de inducție:

$$(2)\qquad 1^3 + 2^3 + \dots + n^3 = \left[\frac{n(n+1)}{2}\right]^2,$$

pentru un n fixat. Ținînd seama de (2) în (1), obținem:

$$\left[\frac{n(n+1)}{2}\right]^2 + (n+1)^3 = \left[\frac{(n+1)(n+2)}{2}\right]^2,$$

care se verifică, fără dificultate, prin calcul direct, că este adevărată. Cum n a fost ales arbitrar, rezultă — potrivit inducției complete — că egalitatea din enunț este adevărată pentru orice $n \in \mathbf{N}^*$. Pentru suma cerută, ținem seama că:

$$1 + 2(1+2) + 3(1+2+3) + \dots + n(1+2+3+\dots+n) =$$

$$= 1 \cdot \frac{1 \cdot 2}{2} + 2 \cdot \frac{2 \cdot 3}{2} + 3 \cdot \frac{3 \cdot 4}{2} + \dots + n \cdot \frac{n(n+1)}{2} =$$

$$= \frac{1}{2}[1^2(1+1) + 2^2(2+1) + \dots + n^2(n+1)] =$$

$$= \frac{1}{2}[(1^3 + 2^3 + \dots + n^3) + (1^2 + 2^2 + \dots + n^2)] =$$

$$= \frac{1}{2}\left[\frac{n^2(n+1)^2}{4} + \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}\right] = \frac{n(n+1)(n+2)(3n+1)}{24}.$$

2°. Observăm mai întîi că $x = 0$, $y = 0$ nu este soluție a sistemului respectiv. Presupunînd $x \neq 0$, $y \neq 0$ și împărțind fiecare ecuație a sistemului cu produsul xy, acesta devine:

$$(1)\qquad \begin{cases} \left(x + \frac{1}{x} + 2\right)\left(y + \frac{1}{y} + 2\right) = 15; \\ \left(x + \frac{1}{x}\right)\left(y + \frac{1}{y}\right) = 3. \end{cases}$$

Punînd: (2) $u = x + \frac{1}{x}$; $v = y + \frac{1}{y}$, avem, din (1):

$$\begin{cases} (u+2)(v+2) = 15; \\ uv = 3, \end{cases} \quad \text{adică: (3)} \quad \begin{cases} u + v = 4; \\ uv = 3. \end{cases}$$

Ecuaţia ataşată lui (3) este: $z^2 - 4z + 3 = 0$, care are soluţiile $z_1 = 3$ şi $z_2 = 1$. Sistemul (3) este simetric în u şi v, iar dacă ţinem cont şi de (2), avem:

$$\begin{cases} x + \frac{1}{x} = 3; \\ y + \frac{1}{y} = 1, \end{cases} \quad \text{sau} \quad \begin{cases} x + \frac{1}{x} = 1; \\ y + \frac{1}{y} = 3, \end{cases}$$

de unde găsim:

$$\begin{cases} x_{1,2} = \frac{3 \pm \sqrt{5}}{2}; \\ y_{1,2} = \frac{1 \pm i\sqrt{3}}{2}, \end{cases} \quad \text{şi, respectiv,} \quad \begin{cases} x_{3,4} = \frac{1 \pm i\sqrt{3}}{2}; \\ y_{3,4} = \frac{3 \pm \sqrt{5}}{2}. \end{cases}$$

Notînd: $A = \left\{ \frac{3 - \sqrt{5}}{2}, \frac{3 + \sqrt{5}}{2} \right\}$; $B = \left\{ \frac{1 - i\sqrt{3}}{2}, \frac{1 + i\sqrt{3}}{2} \right\}$,

rezultă că perechile $(x, y) \in (A \times B) \cup (B \times A)$ sînt soluţiile căutate ale sistemului considerat.

3°. Egalitatea matricială din enunţ este echivalentă cu sistemul:

$$(1) \quad \begin{cases} a_1^2 + a_2 a_3 = b_1; \\ a_1 a_2 + a_2 a_4 = b_2; \\ a_1 a_3 + a_3 a_4 = b_3; \\ a_2 a_3 + a_4^2 = b_4. \end{cases}$$

Numerele a_1, $a_2 = a_1 + r$, $a_3 = a_1 + 2r$ şi $a_4 = a + 3r$ sînt în progresie aritmetică, a_1 fiind primul termen, iar r raţia acestuia. Atunci, din (1), găsim:

$$b_2 - b_1 = 2a_1 r + r^2; \; b_3 - b_2 = 2a_1 r + 3r^2; \; b_4 - b_3 = 2a_1 r + 5r^2,$$

care, evident, sînt în progresie aritmetică, aceasta avînd raţia $2r^2$.

4°. Funcţia f este continuă pe intervalele [1, 2] şi (2, 3], pe fiecare dintre acestea fiind compuneri de funcţii elementare. În plus:

$$\lim_{\substack{x \to 2 \\ x < 2}} f(x) = \lim_{\substack{x \to 2 \\ x < 2}} \left(\frac{25x}{x^2 + 1} - 1 \right) = 9 = f(2) \text{ şi}$$

$$\lim_{\substack{x \to 2 \\ x > 2}} f(x) = \lim_{\substack{x \to 2 \\ x > 2}} \frac{(x+1)^2}{x - 1} = 9,$$

deci f este continuă pe [1, 3]. Pe de altă parte:

$$f'(x) = \begin{cases} 25 \frac{1 - x^2}{(x^2 + 1)^2} & \text{dacă } x \in (1, 2); \\ -3 & \text{dacă } x = 2; \\ \frac{x^2 - 2x - 3}{(x - 1)^2} & \text{dacă } x \in (2, 3), \end{cases}$$

deci f este derivabilă pe (1, 3). În consecinţă, funcţiei f îi este aplicabilă teorema lui Lagrange şi avem: pentru $x \in (1, 2)$, găsim $8 - \frac{23}{2} = 50 \frac{1 - c_1^2}{(c_1^2 + 1)^2}$, de unde



$7c_1^4 - 86c_1^2 + 107 = 0$, deci $c_1^2 = \frac{43 \pm \sqrt{1100}}{7}$ şi, cum $c_1 \in (1, 2)$, rezultă că, în acest caz, singura valoare acceptată este $c_1 = \sqrt{\frac{43 - \sqrt{1100}}{7}}$; pentru $x \in (2, 3)$, găsim $8 - \frac{23}{2} = 2\frac{c_2^2 - 2c_2 - 3}{(c_2 - 1)^2}$, de unde $11c_2^2 - 22c_2 - 5 = 0$, deci $c_2 = \frac{11 \pm \sqrt{176}}{11}$ şi, cum $c_2 \in (2, 3)$, rezultă că, în acest caz, singura valoare acceptată este $c_2 = \frac{11 + 4\sqrt{11}}{11}$.

5°. Din condiţia $\alpha - x^3 > 0$, deducem că $f : (-\infty, \sqrt[3]{\alpha}) \to \mathbf{R}$. Cum

$$f'(x) = -\frac{2\alpha + x^3}{2(\alpha - x^3)^{3/2}}, \quad f''(x) = -3x^2 \frac{8\alpha + x^3}{4(\alpha - x^3)^{5/2}},$$

din condiţia $f''(-1) = 0$, găsim $\alpha = \frac{1}{8}$. Pentru $\alpha = \frac{1}{8}$, funcţia $f : \left(-\infty, \frac{1}{2}\right) \to \mathbf{R}$ este definită prin: $f(x) = \frac{-x}{\sqrt{\frac{1}{8} - x^3}}$. Pentru $x = 0$, găsim $f(0) = 0$, deci graficul lui f trece prin originea sistemului de coordonate. Cum

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = 0; \quad \lim_{\substack{x \to \frac{1}{2} \\ x < \frac{1}{2}}} f(x) = -\infty,$$

rezultă că $y = 0$ este asimptotă orizontală (spre $-\infty$) şi, respectiv, $x = \frac{1}{2}$ este asimptotă verticală. Din $f'(x) = 0$, obţinem $x = -\sqrt[3]{\frac{1}{4}}$, iar din $f''(x) = 0$ găsim $x = 0$ şi $x = -1$. Rezultatele sînt sintetizate în tabloul următor:

x	$-\infty$		-1		$-\sqrt[3]{\frac{1}{4}}$		0		$\frac{1}{2}$
$f'(x)$		$+$		$+$	0	$-$		$-$	
$f(x)$	0	$\nearrow$	$\frac{2\sqrt{2}}{3}$	$\nearrow$	$2^{5/6} \cdot 3^{-1/2}$	$\searrow$	0	$\searrow$	$-\infty$
$f''(x)$		$+ \quad +$	0	$-$	$-$	$- \quad -$	0	$-$	

Graficul este prezentat în fig. M.B.97.

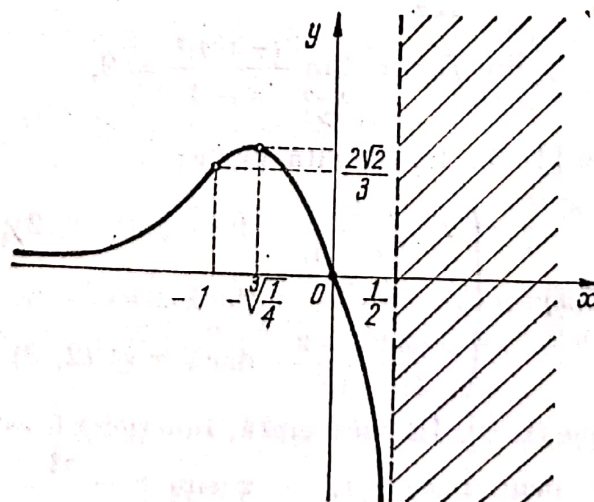


Fig. M.B.97

Volumul căutat este dat de

$$V = \pi \int_{-1}^{0} f^2(x)\, dx = \pi \int_{-1}^{0} \frac{x^2}{\frac{1}{8} - x^3}\, dx = \frac{\pi}{3} \int_{-1}^{0} \frac{3x^2}{\frac{1}{8} - x^3}\, dx = -\frac{\pi}{3} \int_{-1}^{0} \frac{3x^2}{x^3 - \frac{1}{8}}\, dx =$$

$$= -\frac{\pi}{3} \left[\ln \left| x^3 - \frac{1}{8} \right| \right]_{-1}^{0} = -\frac{\pi}{3} \left(\ln \frac{1}{8} - \ln \frac{9}{8} \right) = -\frac{\pi}{3} \ln \frac{1}{9} = \frac{2\pi}{3} \ln 3.$$

LXVII. 1°. Notînd cu Δ determinantul ce trebuie calculat, avem, dezvoltînd, de exemplu, după regula triunghiului:

$$(1) \qquad \begin{aligned} \Delta &= x_1^2 x_2 x_3 + x_1 x_2 x_3^2 + x_1 x_2^2 x_3 - x_1^4 - x_2^4 - x_3^4 = \\ &= x_1 x_2 x_3 (x_1 + x_2 + x_3) - (x_1^4 + x_2^4 + x_3^4). \end{aligned}$$

Apoi, ținem seama, pe de o parte, că:

$$(2) \qquad \begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 1; \\ x_1 x_2 + x_1 x_3 + x_2 x_3 = 5; \\ x_1 x_2 x_3 = -2, \end{cases}$$

iar, pe de alta, că:

$$(3) \qquad \begin{aligned} & x_1^4 + x_2^4 + x_3^4 = (x_1^2 + x_2^2 + x_3^2)^2 - 2(x_1^2 x_2^2 + x_1^2 x_3^2 + x_2^2 x_3^2) = \\ & = (x_1^2 + x_2^2 + x_3^2)^2 - 2(x_1 x_2 + x_1 x_3 + x_2 x_3)^2 + 4 x_1 x_2 x_3 (x_1 + x_2 + x_3), \end{aligned}$$

iar

$$(4) \qquad x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = (x_1 + x_2 + x_3)^2 - 2(x_1 x_2 + x_1 x_3 + x_2 x_3).$$

Ținînd cont de (2) și (4) în (3), obținem: (5) $x_1^4 + x_2^4 + x_3^4 = 23$. Acum, ținînd seama de (2) și (5) în (1), găsim: $\Delta = -25$.

2°. Cum $\dfrac{1}{a_k a_{k+1}} = \dfrac{1}{a_k (a_k + r)} = \dfrac{1}{r} \left(\dfrac{1}{a_k} - \dfrac{1}{a_{k+1}} \right)$, $(\forall) k = 1, 2, \ldots, n-1$, unde $r \neq 0$ este rația progresiei aritmetice respective, și $a_k = a_1 + (k-1)r$, $(\forall) k = 1, 2, \ldots, n$, avem:

$$\frac{1}{a_1 a_2} + \frac{1}{a_2 a_3} + \ldots + \frac{1}{a_{n-1} a_n} = \frac{1}{r} \left[\frac{1}{a_1} - \frac{1}{a_1 + (n-1)r} \right] = \frac{n-1}{a_1 [a_1 + (n-1)r]}.$$

Să verificăm, prin metoda inducției complete, valabilitatea rezultatului obținut. Pentru $n = 1$ nu se pune problema verificării, neputînd fi vorba nici de progresie aritmetică și nici de suma respectivă; pentru $n = 2$, găsim: $\dfrac{1}{a_1 a_2} = \dfrac{1}{a_1 (a_1 + r)}$, ceea ce este adevărat. Presupunem că, pentru un $k \in \{2, \ldots, n-1\}$, arbitrar ales, dar fixat, n natural și $n \geqslant 3$, avem:

$$\frac{1}{a_1 a_2} + \ldots + \frac{1}{a_{k-1} a_k} = \frac{k-1}{a_1 [a_1 + (k-1)r]}.$$

Să arătăm că atunci este adevărată și egalitatea:

$$\frac{1}{a_1 a_2} + \ldots + \frac{1}{a_{k-1} a_k} + \frac{1}{a_k a_{k+1}} = \frac{k}{a_1 (a_1 + kr)}.$$

Intr-adevăr:

$$\frac{1}{a_1a_2}+\ldots+\frac{1}{a_{k-1}a_k}+\frac{1}{a_ka_{k+1}}=\frac{k-1}{a_1[a_1+(k-1)r]}+\frac{1}{[a_1+(k-1)r](a_1+kr)}=$$
$$=\frac{1}{a_1+(k-1)r}\cdot\left(\frac{k-1}{a_1}+\frac{1}{a_1+kr}\right)=\frac{1}{a_1+(k-1)r}\cdot\frac{k[a_1+(k-1)r]}{a_1(a_1+kr)}=\frac{k}{a_1(a_1+kr)},$$

ceea ce completează demonstrația, concluzia raționamentului fiind evidentă.

3°. Sistemul dat se mai scrie sub forma:

$$\begin{cases} xy(x+y)=6; \\ x^2y^2(x+y)(x^2+y^2-xy)=36, \end{cases}$$

de unde, ținînd cont de prima ecuație în cea de a doua și efectuînd calculele, avem:

$$\begin{cases} xy(x+y)=6; \\ xy[(x+y)^2-3xy]=6, \end{cases}$$

prin urmare, continuînd în mod asemănător, găsim:

$$\begin{cases} xy(x+y)=6; \\ 2(x+y)-x^2y^2=2, \end{cases} \quad \text{deci} \quad (1) \quad \begin{cases} xy(x+y)=6; \\ (xy)^3+2xy-12=0. \end{cases}$$

Din cea de-a doua ecuație a sistemului (1) găsim că: $xy=2$ sau $xy=$ $=-1\pm i\sqrt{5}$, valori care, introduse în prima ecuație, conduc la: $x+y=3$ sau, respectiv, $x+y=-1\pm i\sqrt{2}$. Sistemul:

(2) $\begin{cases} xy=2; \\ x+y=3, \end{cases}$ conduce la soluțiile: (3) $\begin{cases} x_1=1; \\ y_1=2, \end{cases}$ $\begin{cases} x_2=2; \\ y_2=1. \end{cases}$

Apoi, se poate proceda în mod analog cu sistemele:

(4) $\begin{cases} xy=-1+i\sqrt{5}; \\ x+y=-1-i\sqrt{5}, \end{cases}$ (5) $\begin{cases} xy=-1-i\sqrt{5}; \\ x+y=-1+i\sqrt{5}. \end{cases}$

Pentru aflarea valorilor x și y care satisfac sistemele (4) și, respectiv, (5) se poate ține seama că:

(6) $$x^2-x^2-xy+xy=0 \Leftrightarrow x^2-x(x+y)+xy=0 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow\left(x-\frac{x+y}{2}\right)^2+xy-\frac{(x+y)^2}{4}=0.$$

Considerînd $x=a+bi$, $a, b \in \mathbf{R}$ și ținînd seama succesiv de (4) și (5) în (6) găsim:

(7) $$\left(a+bi+\frac{1+i\sqrt{5}}{2}\right)^2=-\frac{i\sqrt{5}}{2}, \text{ respectiv:}$$

(8) $$\left(a+bi+\frac{1-i\sqrt{5}}{2}\right)^2=\frac{i\sqrt{5}}{2}, \text{ prin urmare:}$$

(9) $$x_{3,4}=-z\pm w;\ x_{5,6}=\bar{z}\pm\dot{w} \text{ și, corespunzător:}$$

(10) $$y_{3,4}=-(z\pm\bar{w});\ y_{5,6}=-(3\bar{z}\pm w), \text{ unde } z=\frac{1+i\sqrt{5}}{2},\ w=\frac{\sqrt[4]{5}}{2}(1+i).$$

Perechile (x_i, y_i), cu $i=\overline{1, 6}$, date de (3), (9) și (10) constituie soluțiile distincte ale sistemului dat spre rezolvare.

4°. Avem:

$$A = 2\pi \int_1^4 f(x) \sqrt{1+[f'(x)]^2}\, dx = 2\pi \int_1^4 \left(\frac{x^2}{2} - \ln \sqrt[4]{x}\right) \sqrt{1+\left(x-\frac{1}{4x}\right)^2}\, dx =$$

$$= 2\pi \int_1^4 \left(\frac{x^2}{2} - \frac{1}{4}\ln\, x\right)\left(x+\frac{1}{4x}\right) dx = \pi\left[\frac{135}{2} - 8\ln 2 - \frac{1}{4}(\ln\ 2)^2\right].$$

5°. Vom remarca mai întîi că oricare ar fi $k \in \mathbf{R}$, $D = [-k, +\infty)$; $f(x) = 0$ pentru $x = -k$ şi, pentru $k \geqslant 0$, avem $f(0) = 0$. În plus: $\lim\limits_{\substack{x\to k\\ x>k}} f(x) = 0$ şi $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = \infty$.

Asimptote oblice nu există $\left(m = \lim\limits_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x} = \infty\right)$. Cum $f'_x(x, k) = \frac{5x^2+4kx}{2\sqrt{x+k}}$, $(\forall) x > -k$, avem, pentru cazul în care $k > 0$: $f'_x\left(-\frac{4k}{5}, k\right) = 0$; $f'_x(0, k) = 0$.

Analog, cum $f''_x(x, k) = \frac{15x^2+24kx+8k^2}{4(x+k)^{3/2}}$, $(\forall) x > -k$, avem:

$f''_x\left(\frac{-2k(6-\sqrt{6})}{15}, k\right) = 0$ pentru $k > 0$; $f''_x\left(\frac{-2k(6+\sqrt{6})}{2}, k\right) = 0$ pentru $k < 0$.

Rezultatele obţinute sînt centralizate în tablourile următoare:

a) pentru $k > 0$:

x	$-k$		$-\frac{4k}{5}$		$\frac{-2k(6-\sqrt{6})}{15}$		0		$+\infty$
$f'_x(x, k)$		$+$	0	$-\ -$	$-$	$-\ -$	0	$+\ +$	$+$
$f(x, k)$	$-k$	$\nearrow$	$\frac{16k^2}{25}\sqrt{\frac{k}{5}}$	$\searrow$	$\frac{8k^2(7-2\sqrt{6})}{75}\sqrt{\frac{k(3+2\sqrt{6})}{15}}$	$\searrow$	0	$\nearrow$	$+\infty$
$f''_x(x, k)$		$-$	$-$	$-\ -$	0	$+\ +$	$+$	$+$	$+$

b) pentru $k = 0$:

x	0		$+\infty$
$f'_x(x, 0)$		$+\ +\ +\ +\ +$	
$f(x, 0)$	0	$\nearrow\ \nearrow\ \nearrow$	$+\infty$
$f''_x(x, 0)$		$+\ +\ +\ +\ +$	

c) pentru $k < 0$:

x	0 $-k$		$\frac{-2k(6+\sqrt{6})}{15}$		$+\infty$
$f'_x(x, k)$		$+\ +$	$+$	$+\ +$	
$f(x, k)$	$-k$	$\nearrow$	$\frac{8k^2(7+2\sqrt{6})}{75}\sqrt{\frac{k(3-2\sqrt{6})}{15}}$	$\nearrow$	$+\infty$
$f''_x(x, k)$		$-\ -$	0	$+\ +\ +$	

Graficele sînt, respectiv, cele din fig. M.B.98, a — fig. M.B. 98, c.

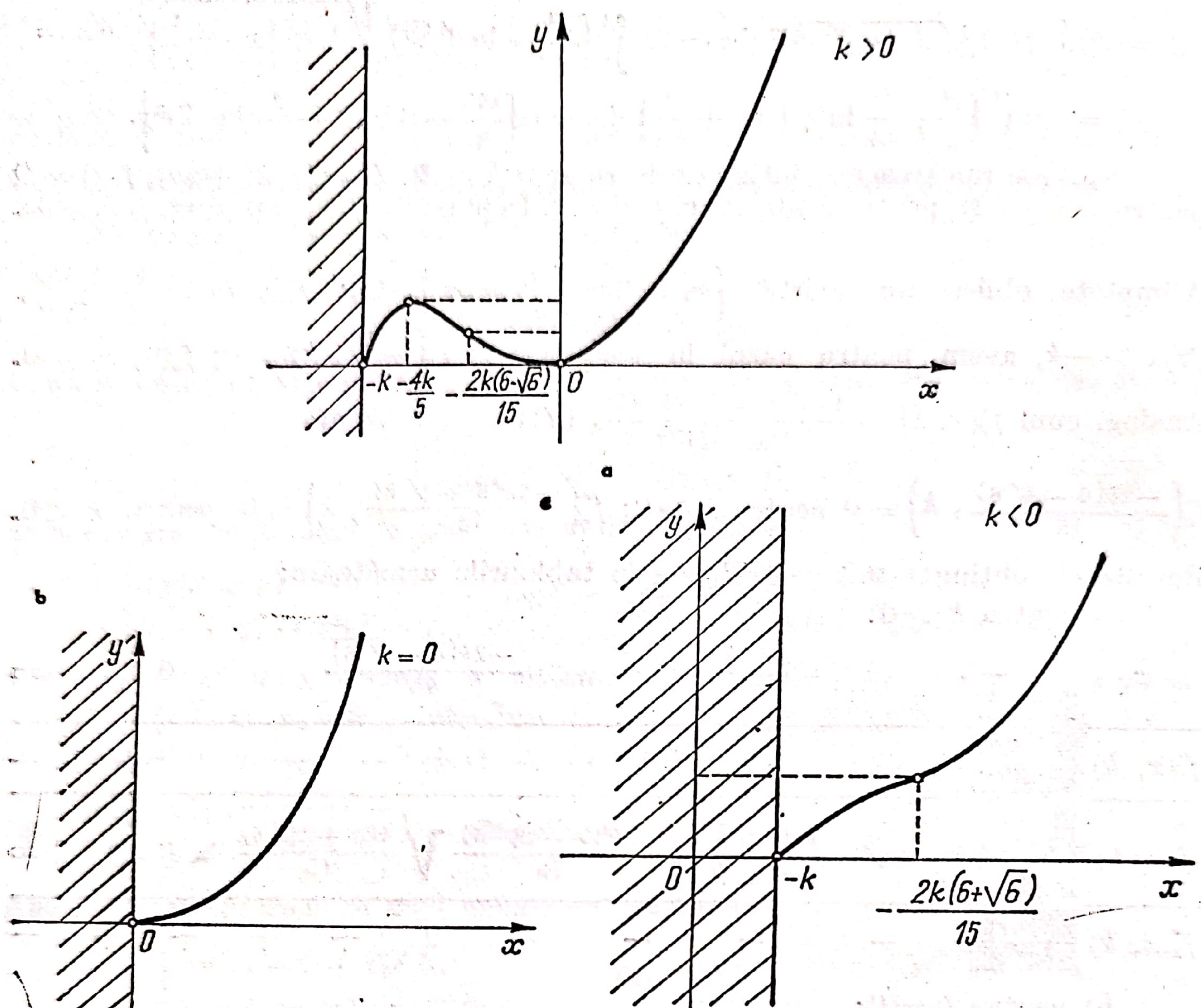


Fig. M.B.98, a, b, c

LXVIII. 1°. Observăm mai întîi că pentru $a = 0$, ecuația devine: $x^2 - bx = -\sqrt{(b^2-1)x^2}$, avînd soluțiile reale: $x = 0$; $x = b - \sqrt{b^2-1}$, oricare ar fi $b \in ((-\infty, -1] \cup [1, +\infty)) \cap (0, +\infty) = [1, +\infty)$. În continuare, cum $a + b > 0$, din condiția: $[(a+b)x - ab]^2 - x^2 = x^2[(a+b)^2 - 1] - 2ab(a+b)x + a^2b^2 \geq 0$, rezultă că este necesar ca:

(1) $x < \dfrac{ab}{a+b+1}$ sau $x > \dfrac{ab}{a+b-1}$ dacă $a + b - 1 > 0$ și $\dfrac{ab}{a+b-1} < x < \dfrac{ab}{a+b+1}$ dacă $a + b - 1 < 0$. Pe de altă parte, din condiția $x^2 - (a+b)x + ab < 0$, rezultă: (2) $a < x < b$. Acum, ridicînd la pătrat ambii membri ai ecuației date spre rezolvare, găsim:

$$[x^2 - (a+b)x + ab]^2 = [(a+b)x - ab]^2 - x^2, \text{ de unde:}$$

$$\{[x^2-(a+b)x+ab]+[(a+b)x-ab]\}\cdot\{[x^2-(a+b)x+ab]-[(a+b)x-ab]\} = -x^2,$$

prin urmare:

$$x^2[x^2 - 2(a+b)x + 2ab + 1] = 0, \text{ cu soluțiile:}$$

$$x_1 = x_2 = 0; \quad x_{3,4} = (a+b) \pm \sqrt{a^2+b^2-1},$$

valori din care trebuie selectate cele care satisfac ecuația inițială. Pentru $x=0$, ecuația dată conduce la $ab=0$, iar (prin ipoteză) $0 \leqslant a < b$; prin urmare $a=0$, situație în care $b \geqslant 1$ (vezi mai sus). În continuare, remarcăm că: $x_{3,4} \in \mathbf{R} \Leftrightarrow a^2+b^2-1 \geqslant 0$. Dar: $a^2+b^2-1=(a+b)^2-2ab-1=$ $=(a+b+1)(a+b-1)-2ab \geqslant 0$, dacă și numai dacă $a+b-1 \geqslant \dfrac{2ab}{a+b+1} \geqslant 0$, deoarece $0 \leqslant a < b$ și, evident, $a+b+1>0$. Cum cazul $a=0$ a fost analizat, rămîne să ne ocupăm de situația cînd $a>0$, deci cînd $a+b-1>0$. În acest caz trebuie verificate, corespunzător, condițiile (1) și (2). Avem deci:

$$a-\frac{ab}{a+b+1}=\frac{a^2+a}{a+b+1}>0;$$

$$b-\frac{ab}{a+b-1}=\frac{b(b-1)}{a+b-1} \geqslant 0 \text{ dacă } b \geqslant 1;$$

$$x_3-b=a+\sqrt{a^2+b^2-1}>0;$$

$$x_4-b=a-\sqrt{a^2+b^2-1}=\frac{1-b^2}{a+\sqrt{a^2+b^2-1}}<0 \text{ pentru } b>1;$$

$$x_3-\frac{ab}{a+b-1}=\frac{(b-1)^2(a-1)^2}{(a+b-1)\left[(a+b-1)+b(b-1)+(a+b-1)\sqrt{a^2+b^2-1}\right]}>0;$$

$$x_4-a=\frac{1-a^2}{b+\sqrt{a^2+b^2-1}}>0 \text{ pentru } 0<a<1.$$

În consecință, dacă $0 \leqslant a < 1$ și $b \geqslant 1$ sau $0 \leqslant a \leqslant 1$ și $b>1$, atunci ecuația dată admite rădăcini reale.

2°. Pentru $n=1$, inegalitatea devine: $(x+y) \leqslant (x+y)$, care este satisfăcută prin egalitate. Presupunem că:

(1) $(x+y)^n \leqslant 2^{n-1}(x^n+y^n)$ pentru un $n \in \mathbf{N}^*$, arbitrar ales, dar fixat.

Să demonstrăm că:

(2) $(x+y)^{n+1} \leqslant 2^n(x^{n+1}+y^{n+1})$.

Cum $x, y>0$, rezultă $x+y>0$ și, înmulțind ambii membri din (1) cu $x+y$, avem:

(3) $(x+y)^{n+1} \leqslant 2^{n-1}(x^n+y^n)(x+y)$.

Atunci, notînd $E(x, y)=(x+y)^{n+1}-2^n(x^{n+1}+y^{n+1})$, și, ținînd cont de (3) și (1), găsim:

$E(x, y) \leqslant 2^{n-1}(x^n+y^n)(x+y)-2^n(x^{n+1}+y^{n+1})=2^{n-1}(xy^n+x^ny-$ $-x^{n+1}-y^{n+1})=2^{n-1}[x^n(y-x)+y^n(x-y)]=2^{n-1}(x-y)(y^n-x^n)=$ $=-2^{n-1}(x-y)^2(x^{n-1}+x^{n-2}y+\ldots+xy^{n-2}+y^{n-1}) \leqslant 0$, $(\forall)x, y>0$ și $n \in \mathbf{N}^*$, ceea ce completează demonstrația.

3°. Notînd

$$A=\begin{pmatrix}-3 & 4 & 0\\ 1 & 1 & -2\\ -2 & -1 & 3\end{pmatrix}, \text{ cum } \det A=1 \neq 0, \text{ găsim:}$$

$$A^{-1}=\begin{pmatrix}1 & -12 & -8\\ 1 & -9 & -6\\ 1 & -11 & -7\end{pmatrix}, \text{ deci:}$$

$$X=BA^{-1}=\begin{pmatrix}3 & -33 & -22\\ 0 & 7 & 4\end{pmatrix}.$$

4°. Prin calcul direct, găsim:

$$A = 2\pi\int_{-\alpha}^{\alpha} f(x)\sqrt{1+[f'(x)]^2}\,dx = 2\pi\int_{-\alpha}^{\alpha} \frac{e^{\alpha x}+e^{-\alpha x}}{2\alpha}\cdot\frac{e^{\alpha x}+e^{-\alpha x}}{2}\,dx =$$

$$= \frac{\pi}{\alpha}\int_0^{\alpha} (e^{2\alpha x}+e^{-2\alpha x}+2)\,dx = \frac{\pi}{\alpha}\left(\frac{e^{2\alpha x}}{2}-\frac{e^{-2\alpha x}}{2}+2x\right)\Big|_0^{\alpha} = \frac{\pi}{2\alpha^2}(e^{2\alpha^2}-e^{-2\alpha^2}+4\alpha^2).$$

5°. Cum $x^2 \geqslant 0 \geqslant x$ şi $x^2 \geqslant 0 \geqslant x^3$, pentru orice $x \leqslant 0$, rezultă că $\max(x, x^2, x^3) = x^2$, $(\forall)x \leqslant 0$. Fie acum $g, h: (0,\infty)\to\mathbf{R}$, date de: $g(x) = e^x - x - 1$; $h(x) = x + 1 - \frac{1}{x}$. Cum $g'(x) = e^x - 1 > 0$, $(\forall)x > 0$, rezultă că funcţia g este strict crestătoare pe $(0, \infty)$, deci $x + 1 < e^x$, $(\forall)x > 0$. Analog, din $h'(x) = 1 + \frac{1}{x^2} > 0$, $(\forall)x > 0$, rezultă că h este strict crestătoare pe $(0, \infty)$. În plus, $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} h(x) = -\infty$, $\lim\limits_{x\to\infty} h(x) = \infty$ şi cum h este continuă (şi stict monotonă) pe $(0, \infty)$, rezultă că ecuaţia $h(x) = 0$ admite o singură rădăcină în intervalul respectiv. Din ecuaţia: $1 + x = \frac{1}{x}$, găsim soluţiile $\frac{-1\pm\sqrt{5}}{2}$, singura care convine fiind $x_0 = \frac{-1+\sqrt{5}}{2}$. Prin urmare:

$$f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{dacă } x \in (-\infty, 0]; \\ 1+x & \text{dacă } x \in \left(0, \frac{-1+\sqrt{5}}{2}\right]; \\ \frac{1}{x} & \text{dacă } x \in \left(\frac{-1+\sqrt{5}}{2}, \infty\right). \end{cases}$$

Deoarece f este compunere de funcţii elementare, problema continuităţii şi cea a derivabilităţii se pune numai în punctele de abscise 0 şi $\frac{-1+\sqrt{5}}{2}$. Cum

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ x<0}} f(x) = \lim_{\substack{x\to 0\\ x<0}} x^2 = 0 = f(0) \neq \lim_{\substack{x\to 0\\ x>0}} f(x) = \lim_{\substack{x\to 0\\ x>0}} (1+x) = 1, \text{ şi}$$

$$\lim_{\substack{x\to\frac{-1+\sqrt{5}}{2}\\ x<\frac{-1+\sqrt{5}}{2}}} f(x) = \lim_{\substack{x\to\frac{-1+\sqrt{5}}{2}\\ x<\frac{-1+\sqrt{5}}{2}}} (1+x) = \frac{1+\sqrt{5}}{2} = f\left(\frac{-1+\sqrt{5}}{2}\right) =$$

$$= \lim_{\substack{x\to\frac{-1+\sqrt{5}}{2}\\ x>\frac{-1+\sqrt{5}}{2}}} f(x) = \lim_{\substack{x\to\frac{-1+\sqrt{5}}{2}\\ x>\frac{-1+\sqrt{5}}{2}}} \frac{1}{x} = \frac{2}{-1+\sqrt{5}} = \frac{2(-1-\sqrt{5})}{1-5} = \frac{1+\sqrt{5}}{2},$$

rezultă că f este continuă pe $\mathbf{R} \setminus \{0\}$. Pe de altă parte:

$$\lim_{\substack{x \to \frac{-1+\sqrt{5}}{2} \\ x < \frac{-1+\sqrt{5}}{2}}} f'(x) = \lim_{\substack{x \to \frac{-1+\sqrt{5}}{2} \\ x < \frac{-1+\sqrt{5}}{2}}} 1 = 1 \text{ şi}$$

$$\lim_{\substack{x \to \frac{-1+\sqrt{5}}{2} \\ x > \frac{-1+\sqrt{5}}{2}}} f'(x) = \lim_{\substack{x \to \frac{-1+\sqrt{5}}{2} \\ x > \frac{-1+\sqrt{5}}{2}}} \left(\frac{-1}{x^2}\right) = -\frac{3+\sqrt{5}}{2},$$

deci f este derivabilă numai pe $\mathbf{R} \setminus \left\{0, \frac{-1+\sqrt{5}}{2}\right\}$. Trasarea graficului lui f se face imediat ţinînd seama că acesta se compune dintr-un arc de parabolă ($y = x^2$), un segment de dreaptă ($y = 1 + x$) şi un arc de hiperbolă echilateră $\left(y = \frac{1}{x}\right)$; acesta este reprezentat în fig. M.B.99.

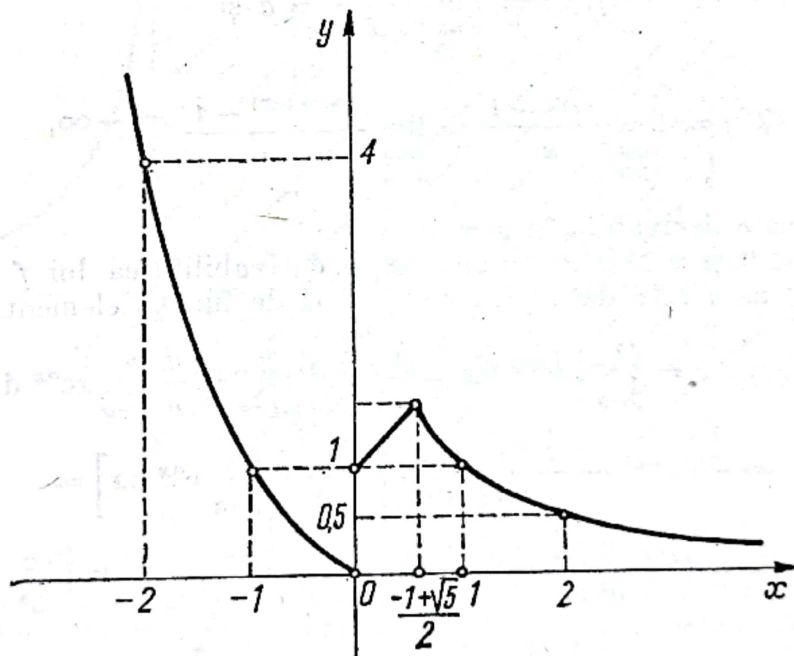


Fig. M.B.99

LXIX. 1°. Fie $n \in \mathbf{Z}$ astfel încît (1) $\left[\frac{x+2}{3}\right] = n$. Ţinînd seama că: $[\alpha] \leqslant \alpha < [\alpha] + 1$, din (1) obţinem: (2) $3n - 2 \leqslant x < 3n + 1$. Pe de altă parte: (3) $\frac{x}{2} = n$, deci: (3) $x = 2n$. Ţinînd cont de (3) în (2), găsim: $3n - 2 \leqslant 2n < 3n + 1$, inegalităţi ce sînt satisfăcute numai pentru $n \in \{0, 1, 2\}$. Prin urmare $x \in \{0, 2, 4\}$ şi punînd: $x_1 = 0$; $x_2 = 2$; $x_3 = 4$, acestea formează o progresie aritmetică $\left(x_2 = \frac{x_1 + x_3}{2}\right)$, cu primul termen zero şi cu raţia 2 sau, eventual, cu primul termen 4 şi raţia -2.

2°. Prima ecuație se scrie echivalent: $-x + \hat{2}y = \hat{3}$, deci $x = \hat{2}y - \hat{3}$ și, înlocuind în cea de-a doua, rezultă: $\hat{8}y - \widehat{12} + \hat{3}y = \hat{1}$. Așadar, $\hat{5}y = \hat{1}$, de unde $y = \hat{5}$. În plus, $x = \hat{2}y - \hat{3} = \hat{7} = \hat{1}$. Prin urmare, unica soluție a sistemului dat este: $x = \hat{1}$, $y = \hat{5}$.

3°. Se verifică imediat, prin calcul direct, că: $P(1) = 0$, $P(-1) = 0$, deci P este divizibil cu $X^2 - 1$. Pe de altă parte:

$$X^{4^n} + X^3 - X - 1 = X(X^{4^n-1} - 1) + (X^3 - 1) = X[X^{(4-1)(4^{n-1}+\dots+1)} - 1] + \\ + (X^3 - 1) = X[X^{3(4^{n-1}+\dots+1)} - 1] + (X^3 - 1),$$

ultima expresie obținută devenind zero pentru valorile lui X egale cu rădăcinile cubice ale unității (rădăcinile ecuației $x^3 - 1 = 0$). Așadar, P este divizibil cu $X^2 + X + 1$, ceea ce completează demonstrația.

4°. Cum $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x<0}} f(x) = \lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x<0}} e^{ax} = 1 = f(0)$ și $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} f(x) = \lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} (ax)^x = 1$, rezultă că f este continuă pe $\mathbf{R}$. Cum

$$f'_s(0) = \lim_{\substack{x\to 0\\ x<0}} \frac{e^{ax} - 1}{x} = a \text{ și}$$

$$f'_d(0) = \lim_{\substack{x\to 0\\ x>0}} \frac{(ax)^x - 1}{x} = \lim_{\substack{x\to 0\\ x>0}} \frac{e^{x \ln(ax)} - 1}{x} = -\infty,$$

rezultă că f nu este derivabilă în $x = 0$.

Notă. Pentru $x < 0$ și $x > 0$ continuitatea și derivabilitatea lui f sînt asigurate prin aceea că aceasta este dată prin compuneri de funcții elementare.

$$\int_{-a}^{0} x^2 f(x)\,dx = \int_{-a}^{0} x^2 e^{ax}\,dx = \frac{1}{a}(x^2 e^{ax})\Big|_{-a}^{0} - \frac{2}{a}\int_{-a}^{0} x e^{ax}\,dx =$$

$$= -ae^{-a^2} - \frac{2}{a}\left[\frac{1}{a}(xe^{ax})\Big|_{-a}^{0} - \frac{1}{a}\int_{-a}^{0} e^{ax}\,dx\right] =$$

$$= -ae^{-a^2} - \frac{2}{a}e^{-a^2} + \frac{2}{a^2}\left[\frac{1}{a}(e^{ax})\Big|_{-a}^{0}\right] = -ae^{-a^2} - \frac{2}{a}e^{-a^2} + \frac{2}{a^3} - \frac{2}{a^3}e^{-a^2} =$$

$$= \frac{1}{a^3 e^{a^2}}\left[2e^{a^2} - 2 - 2a^2 - a^4\right].$$

5°. Din condițiile: $\frac{x-5}{x+2} \geq 0$; $x + 2 \neq 0$, găsim că $f: (-\infty, -2) \cup [5, \infty) \to \mathbf{R}$, $f(x) = 0$, pentru $x = 5$. Cum $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = 1 = \lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$, rezultă că $y = 1$ este asimptotă orizontală (la $+\infty$ și $-\infty$). În plus, $\lim\limits_{\substack{x\to -2\\ x<-2}} f(x) = +\infty$, deci $x = -2$ este asimptotă verticală. Pe de altă parte:

$$f'(x) = \frac{7}{2(x+2)^2\sqrt{\frac{x-5}{x+2}}} > 0,\ (\forall)x \in (-\infty, -2) \cup (5, +\infty).$$

deci f este strict crescătoare. Mai mult: $\lim\limits_{\substack{x \to 5 \\ x > 5}} f'(x) = +\infty$. Din studiul derivatei a doua se găsește că:

$$f''(x) > 0 \text{ dacă } x < -2;$$

$$f''(x) < 0, \text{ dacă } x > 5.$$

Rezultatele sînt sintetizate în tabloul următor:

x	$-\infty$		-2		5		$+\infty$
$f'(x)$		$+ \quad +$			$+\infty$	$+ \quad +$	
$f(x)$	1	$\nearrow$	$+\infty$		0	$\nearrow$	1
$f''(x)$		$+ \quad +$				$- \quad -$	

iar graficul este cel din fig. M.B.100. Pentru studiul soluției ecuației $f(x) = m$, $m \in \mathbf{R}$, este suficient să observăm că $y = m$ reprezintă ecuația unei drepte paralele cu axa Ox și, evident: dacă $m \in (-\infty, 0) \cup \{1\}$, ecuația nu admite soluții

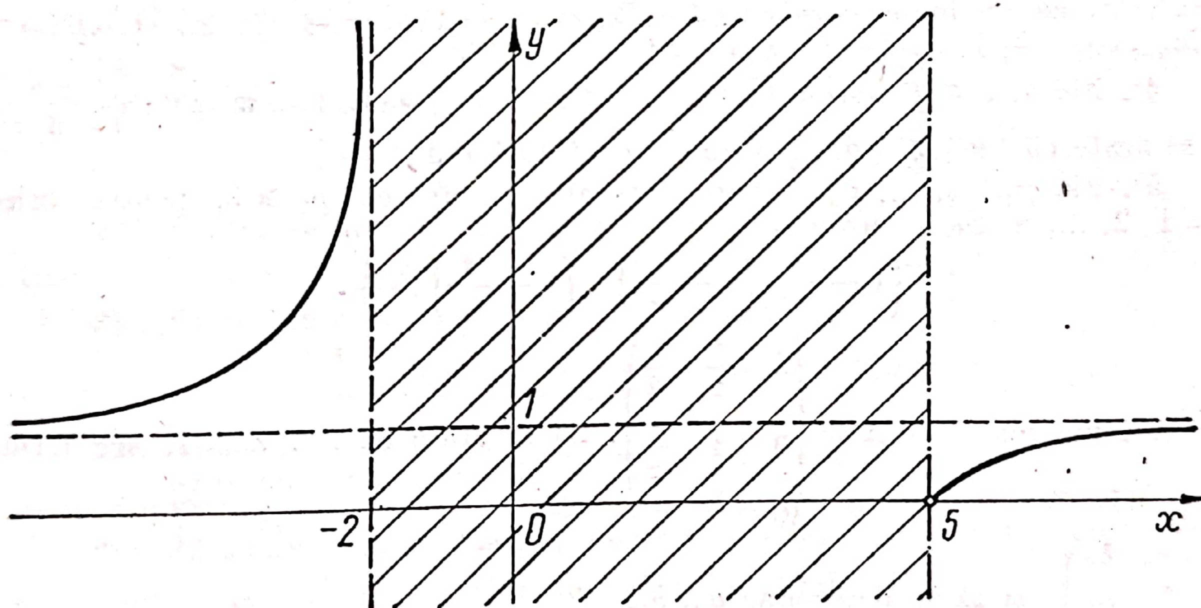


Fig. M.B.100

(dreapta respectivă neintersectînd graficul funcției reprezentate); dacă $m = 0$, atunci $x = 5$ (soluție unică); dacă $m \in (0, 1) \cup (1, \infty)$, ecuația admite soluția unică $x > 5$ sau $x < -2$, după cum $m \in (0, 1)$ sau, respectiv, $m \in (1, \infty)$.

Anume, $x = \dfrac{5 + 2m^2}{1 - m^2}$.

C. PROBLEME PROPUSE

ENUNŢURI

1. ALGEBRĂ

1°. Fie ecuaţiile: $x^2 + ax + b = 0$, $x^2 + cx + d = 0$, $a, b, c, d \in \mathbf{C}$. Dacă α şi β sînt rădăcinile primei ecuaţii, iar γ şi δ sînt rădăcinile celei de a doua ecuaţii, să se calculeze în funcţie de coeficienţi expresia: $E = (\alpha - \gamma)(\beta - \gamma)(\alpha - \delta)(\beta - \delta)$.

2°. Să se arate că polinomul $P(X) = X^n \sin\varphi - X \sin n\varphi + \sin(n-1)\varphi$, $\varphi \in (0, \pi)$, este divizibil cu polinomul $X^2 - 2X\cos\varphi + 1$.

3°. Dacă notăm cu ε_k, $k = 0, 1, \ldots, n-1$, rădăcinile de ordin n ale unităţii, să se arate că are loc egalitatea: $(\varepsilon_0^2 - 2\varepsilon_0\cos\varphi + 1)(\varepsilon_1^2 - 2\varepsilon_1\cos\varphi + 1)\ldots(\varepsilon_{n-1}^2 - 2\varepsilon_{n-1}\cos\varphi + 1) = 2(1 - \cos n\varphi)$, unde $\varphi \in [0, 2\pi]$.

4°. Fie $u, v \in \mathbf{C}$ astfel încît $|u| < 1$ şi $|v| = 1$. Fie $w = v \cdot \dfrac{z-u}{1-\bar{u}\cdot z}$. Să se arate că $|w| \leqslant 1$ dacă şi numai dacă $|z| \leqslant 1$.

5°. Fie $p_1, p_2, \ldots, p_n$ numere naturale diferite, cu $p_k \geqslant 2$, pentru orice $k = 1, 2, \ldots, n$. Să se arate că:

$$\left(1 - \frac{1}{p_1^2}\right)\left(1 - \frac{1}{p_2^2}\right)\ldots\left(1 - \frac{1}{p_n^2}\right) > \frac{1}{2}.$$

6°. Fie matricea $A = \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{3} \\ 0 & 1 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. Să se arate că A^n, $n \geqslant 1$, are forma $\begin{pmatrix} 1 & a_n & b_n \\ 0 & 1 & a_n \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, şi să se determine a_n, b_n.

7°. Dacă matricile $A, B \in M_n(\mathbf{R})$ au proprietatea că există k şi $l \in \mathbf{N}^*$ astfel încît $A^k = 0$, $B^l = 0$ şi $AB = BA$, atunci există $n \in \mathbf{N}^*$ astfel încît $(A+B)^n = 0$.

8°. Fie x, y numere reale care satisfac condiţia $x + y > 1$. Să se arate că $x^2 + y^2 > \frac{1}{2}$.

9°. Fie x, y, z numere reale. Să se arate că: $x^2 + y^2 + z^2 \geqslant xy + yz + xz$. Dacă, în plus, $x + y + z = 1$, să se arate că: $x^2 + y^2 + z^2 \geqslant \frac{1}{3}$.

10°. Fie determinantul de ordinul n:

$$\Delta_n = \begin{vmatrix} \alpha+\beta & \alpha\beta & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ 1 & \alpha+\beta & \alpha\beta & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \alpha+\beta & \alpha\beta & \ldots & 0 & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \ldots 1 & \alpha+\beta & \alpha\beta \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \ldots 0 & 1 & \alpha+\beta \end{vmatrix}.$$

Să se arate că pentru $n \geqslant 3$ avem relația: $\Delta_n = (\alpha + \beta)\Delta_{n-1} - \alpha\beta \cdot \Delta_{n-2}$.
Să se deducă formula: $\Delta_n = \alpha^n + \alpha^{n-1}\beta + \alpha^{n-2}\beta^2 + \ldots + \alpha\beta^{n-1} + \beta^n$, pentru $n \geqslant 1$.

11°. Să se găsească numerele $x > 2$ și $y > 0$ astfel încît expresia: $\frac{x}{y} + \frac{2y}{x-2} - \frac{8}{x} + 5$, să aibă valoarea minimă.

12°. Să se găsească minimul expresiei: $x^2 + y^2 + z^2$, $x, y, z \in \mathbf{R}$, știind că are loc relația: $ax + by + z = c$, $a, b, c \in \mathbf{R}$.

13°. Să se găsească, în mulțimea numerelor naturale, soluțiile ecuației: $x^2 + y^2 + 2xy - mx - my - m - 1 = 0$, unde $m \in \mathbf{N}$ este dat.

14°. Să se arate că singura funcție $f: \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ care satisface proprietatea: $f(x)f(y) = xf(y) + yf(x) - xy$, pentru orice $x, y \in \mathbf{R}$, este funcția $f(x) = x$.

15°. Să se arate că pentru orice număr natural $k \neq 0$, există numere naturale x și y, nenule, care să verifice următoarele ecuații:

$$x^3 + y^3 = 9k\,xy; \quad (9k - 2x)y^2 = (18k + x)x^2.$$

16°. Notînd x_1, x_2, x_3, x_4 rădăcinile ecuației cu coeficienții reali: $x^4 + ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$, să se demonstreze relația:

$$(x_1^2 + 1)(x_2^2 + 1)(x_3^2 + 1)(x_4^2 + 1) = (a - c)^2 + (1 - b + d)^2.$$

17°. Să se arate că ecuația: $x^3 + px^2 - q^2 = 0$, are o rădăcină reală pozitivă și numai una ($p, q \in \mathbf{R}$; $q \neq 0$).

18°. Să se rezolve ecuația: $(x + 1)(x + 2)(x + 3)(x + 6) = 3x^2$.

19°. Să se calculeze suma:

$$\left(x + \frac{1}{x}\right)^2 + \left(x^2 + \frac{1}{x^2}\right)^2 + \ldots + \left(x^n + \frac{1}{x^n}\right)^2.$$

20°. Pentru ce numere reale m, n avem:

$$x^2 + y^2 + mx + ny + 1 \geqslant 0 \text{ pentru orice } x, y \in \mathbf{R}?$$

21°. Să se arate că:

$$\left|\frac{1}{10^2} + \frac{1}{11^2} + \ldots + \frac{1}{1\,000^2} - 0{,}105\right| < 0{,}006.$$

22°. Să se rezolve:
a) ecuația $(x^2 - x - 2)^4 + (2x + 1)^4 = (x^2 + x - 1)^4$;
b) inecuația $(x^2 - x - 2)^2 - (x^2 - x - 2)(x - 1) \geqslant 2(x - 1)^2$.

23°. Să se determine valoarea minimă a expresiei $a\,\mathrm{tg}^n\,x + \mathrm{ctg}^n\,x$, unde $a > 0$, este constant, $n \in \mathbf{N}$ și x variază în intervalul $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$.

24°. Fie $1 < a < b < \sqrt{2}$. Să se arate că: $\frac{1 - \sqrt{a^2 - 1}}{1 - \sqrt{b^2 - 1}} > \frac{a}{b}$.

25°. Să se determine $x \in [0, 2\pi]$ verificînd simultan: $2^{x+3} + 6 \cdot 2^{x-1} - 33 > 0$ și $\cos x > \frac{\sqrt{2}}{2}$.

26°. Să se rezolve inecuația: $\sqrt{x} - \sqrt[3]{x - 1} \geqslant 1$.

27°. Să se arate că nu există un polinom $P \in \mathbf{R}[X]$ astfel încît $P(x) = \sin x$ pentru orice $x \in (0, 1)$.

28°. Să se rezolve ecuația: $x^6 + x^5 + 3x^4 + 2x^3 + 3x^2 + mx + n = 0$ ($m, n \in \mathbf{R}$), știind că admite o rădăcină $x_1 = -i$.

29°. Dacă $A, B \in M_n(\mathbf{R})$ și matricea $I_n - ABAB$ este inversabilă, să se arate că matricea $I_n - BABA$ este de asemenea inversabilă.

30°. Fie polinomul: $f = (\hat{3}\lambda^2 + \hat{5}\lambda + \hat{2})X^3 + (\lambda + \hat{1})X^2 + (\hat{3}\lambda + \hat{2})X + \hat{1}$, cu coeficienții în $\mathbf{Z}_{13}$. Să se determine gradul lui f în funcție de $\lambda \in \mathbf{Z}_{13}$ și să se determine rădăcinile lui f pentru $\lambda = \hat{0}$.

2. GEOMETRIE

31°. Fie $ABCD$ un trapez cu bazele $[AB]$ și $[CD]$, iar O intersecția diagonalelor. Notăm ariile triunghiurilor OAB, OAD, OCD, OBC respectiv cu S_1, S_2, S_3, S_4. Să se arate că au loc relațiile: $S_2 = S_4$, $S_2^2 = S_1S_3$.

32°. Să se rezolve ecuația: $\arccos x + \arccos(1 - x) = \arccos(-x)$.

33°. Fie M, A, B, C situate în această ordine pe un cerc de centru O. Numerele $a = m(\widehat{MOA})$, $b = m(\widehat{MOB})$, $c = m(\widehat{MOC})$ satisfac relațiile: $\cos a + \cos b + \cos c = 0$; $\sin a + \sin b + \sin c = 0$. Să se arate că A, B, C sînt vîrfurile unui triunghi echilateral.

34°. Să arate că dacă $7 \sin a = 3 \sin(a + b)$, $\cos\frac{b}{2} \neq 0$, $\cos\frac{2a+b}{2} \neq 0$, atunci $2 \operatorname{tg}\frac{2a+b}{2} = 5 \operatorname{tg}\frac{b}{2}$ și reciproc.

35°. Pe laturile unui triunghi ABC se construiesc trei triunghiuri isoscele asemenea $APB([AP] \equiv [PB])$, $AQC([AQ] \equiv [QC])$ și $BRC([BR] \equiv [RC])$, primele două aflîndu-se în exteriorul triunghiului ABC, iar al treilea fiind așezat de aceeași parte a dreptei BC ca și triunghiul ABC. Să se arate că $APRQ$ este paralelogram.

36°. Să se arate că dacă triunghiurile ABC, $A'B'C'$ verifică relațiile $\hat{A} \equiv \hat{A}'$ și $\frac{a^2}{a'^2} = \frac{bc}{b'c'}$, atunci triunghiurile sînt asemenea.

37°. Să se rezolve inecuația: $1 + \cos 2x + \sin x < 2\cos^2\frac{x}{2}$.

38°. Să se arate că în orice triunghi cu unghiurile ascuțite există relația $S = p_1 \cdot R$, unde S este aria triunghiului, R este raza cercului circumscris, iar p_1 este semiperimetrul triunghiului ortic (format de picioarele înălțimilor).

39°. Să se afle locul geometric al centrelor cercurilor care taie două cercuri exterioare date, de centre O_1 și O_2, după diametre.

40°. Să se rezolve ecuația $\cos^n x - \sin^n x = 1$, unde $n \in \mathbf{N}^*$.

41°. În triunghiul ABC se notează $a = BC$ și h_a înălțimea corespunzătoare din A etc. Presupunem că $a > b$. Să se arate că: $a + h_a \geqslant b + h_b$. În ce caz avem egalitate, în ipoteza $a > b$?

42°. Se dau două cercuri, de centre O_1 și O_2, care se taie în punctele A și B. Fie C și D punctele diametral opuse lui A în cele două cercuri. Tangenta la cercul O_1 dusă prin A taie din nou cercul O_2 în M, iar tangenta la cercul O_2 dusă prin A taie din nou cercul O_1 în N. Prelungim segmentul $[AB]$ cu un segment $[BP]$ astfel încît B să fie mijlocul segmentului $[AP]$. Să se arate că:

a) Punctele C, B și D sînt coliniare.

b) Patrulaterul $AMPN$ este inscriptibil.

43°. Fie $ABCD$ un patrulater inscriptibil și fie E intersecția dreptelor AB, CD, iar F intersecția dreptelor BC, AD. Bisectoarea interioară a unghiului AFB taie laturile $[AB]$, $[CD]$ în P, respectiv M, iar bisectoarea interioară a unghiului AED taie laturile $[AD]$, $[BC]$ în Q, respectiv N. Să se arate că $MNPQ$ este romb.

44°. a) Prin muchia $[CD]$ a tetraedrului oarecare $ABCD$ se duce planul π' paralel cu muchia opusă $[AB]$, iar prin muchia $[BD]$ se duce planul π'' paralel cu muchia opusă $[AC]$. Să se arate că dreapta ce unește mijlocul M al muchiei $[BC]$ cu mijlocul N al muchiei $[AD]$ este paralelă cu planele π' și π''.

b) Se duce un plan oarecare π perpendicular pe dreapta de intersecție a planelor π' și π''. Să se arate că proiecțiile A', B', C', D' ale punctelor A, B, C, D pe planul π sînt vîrfurile unui paralelogram.

45°. Fie $ABCD$ un tetraedru. Presupunem că perpendiculara AE dusă din A pe fața BCD se intersectează cu perpendiculara BF dusă din B pe fața ACD într-un punct G. Să se arate că perpendiculara CK dusă din C pe fața ABD și perpendiculara DL dusă din D pe fața ABC se intersectează într-un punct M.

46°. Să se arate că într-un triunghi ABC avem:

$$a(60° - m(\hat{A})) + b(60° - m(\hat{B})) + c(60° - m(\hat{C})) = 0$$

dacă și numai dacă triunghiul este echilateral.

47°. Un dreptunghi variabil $MNPQ$ are vîrfurile situate pe laturile unui triunghi ABC. Să se arate că locul geometric al punctului de intersecție al diagonalelor dreptunghiului $MNPQ$ este reuniunea a trei segmente dacă ABC este triunghi ascuțitunghic și un segment dacă ABC este un triunghi obtuzunghic.

48°. Fie S un număr real pozitiv și $\alpha \in (0, 180)$. Să se demonstreze că în mulțimea triunghiurilor ABC astfel că $\sigma[ABC] = S$ și $m(\hat{A}) = \alpha$, triunghiul de perimetru minim este triunghiul isoscel cu $AB \equiv AC$.

49°. Fie A un punct în planul cercului $\mathcal{C}(O, R)$. Să se găsească punctele M situate pe cercul $\mathcal{C}(O, R)$ astfel încît măsura unghiului $\widehat{OMA}$ să fie maximă sau minimă.

50°. Să se arate că dacă un poligon convex cu $n \geqslant 4$ laturi are patru unghiuri drepte, atunci poligonul este un dreptunghi.

51°. Să se demonstreze că un triunghi ABC este dreptunghic isoscel dacă și numai dacă avem: $\cos A \cos B + \sin A \sin B \sin C = 1$.

52°. Să se demonstreze că pentru orice patrulater convex $ABCD$ avem: $\sin A + \sin B + \sin C + \sin D \leqslant 4 \sin \frac{A+B+C+D}{4}$; în ce caz are loc egalitatea?

53°. Să se arate că ecuația: $1 + |\cos x| \cdot \cos^2 x = \mathrm{tg}^2 x + \mathrm{ctg}^2 x$, nu are soluții reale.

54°. Să se demonstreze că într-un triunghi oarecare ABC avem inegalitatea: $\frac{\cos A \cos B \cos C}{\sin^2 A \sin^2 B \sin^2 C} \leqslant \frac{8}{27}$; cînd are loc semnul de egalitate?

55°. Lungimile laturilor unui triunghi notate cu a, b, c sînt în progresie aritmetică. Să se arate că:

i) $\sin A$, $\sin B$, $\sin C$ sînt în progresie aritmetică;

ii) $\frac{1}{h_a}$, $\frac{1}{h_b}$, $\frac{1}{h_c}$ sînt în progresie aritmetică.

(h_a, h_b, h_c reprezintă lungimile înălțimilor).

56°. În triunghiul isoscel ABC avem $m(\hat{B}) = m(\hat{C}) = 15°$ și perimetrul $2p = 4 + \sqrt{6} + \sqrt{2}$. Să se determine laturile și aria triunghiului.

57°. Cercurile $\mathcal{C}_1(O_1, R_1)$ și $\mathcal{C}_2(O_2, R_2)$ se intersectează în punctele A și B. Notăm cu T_1 și T_2 punctele de tangență ale cercurilor $\mathcal{C}_1$, respectiv $\mathcal{C}_2$ cu una din tangentele comune. Fie P punctul de intersecție al dreptelor O_1O_2 și AB. Să se calculeze lungimile laturilor triunghiului PT_1T_2 în funcție de razele cercurilor și distanța dintre centre $d = O_1O_2$.

58°. Să se demonstreze că suma pătratelor distanțelor la vîrfuri ale unui punct situat pe o mediană a unui triunghi este minimă cînd punctul este centrul de greutate al triunghiului.

59°. În triunghiul oarecare ABC se notează cu A' și B' intersecțiile cercului circumscris triunghiului cu bisectoarele unghiurilor BAC, respectiv ABC. Notînd cu I centrul cercului înscris triunghiul ABC, să se arate că raza cercului circumscris triunghiului $IA'B'$ este egală cu raza cercului circumscris triunghiului ABC.

60°. Să se calculeze lungimile diagonalelor unui patrulater inscriptibil în funcție de lungimea laturilor sale.

61°. Să se calculeze unghiurile unui trapez în funcție de lungimile laturilor sale.

62°. Se consideră mulțimea triunghiurilor ABC în plan care au două vîrfuri fixe, iar expresia $b^2 + c^2 - a^2$ are o valoare constantă. Să se determine locul geometric descris de al treilea vîrf.

63°. Fie $ABCD$ un dreptunghi și O intersecția diagonalelor. Un punct $M \in (BD)$ se proiectează pe AB și AD în punctele E respectiv F. Să se arate că, pentru orice $M \in (BD)$, MC este perpendiculară pe EF dacă și numai dacă dreptunghiul este pătrat.

64°. Fie ABC un triunghi și O un punct în planul său. Să se găsească punctele $M \in [AB$ și $N \in [AC$ astfel încît $MN \parallel BC$ și $OM = ON$.

65°. Fie A un punct exterior planului π și P un punct fixat în planul π. Să se afle locul geometric al proiecțiilor punctului A pe toate dreptele din planul π care trec prin punctul P.

66°. Fie A și B două puncte de aceeași parte a planului π astfel încît notînd cu A', respectiv B' proiecțiile lor pe planul π să avem $AA' = k \cdot BB'$ $(k > 0)$. Să se găsească locul geometric al punctelor M din planul π astfel încît să avem $m(\widehat{AMA'}) = m(\widehat{BMB'})$.

67°. Se consideră în spațiu două drepte d și d′ paralele cu un plan π și la distanță egală de acest plan. În ipoteza că planul π separă cele două drepte, să se găsească locul geometric al punctelor din planul π care sînt centrele sferelor tangente celor două drepte d și d′.

68°. Să se determine un plan care intersectează o sferă $\mathcal{S}(O, R)$, astfel încît diferența ariilor celor două calote sferice determinate să fie egală cu aria cercului de intersecție a planului cu sfera.

69°. Se consideră un cerc $\mathcal{C}(O, R)$ și o coardă $[AB]$ de lungime R. Să se calculeze latura pătratului înscris în segmentul „mic" de cerc.

70°. Fie un patrulater convex $ABCD$ circumscris unui cerc. Se notează cu M, N, P, Q punctele de tangență cu laturile $[AB]$, $[BC]$, $[CD]$, $[DA]$ respectiv. Să se arate că: $AB + CD = BC + AD$ și că dreptele MP, NQ trec prin $O = AC \cap BD$.

71°. Două cercuri de raze R, r se intersectează în A, A' iar BC este o tangentă comună exterioară, de aceeași parte cu A' față de linia centrelor. Să se calculeze raza cercului ABC.

72°. Să se arate că pentru orice $a_1, a_2, ..., a_n \in \mathbf{R}$ $(n \geqslant 2)$ avem:

$$\sin a_1 \sin a_2 ... \sin a_n + \cos a_1 \cos a_2 ... \cos a_n \leqslant 1.$$

73°. Să se arate că pentru orice $x \in \mathbf{R}$ are loc: $\frac{1}{2} \leqslant \sin^2 x + 3 \sin x \cos x + 5 \cos^2 x \leqslant \frac{11}{2}$. Generalizare.

74°. Fie o piramidă $[VABCD]$, P un punct în planul VAD și Q un punct în planul VBC. Să se construiască punctul de intersecție al dreptei PQ cu planul VBD.

75°. Fie un sistem ortogonal xOy și $P \in Ox$, $Q \in Oy$ astfel încît $OP + OQ = a$, constant. Fie R vîrful opus lui O în dreptunghiul $OPRQ$. Să se cerceteze dacă perpendiculara din R pe PQ trece sau nu printr-un punct fix.

76°. Se consideră cercul $\mathcal{C}$: $x^2 + y^2 - x - y - 2 = 0$ și dreapta D: $x + y - 1 = 0$. Să se determine ecuația cercurilor γ astfel ca D să fie axa radicală pentru $\mathcal{C}$ și γ și să se determine locul geometric al centrelor acestor cercuri.

3. ANALIZĂ MATEMATICĂ

77°. Să se arate că șirul cu termenul general $a_n = \frac{1}{2^{2n}} C_{2n}^n$, $n \geqslant 1$, este convergent și să i se calculeze limita.

78°. Să se arate că $\lim_{n\to\infty} \sin(\pi \sqrt{n^2+1}) = 0$.

79°. Fie șirul $(a_n)_{n\geqslant 1}$ definit prin: $a_1 = a$, $a_{n+1} = \alpha a_n + \beta$, pentru $n \geqslant 1$, unde $|\alpha| < 1$. Să se determine a_n și să se calculeze $\lim_{n\to\infty} a_n$.

80°. Să se arate că:

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{C_n^1}{2^n+1} + \frac{C_n^2}{2^n+2} + \ldots + \frac{C_n^n}{2^n+n}\right) = 1.$$

81°. Fie șirul $(a_n)_{n\geqslant 1}$ definit prin: $a_0 = 1$, $a_{n+1} = \sin a_n$, pentru $n \geqslant 0$. Să se calculeze $\lim_{n\to\infty} a_n$.

82°. Fie $(x_n)_{n\geqslant 1}$ un șir de numere reale cu proprietatea $\lim_{n\to\infty} x_n = 0$. Să se calculeze: $\lim_{n\to\infty} \frac{x_n^2 \cdot \sin^2 x_n}{x_n^2 - \sin^2 x_n}$.

83°. Fie funcția $f\colon [0, 1] \to \mathbf{R}$,

$$f(x) = \begin{cases} 2x \sin \frac{1}{x^2} - \frac{2}{x} \cos \frac{1}{x^2} & \text{dacă } x \in (0, 1], \\ 0 & \text{dacă } x = 0. \end{cases}$$

Să se arate că f are primitive și că f nu este integrabilă pe intervalul $[0, 1]$.

84°. Fie $f\colon \left[\frac{1}{\pi}, \infty\right) \to \mathbf{R}$, $f(x) = \int_{1/\pi}^{x} \left|\cos \frac{1}{t}\right| \frac{dt}{t^2}$. Să se arate că f este monotonă și să se determine $\lim_{n\to\infty} f(n)$, $n \geqslant 1$.

85°. Fie $I_n = \int_1^e (\ln x)^n \, dx$, $n \in \mathbf{N}$. Să se arate că șirul $(I_n)_{n\geqslant 0}$ este monoton și mărginit, să se găsească o relație de recurență între I_n și I_{n-1} $(n \geqslant 1)$ și să se calculeze $\lim_{n\to\infty} I_n$.

86°. Se consideră funcția $f\colon D \to \mathbf{R}$, $f(x) = \frac{x}{1 + xe^{|x-1|}}$, unde $D \subset \mathbf{R}$.

a) Să se afle D maxim și să se arate că graficul lui f are o asimptotă verticală $x = x_0$, cu $x_0 \in \left(-\frac{1}{2}, 0\right)$.

b) Să se traseze graficul.

87°. Să se calculeze: $\int_0^{2\pi} \frac{dx}{3 + \cos x}$.

88°. Să se calculeze: $\lim_{x\to 0} (1 + x^2 e^x)^{\frac{1}{1-\cos x}}$.

89°. Să se calculeze: $\int_2^3 \ln(x + \sqrt{x^2 - 1}) \, dx$.

90°. Să se calculeze: $\lim\limits_{\substack{x\to 1\\ x<1}} \frac{\sin(n \arccos x)}{\sqrt{1-x^2}}$, unde $n \in \mathbf{N}^*$.

91°. Se consideră funcția $f:\mathbf{R}\to\mathbf{R}$ definită prin: $f(x) = \int_x^{2x} \frac{dt}{\sqrt{t^4+t^2+1}}$. Să se arate că f este derivabilă pe $\mathbf{R}$ și să i se calculeze derivata.

92°. Fie $f:\mathbf{R}\to\mathbf{R}$, $f(x) = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{axe^{nx}+bx^2+c}{e^{nx}+1}$. Să se determine condițiile pe care trebuie să le îndeplinească parametrii reali a, b și c astfel încît f să admită primitive.

93°. Se consideră funcția $f:\mathbf{R}\to\mathbf{R}$ definită prin:

$$f(x) = \begin{cases} e^x \cos\frac{1}{x}, & x \neq 0 \\ \alpha, & x = 0. \end{cases}$$

Să se determine $\alpha \in \mathbf{R}$ astfel încît f să admită primitive.

94°. Pentru $n \geqslant 2$ definim șirul $a_n = \frac{e^{\arcsin\frac{1}{n}} - 1}{e^{\frac{1}{n}} - \cos\frac{1}{n}}$. Să se calculeze $\lim\limits_{n\to\infty} a_n$.

95°. Să se calculeze $\lim\limits_{n\to\infty} \int_n^{n+1} \ln\left(1 + \frac{|\sin x|}{x}\right) dx$.

96°. Să se traseze graficul funcției $f:\mathbf{R}\to\mathbf{R}$, $f(x) = \lim\limits_{a\to\infty} \frac{x}{1+x^2+e^{ax}}$.

97°. Să se studieze șirul $(x_n)_{n\geqslant 0}$ definit prin $x_0 \in (0, 1)$ și $x_n = x_{n-1} - x_{n-1}^2$ pentru orice $n \geqslant 1$.

98°. Să se calculeze $\lim\limits_{x\to n} \frac{(x-n)^2}{\sin^2(\pi x)}$; $n \in \mathbf{Z}$.

99°. Fie $f:[0, 1]\to\mathbf{R}$ o funcție continuă astfel încît $f(0) = f(1)$ și pentru orice $x \in (0, 1)$, $f(x) \geqslant f(0)$. Să se arate că pentru orice $k \in (0, 1)$, graficul lui f are o coardă paralelă cu Ox de lungime k.

100°. Care este aria maximă a unui trapez avînd trei laturi de măsură 1 cm?

101°. Să se determine $\lambda \in \mathbf{R}$ astfel încît cea mai mică valoare a lui $f(x) = x^3 + \lambda x^2 - 1$ pe intervalul $[0, 1]$ să coincidă cu cea mai mare valoare a lui $f(x)$ pe $[1, 3]$.

102°. Să se calculeze valoarea cea mai mare M_n a funcției $f:\mathbf{R}\to\mathbf{R}$, $f(x) = \sin^n x \cos x$ ($n \in \mathbf{N}$ și $n \geqslant 2$) și să se determine $\lim\limits_{n\to\infty} M_n \cdot \sqrt{n+1}$.

103°. Să se calculeze $\lim\limits_{n\to\infty} n^2 (\sqrt[n]{a} - \sqrt[n+1]{a})$; $a > 0$ dat.

104°. Să se determine funcțiile derivabile $f:(0, \infty)\to\mathbf{R}$ astfel încît pentru orice $x > 0$, $x + \int_0^x f(t)\,dt = (x+1) f(x)$.

105°. Să se calculeze: $I = \int_0^{4\pi} |\arcsin(\sin x)|\,dx$.

106°. Dacă $m > n > 0$, să se arate că: $mn \ln\frac{m}{n} < m^2 + mn - 2n^2$.

107°. Fie $I_n = \int_0^1 x^n \cdot \sqrt{1-x}\, dx$, $n \in N$. Să se calculeze I_0, I_1 şi raportul $\frac{I_n}{I_{n-1}}$ pentru $n \geqslant 1$. Să se arate că:

$$I_n = \frac{2^{n+1} \cdot n!}{3 \cdot 5 \cdot 7 \ldots (2n+3)}.$$

108°. Să se calculeze: $\lim_{k \to \infty} \int_{-2}^{2} \frac{|x-2|+k}{2-|x-k|}\, dx.$

109°. Să se arate că: $e^{\pi} > \pi^{e}$.

110°. Să se calculeze: $I = \int_0^2 \min\left(x, \sin\frac{\pi x}{2}\right) dx.$

111°. Fie $f : [0, 1] \to [a, b]$ o funcţie continuă astfel încît $\int_0^1 f(x)\, dx = 0$. Să se arate că: $\int_0^1 f(x)^2\, dx \leqslant -ab$.

1°. Notăm: $P(X) = X^2 + aX + b$, $Q(X) = X^2 + cX + d$. Atunci putem scrie $E = (\alpha - \gamma)(\alpha - \delta) \cdot (\beta - \gamma)(\beta - \delta) = Q(\alpha) \cdot Q(\beta) = (\alpha^2 + c\alpha + d) \cdot (\beta^2 + c\beta + d) = \alpha^2\beta^2 + c\alpha\beta(\alpha + \beta) + d(\alpha^2 + \beta^2) + cd(\alpha + \beta) + c^2\alpha\beta + d^2$. Dar $\alpha + \beta = -a$, $\alpha\beta = b$, deci E devine:

$$E = b^2 - abc + da^2 - 2bd - acd + c^2b + d^2 = b^2 - 2bd + d^2 +$$
$$+ a(ad - dc - ab + bc) + b(a^2 - 2ac + c^2) = (b - d)^2 + a(d - b)(a - c) + b(a - c)^2.$$

2°. Polinomul $Q(X) = X^2 - 2X \cos \varphi + 1$ are rădăcinile $x_{1,2} = \cos \varphi \pm \pm \mathrm{i} \sin \varphi$. Calculăm $P(x_1) = (\cos \varphi + \mathrm{i} \sin \varphi)^n \sin \varphi - (\cos \varphi + \mathrm{i} \sin \varphi) \sin n\varphi + \sin(n-1)\varphi = (\cos n\varphi + \mathrm{i} \sin n\varphi) \sin \varphi - (\cos \varphi + \mathrm{i} \sin \varphi) \sin n\varphi + \sin(n-1)\varphi = \cos n\varphi \sin \varphi - \cos \varphi \sin n\varphi + \sin(n-1)\varphi + \mathrm{i} \sin n\varphi \sin \varphi - \mathrm{i} \sin \varphi \sin n\varphi = -\sin(n-1)\varphi + \sin(n-1)\varphi = 0$. Deoarece polinomul $P(X)$ are coeficienți reali, rezultă că avem și $P(x_2) = 0$ (căci $x_2 = \bar{x}_1$). Atunci $P(X)$ se divide cu $(X - x_1)(X - x_2) = Q(X)$.

3°. Fie $Q(X) = X^2 - 2X \cos \varphi + 1$ și $P(X) = X^n - 1$. Polinomul $Q(X)$ are rădăcinile $x_{1,2} = \cos \varphi \pm \mathrm{i} \sin \varphi$ și se poate descompune astfel: $Q(X) = (X - x_1)(X - x_2)$. Atunci $(\varepsilon_k^2 - 2\varepsilon_k \cos \varphi + 1) = (\varepsilon_k - x_1)(\varepsilon_k - x_2)$ și avem:

$$(\varepsilon_0^2 - 2\varepsilon_0 \cos \varphi + 1)(\varepsilon_1^2 - 2\varepsilon_1 \cos \varphi + 1) \ldots (\varepsilon_{n-1}^2 - 2\varepsilon_{n-1} \cos \varphi + 1) =$$
$$= (\varepsilon_0 - x_1)(\varepsilon_0 - x_2)(\varepsilon_1 - x_1)(\varepsilon_1 - x_2) \ldots (\varepsilon_{n-1} - x_1)(\varepsilon_{n-1} - x_2) =$$
$$= (x_1 - \varepsilon_0)(x_1 - \varepsilon_1) \ldots (x_1 - \varepsilon_{n-1}) \cdot (x_2 - \varepsilon_0)(x_2 - \varepsilon_1) \ldots (x_2 - \varepsilon_{n-1}) =$$
$$= P(x_1) \cdot P(x_2) = [(\cos \varphi + \mathrm{i} \sin \varphi)^n - 1] \cdot [(\cos \varphi - \mathrm{i} \sin \varphi)^n - 1] =$$
$$= [(\cos n\varphi - 1) + \mathrm{i} \sin n\varphi] \cdot [(\cos n\varphi - 1) - \mathrm{i} \sin n\varphi] = (\cos n\varphi - 1)^2 + \sin^2 n\varphi =$$
$$= 2(1 - \cos n\varphi).$$

4°. Avem: $|w| = |v| \cdot \dfrac{|z - u|}{|1 - \bar{u} \cdot z|} = \dfrac{|z - u|}{|1 - \bar{u} \cdot z|}$ (deoarece $|v| = 1$). Fie $u = a + bi$; atunci $|u| = \sqrt{a^2 + b^2} < 1$ și $\bar{u} = a - bi$. Fie $z = x + yi$, atunci $z - u = (x - a) + (y - b)\mathrm{i}$ și $|z - u| = \sqrt{(x - a)^2 + (y - b)^2}$. Apoi $1 - \bar{u} \cdot z = (1 - ax - by) + (bx - ay)\mathrm{i}$, deci:

$$|1 - \bar{u} \cdot z| = \sqrt{(1 - ax - by)^2 + (bx - ay)^2}.$$

Rezultă că $|w| \leqslant 1$ dacă și numai dacă $|z - u|^2 \leqslant |1 - \bar{u} \cdot z|^2$, adică:

$$(x - a)^2 + (y - b)^2 \leqslant (1 - ax - by)^2 + (bx - ay)^2.$$

Această relație este echivalentă cu: $(a^2 + b^2 - 1)(x^2 + y^2 - 1) \geqslant 0$, deci cu relația $x^2 + y^2 \leqslant 1$, adică cu $|z| \leqslant 1$.

5°. Renumerotînd, eventual, numerele putem presupune că avem: $2 \leqslant p_1 < p_2 \ldots < p_n$ (deoarece ele sînt diferite). Deoarece fiecare p_k este număr natural

rezultă inegalitățile: $p_2 \geqslant p_1 + 1 \geqslant 3$; $p_3 \geqslant p_2 + 1 \geqslant 4$; ...; $p_n \geqslant p_{n-1} + 1 \geqslant n + 1$. Deci avem: $p_k \geqslant k + 1$, $k = 1, 2, ..., n$. Atunci rezultă succesiv inegalitățile: $p_k^2 \geqslant (k+1)^2$, de unde $\frac{1}{p_k^2} \leqslant \frac{1}{(k+1)^2}$; apoi $-\frac{1}{p_k^2} \geqslant -\frac{1}{(k+1)^2}$, deci $1 - \frac{1}{p_k^2} \geqslant$ $\geqslant 1 - \frac{1}{(k+1)^2}$. Obținem inegalitatea:

$$\left(1 - \frac{1}{p_1^2}\right)\left(1 - \frac{1}{p_2^2}\right) \ldots \left(1 - \frac{1}{p_n^2}\right) \geqslant \left(1 - \frac{1}{2^2}\right)\left(1 - \frac{1}{3^2}\right) \ldots \left(1 - \frac{1}{(n+1)^2}\right).$$

Membrul drept al inegalității de mai sus poate fi calculat astfel:

$$\left(1 - \frac{1}{2^2}\right)\left(1 - \frac{1}{3^2}\right) \ldots \left(1 - \frac{1}{(n+1)^2}\right) = \frac{2^2 - 1}{2^2} \cdot \frac{3^2 - 1}{3^2} \ldots \frac{(n+1)^2 - 1}{(n+1)^2} =$$

$$= \frac{1 \cdot 3}{2^2} \cdot \frac{2 \cdot 4}{3^2} \cdot \frac{3 \cdot 5}{4^2} \ldots \frac{(k-1)(k+1)}{k^2} \ldots \frac{n(n+2)}{(n+1)^2} = \frac{n+2}{2(n+1)}.$$

Deoarece $\frac{n+2}{2(n+1)} > \frac{1}{2}$, obținem inegalitatea cerută în enunț.

6°. Pentru $n = 1$ avem, într-adevăr, că:

$$A^1 = \begin{pmatrix} 1 & a_1 & b_1 \\ 0 & 1 & a_1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

unde $a_1 = \frac{1}{2}$ și $b_1 = \frac{1}{3}$. Presupunem că $A^n = \begin{pmatrix} 1 & a_n & b_n \\ 0 & 1 & a_n \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ și calculăm:

$$A^{n+1} = A^n \cdot A = \begin{pmatrix} 1 & a_n & b_n \\ 0 & 1 & a_n \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{3} \\ 0 & 1 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & a_n + \frac{1}{2} & b_n + \frac{a_n}{2} + \frac{1}{3} \\ 0 & 1 & a_n + \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

deci și A^{n+1} are forma căutată, unde: $a_{n+1} = a_n + \frac{1}{2}$, $b_{n+1} = b_n + \frac{a_n}{2} + \frac{1}{3}$.

Din relațiile $a_1 = \frac{1}{2}$, $a_{n+1} = a_n + \frac{1}{2}$, rezultă că șirul $(a_n)_{n \geqslant 1}$ este o progresie aritmetică cu primul termen $\frac{1}{2}$ și rația $r = \frac{1}{2}$. Obținem atunci că: $a_n = a_1 +$ $+ (n-1) \cdot r = \frac{1}{2} + \frac{n-1}{2} = \frac{n}{2}$, $(\forall)\, n \geqslant 1$. Rezultă formula: $b_{n+1} = b_n + \frac{n}{4} + \frac{1}{3}$.

Scriem relațiile:

$$b_2 = b_1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{3};$$

$$b_3 = b_2 + \frac{2}{4} + \frac{1}{3};$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$b_n = b_{n-1} + \frac{n-1}{4} + \frac{1}{3},$$

și le adunăm. Obținem: $b_n = \frac{1 + 2 + \ldots + (n-1)}{4} + \frac{n}{3} = \frac{(n-1)n}{8} + \frac{n}{3} = \frac{n(3n+5)}{24}$.

7°. Din ipoteza $AB = BA$ rezultă prin inducție matematică că $A^m \cdot B^s = B^s \cdot A^m$ pentru orice $m, s \in \mathbf{N}$. Atunci se arată (eventual tot prin inducție) că are loc formula binomului lui Newton: $(A + B)^n = A^n + C_n^1 A^{n-1}B + \dots + B^n$. Prin ipoteză avem $A^k = 0$ și $B^l = 0$. Alegem $n = k + l$ și aplicăm formula de mai sus:

$$(A + B)^n = A^n + C_n^1 A^{n-1}B + \dots + C_n^l A^k \cdot B^l + C_n^{l+1}A^{k-1}B^{l+1} + \dots + B^n = 0,$$

deoarece $A^k = A^{k+1} = \dots = A^n = 0$ și $B^l = B^{l+1} = \dots = B^n = 0$.

8°. Avem: $2(x^2 + y^2) = (x^2 + y^2) + (x^2 + y^2) \geqslant x^2 + y^2 + 2xy$, deci $2(x^2 + y^2) \geqslant (x + y)^2 > 1$, adică $x^2 + y^2 > \frac{1}{2}$. *Altă metodă.* Notăm $x = u + v$, $y = u - v$ (deci $2u > 1$). Atunci $x^2 + y^2 = (u + v)^2 + (u - v)^2 = 2u^2 + 2v^2 \geqslant 2u^2 > \frac{1}{2}$.

9°. Inegalitatea cerută este echivalentă succesiv cu următoarele inegalități: $2(x^2 + y^2 + z^2) \geqslant 2(xy + yz + xz)$ sau $(x^2 + y^2 - 2xy) + (x^2 + z^2 - 2xz) + (y^2 + z^2 - 2yz) \geqslant 0$, adică $(x - y)^2 + (x - z)^2 + (y - z)^2 \geqslant 0$, care este evidentă. Ridicînd la pătrat relația $x + y + z = 1$ și folosind inegalitatea anterioară, obținem:

$$1 = x^2 + y^2 + z^2 + 2(xy + yz + zx) \leqslant (x^2 + y^2 + z^2) + 2(x^2 + y^2 + z^2),$$

deci $1 \leqslant 3(x^2 + y^2 + z^2)$, adică $x^2 + y^2 + z^2 \geqslant \frac{1}{3}$.

10°. Dezvoltînd determinantul Δ_n după prima linie obținem:

$$\Delta_n = (\alpha + \beta)\begin{vmatrix} \alpha+\beta & \alpha\beta & 0 \dots & 0 \\ 1 & \alpha+\beta & \alpha\beta \dots & 0 \\ & 1 & & \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 \dots & \alpha+\beta \end{vmatrix} - \alpha\beta \begin{vmatrix} 1 & \alpha\beta & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \alpha+\beta & \alpha\beta & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \alpha+\beta \end{vmatrix} =$$

$$= (\alpha + \beta)\Delta_{n-1} - \alpha\beta \cdot \Delta_{n-2};$$

(am dezvoltat al doilea determinant după prima coloană). Pentru $n = 1$ obținem $\Delta_1 = \alpha + \beta$ și pentru $n = 2$ avem: $\Delta_2 = (\alpha + \beta)^2 - \alpha\beta = \alpha^2 + \alpha\beta + \beta^2$, deci formula dată se verifică. Presupunem formula adevărată pînă la $n - 1$ și să o demonstrăm și pentru n. Avem:

$$\Delta_n = (\alpha + \beta)\Delta_{n-1} - \alpha\beta\Delta_{n-2} = (\alpha + \beta)(\alpha^{n-1} + \alpha^{n-2}\beta + \dots + \alpha\beta^{n-2} + \beta^{n-1}) -$$
$$- \alpha\beta(\alpha^{n-2} + \alpha^{n-3}\beta + \dots + \alpha\beta^{n-3} + \beta^{n-2}) = \alpha^n + \alpha^{n-1}\beta + \dots + \alpha\beta^{n-1} + \beta^n.$$

11°. Expresia se mai poate scrie sub forma:

(1) $$\frac{x}{y} + \frac{2y}{x - 2} + \frac{4(x - 2)}{x} + 1.$$

Să observăm că oricare din primii trei termeni este strict pozitiv și produsul lor este constant. Aplicînd inegalitatea mediilor: $a + b + c \geqslant 3\sqrt[3]{abc}$, unde a, b și c sînt numere strict pozitive, deducem că suma primilor trei termeni este minimă atunci cînd:

$$\frac{x}{y} = \frac{2y}{x - 2} = \frac{4(x - 2)}{x}.$$

Egalînd cu $k > 0$ fiecare din aceste rapoarte, obținem: $x = ky$, $2y = k(x - 2)$, $4(x - 2) = kx$ și înmulțind aceste relații, rezultă $k^3 = 8$, deci $k = 2$. Rezultă că minimul expresiei se obține prin rezolvarea sistemului $x = 2y$, $2y = 2(x - 2)$, $4(x - 2) = 2x$, care ne dă soluția: $x = 4$, $y = 2$.

12°. Înlocuim $z = c - ax - by$ în $f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2$ și obținem:

$$F(x, y) = (a^2 + 1)x^2 + 2abxy + (b^2 + 1)y^2 - 2c(ax + by) + c^2.$$

Prin transformări succesive, avem:

$$F(x, y) = \frac{1}{a^2+1}[(a^2+1)^2x^2 + 2a(a^2+1)(by - c)x] + (b^2+1)y^2 - 2bcy + c^2 =$$

$$= \frac{1}{a^2+1}[(a^2+1)x + a(by-c)]^2 - \frac{a^2(by-c)^2}{a^2+1} + (b^2+1)y^2 - 2bcy + c^2 =$$

$$= \frac{1}{a^2+1}[(a^2+1)x + a(by-c)]^2 + \frac{1}{a^2+1}[(a^2+b^2+1)y^2 - 2bcy + c^2].$$

Ultima paranteză se poate scrie:

$$(a^2 + b^2 + 1)y^2 - 2bcy + c^2 = (a^2 + b^2 + 1)\left(y - \frac{bc}{a^2+b^2+1}\right)^2 + \frac{c^2(a^2+1)}{a^2+b^2+1}.$$

În final, obținem:

$$F(x, y) = \frac{1}{a^2+1}[(a^2+1)x + a(by-c)]^2 + \frac{a^2+b^2+1}{a^2+1}\left(y - \frac{bc}{a^2+b^2+1}\right)^2 + \frac{c^2}{a^2+b^2+1}.$$

Această funcție are valoarea minimă cînd cele două paranteze se anulează, deci pentru valorile lui x și y care sînt soluțiile sistemului:

$$\begin{cases} (a^2+1)x + a(by-c) = 0; \\ y - \dfrac{bc}{a^2+b^2+1} \quad 0. \end{cases}$$

Se obține: $x = \dfrac{ac}{a^2+b^2+1}$; $y = \dfrac{bc}{a^2+b^2+1}$; $z = \dfrac{c}{a^2+b^2+1}$ și minimul expresiei este $\dfrac{c^2}{a^2+b^2+1}$.

13°. Să considerăm ecuația dată în variabila x, cu parametrii y și m. Atunci discriminantul ecuației este $\Delta = (m+2)^2$. Se obțin soluțiile: $x = m - y + 1$ și $x = -y - 1$ (a doua nu este număr natural). Rezultă că ecuația are soluții numere naturale: $x_k = m - k + 1$ și $y_k = k$, unde $k \in \{0, 1, 2, \dots, m+1\}$.

14°. Se verifică imediat că $f(x) = x$ satisface relația dată. Să demonstrăm că este unică. Să presupunem că mai există o funcție $g : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ care satisface relația:

(1) $$g(x)g(y) = x\,g(y) + y\,g(x) - xy$$

și $f \neq g$ ceea ce înseamnă că există $x_0 \in \mathbf{R}$ astfel încît $g(x_0) \neq x_0$. Înlocuim $x = y = x_0$ în relațiile satisfăcute de f și g. Prin scădere obținem: $(f(x_0) - g(x_0))(f(x_0) + g(x_0) - 2x_0) = 0$. Înlocuind $f(x_0) = x_0$, obținem $g(x_0) = x_0$, ceea ce contrazice presupunerea făcută.

15°. Facem substituția $y = tx$ în cele două ecuații și eliminăm necunoscuta x. Se obține: $t^5 - 4t^3 + t^2 - t - 2 = 0$. Se observă că $t_1 = 2$ este o soluție a ecuației și avem descompunerea: $(t-2)(t^4 + 2t^3 + t + 1) = 0$. Avînd în vedere că x și y sînt numere întregi, t trebuie să fie rațional pozitiv. Rădăcinile întregi ale ecuației $t^4 + 2t^3 + t + 1 = 0$ sînt printre divizorii termenului liber, deci eventual ± 1, ceea ce nu se verifică. Ecuația $t^4 + 2t^3 + t + 1$ nu admite nici soluții raționale. Deci singura soluție acceptabilă pentru t este $t = 2$. Înlocuind $y = 2x$ în prima ecuație, după simplificare obținem $x = 2k$. În concluzie, pentru orice k natural, $x = 2k$ și $y = 4k$ verifică cele două ecuații.

16°. Considerăm identitatea:

$$x^4 + ax^3 + bx^2 + cx + d = (x - x_1)(x - x_2)(x - x_3)(x - x_4).$$

Înlocuind x cu i și cu $-$i, obținem:

$$(\mathrm{i} - x_1)(\mathrm{i} - x_2)(\mathrm{i} - x_3)(\mathrm{i} - x_4) = 1 - a\mathrm{i} - b + c\mathrm{i} + d;$$

$$(\mathrm{i} + x_1)(\mathrm{i} + x_2)(\mathrm{i} + x_3)(\mathrm{i} + x_4) = 1 + a\mathrm{i} - b - c\mathrm{i} + d.$$

Înmulțind aceste două relații, obținem relația cerută.

17°. Fie x_1, x_2 și x_3 rădăcinile ecuației date. Scriem relațiile lui Viète:

(1) $$x_1 + x_2 + x_3 = -p;$$

(2) $$x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3 = 0;$$

(3) $$x_1x_2x_3 = q^2.$$

Ecuația fiind de gradul III, apar două cazuri: *Cazul 1.* O rădăcină reală x_1 și două rădăcini complexe x_2 și x_3, complex conjugate, adică $x_3 = \bar{x}_2$. Rezultă din (3) că x_1 este pozitivă deoarece $x_2x_3 = x_2\bar{x}_2 > 0$.

Cazul 2. Toate rădăcinile sînt reale. Din (3) rezultă că una din rădăcini este pozitivă, de exemplu $x_1 > 0$. Dacă am avea și $x_2 > 0$ rezultă din (3) că și $x_3 > 0$. Nu putem avea toate rădăcinile strict pozitive din cauza relației (2). Deci și în acest caz avem o singură rădăcină pozitivă. Se poate aplica de asemenea șirul lui Rolle.

18°. Membrul stîng se scrie:

$$[(x + 1)(x + 6)][(x + 2)(x + 3)] = (x^2 + 7x + 6)(x^2 + 5x + 6).$$

Dacă facem substituția $x^2 + 6 = y$ obținem ecuația: $(y + 7x)(y + 5x) = 3x^2$. Din substituție rezultă $y > 0$, iar din ecuație avem $x \neq 0$. Împărțind cu x^2 și notînd $y = tx$, rezultă ecuația: $(t + 7)(t + 5) = 3$, ale cărei soluții sînt: $t_1 = -4$ și $t_2 = -8$. Revenind la substituție, pentru $t_1 = -4$, obținem ecuația: $x^2+4x+6=0$, care are soluțiile complexe: $x_{1,2} = -2 \pm \mathrm{i}\sqrt{2}$, și pentru $t_2 = -8$, rezultă ecuația: $x^2 + 8x + 6 = 0$, cu soluțiile: $x_{3,4} = -4 \pm \sqrt{10}$.

19°. Suma se poate scrie:

$$F(x) = (x^2 + x^4 + \dots + x^{2n}) + \left(\frac{1}{x^2} + \frac{1}{x^4} + \dots + \frac{1}{x^{2n}}\right) + 2n.$$

Fiecare paranteză este suma unei progresii geometrice cu rația x^2 și respectiv $\frac{1}{x^2}$.

Se obține în final:

$$F(x) = \frac{(x^{2n+2} + 1)(x^{2n} - 1)}{(x^2 - 1)x^{2n}} + 2n.$$

20°. Privind trinomul de gradul II în x, rezultă: $m^2 - 4y^2 - 4ny - 4 \leqslant 0$ pentru orice y, adică $y^2 + ny + 1 - \frac{m^2}{4} \geqslant 0$; în concluzie, $m^2 + n^2 \leqslant 4$.

21°. Avem, evident, $\frac{1}{k(k+1)} < \frac{1}{k^2} < \frac{1}{k(k-1)}$ pentru orice $k \geqslant 2$, adică $\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1} < \frac{1}{k^2} < \frac{1}{k-1} - \frac{1}{k}$. Scriind aceste inegalități pentru $k = 10, 11, 12, \dots, 1\,000$ și adunîndu-le, rezultă că suma $S = \frac{1}{10^2} + \frac{1}{11^2} + \dots + \frac{1}{1000^2}$ satisface: $\frac{1}{10} - \frac{1}{1001} < S < \frac{1}{9} - \frac{1}{1000}$, adică $\frac{991}{10010} < S < \frac{991}{9000}$, deci $0{,}099 < S < 0{,}111$ (făcînd efectiv împărțirea). Aceasta este echivalent cu $|S - 0{,}105| < 0{,}006$.

22°. a) Notăm $u = x^2 - x - 2$, $v = 2x + 1$ și ecuația devine $u^4 + v^4 = (u + v)^4$, deci $4u^3v + 6u^2v^2 + 4uv^3 = 0$, adică $2uv(2u^2 + 3uv + 2v^2) = 0$. Rezultă: sau $u = 0$, deci $x_1 = 2$, $x_2 = -1$; sau $v = 0$, deci $x_3 = -\frac{1}{2}$; sau $u = \frac{-3 + i\sqrt{7}}{2} v$ etc. b) $x = 1$ este soluție. Putem presupune $x \neq 1$ și împărțim inecuația cu $(x - 1)^2$, notînd $u = \frac{x^2 - x - 2}{x - 1}$; rezultă $u^2 - u - 2 \geqslant 0$ etc.

23°. Dacă produsul uv este constant, suma $u + v$ este minimă dacă $u = v$. În cazul problemei, rezultă (punînd $u = a\,\text{tg}^n x$, $v = \text{ctg}^n x$) $a\,\text{tg}^n x = \text{ctg}^n x$, deci $\text{tg}^{2n} x = \frac{1}{a}$. Rezultă $\text{tg}^n x = \frac{1}{\sqrt{a}}$ și minimul cerut este $2\sqrt{a}$.

24°. Deoarece $a^2 - 1 \geqslant 0$, $b^2 - 1 \geqslant 0$ și $1 - \sqrt{a^2-1} > 0$, $1 - \sqrt{b^2-1} > 0$, putem ridica la pătrat. Inegalitatea devine:

$$\frac{a^2 - 2\sqrt{a^2 - 1}}{b^2 - 2\sqrt{b^2 - 1}} > \frac{a^2}{b^2},$$

adică $b^2\sqrt{a^2-1} < a^2\sqrt{b^2-1}$. Ridicînd încă o dată la pătrat, avem de arătat că $b^4a^2 - b^4 < a^4b^2 - a^4$, adică $a^2b^2(b^2 - a^2) < b^4 - a^4$. Simplificînd cu $b^2 - a^2 > 0$, avem de arătat că $a^2b^2 < a^2 + b^2$, adică $\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} > 1$, ceea ce este evident, deoarece $a^2 < 2$, $b^2 < 2$, deci $\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} > \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1$.

25°. Din prima inecuație (punînd $2^x = t$), rezultă $8t + 3t - 33 > 0$, deci $t > 3$, adică $x > \frac{\ln 3}{\ln 2}$. Din cea de a doua, rezultă $x \in \left[0, \frac{\pi}{4}\right) \cup \left(\frac{7\pi}{4}, 2\pi\right]$. Deoarece $\frac{\pi}{4} < 1 < \frac{\ln 3}{\ln 2} < 2 < \frac{7\pi}{4}$, rezultă $x \in \left(\frac{7\pi}{4}, 2\pi\right]$.

26°. Deci $x \geqslant 0$. Notăm $\sqrt[3]{x - 1} = t$, deci $x = t^3 + 1$ și inecuația devine $\sqrt{t^3 + 1} - t \geqslant 1$, adică $\sqrt{t^3 + 1} \geqslant t + 1$. Deoarece $x \geqslant 0$, rezultă $t \geqslant -1$, deci $t + 1 \geqslant 0$ și putem ridica la pătrat: $t^3 + 1 \geqslant t^2 + 2t + 1$, $t^3 - t^2 - 2t \geqslant 0$, adică $t(t - 2)(t + 1) \geqslant 0$. Așadar: sau $t \leqslant 0$, adică $x \leqslant 1$; sau $t \geqslant 2$, deci $x \geqslant 9$. În final, $x \in [0, 1] \cup [9, \infty)$.

27°. Dacă P ar fi de grad n, atunci derivînd de $n + 1$ ori, s-ar obține o contradicție. *Altfel*: funcția „sin" este periodică, iar polinoamele neconstante sînt neperiodice; deci P ar fi constant, adică „sin" constantă, absurd.

28°. Rezultă $x_2 = i$. Polinomul din membrul întîi se divide cu $X^2 + 1$. Scriind că restul este polinomul nul, rezultă, după calcule, $m = 1$, $n = 1$, iar cîtul $X^4 + X^3 + 2X^2 + X + 1 = X^2(X^2 + X + 1) + X^2 + X + 1 = (X^2 + 1)(X^2 + X + 1)$. Rezultă că i, $-i$ sînt rădăcini duble și în plus $x_{5,6} = \frac{-1 + i\sqrt{3}}{2}$.

29°. Fie U inversa lui $I_n - ABAB \Rightarrow U(I_n - ABAB) = I_n$ și $(I_n - ABAB)U = I_n$, deci $U - UABAB = I_n$. Să notăm $V = I_n + BUABA$. După calcule, $(I_n + BUABA)(I_n - BABA) = I_n + BUABA - BABA - BUABABABA = I_n + BUABA - BABA - B(U - I_n)ABA = I_n + BUABA - BABA - BUABA + BABA = I_n$; așadar $V(I_n - BABA) = I_n$, deci V este inversa lui $I_n - BABA$.

30°. Ecuația $\hat{3}\lambda^2 + \hat{5}\lambda + \hat{2} = \hat{0}$ se scrie $(\hat{3}\lambda + \hat{2})(\lambda + \hat{1}) = \hat{0}$. Deoarece $\mathbf{Z}_{13}$ este corp, rezultă că nu are divizori ai lui zero, deci $\hat{3}\lambda + \hat{2} = \hat{0}$ sau $\lambda + \hat{1} = \hat{0}$, de unde $\lambda = \hat{8}$ sau $\lambda = \widehat{12}$. Pentru $\lambda = \widehat{12}$, polinomul f are gradul I și pentru $\lambda = \hat{8}$, are gradul II. Ecuația devine: $(X^2 + \hat{1})(\hat{2}X + \hat{1}) = 0$. Se obțin rădăcinile $\hat{5}$, $\hat{6}$, $\hat{8}$.

31°. Triunghiurile ABD și ABC au aceeași arie, avînd baza comună $[AB]$ și înălțimile corespunzătoare congruente, deci $\sigma(ABD)=\sigma(ABC)$ (v. fig. M.C.1). Rezultă $S_2=\sigma(ABD)-S_1=\sigma(ABC)-S_1=S_4$. Deoarece triunghiurile AOB și AOD au aceeași înălțime din A, rezultă relația: $\frac{S_1}{S_2}=\frac{OB}{OD}$. Deoarece triunghiurile BOC și DOC au aceeași înălțime din C, rezultă relația: $\frac{S_4}{S_3}=\frac{OB}{OD}$. Obținem: $\frac{S_1}{S_2}=\frac{S_4}{S_3}$, deci $S_1S_3=S_2S_4=S_2^2$.

32°. Impunem condițiile: $-1\leqslant x\leqslant 1$, $-1\leqslant 1-x\leqslant 1$, $-1\leqslant -x\leqslant 1$; rezultă $x\in[0,\ 1]$. Notăm: $\arccos x=u$, $\arccos(1-x)=v$ și $\arccos(-x)=w$. Deoarece $x\in[0,\ 1]$ și $1-x\in[0,\ 1]$, rezultă u și $v\in\left[0,\ \frac{\pi}{2}\right]$, iar $w\in\left[\frac{\pi}{2},\ \pi\right]$. Avem: $\cos u=x$, $\cos v=1-x$ și $\cos w=-x$. Apoi: $\sin u=+\sqrt{1-\cos^2 u}=1-x^2$, $\sin v=+\sqrt{1-\cos^2 v}=\sqrt{1-(1-x)^2}=\sqrt{2x-x^2}$. Ecuația din enunț se scrie sub forma: $u+v=w$. Aplicînd funcția cosinus, rezultă: $\cos(u+v)=\cos w$ sau $\cos u\cos v-\sin u\sin v=\cos w$, adică $x(1-x)-\sqrt{1-x^2}\cdot\sqrt{2x-x^2}=-x$. Putem scrie:

$$2x-x^2-\sqrt{1-x^2}\cdot\sqrt{2x-x^2}=0 \text{ sau } \sqrt{2x-x^2}\left(\sqrt{2x-x^2}-\sqrt{1-x^2}\right)=0$$

(deoarece $x\in[0,\ 1]$). Obținem ecuațiile: $\sqrt{2x-x^2}=0$, cu soluțiile $x_1=0$ și $x_2=2\notin[0,\ 1]$ și $\sqrt{2x-x^2}=\sqrt{1-x^2}$, de unde $2x-x^2=1-x^2$, cu soluția $x_3=\frac{1}{2}$. În concluzie, soluțiile ecuației date sînt: $x=0$; $x=\frac{1}{2}$.

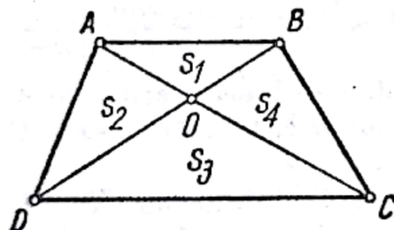


Fig. M.C.1

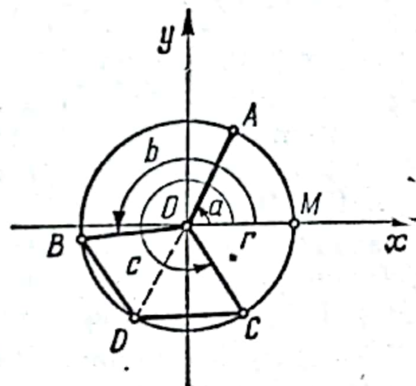


Fig. M.C.2

33°. Vom folosi în rezolvarea problemei numere complexe sub formă trigonometrică și alegem OM drept axă Ox (v. fig. M.C.2). Punctelor A, B, C le corespund numerele complexe: $z_1=r(\cos a+i\sin a)$, $z_2=r(\cos b+i\sin b)$, respectiv, $z_3=r(\cos c+i\sin c)$. Relațiile din enunț sînt echivalente cu relația: $z_1+z_2+z_3=0$, care se poate scrie sub forma $z_2+z_3=-z_1$. Dar z_2+z_3 corespunde vîrfului D al paralelogramului $OBDC$ construit pe $[OB]$ și $[OC]$, iar $-z_1$ corespunde punctului diametral opus lui A pe cerc. Rezultă că D aparține cercului de centru O și este diametral opus lui A. Rezultă $OB=OD=BD=OC=r$, deci $\triangle OBD$ este echilateral. Atunci $m(\widehat{BOD})=60°$, deci $m(\widehat{BOA})=120°$, $m(\widehat{AOC})=120°$ și $m(\widehat{BOC})=120°$. Rezultă: $m(\widehat{BAC})=m\left(\frac{\widehat{BC}}{2}\right)=60°$, $m(\widehat{ACB})=60°$, $m(\widehat{ABC})=60°$, deci A, B, C sînt vîrfurile unui triunghi echilateral.

34°. Relația $7\sin a = 3\sin(a+b)$ se scrie (succesiv) echivalent: $4\sin a = 3(\sin(a+b) - \sin a)$ sau $4\sin a = 6\sin\frac{b}{2}\cos\frac{2a+b}{2}$. Apoi: $2\sin\left(\frac{2a+b}{2} - \frac{b}{2}\right) = 3\sin\frac{b}{2}\cos\frac{2a+b}{2}$ sau $2\sin\frac{2a+b}{2}\cos\frac{b}{2} - 2\cos\frac{2a+b}{2}\sin\frac{b}{2} = 3\sin\frac{b}{2}\cos\frac{2a+b}{2}$, deci $2\sin\frac{2a+b}{2}\cos\frac{b}{2} = 5\sin\frac{b}{2}\cos\frac{2a+b}{2}$. Deoarece $\cos\frac{b}{2} \neq 0$, $\cos\frac{2a+b}{2} \neq 0$, ultima relație poate fi împărțită la $\cos\frac{b}{2}\cdot\cos\frac{2a+b}{2}$ și obținem relația echivalentă cu cea inițială: $2\operatorname{tg}\frac{2a+b}{2} = 5\operatorname{tg}\frac{b}{2}$.

35°. Unim R cu P și cu Q. Deoarece $\widehat{ABP} \equiv \widehat{RBC}$, rezultă $\widehat{ABP} + \widehat{ABR} \equiv \widehat{ABR} + \widehat{RBC}$, deci $\widehat{PBR} \equiv \hat{B}$. Din asemănarea triunghiurilor APB și BRC obținem: $\frac{BP}{BR} = \frac{AB}{BC}$ sau $\frac{BP}{AB} = \frac{BR}{BC}$ (v. fig. M.C.3). Din cazul II de asemănare, rezultă că $\triangle PBR \sim \triangle ABC$. Analog, deoarece $\widehat{QCA} \equiv \widehat{RCB}$, rezultă $\widehat{QCA} + \widehat{ACR} \equiv \widehat{ACR} + \widehat{RCB}$, deci $\widehat{QCR} \equiv \hat{C}$. Din asemănarea triunghiurilor AQC și BRC, obținem: $\frac{QC}{RC} = \frac{AC}{BC}$ sau $\frac{QC}{AC} = \frac{RC}{BC}$. Din cazul II de asemănare rezultă că $\triangle QCR \sim \triangle ACB$. Atunci avem: $\triangle PBR \sim \triangle QRC$. Dar $BR \equiv RC$, deci $\triangle PBR \equiv \triangle QRC$. Rezultă $PB \equiv RQ$ și $PR \equiv CQ$. Dar, $PB \equiv AP$ și $CQ \equiv AQ$, deci $AP \equiv RQ$ și $AQ \equiv PR$, adică $APRQ$ este paralelogram.

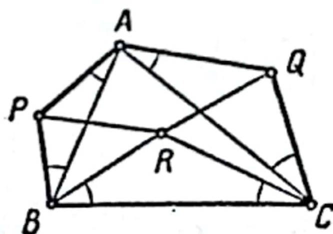


Fig. M.C.3

36°. Din teorema sinusurilor în triunghiul ABC avem: $a = 2R\sin A$, $b = 2R\sin B$, $c = 2R\sin C$. Din teorema sinusurilor în triunghiul $A'B'C'$ avem: $a' = 2R'\sin A'$, $b' = 2R'\sin B'$, $c' = 2R'\sin C'$. Înlocuind în relația dată și ținînd seama că $\hat{A} \equiv \hat{A}'$ rezultă relația: $\frac{\sin B\sin C}{\sin B'\sin C'} = 1$, adică $\sin B\sin C = \sin B'\sin C'$. Apoi avem: $\cos(B-C) - \cos(B+C) = \cos(B'-C') - \cos(B'+C')$. Dar $B + C = B' + C' = 180 - A$, deci obținem: $\cos(B-C) = \cos(B'-C')$. Rezultă $B - C = B' - C'$ sau $B - C = C' - B'$. Ținînd seama că $B + C = B' + C'$ obținem: $B = B'$ și $C = C'$ sau $B = C'$ și $B' = C$. În ambele situații triunghiurile ABC și $A'B'C'$ rezultă asemenea.

37°. Putem scrie inegalitatea astfel:

$2\cos^2\frac{x}{2} - 1 - \sin x - \cos 2x > 0$ sau $(\cos x - \sin x) - (\cos^2 x - \sin^2 x) > 0$, deci $(\cos x - \sin x)(1 - \cos x - \sin x) > 0$. Inecuația obținută este echivalentă cu două sisteme de inecuații:

$$\text{(I)}\ \begin{cases}\cos x - \sin x > 0\\ 1 - \cos x - \sin x > 0\end{cases} \quad \text{sau} \quad \text{(II)}\ \begin{cases}\cos x - \sin x < 0\\ 1 - \cos x - \sin x < 0.\end{cases}$$

Vom rezolva mai întîi ecuațiile $\cos x - \sin x = 0$ și $1 - \cos x - \sin x = 0$. Avem: $\cos x - \sin x = 0$ sau $\operatorname{tg} x = 1$, deci $x = \frac{\pi}{4} + k\pi, k \in \mathbf{Z}$. Apoi $1 - \cos x - \sin x = 0$ sau $\sin x + \sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = 1$, deci $2 \sin\frac{\pi}{4} \cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right) = 1$, adică $\cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}$. Obținem: $x - \frac{\pi}{4} = 2k\pi \pm \frac{\pi}{4}$ sau $x = 2k\pi \pm \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{4}$, $k \in \mathbf{Z}$. Vom studia semnul funcțiilor $\cos x - \sin x$, respectiv $1 - \cos x - \sin x$ pe intervalul $[0, 2\pi]$ și apoi vom ține seama de periodicitatea funcțiilor sin și cos. Avem:

x	0		$\frac{\pi}{4}$		$\frac{5\pi}{4}$		2π
$\cos x - \sin x$		$+$	0	$-$	0	$+$	

x	0		$\frac{\pi}{2}$			2π
$1 - \cos x - \sin x$	0	$-$	0	$+$	$+$	0

În intervalul $[0, 2\pi]$ pentru sistemul (I) avem soluțiile:

$$x \in \left(\left[0, \frac{\pi}{4}\right) \cup \left(\frac{5\pi}{4}, 2\pi\right]\right) \cap \left(\frac{\pi}{2}, 2\pi\right), \text{ deci } x \in \left(\frac{5\pi}{4}, 2\pi\right).$$

În intervalul $[0, 2\pi]$ pentru sistemul (II) avem soluțiile:

$$x \in \left(\frac{\pi}{4}, \frac{5\pi}{4}\right) \cap \left(0, \frac{\pi}{2}\right) = \left(\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}\right). \text{ Rezultă că } x \in \left(\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}\right) \cup \left(\frac{5\pi}{4}, 2\pi\right).$$

Ținînd seama de periodicitate obținem, în final, soluțiile inecuației:

$$x \in \bigcup_{k \in \mathbf{Z}} \left(\left(\frac{\pi}{4} + 2k\pi, \frac{\pi}{2} + 2k\pi\right) \cup \left(\frac{5\pi}{4} + 2k\pi, 2\pi + 2k\pi\right)\right).$$

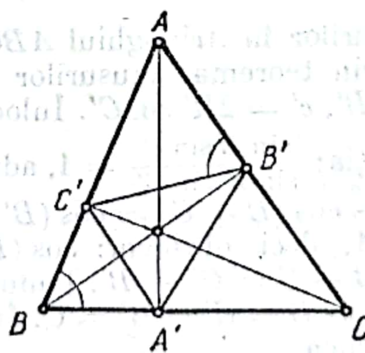


Fig. M.C.4

38°. Fie A', B', C' picioarele înălțimilor triunghiului ABC. Deoarece $m(\widehat{BB'C}) = m(\widehat{CC'B}) = 90°$, patrulaterul $BCB'C'$ este inscriptibil (v. fig. M.C.4). Rezultă $\widehat{AB'C'} \equiv \widehat{ABC}$, deci $\triangle AB'C' \sim \triangle ABC$ (unghiul A este comun). În $\triangle ABB'$ avem: $AB' = c \cos A$. Din asemănare avem: $\frac{AB'}{AB} = \frac{B'C'}{BC} = \cos A$, deci $B'C' = a \cos A$.

Analog, rezultă $A'B' = c\cos C$, $A'C' = b\cos B$. Atunci putem scrie: $p_1 \cdot R = \frac{R}{2}(a\cos A + b\cos B + c\cos C)$. Din teorema sinusurilor avem: $a = 2R\sin A$, $b = 2R\sin B$, $c = 2R\sin C$, deci obținem:

$$p_1 \cdot R = \frac{R^2}{2}(2\sin A\cos A + 2\sin B\cos B + 2\sin C\cos C) = \frac{R^2}{2}(2\sin A\cos A + \sin 2B + \sin 2C) = \frac{R^2}{2}(2\sin A\cos A + 2\sin(B+C)\cos(B-C)) =$$
$$= \frac{R^2}{2}(2\sin A\cos A + 2\sin A\cos(B-C)) = R^2\sin A(\cos(B-C) - \cos(B+C)) =$$
$$= 2R^2\sin A\sin B\sin C = \frac{(2R\sin B)(2R\sin C)\sin A}{2} = \frac{bc\sin A}{2} = S.$$

39°. Fie M un punct al locului geometric și fie $[AB]$, $[CD]$ diametrele în cercurile O_1, O_2 determinate de cercul cu centrul în M. Fie r_1, r_2 razele celor două cercuri date și $d = O_1O_2$. Deoarece $[AB]$ este coardă în cercul M și $O_1A = O_1B = r_1$, rezultă că $MO_1 \perp AB$ (v. fig. M.C.5). Atunci $MA^2 = MO_1^2 + r_1^2$. Deoarece $[CD]$ este coardă în cercul M și $O_2C = O_2D = r_2$, rezultă că $MO_2 \perp CD$. Atunci $MC^2 = MO_2^2 + r_2^2$.

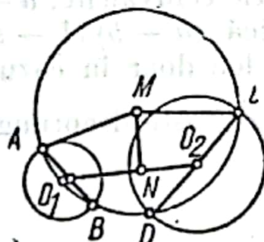


Fig. M.C.5

Dar $[MA] \equiv [MC]$, deci $MO_1^2 + r_1^2 = MO_2^2 + r_2^2$. Rezultă $MO_1^2 - MO_2^2 = r_2^2 - r_1^2 =$ = const. Ducem $MN \perp O_1O_2$ și aplicăm teorema lui Pitagora generalizată în triunghiul MO_1O_2. Obținem: $MO_1^2 = MO_2^2 + d^2 - 2d \cdot O_2N$, de unde:

$$O_2N = \frac{MO_2^2 - MO_1^2 + d^2}{2d} = \frac{d^2 + r_1^2 - r_2^2}{2d} = \text{const.}$$

Rezultă că punctul N este fix, deci M se află pe perpendiculara în N pe O_1O_2. Reciproc, fie M pe perpendiculara în N pe O_1O_2 $\left(\text{unde } O_2N = \frac{d^2 + r_1^2 - r_2^2}{2d}\right)$. Aplicînd teorema lui Pitagora generalizată în $\triangle MO_1O_2$ obținem: $MO_1^2 - MO_2^2 = r_2^2 - r_1^2$. Ducem $AB \perp O_1M$ ($A, B \in$ cercului O_1) și $CD \perp O_2M$ ($C, D \in$ cercului O_2). Avem: $MA^2 = MO_1^2 + r_1^2$ și $MC^2 = MO_2^2 + r_2^2$. Din relația anterioară rezultă $MA^2 = MC^2$, deci $MA \equiv MC \equiv MB \equiv MD$. Atunci cercul cu centrul în M de rază $[MA]$ taie cercurile O_1 și O_2 după diametrele $[AB]$, respectiv $[CD]$, adică M este punct al locului geometric.

40°. Rezolvăm separat cazurile $n = 1$ și $n = 2$. Pentru $n = 1$ ecuația devine: $\cos x - \sin x = 1$ sau $\sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right) - \sin x = 1$, adică $\sin\left(x - \frac{\pi}{4}\right) = -\frac{\sqrt{2}}{2}$, cu soluțiile: $x = \frac{\pi}{4} + (-1)^{k+1}\frac{\pi}{4} + k\pi$, $k \in \mathbf{Z}$, deci $x = 2l\pi$, $l \in \mathbf{Z}$ sau $x = 2s\pi - \frac{\pi}{2}$, $s \in \mathbf{Z}$. Pentru $n = 2$ ecuația devine: $\cos^2 x - \sin^2 x = 1$ sau $\cos 2x = 1$, deci $2x = 2k\pi$ și $x = k\pi$, $k \in \mathbf{Z}$. Fie acum $n \geqslant 3$. Înlocuind $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$ obținem: $\cos^n x - \sin^n x = \cos^2 x + \sin^2 x$ sau $\cos^2 x(\cos^{n-2} x - 1) = \sin^2 x(1 + \sin^{n-2} x)$.

Dar $\sin^2 x(1+\sin^{n-2} x) \geqslant 0$, iar $\cos^2 x(\cos^{n-2} x - 1) \leqslant 0$, deci egalitatea este posibilă numai în cazul cînd ambele expresii sînt nule. Obținem sistemul: $\cos^2 x(\cos^{n-2} x - 1) = 0$ și $\sin^2 x(1+\sin^{n-2} x) = 0$, care este echivalent cu patru sisteme:

(I) $\begin{cases} \cos x = 0 \\ \sin x = 0 \end{cases}$; (II) $\begin{cases} \cos x = 0 \\ 1+\sin^{n-2} x = 0 \end{cases}$; (III) $\begin{cases} \sin x = 0 \\ \cos^{n-2} x - 1 = 0 \end{cases}$; (IV) $\begin{cases} \cos^{n-2} x - 1 = 0 \\ \sin^{n-2} x + 1 = 0 \end{cases}$.

Deoarece $\cos^2 x + \sin^2 x = 1$ sistemul (I) este imposibil. În cazul sistemului (IV), rezultă $|\cos x| = 1$ și $|\sin x| = 1$, imposibil (deoarece $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$). Pentru rezolvarea sistemelor (II) și (III) considerăm separat cazurile n par și n impar. Fie $n = 2m$; atunci $1+\sin^{n-2} x > 0$, deci sistemul (II) este imposibil, iar din sistemul (III) obținem: $\sin x = 0$, $\cos x = \pm 1$, deci $x = k\pi$, $k \in \mathbf{Z}$. Fie $n = 2m+1$; din sistemul (II), obținem: $\cos x = 0$, $\sin x = -1$, deci $x = 2k\pi - \frac{\pi}{2}$, $k \in \mathbf{Z}$, iar din sistemul (III), obținem: $\sin x = 0$, $\cos x = 1$, deci $x = 2k\pi$, $k \in \mathbf{Z}$. În concluzie, pentru orice n impar ecuația are soluțiile: $x = 2k\pi$, $x = 2k\pi - \frac{\pi}{2}$, cu $k \in \mathbf{Z}$, iar pentru orice n par ecuația are soluțiile: $x = k\pi$, $k \in \mathbf{Z}$.

41°. Fie A', B' picioarele înălțimilor h_a, respectiv h_b. În triunghiul $AA'C$ avem: $h_a = b \sin C$, iar în triunghiul $BB'C$ avem: $h_b = a \sin C$ (v. fig. M.C.6). Inegalitatea $a + h_a \geqslant b + h_b$ se scrie echivalent: $a + b \sin C \geqslant b + a \sin C$ sau încă: $a - b - (\sin C)(a - b) \geqslant 0$, adică $(a-b)(1-\sin C) \geqslant 0$, care este evidentă. Deoarece $a > b$, egalitatea are loc doar în cazul $1 - \sin C = 0$, deci $\sin C = 1$, adică $m(\hat{C}) = 90°$ (triunghiul ABC este dreptunghic în C).

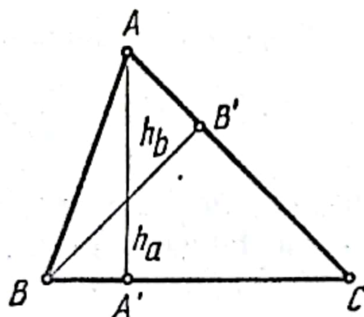


Fig. M.C.6

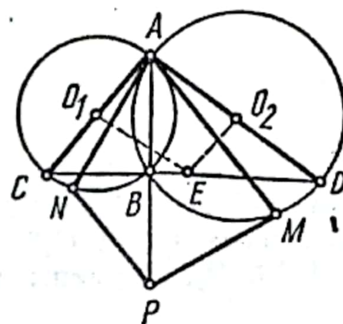


Fig. M.C.7

42°. a) Avem $m(\widehat{ABC}) = m\left(\frac{\overset{\frown}{AC}}{2}\right) = 90°$ și $m(\widehat{ABD}) = m\left(\frac{\overset{\frown}{AD}}{2}\right) = 90°$, deci $m(\widehat{ABC}) + m(\widehat{ABD}) = 180°$, adică C, B, D sînt coliniare (v. fig. M.C.7).

b) Mediatoarea lui $[AN]$ este diametrul perpendicular pe coarda $[AN]$ în cercul O_1; fie E intersecția mediatoarei lui $[AN]$ cu CD. Deoarece $O_1E \perp AN$ și $DA \perp AN$, rezultă $O_1E \parallel AD$, adică O_1E este linie mijlocie în triunghiul ACD, deci E este mijlocul lui $[CD]$. Apoi O_2E este linie mijlocie în triunghiul ACD, deci $O_2E \parallel AC$, de unde rezultă că $O_2E \perp AM$ ($AC \perp AM$), adică O_2E este mediatoarea lui $[AM]$. Avem: $EA \equiv EN$, $EA \equiv EM$ și $EA \equiv EP$ (deoarece CD este mediatoarea segmentului $[AP]$). Rezultă că punctele A, M, P, N sînt egal depărtate de E, deci se află pe un cerc de centru E și rază $[AE]$.

43°. Avem: $m(\hat{F}) = 180° - m(\hat{C} + \hat{D})$ și $m(\hat{E}) = 180° - m(\hat{B} + \hat{C})$. Fie O intersecția bisectoarelor unghiurilor $\widehat{AFB}$ și $\widehat{AED}$ (v. fig. M.C.8). Atunci $\widehat{OQA} = \hat{C} + \frac{\hat{E}}{2}$ (unghi exterior triunghiului EAQ), deci $m(\widehat{OQA}) = 90° + m\left(\frac{\hat{C}}{2}\right) - m\left(\frac{\hat{B}}{2}\right)$. Apoi

$m(\widehat{POQ}) = 180° - m\left(\frac{\hat{F}}{2}\right) - m(\widehat{OQA}) = 180° - 90° + m\left(\frac{\hat{C}+\hat{D}}{2}\right) - 90° - m\left(\frac{\hat{C}}{2}\right) + m\left(\frac{\hat{B}}{2}\right) = m\left(\frac{\hat{B}+\hat{D}}{2}\right) = 90°$. În triunghiul EMP, EO este bisectoare și înălțime, deci triunghiul EMP este isoscel. Rezultă EO mediană, deci $OP = OM$. În triunghiul FQN, FO este bisectoare și înălțime, deci triunghiul FQN este isoscel. Rezultă FO mediană, deci $ON = OQ$. În concluzie, $MNPQ$ este paralelogram cu diagonalele perpendiculare, deci este romb.

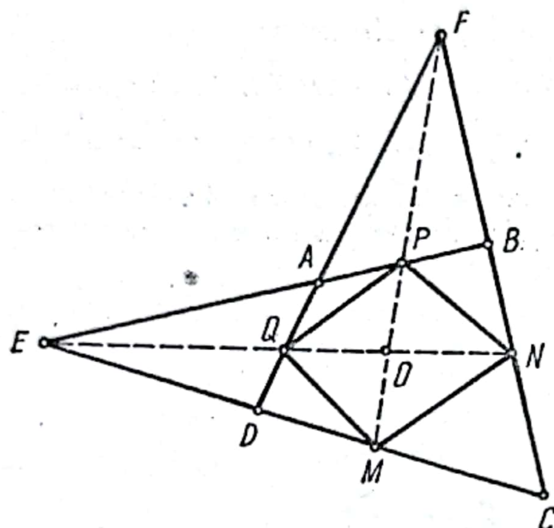


Fig. M.C.8

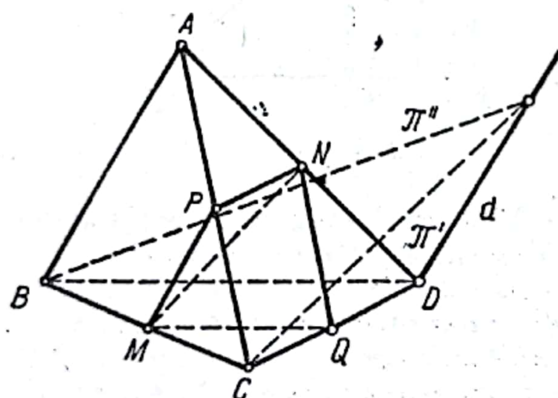


Fig. M.C.9

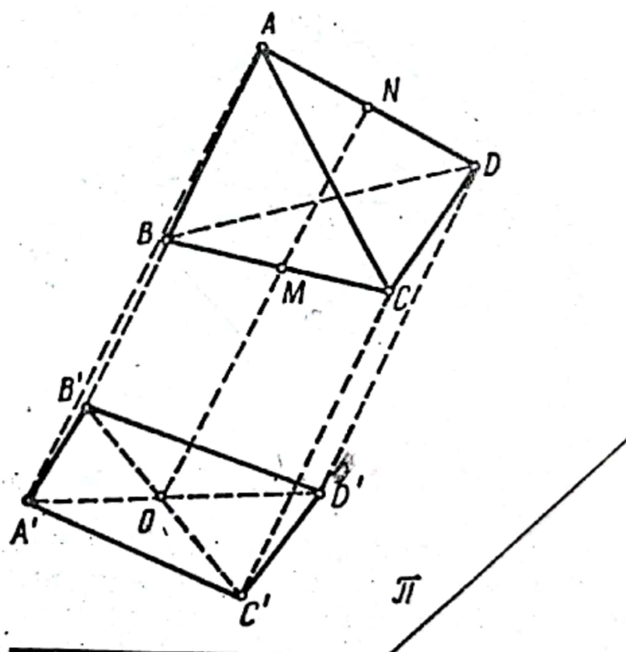


Fig. M.C.10

44°. a) Fie P mijlocul lui $[AC]$ și Q mijlocul lui $[CD]$. În $\triangle ABC$, MP este linie mijlocie, deci $MP \parallel AB$; rezultă $MP \parallel \pi'$ (v. fig. M.C.9). În $\triangle ACD$, PN este linie mijlocie, deci $PN \parallel CD$; rezultă $PN \parallel \pi'$. Atunci planul MPN este paralel cu π', deci $MN \parallel \pi'$. Analog, în $\triangle ACD$, NQ este linie mijlocie, deci $NQ \parallel AC$: rezultă $NQ \parallel \pi''$. În $\triangle BCD$, MQ este linie mijlocie, deci $MQ \parallel BD$; rezultă $MQ \parallel \pi''$. Atunci planul MQN este paralel cu planul π'', deci $MN \parallel \pi''$.

b) Fie d dreapta de intersecție a planelor π' și π''. Deoarece $MN \parallel \pi'$ și $MN \parallel \pi''$, rezultă $MN \parallel$ d, deci $MN \perp \pi$. Rezultă că punctele M și N se proiectează pe planul π în același punct O (v. fig. M.C.10). Dreapta BC se proiectează după o dreaptă, deci B', O, C' sînt coliniare, iar dreapta AD se proiectează tot după o dreaptă, deci A', O, D' sînt și ele coliniare. În trapezul $BCC'B'$, MO este linie mijlocie, deci $B'O = OC'$. În trapezul $ADD'A'$, NO este linie mijlocie, deci $A'O = OD'$. Rezultă că $A'B'D'C'$ este un paralelogram, deoarece diagonalele se taie în părți egale.

45°. Dreptele concurente AE, BF determină un plan (ABG), care taie muchia $[CD]$ într-un punct H (v. fig. M.C.11). Deoarece $AE \perp (BCD)$ și $AE \subset (ABH)$, rezultă $(ABH) \perp (BCD)$. Cum $BF \perp (ACD)$ și $BF \subset (ABH)$, rezultă $(ABH) \perp$ $\perp (ACD)$. Atunci avem $CD \perp (ABH)$; rezultă $CD \perp AB$. Fie HI $(I \in AB)$ a treia înălțime în $\triangle ABH$. Atunci $AB \perp HI$ și $AB \perp CD$ implică $AB \perp (CDI)$. Rezultă $(ABD) \perp (CDI)$, deci $CK \subset (CDI)$. Analog $(ABC) \perp (CDI)$, deci $DL \subset (CDI)$. Rezultă că CK și DL se intersectează într-un punct M (ortocentrul $\triangle CDI$).

46°. Într-un triunghi ABC avem: $(a-b)(\mathrm{m}(\hat{A})-\mathrm{m}(\hat{B})) \geqslant 0$; $(b-c)(\mathrm{m}(\hat{B})-$ $-\mathrm{m}(\hat{C})) \geqslant 0$; $(c-a)(\mathrm{m}(\hat{C})-\mathrm{m}(\hat{A})) \geqslant 0$. Prin adunare obținem: $2[a\mathrm{m}(\hat{A})+b\mathrm{m}(\hat{B})+c\mathrm{m}(\hat{C})]-[a(\mathrm{m}(\hat{B})+\mathrm{m}(\hat{C}))+b(\mathrm{m}(\hat{A})+\mathrm{m}(\hat{C}))+c(\mathrm{m}(\hat{A}))+$ $+\mathrm{m}(\hat{B}))] \geqslant 0$. Ținînd seama că $\mathrm{m}(\hat{A})+\mathrm{m}(\hat{B})+\mathrm{m}(\hat{C})=180°$, deducem: $a\mathrm{m}(\hat{A})+$ $+b\mathrm{m}(\hat{B})+c\mathrm{m}(\hat{C}) \geqslant 60(a+b+c)$. Avem egalitate dacă și numai dacă primele trei relații devin egalități. Deducem că avem egalitate dacă și numai dacă triunghiul este echilateral.

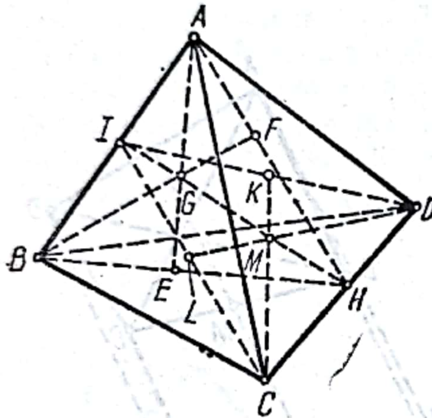


Fig. M.C.11

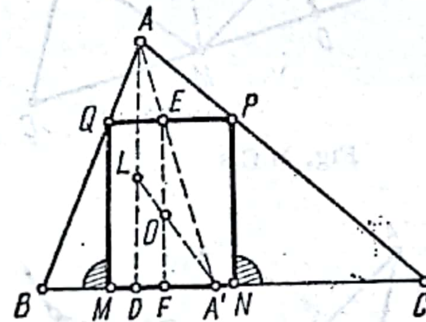


Fig. M.C.12

47°. *Cazul 1.* Fie $\triangle ABC$ un triunghi și $MNPQ$ un dreptunghi înscris astfel că M și N sînt pe $[BC]$, $P \in [AC]$ și $Q \in [AB]$. Mediana $[AA']$ intersectează $(QP]$ în E. (v. fig. M.C.12). Este evident că E este mijlocul lui $[QP]$. Dacă F este proiecția lui E pe BC, atunci mijlocul O al segmentului $[EF]$ este exact intersecția diagonalelor dreptunghiului $MNPQ$. Notînd cu D piciorul înălțimii din A, constatăm că OA' intersectează $[AD]$ în mijlocul L. Rezultă că O este un punct care aparține segmentului $[A'L]$. Invers, dacă O este un punct al segmentului $[A'L]$ se construiește ușor un dreptunghi înscris în triunghiul ABC cu intersecția diagonalelor în O (mai întîi se construiește segmentul $[EF]$, unde F este proiecția lui O pe BC). În mod analog putem considera dreptunghiurile care au cîte o latură „așezată" pe celelalte laturi ale triunghiului ABC și astfel obținem că mulțimea centrelor tuturor dreptunghiurilor este reuniunea a trei segmente.

Observație. Cele trei segmente sînt ceviene concurente în triunghiul median $A'B'C'$ format de mijloacele laturilor triunghiului dat. Ca să verificăm această proprietate este suficient să observăm că punctul L împarte segmentul $[B'C']$ în același raport în care D împarte latura $[BC]$.

Cazul 2. Considerăm că $\triangle ABC$ este obtuzunghic avînd $\mathrm{m}(\hat{A}) > 90°$. În acest caz avem dreptunghiuri înscrise avînd laturile pe $[BC]$, dar nu putem avea dreptunghiuri cu două vîrfuri pe $[AC]$ sau pe $[AB]$.

48°. Folosind inegalitatea mediilor și teorema cosinusului deducem:

$$a + b + c = \sqrt{b^2 + c^2 - 2bc\cos\alpha} + b + c = \sqrt{(b-c)^2 + 2bc(1-\cos\alpha)} + b + c \geq$$
$$\geq \sqrt{2bc(1-\cos\alpha)} + 2\sqrt{bc}.$$

Rezultă că perimetrul este minim cînd avem egalitate, ceea ce are loc pentru $b = c$, deoarece $bc = \frac{2S}{\sin\alpha} = \text{const.}$

49°. Presupunem că $A \in \text{int}\, \mathcal{C}(O, R)$. Fie $M \in \mathcal{C}(O, R)$ și $\alpha = m(\widehat{OMA})$. Notăm cu Q al doilea punct de intersecție dintre MA și cercul dat, iar P punctul diametral opus lui M în $\mathcal{C}(O, R)$. Atunci avem $\cos\alpha = \frac{MQ}{MP}$. Funcția cos este descrescătoare pe intervalul $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$. Deci α va fi maxim cînd MQ are valoarea minimă. Observăm că $MA \cdot QA$ ne dă puterea punctului A, deci produsul segmentelor $[MA]$ și $[QA]$ este constant. Atunci suma $MQ = MA + AQ$ este minimă cînd $AM = AQ$, adică în cazul că $OA \perp MQ$. Valoarea minimă a lui α este zero și se obține cînd M este unul din punctele de intersecție al dreptei OA cu cercul $\mathcal{C}(O, R)$. Dacă A este pe cerc sau în exteriorul cercului dat, extremele lui α se obțin considerînd intersecțiile lui OA cu cercul.

50°. Fie $A_1A_2 \ldots A_n$ un poligon convex cu n laturi; $n \geq 4$. Atunci suma unghiurilor exterioare poligonului este 360°. Deci avem $m(\overline{A}_1) + m(\overline{A}_2) + \ldots + m(\overline{A}_n) = 360°$, unde $m(\overline{A}_k)$ pentru $k \in \{1, \ldots, n\}$ reprezintă măsura unghiului exterior în vîrful A_k. Prin ipoteză avem patru unghiuri exterioare drepte. Dacă $n > 4$, ar rezulta că celelalte unghiuri exterioare sînt nule, ceea ce este absurd. Deci $n = 4$ și poligonul este un dreptunghi.

51°. Avem $\cos A \cos B + \sin A \sin B \leq 1$, iar prin utilizarea relației date rezultă $\cos A \cos B + \sin A \sin B \geq \cos A \cos B + \sin A \sin B \sin C = 1$ (deoarece $0 \leq \sin C \leq 1$). Prin urmare obținem: $\cos A \cos B + \sin A \sin B = 1$ sau $\cos(A - B) = 1$, de unde $A = B$, deci triunghiul este isoscel. Mai obținem: $\sin^2 A(\sin C - 1) = 0$, care implică $m(\hat{C}) = 90°$. Invers, dacă triunghiul ABC este dreptunghic rezultă imediat că relația este satisfăcută.

52°. Din formula $\sin A + \sin B = 2\sin\frac{A+B}{2}\cos\frac{A-B}{2}$ rezultă: $\sin A + \sin B \leq 2\sin\frac{A+B}{2}$, așa încît membrul stîng al inegalității se poate scrie:

$$E = \sin A + \sin B + \sin C + \sin D \leq 2\sin\frac{A+B}{2} + 2\sin\frac{C+D}{2} \leq$$
$$\leq 4\sin\frac{A+B+C+D}{4}.$$

Avem egalitate dacă și numai dacă $\hat{A} = \hat{B} = \hat{C} = \hat{D}$, deci în cazul cînd $ABCD$ este dreptunghi.

53°. Din $(\text{tg}x - \text{ctg}x)^2 \geq 0$, rezultă: (1) $\text{tg}^2 x + \text{ctg}^2 x \geq 2$. Pe de altă parte, avem: (2) $1 + |\cos x| \cos^2 x \leq 1 + 1 = 2$. Rezultă că orice soluție a ecuației trebuie să satisfacă simultan (1) și (2) cu semnul egal. Inegalitatea (1) devine egalitate pentru $x = \frac{\pi}{4} + k\pi$, $k \in \mathbf{Z}$, care nu satisface însă a doua egalitate din (2).

54°. Dacă triunghiul este obtuzunghic cu unghiul obtuz A avem $\cos A < 0$, $\cos B > 0$, $\cos C > 0$, deci inegalitatea este trivial satisfăcută. Dacă triunghiul este dreptunghic, de asemenea inegalitatea este satisfăcută deoarece membrul stîng se anulează. În cazul unui triunghi ascuțitunghic toți factorii din expresie

sînt pozitivi, aşa încît putem aplica inegalitatea mediilor. Să observăm că membrul din stînga se poate scrie sub forma:

$$\left(\frac{\cos A}{\sin B \sin C}\right)\cdot\left(\frac{\cos B}{\sin A \sin C}\right)\cdot\left(\frac{\cos C}{\sin A \sin B}\right)$$

şi să verificăm că suma celor trei factori este o constantă. Într-adevăr, expresia:

$$E = \frac{\cos A}{\sin B \sin C} + \frac{\cos B}{\sin A \sin C} + \frac{\cos C}{\sin A \sin B}$$

se mai poate scrie sub forma:

$$E = \frac{1}{2}\cdot\frac{\sin 2A + \sin 2B + \sin 2C}{\sin A \sin B \sin C}.$$

Pe de altă parte, $\sin 2A + \sin 2B + \sin 2C = 4 \sin A \sin B \sin C$, deci $E = 2$. Reamintim inegalitatea mediilor: $3\sqrt[3]{xyz} \leqslant x + y + z$, în care $x > 0$, $y > 0$, $z > 0$. Înlocuind $x = \frac{\cos A}{\sin B \sin C}$, $y = \frac{\cos B}{\sin A \sin C}$, $z = \frac{\cos C}{\sin A \sin B}$ în inegalitatea mediilor, obţinem inegalitatea cerută. Avem egalitate dacă şi numai dacă $x = y = z$. Rezultă imediat că egalitatea are loc în cazul triunghiului echilateral.

55°. i) Rezultă din teorema sinusurilor.

ii) Notînd cu S aria triunghiului avem $2S = ah_a = bh_b = ch_c$. Din relaţia $2b = a + c$ deducem: $\frac{4S}{h_b} = \frac{2S}{h_a} + \frac{2S}{h_c}$.

56°. Fie x lungimea bazei şi y lungimea comună a laturilor congruente. Avem imediat $x = 2y \cos 15°$ şi astfel obţinem relaţia:

$$2y + 2y \cos 15° = 4 + \sqrt{6} + \sqrt{2}.$$

$$\cos 15° = \sqrt{\frac{1 + \cos 30°}{2}} = \sqrt{\frac{2 + \sqrt{3}}{4}} = \frac{1}{4}(\sqrt{6} + \sqrt{2}).$$

Deducem $y = 2$, deci $AB = AC = 2$ şi $BC = \sqrt{6} + \sqrt{2}$. Aria triunghiului este:

$$\sigma[ABC] = \frac{1}{2}y^2 \sin 150° = \frac{1}{2}\cdot 4 \cdot \frac{1}{2} = 1.$$

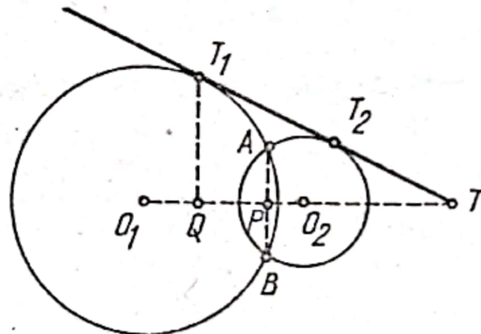


Fig. M.C.13

57°. Să notăm $x = O_1P$ şi $y = O_2P$. Punctul P are puteri egale faţă de cele două cercuri (v. fig. M.C.13), aşa încît rezultă relaţia:

$$(R_1 + x)(R_1 - x) = (R_2 + y)(R_2 - y).$$

Ţinînd seama că $x + y = d$, deducem uşor, din aceste două relaţii:

$$x = \frac{d^2 + R_1^2 - R_2^2}{2d}; \quad y = \frac{d^2 + R_2^2 - R_1^2}{2d}.$$

În ipoteza că $R_1 > R_2$, să notăm cu T intersecția lui O_1O_2 cu T_1T_2. Fie Q proiecția lui T_1 pe O_1O_2. Folosind asemănarea triunghiurilor dreptunghice TO_1T_1 și TO_2T_2 obținem:

$$O_1T = \frac{R_1 d}{R_1 - R_2} \text{ și } O_2T = \frac{R_2 d}{R_1 - R_2}.$$

Mai rezultă:

$$O_1Q = \frac{O_1T_1^2}{O_1T} = \frac{R_1(R_1 - R_2)}{d}.$$

Folosind teorema lui Pitagora generalizată în triunghiul PO_1T_1 obținem:

$$T_1P^2 = \left(\frac{d^2 + R_1^2 - R_2^2}{2d}\right)^2 + R_1^2 - \frac{(d^2 + R_1^2 - R_2^2)(R_1 - R_2)R_1}{d^2}.$$

Analog se calculează T_2P. Din trapezul dreptunghic $O_1T_1T_2O_2$ se calculează ușor T_1T_2.

58°. Fie P un punct situat pe mediana $[AD]$ a triunghiului ABC și $AD = m$, $PA = x$, $PD = m - x$. Din formula lungimii medianei rezultă: $PB^2 + PC^2 = 2(m - x)^2 + \frac{a^2}{2}$, unde am notat $BC = a$. Avem de găsit minimul expresiei:

$$PA^2 + PB^2 + PC^2 = x^2 + 2(m - x)^2 + \frac{a^2}{2},$$

care este un trinom de gradul II în variabila x. Rezultă că minimul se realizează pentru $x = \frac{2m}{3}$, deci cînd P este centrul de greutate al triunghiului.

59°. Avem $\widehat{A'AB'} = \frac{1}{2}(A + B)$, așa încît aplicînd teorema sinusurilor în triunghiul $AA'B'$ deducem: (1) $A'B' = 2R \sin \frac{1}{2}(A + B)$, unde R este raza cercului circumscris triunghiului ABC (v. fig. M.C.14). Pe de altă parte, avem $\widehat{A'IB'} = 180° - \frac{1}{2}(A + B)$. Aplicînd teorema sinusurilor în triunghiul $IA'B'$, deducem $A'B' = 2R' \sin \widehat{A'IB'}$ sau (2) $A'B' = 2R' \sin \frac{1}{2}(A + B)$. Comparînd (1) cu (2), obținem $R = R'$.

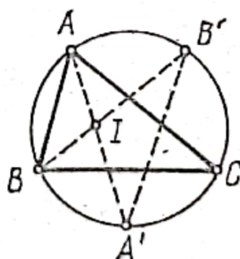


Fig. M.C.14

60°. Fie $ABCD$ un patrulater inscriptibil. Patrulaterul are cel puțin un unghi ascuțit, dacă nu este dreptunghi. Presupunem că $m(\widehat{BAD}) < 90°$. Fie B' proiecția lui B pe AD și B'' proiecția sa pe CD. Prin ipoteza făcută $B' \in [AD]$ și $B'' \notin [DC]$ deoarece $m(\widehat{BAD}) < 90°$ și $m(\widehat{BCD}) > 0$ avînd în vedere că $ABCD$

este inscriptibil. Aplicînd teorema lui Pitagora generalizată în triunghiurile ABD și BCD obținem (v. fig. M.C.15):

(1) $$BD^2 = a^2 + d^2 - 2\,d \cdot AB';$$

(2) $$BD^2 = b^2 + c^2 + 2c \cdot CB'';$$

(am notat cu a, b, c și d lungimea laturilor $[AB]$, $[BC]$, $[CD]$, $[DA]$ respectiv). Din asemănarea triunghiurilor ABB' și BCB'' deducem $\frac{AB'}{CB''} = \frac{a}{b}$. Înmulțim (1) cu cb și (2) cu da, apoi le adunăm. Rezultă: $BD^2 = \frac{(ab + cd)(ac + bd)}{ad + bc}$. La fel se obține AC^2.

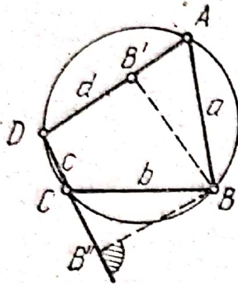


Fig. M.C.15

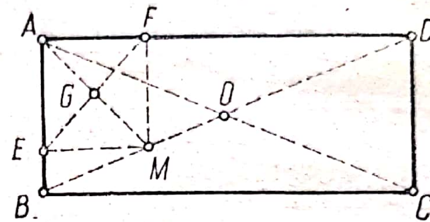


Fig. M.C.16

61°. Fie $ABCD$ un trapez unde $AB \parallel CD$. Notăm $a = AB$, $b = CD$, $c = BC$, $d = AD$. Aplicînd teorema cosinusurilor în triunghiurile ABC și DBC obținem:

(1) $$a^2 + d^2 - 2ad \cos A = c^2 + b^2 - 2bc \cos C.$$

În mod analog obținem:

(2) $$a^2 + c^2 - 2ac \cos B = b^2 + d^2 - 2bd \cos D.$$

Pe de altă parte avem: $\cos C = -\cos B$ și $\cos D = -\cos A$, așa încît (1) și (2) ne dau sistemul:

(3) $$\begin{cases} 2ad \cos A + 2bc \cos B = a^2 + d^2 - b^2 - c^2; \\ 2bd \cos A + 2ac \cos B = a^2 + c^2 - b^2 - d^2. \end{cases}$$

Eliminăm $\cos B$ din (3) și obținem:

$$2d(a^2 - b^2) \cos A = (a + b)\,[(a - b)^2 + (d + c)\,(d - c)],$$

de unde $\cos A = \frac{(a - b)^2 + (d + c)\,(d - c)}{2d(a - b)}$ etc.

62°. Considerăm cazul cînd se dau vîrfurile B și C. Atunci rezultă că latura $[BC]$ are lungimea $a = BC$ constantă și în consecință $b^2 + c^2$ este o constantă. Din teorema medianei, $m_a^2 = \frac{b^2 + c^2}{2} - \frac{a^2}{4}$, deducem că m_a este o constantă. Avînd în vedere că piciorul medianei din A este un punct fix (mijlocul lui $[BC]$) deducem că A descrie un cerc cu centrul în mijlocul lui $[BC]$ și rază egală cu m_a. Dacă m_a este jumătate din lungimea laturii $[BC]$, unghiul din A este drept. În acest caz se exclud din locul geometric punctele B și C care aparțin cercului. Să considerăm acum cazul cînd se dau vîrfurile A și C. Atunci avem determinată latura $[AC]$ de lungime b. Din ipoteză rezultă că $c^2 - a^2$ este o constantă. În acest caz, vîrful B descrie o dreaptă.

63°. Alegînd, în particular, $M = O$ rezultă $OC \perp EF$ dacă $OC \perp BD$ (deoarece $EF \parallel BD$), deci $ABCD$ este un pătrat (v. fig. M.C.16). Reciproc, dacă

$ABCD$ este un pătrat, fie G intersecţia diagonalelor dreptunghiului $AEMF$. Rezultă că $OG \parallel MC$ şi $OG = \frac{1}{2}\ MC = \frac{1}{2}\ AM = \frac{1}{2}\ EF$, deci punctul O se află pe cercul circumscris dreptunghiului $AEMF$. Dar $m(\widehat{EAO}) = m\left(\frac{\widehat{EO}}{2}\right)$ şi $m(\widehat{OAF}) = m\left(\frac{\widehat{OF}}{2}\right)$, deci $\widehat{EO} = \widehat{OF}$. Rezultă $OG \perp EF$, prin urmare $MC \perp EF$.

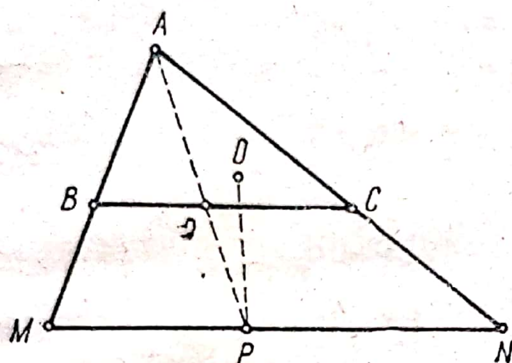


Fig. M.C.17

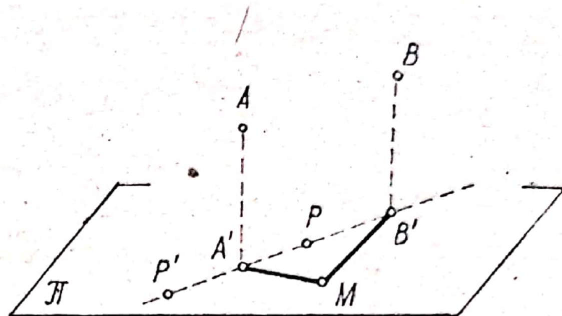


Fig. M.C.18

64°. Fie P mijlocul lui $[MN]$. Rezultă că punctul $\{D\} = BC \cap AP$ este mijlocul lui $[BC]$. Din ipoteză rezultă că OP este mediatoarea lui $[MN]$, aşa încît $OP \perp BC$ (v. fig. M.C.17). Rezultă că P este intersecţia lui AD cu perpendiculara din O pe BC. Punctele M şi N sînt intersecţiile cu laturile $[AB]$ şi $[AC]$ ale paralelei prin P la BC. În cazul că P este determinat avem soluţie unică. Dacă triunghiul ABC este isoscel ($AB = AC$) punctul P nu este determinat dacă $O \in AD$ (orice paralelă la BC dă o soluţie) iar dacă $O \notin AD$, nu avem soluţie.

65°. Dacă P este proiecţia lui A pe planul π, locul geometric este exact punctul P. Presupunem că proiecţia lui A pe planul este un punct $B \neq P$. Fie d o dreaptă în π care trece prin P şi M proiecţia lui A pe d. Aplicînd teorema celor trei perpendiculare deducem că $BM \perp PM$. Punctele B şi P fiind fixe, deducem că M descrie cercul de diametru $[PB]$.

66°. Din asemănarea triunghiurilor AMA' şi BMB' rezultă $\frac{MA'}{MB'} = k$. Bisectoarea unghiului $A'MB'$ intersectează $[A'B']$ în punctul P iar bisectoarea exterioară acestui unghi intersectează $A'B'$ în P'. Avem: $\frac{A'P}{B'P} = \frac{A'P'}{B'P'} = k$. Punctele P şi P' sînt fixe şi $m(\widehat{PMP'}) = 90°$. Deducem că locul este cercul de diametru $[PP']$; v. fig. M.C.18.

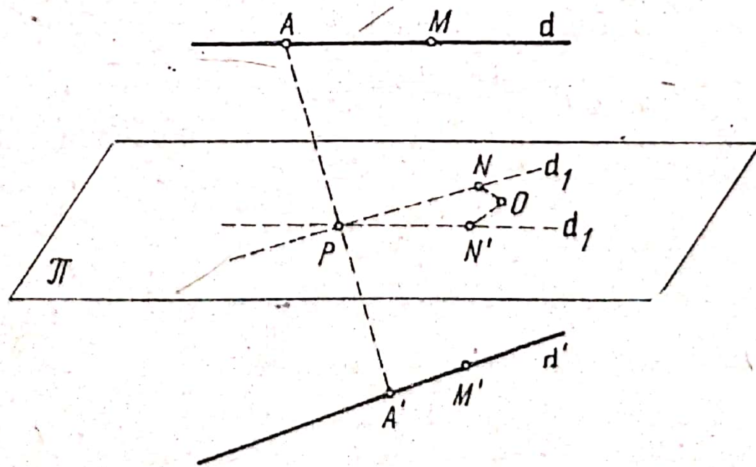


Fig. M.C.19

67°. Perpendiculara comună AA' ($A \in$ d, $A' \in$ d') intersectează planul π în punctul P (v. fig. M.C.19). Proiecţiile (d_1) şi (d_1') ale dreptelor (d) şi (d') pe planul π se intersectează în P. Fie M şi M' punctele de tangenţă ale sferei de centru $O \in \pi$ cu (d), respectiv (d'). Notăm cu N şi N' proiecţiile lui O pe (d_1), respectiv (d_1'). Avem $OM = OM'$ dacă şi numai dacă $ON = ON'$ (din congruenţa triunghiurilor OMN şi $OM'N'$). Rezultă că O este situat pe bisectoarea unghiului $\widehat{NPN'}$. Deducem că locul căutat este format din bisectoarele unghiurilor determinate de dreptele (d_1) şi (d_1'). Dacă d $\parallel$ d', dreptele (d_1) şi (d_1') sînt de asemenea paralele şi în acest caz locul este o dreaptă din π paralelă cu (d_1) şi (d_1') avînd distanţele egale la aceste drepte.

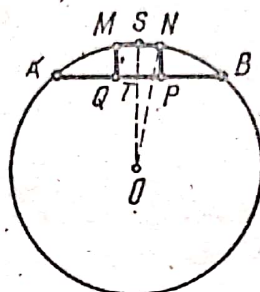


Fig. M.C.19

68°. Fie x distanţa de la centrul sferei la planul de secţiune π. Raza cercului de intersecţie a planului π cu sfera $\mathcal{S}(O, R)$ este $r = \sqrt{R^2 - x^2}$. Diferenţa ariilor celor două calote sferice este $2\pi R(R + x) - 2\pi R(R - x)$, iar aria cercului este $\pi(R^2 - x^2)$. Rezultă că x satisface ecuaţia: $4\pi Rx = \pi(R^2 - x^2)$. Soluţia reală acceptabilă este: $x = R(\sqrt{5} - 2)$.

69°. Fie $MNPQ$ pătratul cerut şi $MN = x$(P, Q pe coarda AB). Fie S mijlocul lui MN şi T mijlocul lui PQ. Se consideră $\triangle OSN$, în care $OS = ST + OT = x + \frac{R\sqrt{3}}{2}$. Scriind că $ON^2 = OS^2 + SN^2$, rezultă că $R^2 = \left(x + \frac{R\sqrt{3}}{2}\right)^2 + \frac{x^2}{4}$ etc.

70°. Avem: $AB + CD = (AM + MB) + (CP + DP) = (AQ + BN) + (DQ + CN) = (AQ + DQ) + (BN + CN) = AD + BC$. Fie apoi $E = AC \cap MP$ şi $m(\widehat{AMP}) = \alpha$. Atunci avem $m(\widehat{MPC}) = \pi - \alpha$ şi $\frac{AE}{EC} = \frac{AM}{PC}$. În acelaşi raport AC taie NQ, deci AC, MP, NQ sînt concurente etc.

71°. Fie O_1, O_2 centrele, $O_1O_2 = a$ şi $\widehat{O_1AO_2} = \alpha$. Atunci $m(\widehat{BAC}) = \frac{\alpha}{2}$. Ducem $O_2M \parallel BC$, $M \in O_1B$, deci $BC = O_2M = \sqrt{a^2 - (R - r)^2}$. Din $\triangle AO_1O_2$, $\cos\alpha = \frac{R^2 + r^2 - a^2}{2Rr}$ şi raza cerută este $\frac{BC}{2\sin\frac{\alpha}{2}}$ şi după calcule, este egală cu $\sqrt{Rr}$.

72°. Se verifică mai întîi prin inducţie că:

$$|\sin a_1 \sin a_2 \ldots \sin a_n| + |\cos a_1 \cos a_2 \ldots \cos a_n| \leqslant 1,$$

pentru $n \geqslant 2$. Pasul de inducţie este imediat, căci:

$$|\sin a_1 \ldots \sin a_n \sin a_{n+1}| + |\cos a_1 \ldots \cos a_n \cos a_{n+1}| = |\sin a_1 \ldots \sin a_n| \cdot |\sin a_{n+1}| + |\cos a_1 \ldots \cos a_n| \cdot |\cos a_{n+1}| \leqslant |\sin a_1 \ldots \sin a_n| + |\cos a_1 \ldots \cos a_n| \leqslant 1;$$

iar pentru $n = 2$, se consideră diverse cazuri, care conduc la $\cos(a_1 \pm a_2) \leqslant 1$

sau $-\cos(a_1 \pm a_2) \leqslant 1$, inegalități evidente. Deoarece $x \leqslant |x|$, pentru orice x real, rezultă:

$$\sin a_1 \sin a_2 \ldots \sin a_n + \cos a_1 \cos a_2 \ldots \cos a_n \leqslant |\sin a_1 \ldots \sin a_n + \cos a_1 \ldots \cos a_n| \leqslant |\sin a_1 \ldots \sin a_n| + |\cos a_1 \ldots \cos a_n| \leqslant 1.$$

73°. Scriem $\frac{1}{2} = \frac{1}{2}(\sin^2 x + \cos^2 x)$ și prima inegalitate devine: $\sin^2 x + \cos^2 x \leqslant 2\sin^2 x + 6 \sin x \cos x + 10 \cos^2 x$, adică $\sin^2 x + 6 \sin x \cos x + 9 \cos^2 x \geqslant 0$, deci $(\sin x + 3 \cos x)^2 \geqslant 0$. Similar, $\frac{11}{2} = \frac{11}{2}(\sin^2 x + \cos^2 x)$ etc. O generalizare este să determinăm marginile lui $f(x) = a \sin^2 x + b \sin x \cos x + c \cos^2 x$ etc.

74°. Fie $P' = VP \cap AD$, $Q' = VQ \cap BC$. Planele VBD și $VP'Q'$ se intersectează după dreapta VL, unde $L = BD \cap P'Q'$. Punctul cerut este intersecția lui PQ cu VL.

75°. Fie $P(\lambda, 0)$, $Q(0, \mu)$ și $\lambda + \mu = a$ (presupunem $\lambda > 0$, $\mu > 0$); $m_{PQ} = -\frac{\mu}{\lambda}$, deci ecuația perpendicularei din R pe PQ va fi $y - \mu = \frac{\lambda}{\mu}(x - \lambda)$, adică $(a - \lambda)(y - a + \lambda) = \lambda(x - \lambda)$ sau, echivalent, $\lambda x + (\lambda - a)y - 2a\lambda + a^2 = 0$. Dacă (x_0, y_0) este punctul fix, rezultă că pentru orice $\lambda \in \mathbf{R}$, $\lambda x_0 + (\lambda - a)y_0 - 2a\lambda + a^2 = 0$, adică $\lambda(x_0 + y_0 - 2a) + a^2 - ay_0 = 0$, de unde $x_0 + y_0 - 2a = 0$ și $a^2 - ay_0 = 0 \Rightarrow x_0 = a$, $y_0 = a$.

76°. Cercul γ are ecuația de forma $x^2 + y^2 + mx + ny + p = 0$. Axa radicală se obține prin scăderea ecuațiilor lui $\mathscr{C}$ și γ, deci are ecuația $(m + 1)x + (n + 1)y + p + 2 = 0$ cu $m, n, p \in \mathbf{R}$. Condiția să coincidă cu D este $\frac{m+1}{2} = \frac{n+1}{2} = \frac{p+2}{2}$, deci $n = m$, $p = -m - 3$. Deci ecuația comună a cercurilor γ va fi $x^2 + y^2 + mx + my - m - 3 = 0$; centrele lor au coordonatele $x = -\frac{m}{2}$, $y = -\frac{m}{2}$ și sînt situate pe dreapta $y = x$.

77°. Avem:

$$a_n = \frac{1}{2^{2n}} \cdot \frac{(2n)!}{n!\,n!} = \frac{(2n)!}{(2^n \cdot n!)^2} = \frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \ldots (2n-1) \cdot 2n}{(2 \cdot 4 \cdot 6 \ldots 2n)^2} = \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \ldots (2n-1)}{2 \cdot 4 \ldots 2n}.$$

Atunci $\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{2n+1}{2n+2} < 1$, deci $a_{n+1} < a_n$, adică (a_n) este descrescător. Rezultă $0 < a_n \leqslant a_1 = \frac{1}{2}$, deci (a_n) este mărginit. Atunci șirul (a_n) este convergent. Putem scrie:

$$a_n = \frac{\sqrt{1} \cdot \sqrt{3}}{2} \cdot \frac{\sqrt{3} \cdot \sqrt{5}}{4} \cdot \frac{\sqrt{5} \cdot \sqrt{7}}{6} \ldots \frac{\sqrt{2n-3} \cdot \sqrt{2n-1}}{2n-2} \cdot \frac{\sqrt{2n-1}}{2n}.$$

Dar $\frac{\sqrt{1} \cdot \sqrt{3}}{2} < 1$, $\frac{\sqrt{3} \cdot \sqrt{5}}{4} < 1$, ..., $\frac{\sqrt{2n-3} \cdot \sqrt{2n-1}}{2n-2} < 1$ (deoarece media geometrică este mai mică decît media aritmetică), deci obținem:

$$a_n < \frac{\sqrt{2n-1}}{2n}. \text{ Cum } \lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt{2n-1}}{2n} = 0, \text{ rezultă } \lim_{n\to\infty} a_n = 0.$$

78°. Avem:

$$\sin(\pi\sqrt{n^2+1}) = \sin(\pi\sqrt{n^2+1} - \pi n + \pi n) = (-1)^n \sin \pi(\sqrt{n^2+1} - n) = (-1)^n \cdot \sin\left(\pi \frac{n^2+1-n^2}{\sqrt{n^2+1}+n}\right) = (-1)^n \sin \frac{\pi}{\sqrt{n^2+1}+n}.$$

Dar $\frac{\pi}{\sqrt{n^2+1}+n} \to 0$, deci $\lim_{n\to\infty} \sin(\pi\sqrt{n^2+1}) = 0$.

79°. Înmulţind relaţiile: $a_2 = \alpha a + \beta$, $a_3 = \alpha a_2 + \beta$, ..., $a_{n-1} = \alpha a_{n-2} + \beta$, $a_n = \alpha a_{n-1} + \beta$ respectiv, cu $\alpha^{n-2}, \alpha^{n-3}, \dots, \alpha, 1$ obţinem:

$$\alpha^{n-2}a_2 = \alpha^{n-1}a + \alpha^{n-2}\beta;$$

$$\alpha^{n-3}a_3 = \alpha^{n-2}a_2 + \alpha^{n-3}\beta;$$

$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$

$$\alpha a_{n-1} = \alpha^2 a_{n-2} + \alpha\beta;$$

$$a_n = \alpha a_{n-1} + \beta.$$

Adunînd cele $(n-1)$ relaţii obţinute şi reducînd termenii, rezultă:

$$a_n = a \cdot \alpha^{n-1} + \beta(1 + \alpha + \dots + \alpha^{n-2}) = a \cdot \alpha^{n-1} + \beta \cdot \frac{1 - \alpha^{n-1}}{1 - \alpha}$$

Deoarece $|\alpha| < 1$, avem $\lim\limits_{n\to\infty} \alpha^{n-1} = 0$, deci $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \dfrac{\beta}{1-\alpha}$.

80°. Pentru orice $k = 1, 2, \dots, n$ avem dubla inegalitate:

$$\frac{1}{2^n + n} \leqslant \frac{1}{2^n + k} \leqslant \frac{1}{2^n + 1}.$$

Rezultă inegalităţile:

$$\frac{C_n^1 + C_n^2 + \dots + C_n^n}{2^n + n} \leqslant \frac{C_n^1}{2^n + 1} + \dots + \frac{C_n^n}{2^n + n} \leqslant \frac{C_n^1 + C_n^2 + \dots + C_n^n}{2^n + 1}.$$

Notînd şirul dat cu a_n, avem: $\dfrac{2^n - 1}{2^n + n} \leqslant a_n \leqslant \dfrac{2^n - 1}{2^n + 1}$. Dar,

$$\lim_{n\to\infty} \frac{2^n - 1}{2^n + n} = \lim_{n\to\infty} \frac{1 - \frac{1}{2^n}}{1 + \frac{n}{2^n}} = 1$$

$$\text{şi } \lim_{n\to\infty} \frac{2^n - 1}{2^n + 1} = \lim_{n\to\infty} \frac{1 - \frac{1}{2^n}}{1 + \frac{1}{2^n}} = 1, \text{ deci } \lim_{n\to\infty} a_n = 1.$$

81°. Avem: $a_0 = 1 \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$, deci $a_1 = \sin a_0 \in (0, 1) \subset \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$. Presupunem că $a_n \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ şi atunci rezultă $a_{n+1} = \sin a_n \in (0, 1) \subset \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$, deci $0 < a_n < \frac{\pi}{2}$, $(\forall) n \geqslant 0$, adică (a_n) este mărginit. Pentru orice $x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ avem $\sin x < x$, deci $a_{n+1} = \sin a_n < a_n$, adică şirul (a_n) este descrescător. Rezultă (a_n) convergent şi fie $l = \lim\limits_{n\to\infty} a_n$. Trecînd la limită în relaţia $a_{n+1} = \sin a_n$ obţinem: $l = \sin l$. Dar ecuaţia $l = \sin l$ are singura soluţie $l = 0$, deci $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$.

82°. Considerăm funcţia ajutătoare $f: \left(-\frac{\pi}{2}, 0\right) \cup \left(0, \frac{\pi}{2}\right) \to \mathbf{R}$, $f(x) = \frac{x^2 \sin^2 x}{x^2 - \sin^2 x}$ şi calculăm $\lim_{x\to 0} f(x)$. Aplicînd l'Hôpital de două ori rezultă:

$$\lim_{x\to 0} f(x) = \lim_{x\to 0} \frac{x^2 \cdot \sin^2 x}{x^2 - \sin^2 x} \overset{\frac{0}{0}}{=} \lim_{x\to 0} \frac{2x \sin^2 x + 2x^2 \sin x \cos x}{2x - 2 \sin x \cos x} =$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{2x \sin^2 x + x^2 \sin 2x}{2x - \sin 2x} \overset{\frac{0}{0}}{=} \lim_{x\to 0} \frac{2 \sin^2 x + 4x \sin 2x + 2x^2 \cos 2x}{2 - 2 \cos 2x} =$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{\sin^2 x + 2x \sin 2x + x^2 \cos 2x}{2 \sin^2 x} = \lim_{x\to 0} \left(\frac{1}{2} + 2 \cdot \frac{x}{\sin x} \cdot \cos x + \frac{1}{2} \cdot \frac{x^2}{\sin^2 x} \cdot \cos 2x\right) =$$

$$= \frac{1}{2} + 2 + \frac{1}{2} = 3 \left(\text{deoarece } \lim_{x\to 0} \frac{x}{\sin x} = 1\right).$$

Alegînd în particular şirul $x_n \to 0$, rezultă că:

$$f(x_n) = \frac{x_n^2 \sin^2 x_n}{x_n^2 - \sin^2 x_n} \to 3, \text{ deci } \lim_{n\to\infty} \frac{x_n^2 \sin^2 x_n}{x_n^2 - \sin^2 x_n} = 3.$$

83°. Observăm că $\left(x^2 \sin \frac{1}{x^2}\right)' = 2x \sin \frac{1}{x^2} - \frac{2}{x} \cos \frac{1}{x^2}$, pentru $x \neq 0$. Dacă f are primitive, atunci primitivele sale au forma:

$$F(x) = \begin{cases} x^2 \sin \frac{1}{x^2} + C_1 & \text{dacă } x \in (0, 1], \\ C_2 & \text{dacă } x = 0, \end{cases}$$

deci pentru $x \neq 0$ avem într-adevăr $F'(x) = f(x)$. Funcţia F trebuie să fie continuă în punctul $x = 0$ (fiind derivabilă), deci $\lim_{\substack{x\to 0\\ x>0}} F(x) = C_2$. Dar $0 \leqslant x^2 \left|\sin \frac{1}{x^2}\right| \leqslant x^2$, deci $\lim_{\substack{x\to 0\\ x>0}} F(x) = C_1$. Se obţine condiţia $C_1 = C_2 = C$ şi F are forma:

$$F(x) = \begin{cases} x^2 \sin \frac{1}{x^2} + C & \text{dacă } x \in (0, 1], \\ C & \text{dacă } x = 0. \end{cases}$$

Avem:

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ x>0}} \frac{F(x) - F(0)}{x - 0} = \lim_{\substack{x\to 0\\ x>0}} \frac{x^2 \sin \frac{1}{x^2}}{x} = \lim_{\substack{x\to 0\\ x>0}} x \sin \frac{1}{x^2} = 0,$$

deci există $F'(0)$ şi avem $F'(0) = f(0) = 0$. Rezultă că f are primitive pe $[0, 1]$ şi acestea au forma indicată mai sus. Funcţia f nu este integrabilă pe $[0, 1]$ deoa-

rece nu este mărginită pe [0, 1]. Într-adevăr, alegînd șirul $x_n = \frac{1}{\sqrt{(2n+1)\pi}} \to 0$, $x_n \in (0, 1)$, obținem: $f(x_n) = 2\sqrt{(2n+1)\pi} \to +\infty$, deci f nu este mărginită pe [0, 1].

84°. Avem: $f'(x) = \left|\cos\frac{1}{x}\right| \cdot \frac{1}{x^2} \geqslant 0$, pentru $x \in \left[\frac{1}{\pi}, \infty\right)$, deci funcția f este crescătoare. Pentru $t \in \left[\frac{1}{\pi}, \frac{2}{\pi}\right]$, avem $\frac{1}{t} \in \left[\frac{\pi}{2}, \pi\right]$, deci $\left|\cos\frac{1}{t}\right| = -\cos\frac{1}{t}$. Obținem:

$$f(x) = \int_{1/\pi}^{x} \cos\frac{1}{t}\left(-\frac{1}{t^2}\right) dt = \sin\frac{1}{t}\Big|_{1/\pi}^{x} = \sin\frac{1}{x} \quad \text{dacă } x \in \left[\frac{1}{\pi}, \frac{2}{\pi}\right].$$

Pentru $x > \frac{2}{\pi}$ obținem:

$$f(x) = \int_{1/\pi}^{2/\pi} \cos\frac{1}{t}\left(-\frac{1}{t^2}\right) dt + \int_{1/\pi}^{x} \left(\cos\frac{1}{t}\right) \cdot \frac{1}{t^2}\, dt = 1 - \sin\frac{1}{t}\Big|_{2/\pi}^{x} = 2 - \sin\frac{1}{x}$$

$\left(\text{deoarece } \left|\cos\frac{1}{t}\right| = \cos\frac{1}{t},\ \text{pentru } t > \frac{2}{\pi}\right)$. Pentru $n \geqslant 1$ rezultă: $f(n) = 2 - \sin\frac{1}{n}$ și $\lim_{n\to\infty} f(n) = 2$.

85°. Pentru $x \in [1, e]$ avem: $0 \leqslant \ln x \leqslant 1$, deci $0 \leqslant (\ln x)^n \leqslant 1$, $(\forall) n \in \mathbb{N}$. Rezultă că: $0 \leqslant \int_1^e (\ln x)^n\, dx \leqslant \int_1^e dx$, deci $0 \leqslant I_n \leqslant e - 1$, adică șirul $(I_n)_{n\geqslant 0}$ este mărginit. Deoarece $(\ln x)^n \leqslant (\ln x)^{n-1}$, rezultă că $\int_1^e (\ln x)^n\, dx \leqslant \int_1^e (\ln x)^{n-1}\, dx$, deci $I_n \leqslant I_{n-1}$, adică șirul $(I_n)_{n\geqslant 0}$ este descrescător. Rezultă $(I_n)_{n\geqslant 0}$ convergent și fie $l = \lim_{n\to\infty} I_n$. Calculăm I_n prin părți alegînd: $f(x) = (\ln x)^n$, $g'(x) = 1$. Rezultă $f'(x) = n\ (\ln x)^{n-1} \cdot \frac{1}{x}$ și $g(x) = x$, deci avem:

$$I_n = x(\ln x)^n\Big|_1^e - n\int_1^e (\ln x)^{n-1} dx = e - nI_{n-1},$$

pentru $n \geqslant 1$. Împărțind la n, relația de recurență se scrie astfel: $\frac{1}{n} I_n = \frac{e}{n} - I_{n-1}$. Trecînd la limită $(n \to \infty)$ obținem: $0 \cdot l = 0 - l$, deci $l = \lim_{n\to\infty} I_n = 0$.

86°. Avem:

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{x}{1 + xe^{1-x}} & \text{dacă } x \in (-\infty, 1) \cap D, \\ \dfrac{x}{1 + xe^{x-1}} & \text{dacă } x \in [1, \infty) \cap D. \end{cases}$$

Pentru $x \in [1, \infty)$, $1 + xe^{x-1} > 0$, deci $[1, \infty) \cap D = [1, \infty)$. Pentru $x \in (-\infty, 1)$ vom arăta că $1 + xe^{1-x}$ se anulează într-un singur punct $x_0 \in \left(-\frac{1}{2}, 0\right)$.

Considerăm funcția ajutătoare $g(x) = 1 + xe^{1-x}, x \in (-\infty, 1)$ și aplicăm șirul lui Rolle. Avem: $g'(x) = e^{1-x} - xe^{1-x} = (1 - x)e^{1-x} > 0$, deci avem tabelul:

x	$-\infty$		$-\frac{1}{2}$	0		1
$g(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	$-\left(\frac{e\sqrt{e}}{2} - 1\right)$	1	$\nearrow$	2
			$-$	$+$		

rezultă că $g(x)$ se anulează într-un singur punct $x_0 \in \left(-\frac{1}{2}, 0\right)$. Deci $D = \mathbb{R} \setminus \{x_0\}$ și, în plus, avem:

$$\lim_{\substack{x \to x_0 \\ x < x_0}} f(x) = \frac{x_0}{-0} = +\infty, \quad \lim_{\substack{x \to x_0 \\ x > x_0}} f(x) = \frac{x_0}{+0} = -\infty;$$

rezultă că $x = x_0$ este asimptotă verticală pentru f.

b) Avem:

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = 0, \quad \lim_{x \to +\infty} f(x) = 0,$$

deci $y = 0$ este asimptotă orizontală la ambele ramuri. Calculăm:

$$f'(x) = \begin{cases} \dfrac{1 + x^2e^{1-x}}{(1 + xe^{1-x})^2} & \text{dacă } x \in (-\infty, 1) \setminus \{x_0\}, \\[2ex] \dfrac{1 - x^2e^{x-1}}{(1 + xe^{x-1})^2} & \text{dacă } x \in (1, +\infty). \end{cases}$$

Tabloul de variație este următorul:

x	$-\infty$		x_0		0		1		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	$+$ |	$+$		$+$	$1/2$ | 0	$-$ $-$ $-$	
$f(x)$	0	$\nearrow$	$+\infty$ | $-\infty$	$\nearrow$	0	$\nearrow$	$1/2$	$\searrow$	0

Graficul este indicat în fig. M.C.20.

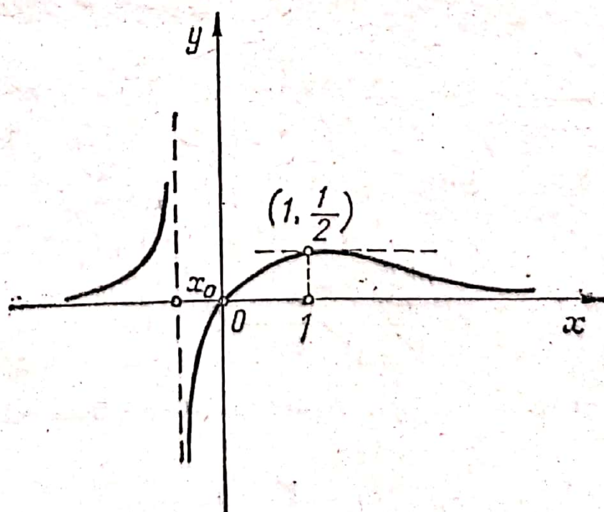


Fig. M.C.20

87°. Se impune schimbarea de variabilă $t = \operatorname{tg}\frac{x}{2}$, dar aceasta nu este definită pentru $x = \pi$. De aceea vom calcula mai întîi primitivele funcției $f(x) = \frac{1}{3 + \cos x}$ pe intervalul $[0, 2\pi]$. Procedăm astfel: considerăm $f: [0, \pi) \to \mathbf{R}$, $f(x) = \frac{1}{3 + \cos x}$ și fie $\varphi: [0, \infty) \to [0, \pi)$, $\varphi(t) = 2 \operatorname{arctg} t \left(\text{adică } x = 2 \operatorname{arctg} t,\ t = \operatorname{tg}\frac{x}{2}\right)$. Avem $\varphi'(t) = \frac{2}{t^2 + 1} > 0$ și φ bijectivă. Calculăm funcția:

$((f \circ \varphi) \cdot \varphi')(t) = h(t) = \frac{1}{3 + \frac{1 - t^2}{1 + t^2}} \cdot \frac{2}{1 + t^2} = \frac{1}{t^2 + 2}$, care are primitivele (pe $[0, \infty)$):

$H(t) = \frac{1}{\sqrt{2}} \operatorname{arctg}\frac{t}{\sqrt{2}} + C_1$. Atunci $f(x) = \frac{1}{3 + \cos x}$ are pe $[0, \pi)$ primitivele:

$(H \circ \varphi^{-1})(x) = \frac{1}{\sqrt{2}} \operatorname{arctg}\frac{\operatorname{tg}\frac{x}{2}}{\sqrt{2}} + C_1$. Analog, rezultă că $f(x) = \frac{1}{3 + \cos x}$ are pe $(\pi, 2\pi]$ primitivele de forma: $\frac{1}{\sqrt{2}} \operatorname{arctg}\frac{\operatorname{tg}\frac{x}{2}}{\sqrt{2}} + C_2$. Atunci primitivele lui $f(x)$ pe $[0, 2\pi]$ (care există, deoarece f este continuă pe $[0, 2\pi]$) au forma:

$$F(x) = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{2}} \operatorname{arctg}\frac{\operatorname{tg}\frac{x}{2}}{\sqrt{2}} + C_1 & \text{dacă } x \in [0, \pi), \\ C_3 & \text{dacă } x = \pi, \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \operatorname{arctg}\frac{\operatorname{tg}\frac{x}{2}}{\sqrt{2}} + C_2 & \text{dacă } x \in (\pi, 2\pi]. \end{cases}$$

Deoarece F este continuă în $x = \pi$, rezultă că:

$$\lim_{\substack{x \to \pi \\ x < \pi}} F(x) = \frac{\pi}{2\sqrt{2}} + C_1 = C_3 = \lim_{\substack{x \to \pi \\ x > \pi}} F(x) = -\frac{\pi}{2\sqrt{2}} + C_2,$$

deci, notînd $C_1 = C$, obținem: $C_3 = \frac{\pi}{2\sqrt{2}} + C$, $C_2 = \frac{\pi}{\sqrt{2}} + C$. Atunci:

$$F(x) = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{2}} \operatorname{arctg}\frac{\operatorname{tg}\frac{x}{2}}{\sqrt{2}} + C & \text{dacă } x \in [0, \pi), \\ \frac{\pi}{2\sqrt{2}} + C & \text{dacă } x = \pi, \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \operatorname{arctg}\frac{\operatorname{tg}\frac{x}{2}}{\sqrt{2}} + \frac{\pi}{2} + C & \text{dacă } x \in (\pi, 2\pi]. \end{cases}$$

Se verifică apoi că $F'(\pi) = \frac{1}{2} = f(\pi)$. Aplicînd formula Leibniz-Newton, obținem:

$$\int_0^{2\pi} \frac{dx}{3 + \cos x} = F(2\pi) - F(0) = \frac{\pi}{\sqrt{2}} = \frac{\pi\sqrt{2}}{2}.$$

88°. Avem cazul de nedeterminare 1^∞. Putem scrie:

$$\lim_{x\to 0}(1+x^2e^x)^{\frac{1}{1-\cos x}} = \lim_{x\to 0}(1+x^2e^x)^{\frac{1}{x^2e^x}\cdot\frac{x^2e^x}{1-\cos x}} =$$

$$= e^{\lim\limits_{x\to 0}\frac{x^2\cdot e^x}{2\sin^2\frac{x}{2}}} = e^{\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{\left(\frac{x}{2}\right)^2}{\sin^2\frac{x}{2}}\cdot 2e^x\right)} = e^2,$$

deoarece $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\frac{x}{2}}{\sin\frac{x}{2}} = 1$.

89°. Integrăm prin părţi alegînd: $f(x) = \ln(x+\sqrt{x^2-1})$, $g'(x) = 1$, deci $f'(x) = \dfrac{1}{\sqrt{x^2-1}}$ şi $g(x) = x$. Obţinem:

$$I = \int_2^3 \ln(x+\sqrt{x^2-1})\,dx = x\ln(x+\sqrt{x^2-1})\Big|_2^3 - \int_2^3\frac{x}{\sqrt{x^2-1}}\,dx =$$

$$= 3\ln(3+2\sqrt{2}) - 2\ln(2+\sqrt{3}) - \sqrt{x^2-1}\Big|_2^3 = \ln\frac{(3+2\sqrt{2})^3}{(2+\sqrt{3})^2} - 2\sqrt{2}+\sqrt{3}.$$

90°. Aplicăm l'Hôpital:

$$\lim_{\substack{x\to 1\\ x<1}}\frac{\sin(n\arccos x)}{\sqrt{1-x^2}} \overset{\frac{0}{0}}{=} \lim_{\substack{x\to 1\\ x<1}}\frac{\cos(n\arccos x)\cdot\frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}\cdot n}{\frac{-2x}{2\sqrt{1-x^2}}} =$$

$$= \lim_{\substack{x\to 1\\ x<1}}\frac{n\cos(n\arccos x)}{x} = n.$$

91°. Deoarece $g(t) = \dfrac{1}{\sqrt{t^4+t^2+1}}$ este definită şi continuă pe $\mathbf{R}$, are primitive pe $\mathbf{R}$. Fie $F(t)$ o primitivă a sa. Atunci avem: $f(x) = F(2x) - F(x)$, deci f este derivabilă pe $\mathbf{R}$ şi:

$$f'(x) = 2F'(2x) - F'(x) = 2g(2x) - g(x) = \frac{2}{\sqrt{16x^4+4x^2+1}} - \frac{1}{\sqrt{x^4+x^2+1}}.$$

92°. Ţinînd cont de faptul că $\lim\limits_{n\to\infty} e^{nx} = \begin{cases} 0 & \text{pentru } x<0,\\ 1 & \text{pentru } x=0,\\ +\infty & \text{pentru } x>0,\end{cases}$ obţinem:

$$f(x) = \begin{cases} bx^2+c & \text{pentru } x<0,\\ c/2 & \text{pentru } x=0,\\ ax & \text{pentru } x>0.\end{cases}$$

O primitivă $F:\mathbf{R}\to\mathbf{R}$ a lui f are forma:

$$F(x) = \begin{cases} \dfrac{bx^3}{3}+cx+k_1 & \text{pentru } x\leqslant 0,\\ a\dfrac{x^2}{2}+k_2 & \text{pentru } x>0,\end{cases}$$

cu k_1, k_2 constante reale. Din continuitatea lui F obținem $k_1 = k_2 = k$. Deci avem forma:

$$F(x) = \begin{cases} \dfrac{bx^3}{3} + cx + k & \text{pentru } x \leqslant 0, \\ \dfrac{ax^2}{2} + k & \text{pentru } x > 0. \end{cases}$$

Evident: $F' \mid (-\infty, 0) \cup (0, \infty) = f \mid (-\infty, 0) \cup (0, \infty)$. Studiem derivabilitatea lui F în $x = 0$:

$$F'_s(0) = \lim_{\substack{x\to 0 \\ x<0}} \frac{F(x) - F(0)}{x - 0} = \lim_{\substack{x\to 0 \\ x<0}} \frac{bx^3 + cx + k - k}{x} = c,$$

$$F'_d(0) = \lim_{\substack{x\to 0 \\ x>0}} \frac{F(x) - F(0)}{x - 0} = \lim_{\substack{x\to 0 \\ x>0}} \frac{\dfrac{ax^3}{2} + k - k}{x} = 0.$$

F e derivabilă pe $\mathbf{R}$ pentru $c = 0$ și în acest caz, avem $F'(0) = f(0) = 0$. În concluzie, f admite primitive pentru a, $b \in \mathbf{R}$ și $c = 0$.

93°. Considerăm funcția $g : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$,

$$g(x) = \begin{cases} 2x\, e^x \sin\dfrac{1}{x} + x^2 e^x \sin\dfrac{1}{x}, & x \neq 0. \\ 0, & x = 0. \end{cases}$$

Evident g este continuă și admite primitive. Fie $G : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ o primitivă pentru g. O primitivă a funcției f este $F : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ de forma:

$$F(x) = \begin{cases} G(x) - x^2 e^x \sin\dfrac{1}{x} + C_1 & \text{pentru } x \neq 0, \\ C_2 & \text{pentru } x = 0. \end{cases}$$

Avem: $F' \mid (-\infty, 0) \cup (0, \infty) = f \mid (-\infty, 0) \cup (0, \infty)$. Punînd condiția de continuitate pentru G în $x = 0$ obținem: $G(0) + C_1 = C_2$. Fie $C_1 = C$. În acest moment avem:

$$F(x) = \begin{cases} G(x) - x^2 e^x \sin\dfrac{1}{x} + C & \text{pentru } x \neq 0, \\ G(0) + C & \text{pentru } x = 0. \end{cases}$$

$$F'(0) = \lim_{x\to\infty} \frac{G(x) - x^2 e^x \sin\dfrac{1}{x} + C - G(0) - C}{x} =$$

$$= \lim_{x\to 0} \left[\frac{G(x) - G(0)}{x} - x\, e^x \sin\frac{1}{x}\right] = g(0) = 0.$$

Pentru ca F să fie primitivă a lui f pe $\mathbf{R}$ este necesar ca $F'(0) = f(0)$, de unde se obține $\alpha = 0$.

94°. Fie $g : (0, \infty) \to \mathbf{R}$, $g(x) = \dfrac{e^{\arcsin x} - 1}{e^x - \cos x}$; avem:

$$\lim_{\substack{x\to 0 \\ x>0}} g(x) = \lim_{\substack{x\to 0 \\ x>0}} \frac{e^{\arcsin x} - 1}{\arcsin x} \cdot \frac{\arcsin x}{e^x - \cos x} = \lim_{\substack{x\to 0 \\ x>0}} \frac{\dfrac{1}{\sqrt{1 - x^2}}}{e^x + \sin x} = 1.$$

Am utilizat faptul că $\lim\limits_{t\to 0}\frac{e^t-1}{t}=1$ și regula lui l'Hôpital. Deci pentru orice șir $x_n\to 0$, $x_n>0$, avem $\lim\limits_{n\to\infty} g(x_n)=1$. Luînd $x_n=\frac{1}{n}$, obținem:

$$a_n=g(x_n) \text{ și deci } \lim_{n\to\infty} a_n=\lim_{n\to\infty} g\left(\frac{1}{n}\right)=1.$$

95°. Pentru orice $t\geqslant 0$ avem $\ln(1+t)\leqslant t$, așa cum se verifică imediat. Notăm $a_n=\int_n^{n+1}\ln\left(1+\frac{|\sin x|}{x}\right)dx$, deci $0\leqslant a_n\leqslant\int_n^{n+1}\frac{|\sin x|}{x}dx\leqslant\int_n^{n+1}\frac{1}{x}dx=\ln\frac{n+1}{n}$. Aplicînd lema cleștelui, rezultă $\lim\limits_{n\to\infty} a_n=0$.

96°. Dacă $x>0$ este fixat, atunci $f(x)=0$ (deoarece $e^{ax}\to\infty$ pentru $a\to\infty$). Dacă $x=0$, atunci $f(0)=0$. Iar dacă $x<0$, $f(x)=\frac{x}{1+x^2}$. Așadar,

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{x}{1+x^2}, & x<0,\\ 0, & x\geqslant 0.\end{cases}$$

Graficul este indicat în fig. M.C.21.

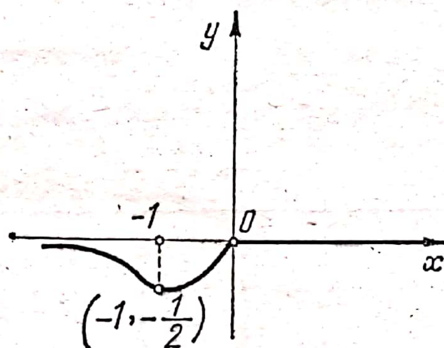


Fig. M.C.21

97°. Deoarece $x_n-x_{n-1}=-x_{n-1}^2\leqslant 0$, rezultă că $x_n\leqslant x_{n-1}$ pentru orice $n\geqslant 1$, deci șirul este monoton descrescător. Apoi, prin inducție se vede că $0\leqslant x_n\leqslant 1$ pentru orice $n\geqslant 0$. Șirul este monoton și mărginit deci convergent. Fie $l=\lim\limits_{n\to\infty} x_n$. Atunci din relația inițială pentru $n\to\infty$, se obține $l=l-l^2$, deci $l=0$.

98°. Folosind regula lui l'Hôpital, limita este egală cu:

$$\lim_{x\to n}\frac{2(x-n)}{2\sin\pi x\cdot\cos\pi x\cdot\pi}=\frac{1}{\pi\cos n\pi}\lim_{x\to n}\frac{x-n}{\sin\pi x}=\frac{1}{\pi\cos n\pi}\cdot\frac{1}{\pi\cos\pi n}=\frac{1}{\pi^2},$$

deoarece $\cos n\pi=(-1)^n$ și $\cos^2 n\pi=1$.

99°. Se consideră funcția $g:[0,1-k]\to\mathbf{R}$, $g(x)=f(x+k)-f(x)$. Avem $g(0)=f(k)-f(0)\geqslant 0$ și $g(1-k)=f(1)-f(1-k)=f(0)-f(1-k)\leqslant 0$. Deoarece g este continuă, există $u_0\in[0,1-k]$ astfel încît $g(u_0)=0$, adică $f(u_0+k)=f(u_0)$. Deci punctele de pe graficul lui f de abscise u_0, u_0+k au aceeași ordonată și determină o coardă de lungime k.

100°. Fie x lungimea înălțimii trapezului (în mod necesar isoscel). Atunci lungimea bazei mari va fi $1+2\sqrt{1-x^2}$ și aria trapezului:

$$S(x)=x(1+\sqrt{1-x^2}),\ 0<x<1.$$

Scriind că $S'(x)=0$, rezultă $x=\frac{\sqrt{3}}{2}$ și $\max S=\frac{3\sqrt{3}}{4}$.

101°. $f'(x) = 3x^2 + 2\lambda x$, ecuația $f'(x) = 0$ are soluțiile: $x_1 = 0$; $x_2 = -\frac{2\lambda}{3}$.

Apar mai multe cazuri:

— presupunem $\lambda \geqslant 0$, deci tabloul de variație al lui f va fi:

x	0				1		3				∞
$f'(x)$	0	$+$		$+$		$+$	$+$	$+$		$+$	
$f(x)$	-1		$\nearrow$		λ	$\nearrow$	$26 + 9\lambda$		$\nearrow$		∞

Condiția din enunț devine: $-1 = 26 + 9\lambda$, deci $\lambda = -3$, imposibil;

— presupunem $0 < -\frac{2}{3}\lambda \leqslant 1 \Rightarrow -\frac{3}{2} \leqslant \lambda < 0$ și tabloul devine:

x	0				$-\frac{2\lambda}{3}$		1		3				∞
$f'(x)$	0	$-$		$-$	0	$+$		$+$	$+$	$+$		$+$	
$f(x)$	-1		$\searrow$		$f\left(-\frac{2\lambda}{3}\right)$	$\nearrow$	λ	$\nearrow$	$26 + 9\lambda$		$\nearrow$		

și condiția $f\left(-\frac{2\lambda}{3}\right) = 26 + 9\lambda$ nu poate avea loc;

— dacă $1 < -\frac{2\lambda}{3} \leqslant 3$ rezultă $-\frac{9}{2} \leqslant \lambda < -\frac{3}{2}$ și în acest caz:

x	0		1				$-\frac{2\lambda}{3}$		3				∞
$f'(x)$	0	$-$		$-$		$-$	0	$+$	$+$	$+$		$+$	
$f(x)$	-1	$\searrow$	λ		$\searrow$		$f\left(-\frac{2\lambda}{3}\right)$	$\nearrow$	$26 + 9\lambda$		$\nearrow$		∞

Condiția din enunț este $\lambda = \max(\lambda,\ 26 + 9)$, de unde $\lambda \geqslant 26 + 9\lambda$ și $\lambda \leqslant -\frac{13}{4}$.

Așadar $-\frac{9}{2} \leqslant \lambda \leqslant -\frac{13}{4}$.

— în fine, presupunem $-\frac{2\lambda}{3} > 3$, deci $\lambda < -\frac{9}{2}$ și tabloul de variație devine:

x	0			1		3	$-\frac{2\lambda}{3}$			∞
$f'(x)$	0		$-$		$-$	$-$	0	$+$	$+$	$+$
$f(x)$	-1	$\searrow$		λ	$\searrow$	$26 + 9\lambda$	$\searrow$		$\nearrow$	∞

și condiția impusă este $\lambda = \lambda$, deci este îndeplinită. În concluzie, $\lambda \leqslant -\frac{13}{4}$.

102°. $f'(x) = n \sin^{n-1}x \cos^2 x - \sin^{n+1}x = \sin^{n-1}x(n\cos^2 x - \sin^2 x)$. Funcția f fiind periodică de perioadă 2π, putem presupune că $x \in [0, 2\pi]$. Rezultă că ecuația $f'(x) = 0$ are soluțiile 0, π, 2π, $\operatorname{arctg}\sqrt{n}$, $\pi + \operatorname{arctg}\sqrt{n}$, $\pi - \operatorname{arctg}\sqrt{n}$, $2\pi - \operatorname{arctg}\sqrt{n}$ și tabloul de variația al lui f va fi:

x		0		$\operatorname{arctg}\sqrt{n}$		$\pi - \operatorname{arctg}\sqrt{n}$		π		$\pi + \operatorname{arctg}\sqrt{n}$		$2\pi - \operatorname{arctg}\sqrt{n}$		2π
$f'(x)$		0	$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	0
$f(x)$	0		$\nearrow$		$\searrow$		$\nearrow$		$\searrow$		$\nearrow$		$\searrow$	0

Avem: $\sin(\text{arctg}\sqrt{n}) = \frac{\sqrt{n}}{\sqrt{1+n}}$; $\cos(\text{arctg}\sqrt{n}) = \frac{1}{\sqrt{1+n}}$, deci $f(\text{arctg}\sqrt{n}) = \left(\frac{\sqrt{n}}{\sqrt{1+n}}\right)^n \cdot \frac{1}{\sqrt{1+n}}$. Apoi $f(\pi) = 0$ şi $f(2\pi - \text{arctg}\sqrt{n}) = f(\text{arctg}\sqrt{n})$. În concluzie, $M_n = \frac{(\sqrt{n})^n}{(\sqrt{1+n})^{n+1}}$. Limita cerută este:

$$l = \lim_{n\to\infty}\left(\sqrt{\frac{n}{n+1}}\right)^n = \lim_{n\to\infty}\sqrt{\left(\frac{1}{1+\frac{1}{n}}\right)^n} = \frac{1}{\sqrt{e}}.$$

103°. $l = \lim_{n\to\infty} n^2\left(a^{\frac{1}{n}} - a^{\frac{1}{n+1}}\right)$. Făcînd $x = \frac{1}{n}$, va rezulta:

$$l = \lim_{x\to 0}\frac{a^x - a^{\frac{x}{x+1}}}{x^2} \overset{\text{l'Hôp.}}{=} \lim_{x\to 0}\frac{a^x \ln a - a^{\frac{x}{x+1}}\cdot \ln a \cdot \frac{1}{(x+1)^2}}{2x} =$$

$$= \frac{\ln a}{2}\cdot \lim_{x\to 0}\frac{a^x - a^{\frac{x}{x+1}}\cdot\frac{1}{(x+1)^2}}{x} =$$

$$= \frac{\ln a}{2}\cdot\lim_{x\to 0}\frac{a^x \ln a - a^{\frac{x}{x+1}}\cdot\frac{1}{(x+1)^4}\ln a + 2a^{\frac{x}{x+1}}\cdot\frac{1}{(x+1)^3}}{1} = \frac{\ln a}{2}(\ln a - \ln a + 2) = \ln a.$$

104°. Derivînd relaţia dată, rezultă:

$$1 + f(x) = 1\cdot f(x) + (x+1)f'(x),$$

deci $f'(x) = \frac{1}{x+1}$ şi $f(x) = \ln(x+1) + C$. Făcînd în relaţia iniţială $x = 0$, rezultă $0 + 0 = 1\cdot f(0)$, deci $f(0) = 0$. Atunci $C = 0$ şi, în concluzie, $f(x) = \ln(x+1)$.

105°. Trasînd graficul lui $\varphi(x) = \arcsin(\sin x)$, care este funcţie periodică de perioada 2π, se observă imediat că:

$$I = 4\int_0^{\pi}|\varphi(x)|\,dx = 4\int_0^{\frac{\pi}{2}} x\,dx + 4\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}(\pi - x)\,dx = \pi^2.$$

106°. Echivalent, $\ln\frac{m}{n} < \frac{m^2 + mn - 2n^2}{mn} = \frac{m}{n} + 1 - \frac{2n}{m}$. Notăm $\frac{m}{n} = x$, deci $x > 1$. Avem de arătat că dacă $x > 1$, atunci $\ln x < x + 1 - \frac{2}{x}$. Din tabloul de variaţie al lui $\varphi(x) = \ln x - x - 1 + \frac{2}{x}$ pentru $x > 1$, rezultă $\varphi'(x) < 0$, deci φ este strict descrescătoare pe $(1, \infty)$; deoarece $\varphi(1) = 0$, rezultă $\varphi(x) < 0$ pentru $x > 1$, ceea ce trebuia arătat.

107°. $I_0=\int_0^1\sqrt{1-x}\,dx=\frac{2}{3}$, făcînd schimbarea $\sqrt{1-x}=t$. Apoi, $I_1=\frac{4}{15}$. Avem:

$$I_n=\int_0^1 x^n\sqrt{1-x}\,dx=\int_0^1 x^n\frac{1-x}{\sqrt{1-x}}\,dx=\int_0^1(x^n-x^{n+1})\frac{dx}{\sqrt{1-x}}.$$

Integrînd prin părți, rezultă:

$$I_n=2\int_0^1[nx^{n-1}-(n+1)x^n]\sqrt{1-x}\,dx=2nI_{n-1}-2(n+1)I_n.$$

Așadar, $\frac{I_n}{I_{n-1}}=\frac{2n}{2n+3}$. Scriind această relație pentru 1, 2, 3, ..., n și înmulțind relațiile obținute rezultă: $I_n=\frac{2n}{2n+3}\cdot\frac{2(n-1)}{2n+1}\cdots\frac{2\cdot 2}{7}\cdot\frac{2\cdot 1}{5}I_0$.

108°. Deoarece $x\in[-2,\ 2]$ și $k\to\infty$, rezultă $|x-2|=2-x$ și $|x-k|=k-x$. Atunci:

$$\int_{-2}^2\frac{2-x+k}{2-k+x}\,dx=\int_{-2}^2\left(-1+\frac{4}{2-k+x}\right)dx=(-x+4\ln(x+2-k))\Big|_{-2}^2=$$
$$=-4+4\ln(k-4)-4\ln k$$

și limita cerută este egală cu -4.

109°. Avem $e^x>1+x$ pentru $x\neq 0$ (verificare imediată) și facem $x=\frac{\pi}{e}-1$. Rezultă: $e^{\frac{\pi}{e}-1}>\frac{\pi}{e}\Rightarrow e^{\frac{\pi}{e}}\cdot\frac{1}{e}>\frac{\pi}{e}$, deci $e^{\frac{\pi}{e}}>\pi$ și $e^\pi>\pi^e$.

Altă metodă constă în studiul variației funcției $f(x)=e\ln x-x$.

110°. Studiind variația funcției $\varphi(x)=x-\sin\frac{\pi x}{2}$, se constată că pentru $x\in[0,\ 1]$ avem $x\leqslant\sin\frac{\pi x}{2}$ și pentru $x\in[1,\ 2]$, $x\geqslant\sin\frac{\pi x}{2}$. Atunci:

$$I=\int_0^1 x\,dx+\int_1^2\sin\frac{\pi x}{2}\,dx=\frac{1}{2}+\frac{2}{\pi}.$$

111°. Așadar, pentru orice $x\in[0,\ 1]$ avem $a\leqslant f(x)\leqslant b$, deci $[f(x)-a]\cdot[f(x)-b]\leqslant 0$, adică $f^2(x)-(a+b)f(x)+ab\leqslant 0$. Integrînd pe intervalul $[0,\ 1)$, rezultă:

$$\int_0^1 f^2(x)\,dx-(a+b)\int_0^1 f(x)\,dx+\int_0^1 ab\,dx\leqslant 0,$$

adică $\int_0^1 f^2(x)\,dx+ab\leqslant 0$, deoarece $\int_0^1 f(x)\,dx=0$ prin ipoteză.

FIZICĂ

A. BREVIAR

Fizica este știința naturii care studiază structura materiei (particulele de substanță și cîmpurile fizice), proprietățile generale și legile de mișcare (mecanice, termice, electromagnetice, atomice, nucleare etc.) ale materiei, precum și transformările reciproce ale acestor forme de mișcare.

Fizica clasică utilizează două concepte fundamentale, particula și unda, studiind fenomene care pot fi interpretate corpuscular sau ondulatoriu. Fizica cuantică studiază procese care pot fi interpretate fie corpuscular, fie ondulatoriu, fără a dovedi că în realitate avem de-a face cu particule sau cu unde, deoarece, prin natura lucrurilor, nu se pot determina simultan toate proprietățile care sînt distincte pentru o particulă sau pentru o undă, după cum este cazul.

Fiecare formă generală de mișcare este reprezentată printr-un model, care se realizează printr-un șir nelimitat de aproximații succesive în cadrul metodei de cercetare științifică utilizată. Unui model acceptat pentru o formă generală de mișcare a materiei îi corespund relații esențiale, necesare și reproductibile între mărimile fizice, ca urmare a observațiilor experimentale, relații care exprimate matematic constituie legile domeniului considerat.

În afară de legi, în fizică avem relații de definiție și teoreme, acestea din urmă fiind deduse din legi și din relațiile de definiție.

Forma matematică a legilor fizicii rămîne independentă în raport cu diversele convenții introduse în scopul măsurării mărimilor care intervin în aceste legi (invarianța legilor fizice față de orice schimbare a unităților de măsură).

Simbolurile cuprinse în formulele matematice, care exprimă legile fizice, reprezintă observabile fizice (mărimi fizice). Orice observabilă fizică exprimă o proprietate fizică, ce poate fi mai intensă sau mai puțin intensă, mai mare sau mai mică. A măsura o observabilă fizică înseamnă a stabili de cîte ori se cuprinde în ea o altă mărime de aceeași natură, aceasta din urmă purtînd numele de unitatea mărimii respective.

Formula matematică a unei legi, în care intră numai mărimi, diferă de formula fizică corespunzătoare, care cuprinde numai valori măsurate ale observabilelor fizice, printr-un coeficient parazit. Eliminarea coeficientului parazit din formulele fizice face ca numărul unităților care pot fi definite arbitrar să scadă foarte mult. Asemenea unități, a căror mărime se alege arbitrar, se numesc unități fundamentale. Toate celelalte unități de măsură, a căror mărime nu este arbitrară și este definită cu ajutorul unităților fundamentale (și/sau a unor unități derivate), se numesc unități derivate.

După natura și mărimea unităților fundamentale, se pot alcătui diverse sisteme coerente de unități. În momentul de față se utilizează Sistemul Internațional de Unități, avînd simbolul SI, sistem adoptat la A 11-a Conferință Generală de Măsuri și Greutăți, ținută la Paris în octombrie 1960. Acest sistem se bazează pe următoarele șapte unități fundamentale:

1°. *Metrul* (unitate de lungime, avînd simbolul [m]), definit ca lungimea egală cu 1 650 763,73 lungimi de undă în vid ale radiației care corespunde tranziției între nivelele de energie $2p_{10}$ și $5d_5$ ale atomului de kripton-86.

2°. *Kilogramul* (unitate de masă, avînd simbolul [kg]), definit ca fiind masa egală cu masa prototipului internațional al kilogramului.

3°. *Secunda* (unitate de timp, avînd simbolul [s]) reprezintă durata a 9 192 631 770 perioade ale radiației care corespunde tranziției între cele două nivele de energie hiperfine ale stării fundamentale a atomului de cesiu-133.

4°. *Amperul* (unitate de intensitate a curentului electric, avînd simbolul [A]), definită ca fiind intensitatea unui curent electric constant, care menținut în două conductoare paralele rectilinii, cu lungimea infinită și cu secțiunea circulară neglijabilă, așezate în vid la o distanță de 1 m unul de altul, ar produce între aceste conductoare o forță de $2 \cdot 10^{-7}$ newtoni pe o lungime de 1 m.

5°. *Kelvinul* (unitatea de temperatură termodinamică, avînd simbolul [K]), definit ca fiind fracțiunea $(273{,}16)^{-1}$ din temperatura termodinamică a punctului triplu al apei.

6°. *Candela* (unitatea de intensitate luminoasă, avînd simbolul [cd]), care reprezintă intensitatea luminoasă, în direcția normalei, a unei suprafețe cu aria $(600\,000)^{-1}$ metri pătrați a unui corp negru la temperatura de solidificare a platinei la presiunea de 101 325 newtoni pe metru pătrat.

7°. *Molul* (unitatea de cantitate de substanță, avînd simbolul [mol]), definit ca fiind cantitatea de substanță a unui sistem care conține entități elementare cîți atomi există în 0,012 kg de carbon-12.

1. MECANICĂ

a. Mecanica clasică este ramura fizicii care studiază schimbarea în timp a poziției relative a corpurilor, precum și interacțiunile dintre corpuri care influențează această mișcare.

Mecanica clasică newtoniană (mecanica clasică nerelativistă), elaborată, în principal de Isaac Newton (1642—1727), descrie mișcarea entităților[1)] numite puncte materiale (particule), concepute ca obiecte macroscopice, făcînd ipoteza că vitezele relative ale acestora sînt mici în comparație cu viteza c a luminii.

Mișcarea unui corp se studiază alegînd totdeauna un alt corp, numit corp de referință, la care se raportează în fiecare moment poziția corpului studiat. Poziția corpului studiat la diferite momente necesită o riglă și un ceasornic. Astfel, corpul de referință, împreună cu rigla pentru determinarea poziției corpurilor studiate (sistemul de axe trirectangulare, de exemplu, în spațiul lui Euclid) și cu ceasornicul pentru indicarea momentului, constituie un sistem de referință (sau, pe scurt, referențial).

Curba descrisă de un mobil (punctul material, caracterizat numai prin masa sa, adică, avînd dimensiuni neglijabile față de distanțele sale pînă la corpurile înconjurătoare) în timpul mișcării sale se numește traiectorie. Traiectoria poate fi:

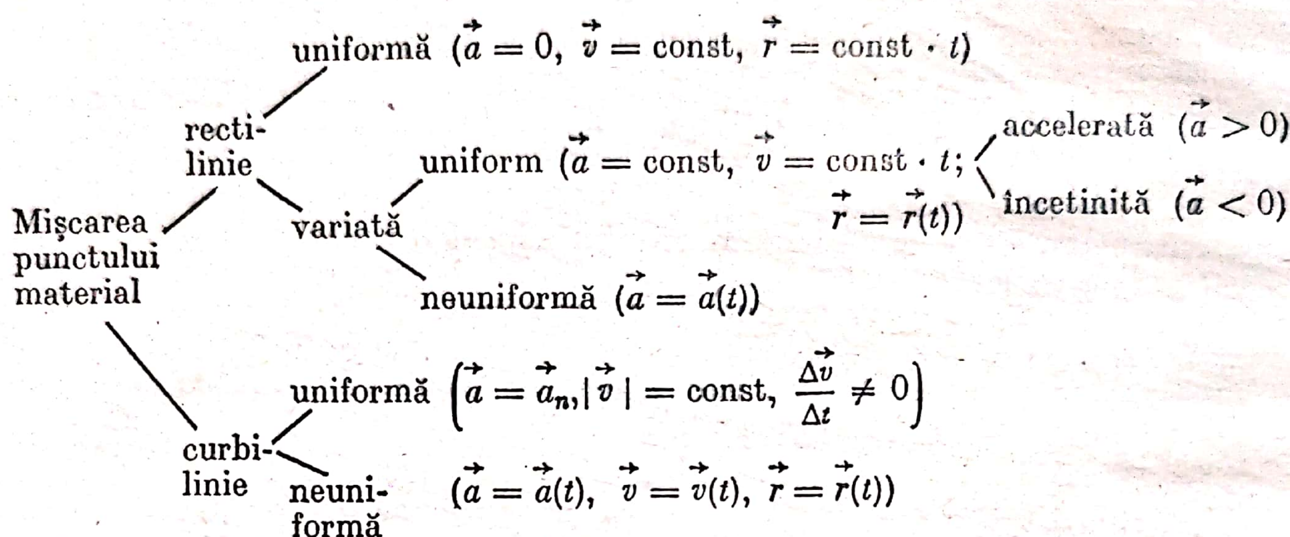
— rectilinie, cînd pentru a descrie mișcarea mobilului trebuie să cunoaștem poziția mobilului în fiecare moment pe această traiectorie, adică, coordonata sa x în funcție de timpul t, $x = f(t)$;

— curbilinie, în plan sau în spațiu, în cazul mișcării curbilinii în plan mișcarea corpului fiind determinată de două funcții $x = f_1(t)$ și $y = f_2(t)$, iar în cazul mișcării curbilinii în spațiu mișcarea corpului fiind descrisă de trei ecuații, $x = f_1(t)$, $y = f_2(t)$ și $z = f_3(t)$.

1) Entitate = ceea ce există.

Dependențele de timp ale coordonatelor poartă numele de ecuații cinematice ale mișcării. Pentru a preciza mai simplu poziția unui mobil se introduce vectorul de poziție al mobilului, care unește originea referențialului cu punctul de pe traiectorie unde se află corpul a cărui mișcare o studiem. Atunci mișcarea este descrisă de $\vec{r} = \vec{r}(t)$, iar $x(t)$, $y(t)$ și $z(t)$ sînt componentele lui $\vec{r}(t)$. Vectorul viteză se definește ca fiind $\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta \vec{r}}{\Delta t}$, iar vectorul accelerație prin $\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta \vec{v}}{\Delta t}$.

Mișcările unui punct material se pot clasifica astfel:



b. Mecanica clasică nerelativistă se bazează pe următoarele principii:

α. Principiul inerției: „Un punct material își menține starea de repaus sau de mișcare rectilinie uniformă, dacă asupra sa nu acționează alte corpuri care să-i schimbe starea respectivă".

β. Principiul fundamental al dinamicii (legea acțiunii): „Experiențele efectuate cu tot felul de corpuri, aflate în cele mai variate stări de mișcare, cărora li s-au aplicat diferite forțe, arată că vectorul forță este proporțional cu produsul dintre masă și vectorul accelerație, $\vec{F} = m\vec{a}$".

Principalele tipuri de forțe întîlnite în mecanica clasică nerelativistă sînt:

— Greutatea $\vec{G}$ a unui corp de masă m într-un cîmp gravific de accelerație $\vec{g}$:

$$\vec{G} = m\vec{g}.$$

— Forța de frecare de alunecare, F_f, orientată în sensul opus mișcării și proporțională cu forța de apăsare normală exercitată pe suprafața de contact, coeficientul de proporționalitate fiind coeficientul de frecare de alunecare, μ:

$$F_f = \mu N.$$

— Forța elastică F_e, proporțională cu valoarea deformației și orientată în sens opus creșterii deformației:

$$F_e = -kx.$$

Un exemplu de forță elastică este forța care apare într-un resort de oțel supus unei deformări (întindere sau comprimare).

De asemenea, în cazul legii deformărilor elastice (legea lui Hooke), se arată că alungirea relativă, $\frac{\Delta l}{l_0} = \varepsilon$, este proporțională cu efortul unitar, $\sigma = \frac{F}{S_0}$,

$$\varepsilon = \frac{1}{E}\sigma,$$

E fiind modulul de elasticitate longitudinal, F forța deformatoare, Δl alungirea absolută, l_0 lungimea inițială a firului cilindric, iar S_0 secțiunea transversală a firului. Dacă notăm cu $k = \frac{ES_0}{l_0}$ constanta de elasticitate a firului, legea lui Hooke se poate scrie sub forma

$$F = kx.$$

— Forța inerțială de tip centrifug, acționînd în direcția și sensul razei vectoare (în raport cu centrul circumferinței parcurse), asupra unui corp aflat în mișcare de rotație:

$$F_{cf} = \frac{mv^2}{r} = m\omega v = m\omega^2 r, \quad \vec{F}_{cf} = m\omega^2\vec{r},$$

unde m este masa corpului, ω și v sînt vitezele unghiulară și, respectiv, liniară ale mișcării de rotație, iar r este raza circumferinței parcurse.

— Forța inerțială de tip centripet, acționînd pe direcția forței inerțiale de tip centrifug, dar în sens contrar acesteia, adică

$$\vec{F}_{cp} = -m\omega^2\vec{r}.$$

— Forța gravitațională dintre două corpuri cu masele m_1 și m_2 considerate punctiforme față de distanța dintre ele, situate la o distanță r unul față de altul, a cărei expresie este

$$F = K\frac{m_1 m_2}{r^2},$$

unde $K = 6{,}673 \cdot 10^{-11}$ N $\cdot$ m² $\cdot$ kg⁻² este o constantă universală. Se observă că forța gravitațională este o forță de atracție care acționează de-a lungul liniei ce unește corpurile. Aceasta exprimă legea atracției universale.

γ. Principiul acțiunilor reciproce: „Dacă un corp exercită asupra altui corp forța $\vec{F}_{12}$, atunci cel de-al doilea corp exercită asupra primului corp forța $\vec{F}_{21}$, egală și de sens contrar cu $\vec{F}_{12}$, deci $\vec{F}_{12} = -\vec{F}_{21}$", sau „acțiunile reciproce a două corpuri sînt totdeauna egale ca mărime și dirijate în sensuri opuse".

δ. Principiul suprapunerii forțelor: „Dacă mai multe forțe acționează în același timp asupra unui punct material, fiecare forță produce propria sa accelerație, independent de prezența celorlalte forțe, accelerația rezultantă fiind suma vectorială a accelerațiilor individuale", adică

$$\vec{R} = \sum_i \vec{F}_i \Rightarrow m\vec{a} = m\sum_i \vec{a}_i.$$

ε. Principiul relativității în mecanica clasică newtoniană: „Legile mecanicii sînt aceleași în toate sistemele de referință inerțiale". Invarianța legilor mecanicii față de sistemele de referință inerțiale este asigurată de transformările lui Galileo Galilei. Dîndu-se două sisteme de referință inerțiale S și S', S' mișcîndu-se cu viteza constantă v față de S, v fiind paralelă atît cu axa Ox, cît și cu axa $O'x'$ (figura F.A.1), între coordonatele spațio-temporale $\vec{r}$ și t, față de S, ale unui eveniment, și coordo-

natele spaţio-temporale $\vec{r}'$ şi t', faţă de S', ale aceluiaşi eveniment, există relaţiile lui Galileo Galilei:

$$\begin{cases} \vec{r} = \vec{r}' + \vec{v}t', \\ t = t', \end{cases} \qquad \begin{cases} \vec{r}' = \vec{r} - \vec{v}t, \\ t' = t, \end{cases}$$

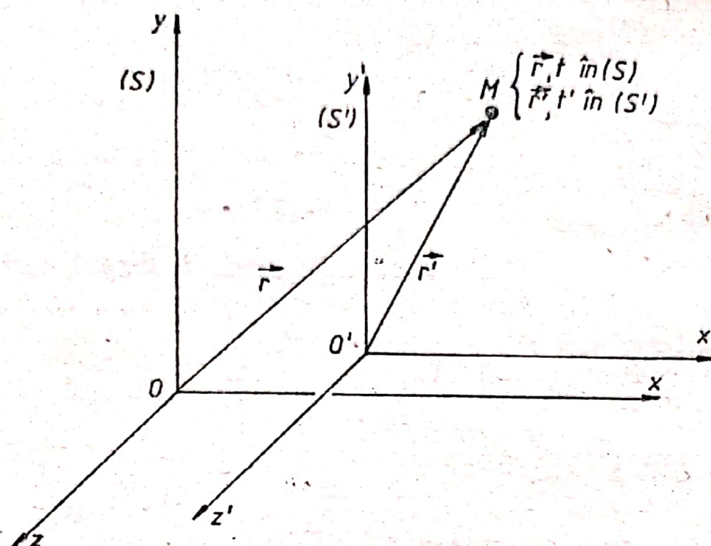


Fig. F.A.1

sau, în coordonate carteziene,

$$\begin{cases} x = x' + vt', \\ y = y', \\ z = z', \\ t = t', \end{cases} \qquad \begin{cases} x' = x - vt, \\ y' = y, \\ z' = z, \\ t' = t. \end{cases}$$

Toate celelalte rezultate ale mecanicii newtoniene se deduc din aceste principii ca teoreme.

c. În cazul mişcării rectilinii uniforme a unui punct material ($\vec{F} = 0$), avem:

$$\vec{a} = 0, \quad \vec{v} = \vec{v}_0, \quad \vec{r} = \vec{r}_0 + \vec{v}(t - t_0),$$

t_0 fiind momentul iniţial al mişcării la care vectorul de poziţie este $\vec{r}_0$. În cazul mişcării după direcţia Ox, avem:

$$a = 0, \quad v = v_0; \quad x = x_0 + v(t - t_0).$$

— Pentru mişcarea uniform variată:

$$\vec{a} = \vec{a}_0, \quad \vec{v} = \vec{v}_0 + \vec{a}(t - t_0), \quad \vec{r} = \vec{r}_0 + \vec{v}_0(t - t_0) + \frac{1}{2}\vec{a}(t - t_0)^2.$$

Dacă mişcarea are loc după axa Ox, atunci:

$$a = a_0, \quad v = v_0 + a(t - t_0), \quad x = x_0 + v_0(t - t_0) + \frac{1}{2}a(t - t_0)^2.$$

Eliminînd timpul t între expresiile vitezei şi coordonatei se obţine formula lui Galilei:

$$v^2 = v_0^2 + 2a(x - x_0).$$

— Pentru mişcarea corpurilor sub acţiunea greutăţii, alegînd axa Oy orientată vertical în sus, avem:

$a = \pm g$ ($+g$ în cazul căderii corpurilor şi $-g$ în cazul aruncării pe verticală a acestora),

$$v = v_0 \pm g(t - t_0), \quad y = y_0 + v_0(t - t_0) \pm \frac{1}{2} g(t - t_0)^2.$$

— În cazul mişcării unui corp aruncat cu o viteză iniţială $\vec{v}_0$ care formează un unghi α_0 cu orizontala, traiectoria va fi cuprinsă într-un plan vertical conţinînd forţa $\vec{G} = m\vec{g}$ şi viteza $\vec{v}_0$ şi se descompune în două mişcări: una în direcţia orizontală după axa Ox şi alta în direcţia verticală după axa Oy.

d. În mişcarea circulară uniformă traiectoria punctului material este un cerc şi pentru unghiul la centru, format de raza vectoare a mobilului cu raza de referinţă, pentru viteza liniară şi pentru acceleraţia centripetă ale mobilului avem, respectiv, următoarele expresii:

$$\theta = \theta_0 + \omega(t - t_0), \quad v = R\omega = \frac{2\pi R}{T} = 2\pi R \nu, \quad a_n = \frac{v^2}{R} = \omega v = \omega^2 R = 4\pi^2 \frac{R}{T^2}.$$

La virajul unui tren la curbe, forţa centripetă $\vec{F}_c$, produsă de şine (asupra cărora se exercită acţiunea roţilor), se compune cu greutatea $\vec{G}$ a trenului pentru a da rezultanta $\vec{R}$. Dacă unghiul de îmbinare al postamentului şinelor este

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{F_c}{G} = \frac{mv^2/R}{mg} = \frac{v^2}{gR},$$

rezultanta cade perpendicular pe drum şi şinele vor fi egal solicitate.

e. Pentru mişcarea oscilatorie, ecuaţia elongaţiei este:

$$x = A \sin(\omega t + \varphi_0).$$

Viteza de mişcare a punctului material care efectuează o mişcare oscilatorie este

$$v = \omega A \cos(\omega t + \varphi_0),$$

acceleraţia fiind

$$a = -\omega^2 A \sin(\omega t + \varphi_0) = -\omega^2 x.$$

Faza mişcării oscilatorii este $\varphi = \omega t + \varphi_0$, cu faza iniţială φ_0 şi perioada:

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{1}{\nu}.$$

Perioada oscilatorului liniar armonic depinde de masa m şi de constanta elastică k, $T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}$, iar pentru pendulul gravitaţional, de lungime l, $T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}$.

f. Scriind legea atracţiei universale pentru un corp de masă m, aflat la suprafaţa Pămîntului, care are raza R_P şi ţinînd seama că aceasta este dată de legea a doua a mecanicii, din $mg = k\frac{mM_P}{R_P^2}$, rezultă:

$$g = k\frac{M_P}{R_P^2},$$

M_P fiind masa Pămîntului.

Intensitatea cîmpului gravitaţional produs de sursa gravifică Pămînt la distanţa r de centrul Pămîntului este:

$$\Gamma(r) = k\frac{M_P}{r^2}.$$

Cînd un satelit descrie o mişcare circulară în jurul Pămîntului, în fiecare punct al traiectoriei, direcţia vectorului viteză v este perpendiculară pe direcţia intensităţii cîmpului gravitaţional radial:

$$\frac{mv^2}{r^2} = m\Gamma(r), \quad v = \sqrt{r\Gamma(r)}.$$

Dacă satelitul se află la distanţa $r = R_P + h$ de centrul Pămîntului, iar pentru $h = 0$ avem $g = g_0$, atunci $\Gamma = g(r) = k\dfrac{M_P}{(R+h)^2}$, $\Gamma_0 = g_0(R) = k\dfrac{M}{R^2}$ şi rezultă:

$$g(r) = g_0\frac{R^2}{(R+h)^2} \text{ şi } v = R\sqrt{\frac{g_0}{R+h}}.$$

g. Lucrul mecanic al unei forţe constante a cărei direcţie formează un unghi α cu direcţia deplasării, d, este dat de expresia:

$$L = Fd\cos\alpha = \bar{F}\cdot\bar{d}.$$

În cazul forţei de greutate, $L = mgh$; pentru o forţă elastică, $L = -\frac{1}{2}kx^2$ etc. ...

Prin definiţie, puterea este $P = \frac{L}{t}$,

Energia cinetică a unui punct material este $E_c = \frac{1}{2}mv^2$, iar variaţia energiei cinetice a unui punct material, care se deplasează în raport cu un sistem de referinţă inerţial, este egală cu lucrul mecanic efectuat de forţa rezultantă care acţionează asupra punctului material în timpul acestei variaţii

$$L_{12} = E_{c_2} - E_{c_1} = \frac{1}{2}mv_2^2 - \frac{1}{2}v_1^2.$$

Principalele expresii ale energiei potenţiale întîlnite în mecanica clasică nerelativiste corespund:

— energiei potenţiale a unui corp de masă m, aflat într-un cîmp gravific de acceleraţie constantă g şi situat într-un punct de coordonată h (după o axă avînd direcţia acceleraţiei g, dar sensul opus acesteia):

$$E_p = mgh,$$

— energiei potenţiale corespunzătoare unei deformaţii longitudinale x (alungire sau comprimare) a unui resort de constantă elastică k:

$$E_p = \frac{k}{2}x^2.$$

Energia mecanică a unui punct material aflat într-un cîmp de forţe conservativ este:

$$E = E_p + E_c.$$

Energia mecanică, $E = E_c + E_p$, a unui sistem izolat în care acţionează forţe conservative este constantă, adică energia mecanică a unui sistem izolat se conservă:

$$E_p + E_c = E_{p_0} + E_{c_0}.$$

De exemplu, în cazul mișcării oscilatorii armonice,

$$E = E_p + E_c = \frac{1}{2} kx^2 + \frac{1}{2} mv^2 = \frac{1}{2} kA^2 (\sin^2 \omega t + \cos^2 \omega t) = \frac{1}{2} kA^2.$$

În cazul unui sistem de puncte materiale, energia cinetică a sistemului este egală cu suma energiilor cinetice ale tuturor punctelor din sistem

$$E_c = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{2} m_i v_i^2.$$

Între două stări date, la momentele t_1 și t_2, variația energiei cinetice a unui sistem de puncte materiale este egală cu suma lucrurilor mecanice ale tuturor forțelor, atît interioare cît și exterioare, care acționează asupra punctelor materiale din sisteme, adică:

$$E_{c_2} - E_{c_1} = L_{\text{int.}} + L_{\text{ext.}}.$$

h. Produsul $\bar{H} = \bar{F}_m \Delta t$ se numește impulsul forței,

$$\bar{F}_m \Delta t = \Delta \bar{p} \Rightarrow \bar{F}_m (t_2 - t_1) = \bar{p}_2 - \bar{p}_1 = m\bar{v}_2 - m\bar{v}_1,$$

adică: „Variația impulsului punctului material este egală cu impulsul forței aplicate punctului material“ (teorema impulsului pentru punctul material).

Impulsul forțelor externe asupra unui sistem de puncte materiale este egal cu variația impulsului total al sistemului:

$$\bar{F}_m \Delta t = \Delta \bar{P},$$

unde

$$\bar{P} = m_1 \bar{v}_1 + m_2 \bar{v}_2 + \dots + = \bar{p}_1 + \bar{p}_2 + \dots$$

Expresia $\bar{F}_m \Delta t = \Delta \bar{P}$ se poate transcrie sub forma cunoscută a legii a doua a mecanicii:

$$\bar{F}_m = \frac{\Delta \bar{P}}{\Delta t} \text{ sau } \bar{F} = \frac{d\bar{P}}{dt}.$$

Dacă $\bar{F} = 0$, atunci $(\bar{P})_f = (\bar{P})_i$, adică, dacă rezultanta forțelor externe este permanent zero sau dacă sistemul fizic este izolat (nu interacționează cu mediul exterior), impulsul total se conservă (rămîne constant).

Impulsul total al unui sistem fizic este egal cu produsul dintre masa totală a sistemului și viteza centrului de masă:

$$m\bar{v}_{CM} = \bar{P},$$

unde

$$m = \sum_i m_i, \ \bar{P} = \sum_i \bar{p}_i \text{ și } \bar{v}_{CM} = \frac{\sum_i m_i \bar{v}_i}{\sum_i m_i}.$$

În cazul ciocnirii plastice (total inelastice) a două particule, de exemplu, o parte din energia cinetică a corpurilor se transformă în alte forme de energie (în special, prin intermediul căldurii):

$$Q = -\Delta E_c = \frac{1}{2} \cdot \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2} (v_1 - v_2)^2 = \frac{1}{2} m_r v_r^2,$$

unde v_r este viteza relativă (a particulei 1 față de particula 2) și m_r este masa redusă cînd se consideră mișcarea unei particule față de centrul de masă.

Pentru ciocnirea perfect elastică unidimensională a două particule, ecuația de conservare a energiei și ecuația de conservare a impulsului permit să se calculeze vitezele celor două corpuri după ciocnire:

$$v_1' = 2\frac{m_1v_1 + m_2v_2}{m_1 + m_2} - v_1,\quad v_2' = 2\frac{m_1v_1 + m_2v_2}{m_1 + m_2} - v_2.$$

i. Momentul unei forțe $\bar{F}$ în raport cu un punct, numit pol, este definită prin:

$$\bar{M} = \bar{r} \times \bar{F},\quad |\bar{M}| = M = rF \sin\alpha,$$

$\bar{r}$ fiind vectorul de poziție al forței față de pol.

Momentul unei forțe $\bar{F}$ în raport cu o axă este egal cu produsul dintre componenta transversală $F_\perp$ a forței și brațul ei b pînă la axă, în planul perpendicular pe axă:

$$M_\parallel = \pm bF_\perp.$$

Momentului cinetic al unui punct material în raport cu un pol este, prin definiție:

$$\bar{L} = \bar{r} \times \bar{p} = \bar{r} \times m\bar{v},$$

$\bar{r}$ fiind vectorul de poziție al corpului de masă m.

$\bar{M} = \bar{r} \times \bar{F} = \frac{\Delta \bar{L}}{\Delta t}$ cînd $\Delta t \to 0$, adică $\bar{M} = \frac{d\bar{L}}{dt}$ (teorema momentului cinetic).

Pentru $\bar{M} = 0, \frac{d\bar{L}}{dt} = 0$ sau $(\bar{L})_f = (L)_i$. Prin urmare, dacă momentul rezultant al forțelor externe în raport cu un pol sau în raport cu o axă este permanent nul, atunci momentul cinetic total al sistemului, în raport cu acel pol sau cu acea axă, se conservă.

j. Un corp rigid se află în mișcare de translație, dacă orice dreaptă legată de corp își păstrează orientarea (se mișcă paralel cu ea însăși).

Corpul rigid se află în mișcare de rotație, dacă toate punctele sale descriu cercuri ale căror centre sînt situate pe o dreaptă perpendiculară pe planul cercurilor descrise, dreaptă numită axă de rotație.

Toate punctele corpului rigid în rotație au aceeași viteză unghiulară:

$$\omega = \frac{\Delta\alpha}{\Delta t}.$$

Vitezele liniare ale diferitelor puncte ale rigidului, de rază vectoare $\bar{r}_i$, sînt:

$$\bar{v}_i = \bar{\omega} \times \bar{r}_i.$$

Dacă ω crește sau scade în timp, mișcarea de rotație a rigidului este neuniformă, accelerația unghiulară fiind:

$$\varepsilon = \frac{\Delta\omega}{\Delta t}.$$

Ținînd seama de expresia momentului de inerție al rigidului față de axa de rotație considerată,

$$I = \sum_{i=1}^{n} m_i r_i^2,$$

energia cinetică totală a solidului aflat în mișcare de rotație cu viteza unghiulară constantă este:

$$E_{c_{rot}} = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{2} m_i r_i^2 \omega^2 = \frac{1}{2}\omega^2 \sum_{i=1}^{n} m_i r_i^2 = \frac{1}{2} I\omega^2.$$

Dacă solidul rigid se află în mişcare de translaţie şi de rotaţie, energia cinetică a acestuia este:

$$E_c = \frac{1}{2} m_s v^2 + \frac{1}{2} I\omega^2,$$

m_s fiind masa solidului.

Între momentul $\bar{M}$ al forţelor, în raport cu axa de rotaţie şi acceleraţia unghiulară $\bar{\varepsilon}$, imprimată de forţele exterioare unui rigid care se poate roti în jurul unei axe fixe, există relaţia:

$$\bar{M} = I\bar{\varepsilon}.$$

Pentru $\bar{M} = 0$, $I\bar{\varepsilon} = I\dfrac{\Delta\bar{\omega}}{\Delta t} = \dfrac{I(\bar{\omega}_2 - \bar{\omega}_1)}{\Delta t} = \dfrac{\bar{L}_2 - \bar{L}_1}{\Delta t} = 0$, adică momentul cinetic $\bar{L}$ se conservă.

k. Rezultanta forţelor care acţionează asupra unui sistem se obţine prin operaţia de compunere a forţelor.

Rezultanta a două forţe paralele şi de acelaşi sens, aplicate aceluiaşi solid, este o forţă paralelă şi de acelaşi sens cu componentele şi are modulul egal cu suma modulelor componentelor. Punctul de aplicaţie al rezultantei împarte segmentul de dreaptă care uneşte punctele de aplicaţie ale componentelor în două segmente invers proporţionale cu modulele forţelor componente.

În cazul forţelor paralele şi de sens opus, forţa rezultantă are direcţia forţelor componente şi sensul forţei celei mai mari; modulul forţei rezultante este egal cu diferenţa modulelor forţelor componente, iar punctul de aplicaţie al rezultantei se află pe dreapta care uneşte punctele de aplicaţie ale componentelor fiind situat de partea forţei celei mai mari.

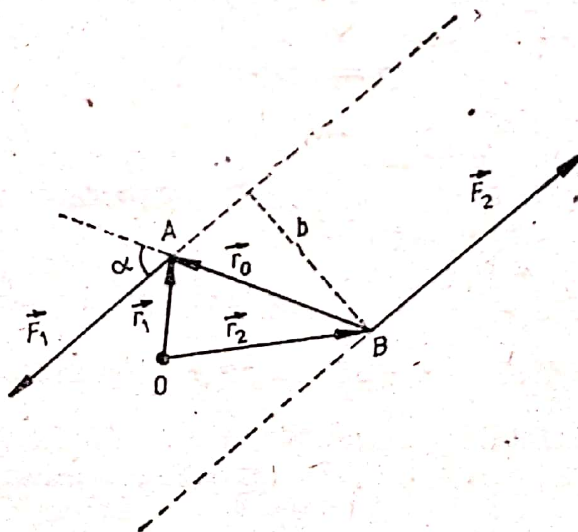


Fig. F.A.2

Momentul unui cuplu de forţe în raport cu un punct oarecare O din spaţiu (fig. F.A.2) este:

$$\bar{M} = \bar{r}_1 \times \bar{F}_1 + \bar{r}_2 \times \bar{F}_2 = (\bar{r}_1 - \bar{r}_2) \times \bar{F} = \bar{r}_0 \times \bar{F},$$

deoarece $\bar{F}_1 = -\bar{F}_2$ şi $\bar{r}_1 - \bar{r}_2 = \bar{r}_0$.

l. Echilibrul unui punct material liber este realizat dacă

$$\bar{R} = \sum_i \bar{F}_i = 0.$$

Echilibrul solidului rigid liber se obține dacă:

$$\bar{R} = \sum_{i=1}^{n} \bar{F}_i = 0$$

și

$$\bar{M} = \sum_{i=1}^{n} \bar{M}_i = 0.$$

Coordonatele centrului de greutate pentru un sistem format din n puncte materiale sînt date de expresiile:

$$x_c = \frac{\sum_{i=1}^{n} G_i x_i}{\sum_{i=1}^{n} G_i}, \quad y_c = \frac{\sum_{i=1}^{n} G_i y_i}{\sum_{i=1}^{n} G_i}, \quad z_c = \frac{\sum_{i=1}^{n} G_i z_i}{\sum_{i=1}^{n} G_i}.$$

m. Presiunea este o observabilă fizică egală cu raportul dintre mărimea forței $\bar{F}$, care apare normal și uniform pe o suprafață și aria S a acestei suprafețe:

$$p = \frac{F}{S}.$$

Diferența de presiune dintre două puncte dintr-un fluid în echilibru, aflate la distanța h, este:

$$p_2 - p_1 = \rho g h,$$

ρ fiind densitatea fluidului, iar g accelerația gravitațională.

Dacă la nivelul (2) presiunea este p, iar nivelul (1) coincide cu suprafața liberă a fluidului, atunci:

$$p = H + \rho g h,$$

H fiind presiunea atmosferică.

Presiunea hidrostatică este independentă de forma vasului în care se află lichidul și este aceeași în toate punctele aflate la aceeași adîncime în lichid.

Presiunea exercitată pe o suprafață oarecare a unui lichid aflat în repaus se transmite în toate direcțiile și cu aceeași intensitate în tot lichidul cît și la pereții vasului care-l conține (legea lui Pascal). În cazul unei prese hidraulice

$$F_1 = F_2 \frac{S_1}{S_2},$$

S_1 și S_2 fiind ariile suprafețelor pe care se exercită forțele F_1 și, respectiv, F_2.

Un corp cufundat într-un fluid în repaus este împins cu o forță verticală de jos în sus, egală cu greutatea volumului de fluid deslocuit de corp (legea lui Arhimede).

Cantitatea de fluid care străbate o anumită arie în unitatea de timp reprezintă debitul de fluid prin acea arie. Relația:

$$Q_1 = Q_2 \Rightarrow S_1 v_1 = S_2 v_2,$$

se numește ecuația de continuitate, S_1 fiind secțiunea transversală a conductei în punctele în care viteza fluidului este v_1, iar S_2 secțiunea transversală a conductei în punctele în care viteza fluidului este v_2.

În cazul curgerii staționare a unui fluid ideal, de-a lungul liniei de curent se respectă legea lui Bernoulli:

$$p_1 + \frac{1}{2}\rho v_1^2 + \rho g z_1 + p_2 + \frac{1}{2}\rho v_2^2 + \rho g z_2.$$

În cazul particular cînd tubul de curent este practic orizontal sau cînd energia potențială este neglijabilă, se obține:

$$p + \frac{1}{2}\rho v^2 = \text{constant}, \text{ sau } p_1 + \frac{1}{2}\rho v_1^2 = p_2 + \frac{1}{2}\rho v_2^2.$$

Forța de rezistență la înaintare în fluide, la viteze pentru care în fața mobilului se produce o zonă de suprapresiune, iar în spatele mobilului o zonă de depresiune, este dată de relația:

$$F = \frac{1}{2} CS\rho v^2,$$

C fiind o constantă adimensională care depind de forma corpului, S aria suprafeței obținută prin proiectarea corpului pe un plan perpendicular pe vectorul viteză (conturul aparent), ρ densitatea fluidului, iar v viteza mobilului.

n. Oscilatorul liniar armonic este un punct material care se mișcă rectiliniu sub acțiunea unei forțe de forma:

$$F = -kx,$$

descriind o mișcare oscilatorie armonică a cărei lege are forma:

$$x = A \sin \omega t.$$

Viteza mișcării oscilatorii armonice este

$$v = \omega A \cos \omega t,$$

iar accelerația:

$$a = -\omega^2 A \sin \omega t = -\omega^2 x.$$

Între frecvența ν, perioada T și pulsația ω mărimi caracteristice mișcării oscilatorii, există relațiile:

$$\omega = \frac{2\pi}{T} = 2\pi\nu.$$

Energia potențială a oscilatorului armonic este

$$E_p = \frac{1}{2} kx^2 = \frac{1}{2} kA^2 \sin^2 \omega t,$$

iar cea cinetică

$$E_c = \frac{1}{2} mv^2 = \frac{1}{2} m\omega^2 A^2 \cos^2 \omega t = \frac{1}{2} kA^2 \cos^2 \omega t,$$

unde

$$k = m\omega^2.$$

Energia totală a oscilatorului liniar armonic este un invariant:

$$E = E_p + E_c = \frac{1}{2} kA^2 = \frac{1}{2} m\omega^2 A^2 = 2\pi^2 \nu^2 A^2 m.$$

o. Compunînd două oscilații $y_1 = a_1 \sin(\omega t + \varphi_1)$ și $y_2 = a_2 \sin(\omega t + \varphi_2)$, se obține oscilația:

$$y = a \sin(\omega t + \varphi),$$

unde

$$a = [a_1^2 + a_2^2 + 2a_1 a_2 \cos(\varphi_2 - \varphi_1)]^{1/2}$$

și

$$\varphi = \operatorname{arctg} \frac{a_1 \sin \varphi_1 + a_2 \sin \varphi_2}{a_1 \cos \varphi_1 + a_2 \cos \varphi_2}.$$

— Pentru $\Delta\varphi = 2k\pi$, $a = a_1 + a_2$, oscilațiile fiind în fază.
— Pentru $\Delta\varphi = (2k+1)\pi$, $a = a_1 - a_2$, oscilațiile fiind în opoziție de fază.
— Pentru $\Delta\varphi = (2k+1)\frac{\pi}{2}$, $a = (a_1^2 + a_2^2)^{1/2}$, oscilațiile fiind în cvadratură.

p. Prin undă înțelegem fenomenul de transmitere a unei perturbații într-un mediu material. Între lungimea de undă λ, viteza de fază v_f și perioada T a undei există relația:

$$v_f = \frac{\lambda}{T}.$$

— Pentru undele transversale care se propagă într-o coardă vibrantă, avem:

$$v_t = \sqrt{\frac{T_m}{\mu}},$$

unde T_m este tensiunea la care este solicitată coarda, iar μ este masa unității de lungime a corzii.

— Pentru undele longitudinale, viteza de propagare este dată de expresia:

$$v = \sqrt{\frac{E}{\rho}},$$

unde E este modulul de elasticitate, iar ρ densitatea mediului în care are loc propagarea.

Dacă E este energia emisă de sursă în timpul t, atunci puterea emisă de sursă (fluxul de energie emis) este:

$$P = \frac{E}{t} = \Phi.$$

Intensitatea undei va fi:

$$I = \frac{P}{A},$$

A fiind aria suprafeței perpendiculară pe direcția de propagare prin care se face transferul de energie.

Ecuația unei unde plane este:

$$u = A \sin 2\pi\left(\frac{t}{T} - \frac{x}{\lambda}\right) = A \sin\left(\omega t - \omega\frac{x}{v_f}\right) = A \sin \omega\left(t - \frac{x}{v_f}\right).$$

În cazul reflexiei și refracției, avem următoarele teoreme:

— planul de incidență, cel de reflexie și cel de refracție coincid;

— unghiul de incidență este egal cu unghiul de reflexie, $\hat{i} = \hat{r}$;

— $\frac{\sin \hat{i}}{\sin \hat{r}_e} = \frac{v_1}{v_2} = \frac{\lambda_1}{\lambda_2} = n_{21}$, unde r_e este unghiul de refracție, v_1 viteza undei în mediul (1), iar v_2 viteza undei cu mediul (2).

Cînd două unde, $y_1 = A_1 \sin 2\pi\left(\frac{t}{T} - \frac{x_1}{\lambda}\right)$ și $y_2 = A_2 \sin 2\pi\left(\frac{t}{T} - \frac{x_2}{\lambda}\right)$, interferă, amplitudinea undei rezultante este:

$$A^2 = A_1^2 + A_2^2 + 2A_1A_2 \cos \Delta\varphi = A_1^2 + A_2^2 + 2A_1A_2 \cos\left[\frac{2\pi}{\lambda}(x_2 - x_1)\right].$$

Astfel, pentru $\frac{2\pi}{\lambda}(x_2 - x_1) = 2k\pi$, $A = A_1 + A_2$, iar pentru $\frac{2\pi}{\lambda}(x_2 - x_1) = (2k+1)\pi$, $A = A_1 - A_2$.

Sunetul are următoarele proprietăţi caracteristice:

— înălţime, determinată de frecvenţa maximă a undei sonore;

— intensitatea auditivă (tăria sunetului), nivelul de intensitate sonoră, L, pentru un sunet de intensitate I, fiind $L = \lg\frac{I}{I_0}$;

— timbrul, determinat de numărul armonicelor care însoţesc sunetul fundamental şi nivelul lor de intensitate sonoră.

2. FIZICĂ MOLECULARĂ ŞI CĂLDURĂ. TERMODINAMICĂ

a. Legea proporţiilor definite („La formarea unui corp dat, elementele se combină totdeauna între ele într-un raport de masă riguros constantă") şi legea proporţiilor multiple („Cînd două elemente pot forma mai mulţi compuşi, atunci cantităţile dintr-un element care se combină cu una şi aceeaşi cantitate din celălalt element se află într-un raport întreg de numere întregi şi mici") au o contribuţie esenţială la dezvoltarea concepţiei privind existenţa moleculelor şi atomilor. Concepţia structurii discontinue a substanţei s-a impus prin conturarea ipotezei atomo-moleculară a substanţei, datorită legii lui Avogadro: „Volume egale de gaze diferite, aflate în aceleaşi condiţii de temperatură şi presiune, au acelaşi număr de molecule".

Mişcarea termică constituie o stare permanentă a moleculelor oricărui corp, indiferent de starea lui de agregare.

Pentru a exprima masa atomilor sau a moleculelor, pe cît posibil, cu ajutorul numerelor întregi, s-a definit unitatea atomică de masă (u) ca fiind egală cu a 12-a parte din masa atomică a izotopului $^{12}_{6}C$:

$$1\ u = 1{,}66\cdot10^{-26}\ kg.$$

Cantitatea de substanţă a cărei masă, exprimată în grame, este numeric egală cu masa moleculară relativă a substanţei date se numeşte mol.

Între masa molară a unor substanţe, numărul lui Avogadro, N_A şi masa absolută m a substanţei, există relaţia:

$$\mu = N_A m,$$

unde N_A (numărul lui Avogadro) reprezintă numărul de molecule dintr-un mol de substanţă. Astfel, considerînd cîte un mol din substanţe diferite (1) şi (2), de mase molare μ_1 şi, respectiv, μ_2, ale căror molecule au masele absolute m_1, respectiv m_2, atunci:

$$\frac{\mu_1}{\mu_2} = \frac{N_{A_1}}{N_{A_2}}\cdot\frac{m_1}{m_2} = \frac{m_{r_1}}{m_{r_2}} = \frac{\frac{12m_1}{m_C}}{\frac{12m_2}{m_C}} = \frac{m_1}{m_2} \Rightarrow N_{A_1} = N_{A_2}.$$

Numărul lui Avogadro N_A are valoarea:

$$N_A = (6{,}022169 \pm 0{,}000040)\cdot10^{23}\,\frac{\text{molecule}}{\text{mol}}.$$

Experimental s-a stabilit că, independent de natura gazului, în condiţii normale ($T = 273{,}15$ K şi $p = 1$ atm), volumul unui mol are valoarea

$$V_{\mu_0} = 22{,}42\,\frac{l}{\text{mol}} = 22{,}42\cdot10^{-3}\,\frac{m^3}{\text{mol}}.$$

Prin fenomen termic înţelegem orice fenomen fizic legat de mişcarea complet dezordonată care se manifestă la nivelul molecular. Ca exemple de fenomene termice avem: variaţia proprietăţilor fizice ale substanţei la încălzirea sau la răcirea

ei; schimbul de căldură dintre corpurile încălzite diferit; transformarea căldurii în lucru mecanic; transformarea lucrului mecanic în căldură; trecerea unui corp dintr-o stare de agregare în alta, ş.a.

Fenomenele termice sînt studiate cu ajutorul: termodinamicii, teoriei cinetico-moleculare şi fizicii statistice.

b. Termodinamica studiază fenomenele termice folosind mărimi care pot fi măsurate direct (presiune, volumul ş.a.) sau care pot fi calculate cu ajutorul altor mărimi ce pot fi stabilite pe cale experimentală. Termodinamica nu ţine seama de structura intimă, atomo-moleculară a corpurilor. Astfel, concluziile termodinamicii fiind independente de reprezentările pe care noi le avem cu privire la structura corpurilor, au o valoare incontestabilă.

În termodinamică avem ca noţiuni de bază: sistem termodinamic, starea sistemului termodinamic, parametri de stare, starea de echilibru termodinamic, proces termodinamic (transformare de stare), procese reversibile şi ireversibile ş.a.

Definiţia lucrului mecanic este cunoscută din mecanică. În cazul în care o forţă $\bar{F}$ provoacă o variaţie a volumului sistemului format dintr-un gaz care se află într-un corp de pompă cu piston de suprafaţă S, lucrul mecanic efectuat este:

$$L_e = p_e\,(V_i - V_f) = -p_e \Delta V,$$

unde $p_e = \dfrac{F}{S}$ este presiunea externă, V_i volumul iniţial al gazului, iar V_f volumul final al gazului. Prin convenţie, lucrul mecanic primit de sistem din exterior se consideră negativ, iar lucrul mecanic L cedat de sistem exteriorului se consideră pozitiv, adică:

$$L = -L_e = p_e \Delta V = p_e(V_f - V_i).$$

În cazul unei transformări reversibile avem

$$L_{\text{rev.}}^{i\to i} = L_{\text{rev.}}^{i\to f} + L_{\text{rev.}}^{f\to i} = p(V_f - V_i) + p(V_i - V_f) = 0$$

în cazul unui ciclu închis. Pentru o transformare ireversibilă, $L_{\text{rev.}}^{i\to f} \neq L_{\text{rev.}}^{i\to f}$.

În general, lucrul mecanic depinde de transformare. În cazul a două transformări, $i \to A \to f$ şi $i \to B \to f$, avem: $L^{i\to A\to f} \neq L^{i\to B\to f}$.

Energia internă a unui sistem termodinamic, U, este suma dintre energiile cinetice ale mişcării termice, energiile potenţiale determinate de forţele intermoleculare şi energiile potenţiale în cîmpurile de forţe exterioare ale tuturor moleculelor din care este format sistemul. Un sistem termodinamic putînd avea o mişcare mecanică de ansamblu, caracterizată de energia cinetică E_c şi energia potenţială E_p, are energia totală:

$$E_t = U + E_c + E_p.$$

Dacă sistemul termodinamic este în stare de repaus mecanic, $E_t = U$.

În cazul unei transformări adiabatice (sistemul nu schimbă energie cu exteriorul decît prin intermediul lucrului mecanic), lucrul mecanic şi energia internă respectă relaţia:

$$\Delta U + L^{ABC} = 0,$$

cînd $\Delta U > 0$, $L^{ABC} < 0$ şi invers.

Într-o transformare oarecare (cînd sistemul schimbă energie cu exteriorul nu numai prin intermediul lucrului mecanic), se introduce mărimea:

$$Q^{ABC} = \Delta U + L^{ABC},$$

Q^{ABC} purtînd numele de căldură, mărime care depinde de transformare.

Este de remarcat faptul că energia internă este o mărime de stare, pe cînd atît lucrul mecanic cît şi căldura sînt mărimi care se referă la o transformare a sistemului.



Dacă într-o transformare parametrii externi ai sistemului fizic sînt menţinuţi constanţi, avem:

$$Q^{ABC} = \Delta U = U_C - U_A.$$

Admiţînd principiul transivităţii echilibrului termic şi folosind faptul că energia internă este o mărime de stare se poate demonstra că pentru determinarea stării de echilibru termodinamic este necesară o singură variabilă în plus, pe lîngă parametrii de poziţie ai sistemului, aceasta fiind temperatura empirică a sistemului. Astfel, dacă $a_1, a_2, ..., a_n$ sînt pearametrii externi, atunci:

$$U = U(t, a_1, a_2, ..., a_n),$$

aceasta fiind ecuaţia calorică de stare. Deoarece temperatura t şi parametrii externi $a_1, a_2, ..., a_n$ determină starea unui sistem, parametrii de forţă vor fi:

$$A_k = A_k(a_1, a_2, ..., a_n),$$

acestea fiind ecuaţiile termice de stare. Ecuaţiile de stare pentru un gaz, vor fi:

$$U = U(t, V) \text{ şi } p = p(t, V).$$

c. Expresia matematică între parametrii de stare ai gazului perfect, aflat într-o stare de echilibru, se numeşte ecuaţia Clapeyron-Mendeleev şi are forma:

$$pV = \frac{m}{\mu} RT = \nu RT,$$

$\nu = \frac{m}{\mu}$ fiind numărul de moli, iar $R = 8{,}3143\ \mathrm{J \cdot mol^{-1} \cdot K^{-1}}$ constanta universală a gazelor. Această relaţie mai poartă şi denumirea de ecuaţia termică de stare a gazului perfect.

(Notînd cu $\rho = \frac{m}{V} = \frac{p\mu}{RT}$ densitatea gazului la o presiune şi temperatură oarecare şi cu $= \rho_0 \frac{p_0\mu}{RT_0}$ densitatea gazului aflat în condiţii normale de temperatură şi presiune, avem:

$$\rho = \rho_0 \frac{p}{p_0} \cdot \frac{T}{T_0}.$$

Din ecuaţia termică de stare a gazului perfect obţinem:

— „legea" Boyle-Mariotte sau legea transformării izoterme

$$pV = p_1V_1 = ... = p_nV_n = \text{const.};$$

— „legea" Gay-Lussac sau legea transformării izobare

$$V = V_0(1 + \alpha t) = V_0\left[1 + \frac{1}{273{,}15}(T - 273{,}15)\right] = V_0 \alpha T$$

sau

$$\frac{V}{T} = \text{const.};$$

— „legea" lui Charles sau legea transformării izocore

$$p = p_0(1 + \beta T) = p_0\left[1 + \frac{1}{273{,}15}(T - 273{,}15)\right] = p_0 \beta T$$

sau

$$\frac{p}{T} = \text{const.}$$

Gradul centrigrad (gradul Celsius) în scara gazului perfect are valoarea $\frac{p_{100} - p_0}{100}$. Temperatura gazului, aflat într-o stare în care are presiunea p se exprimă prin relaţia

$$t = \frac{p - p_0}{p_{100} - p_0} 100°\mathrm{C}.$$

În scara de temperatură a gazului perfect, temperatura zero absolut (temperatura la care presiunea gazului devine egală cu zero) este egală cu $-273{,}15°C$, deoarece pentru $p = 0$, $t = \frac{-100p_0}{p_{100} - p_0}$ și, din ecuația lui Charles, $\frac{p_{100} - p_0}{p_0} = 100\alpha$, adică $t = -\frac{1}{\alpha} = -273{,}15°C$.

Energia internă a gazului perfect este funcție numai de temperatură, $U = U(T)$.

d. În studiul fenomenelor termice intervin corpuri macroscopice aflate în repaus, a căror energie mecanică nu se modifică. În asemenea procese se modifică numai energia internă.

Primul principiu al termodinamicii ne arată cum variază energia internă a unui sistem ce interacționează mecanic sau termic cu mediul exterior:

„Variația energiei interne a unui sistem termodinamic în cursul unui proces, în care sistemul nu schimbă substanță cu exteriorul, este egală cu diferența dintre (cantitatea de) căldură primită și lucrul mecanic efectuat de sistem în cursul respectivului proces: $U_2 - U_1 = \Delta U = Q_p - L_{ef}$".

Primul principiu al termodinamicii poartă numele și de principiul imposibilității realizării unui perpetuum mobile de speța I (mașină care să producă lucru mecanic fără ca să consume energie din exterior), deoarece:

— dacă $Q = 0$, avem $L_{ef} = -(U_2 - U_1)$, adică, în cazul în care un sistem termodinamic nu primește căldură din exterior, el poate efectua lucru mecanic asupra corpurilor din jur numai pe seama micșorării energiei interne;

— dacă $U_2 - U_1 = 0$ (sistemul efectuează o transformare ciclică), atunci $L_{ef} = Q_p$, adică sistemul termodinamic poate efectua lucru mecanic într-o transformare ciclică numai pe seama căldurii primite din exterior.

Parametrul fizic definit prin expresia $c = \frac{\Delta Q}{m\Delta T}$, în care ΔT este variația temperaturii termodinamice (sau a temperaturii în scara Celsius) într-un anumit proces termodinamic, în care o cantitate de substanță de masă m primește (cantitatea de) căldură ΔQ, se numește căldură specifică a substanței, pentru procesul termodinamic considerat.

Mărimea $C = \frac{1}{\nu} \cdot \frac{Q}{\Delta T}$ poartă numele de căldură molară și este căldura necesară pentru a crește (micșora) temperatura unui kilomol dintr-o substanță cu un grad. Între căldura molară și căldura specifică avem relația:

$$C = \frac{1}{\frac{m}{\mu}} \cdot \frac{Q}{\Delta T} = \mu \frac{1}{m} \cdot \frac{Q}{\Delta T} = \mu c.$$

Relațiile lui Robert Mayer dintre căldurile molare la presiune constantă, C_p, și la volum constant, C_V, respectiv dintre căldurile specifice c_p și c_V, au formele:

$$C_p = C_V + R,$$

respectiv

$$c_p = c_V + \frac{R}{\mu}.$$

Principiul întîi al termodinamicii permite atît transformarea integrală a lucrului mecanic în căldură cît și a căldurii în lucru mecanic. Experiența arată că este posibilă transformarea integrală a lucrului mecanic în căldură, însă nu și transformarea integrală a căldurii în lucru mecanic, adică:

$$L \overset{\rightarrow}{=} Q \text{ și } Q \overset{\rightarrow}{>} L.$$

Pentru a exprima imposibilitatea transformării integrale a căldurii în lucru mecanic (imposibilitatea unui perpetuum mobile de speţa a II-a) se formulează principiul al doilea al termodinamicii:

„Variaţia entropiei sistemului termodinamic, dS, într-un proces elementar (caracterizat de variaţii „infinit mici" (diferenţiale) ale parametrilor) este egală cu raportul dintre (cantitatea de) căldură dQ primită de sistem şi temperatura T la care primeşte căldura respectivă", adică:

$$dS = \frac{dQ}{T}.$$

Randamentul unui motor termic, care funcţionează ciclic între temperaturile T_1 (temperatura sursei calde) şi T_2 (temperatura sursei reci), este mai mic sau cel mult egal cu randamentul $\eta_c = \frac{T_1 - T_2}{T_1}$ al motorului care funcţionează între aceleaşi temperaturi după un ciclu Carnot reversibil format din două transformări izoterme, la temperaturile T_1, respectiv T_2, şi două transformări adiabatice, reversibile):

$$\eta = \frac{L_{efectuat}}{Q_{primit}} = \frac{Q_1 - Q_2}{Q_1} \leqslant \eta_c = \frac{T_1 - T_2}{T_1},$$

unde Q_2 este cantitatea de căldură cedată sursei reci, în condiţiile primirii de la sursa caldă a cantităţii de căldură Q_1 (formularea Carnot a principiului al II-lea al termodinamicii).

La expresia cantitativă a celui de-al doilea principiu al termodinamicii s-a ajuns pornind de la echivalenţa formulărilor aceluiaşi principiu, date de W. Thomson („Într-o transformare ciclică monotoermă sistemul nu poate ceda lucru mecanic în exterior. Dacă transformarea ciclică monotermă este şi ireversibilă, atunci sistemul primeşte lucru mecanic din exterior") şi de R. Clausius („Nu este posibilă o transformare care să aibă ca rezultat trecerea de la sine a căldurii de la un corp cu o temperatură dată la un corp cu temperatură mai ridicată").

Expresiile ecuaţiilor parametrilor de stare, ale lucrului mecanic efectuat $L_{ef} = \int_{V_1}^{V_2} p\,dV$ şi (cantităţii de) căldură Q_p, primită de un gaz ideal, corespunzătoare principalelor tipuri de transformări particulare ale acesteia, între stările iniţială (1) şi finală (2) sînt indicate în tabelul 1.

Tabelul 1

Tipul transformării particulare	Ecuaţia parametrilor de stare	L_{ef}	$Q_p =$
Izotermă	$p_1V_1 = p_2V_2 =$ const. („legea" Boyle-Mariotte)	$RT_1 \ln \frac{V_2}{V_1}$	$\nu RT_1 \ln \frac{V_2}{V_1} = T_1(S_2 - S_1)$
Izobară	$\frac{V_1}{T_1} = \frac{V_2}{T_2} =$ const. („legea" Gay-Lussac)	$p(V_2 - V_1) = \nu R(T_2 - T_1)$	$\Delta U + R(T_2 - T_1) = \frac{i+2}{2}\nu R(T_2 - T_1) = \nu\mu c_p(T_2 - T_1)$
Izocoră	$\frac{p_1}{T_1} = \frac{p_2}{T_2} =$ const. („legea" Charles)	0	$\Delta U = \frac{i}{2}\nu R(T_2 - T_1) = \nu\mu c_V(T_2 - T_1)$
Adiabatică	$pV^\gamma =$ const., unde $\gamma = \frac{c_p}{c_V}$	$-\Delta U = \frac{i}{2}\nu R(T_2 - T_1)$	0

e. Principiile de funcționare ale mașinilor și motoarelor termice se bazează pe ciclurile Carnot, Otto, Diesel ş.a. ale căror randamente sînt date de expresiile:

$$\eta_c = \frac{L}{Q_1} = \frac{T_1 - T_2}{T_1} = 1 - \frac{T_2}{T_1},$$

$$\eta_0 = 1 - \frac{1}{\varepsilon^{\gamma-1}},$$

unde $\varepsilon = \frac{V_1}{V_2}$ este raportul de compresie al motorului;

$$\eta_D = 1 - \frac{\rho^\gamma - 1}{\gamma\varepsilon^{\gamma-1}(\rho - 1)},$$

unde $\varepsilon = \frac{V_1}{V_4}$ și $\rho = \frac{V_3}{V_2}$ sînt rapoartele de compresie.

f. Teoria cinetico-moleculară studiază procesele termice cît și proprietățile corpurilor macroscopice folosind ipoteza că orice corp macroscopic (indiferent de starea de agregare în care se află) este format dintr-un număr foarte mare de atomi sau molecule, mișcarea acestora supunîndu-se legilor mecanicii clasice.

Formula fundamentală a teoriei cinetico-moleculare a gazelor ne arată că presiunea p, la care se află un gaz ideal, se poate exprima prin una din expresiile:

$$p = \frac{2}{3} n_0 \widetilde{E}_{c\,tr} = \frac{n_0 m u^2}{3} n_0 k_B T;$$

unde $\widetilde{E}_{c\,tr}$ este energia cinetică de translație a moleculelor, u viteza pătratică medie a moleculelor, T temperatura termodinamică a gazului, n_0 numărul de molecule de gaz din unitatea de volum, iar $k_B = \frac{R}{N_A}$ constanta lui Boltzmann.

Viteza pătratică medie a moleculelor are expresiile:

$$v_T = \sqrt{\frac{3k_B T}{m}} = \sqrt{\frac{3RT}{mN_A}} = \sqrt{\frac{3RT}{\mu}}.$$

Pentru un mol de gaz ideal, energia internă a gazului este:

$$U = N_A \varepsilon_i = N_A \frac{3}{2} k_B T = \frac{3}{2} RT.$$

Temperatura unui gaz ideal este o măsură a intensității mișcării termice a moleculelor din care este constituit:

$$\frac{2}{3} \cdot \frac{m\widetilde{v^2}}{2} = k_B T,$$

energia cinetică medie a unei molecule în mișcarea de translație, fiind

$$\varepsilon_i = \frac{m\widetilde{v^2}}{2} = \frac{3}{2} k_B T.$$

Lungimea drumului liber mediu parcurs de moleculele unui gaz este dată de expresiile:

$$\widetilde{\lambda} = \frac{1}{\sqrt{2} n_0 \sigma} = \frac{k_B T}{\sqrt{2} \sigma p},$$

unde n_0 este numărul de molecule din unitatea de volum, iar $\sigma = 4\pi r^2$ (r fiind raza moleculară efectivă) este secțiunea eficace de împrăștiere pentru ciocnirile moleculă-moleculă.

g. Parametrul fizic definit prin expresie $q = \frac{Q}{m}$, unde Q este cantitatea de căldură degajată prin arderea unei cantităţi de combustibil de masă m, se numeşte putere calorifică a combustibilului.

Ecuaţia calorimetrică are forma

$$Q_1 = Q_2,$$

Q_1 fiind căldura cedată de corpul mai cald şi Q_2 căldura primită de cel mai rece. Această ecuaţie stă la baza măsurării căldurii şi a căldurii specifice.

h. Lichidele sînt sisteme fizice care au volum propriu, fiind practic incompresibile, curg şi nu au formă proprie.

Coeficientul de dilatare termică în volum al lichidelor are expresia:

$$\gamma = \frac{\Delta V}{V_0 \Delta t} = \frac{V - V_0}{V_0 \Delta t}.$$

În vecinătatea temperaturii 0°C, avem:

$$V = V_0(1 + \gamma t).$$

La o temperatură nu prea îndepărtată de 0°C, pentru densitatea lichidului rezultă:

$$\rho = \frac{m}{V_0(1 + \gamma t)} = \frac{\rho_0}{1 + \gamma t},$$

ρ_0 fiind densitatea lichidului la 0°C.

Între coeficientul de dilatare a lichidului, γ, coeficientul de dilatare aparentă a lichidului, $\gamma_a = \frac{\Delta V_a}{V_0 \Delta t}$ şi coeficientul de dilatare volumică a vasului, γ_s, există relaţia:

$$\gamma = \gamma_s + \gamma_a.$$

Lucrul mecanic efectuat asupra moleculelor din lichid care vin în stratul superficial, împotriva forţei rezultante, este dat de expresia

$$L = -\sigma \Delta S,$$

σ fiind coeficientul de tensiune superficială a lichidului în contact cu vaporii săi şi ΔS variaţia suprafeţei stratului superficial.

Înălţimea la care urcă (pentru lichidele care udă pereţii vasului) sau coboară (pentru lichidele care nu udă pereţii vasului) un lichid într-un vas capilar este dată de expresia:

$$h = \frac{2\sigma}{r\rho g} \text{ („legea“ lui Jurin)},$$

unde r este raza vasului capilar, ρ densitatea lichidului şi g acceleraţia gravitaţională.

i. Solidele sînt sisteme fizice care au formă proprie şi volum propriu.

Variaţiile cu temperatura ale lungimii, ariei unei secţiuni şi, respectiv, volumului unui corp, cînd temperatura se schimbă în intervalul $[t_0, t_0 + \Delta t]$, sînt date de expresiile:

$$\Delta l = l_{(t+\Delta t)} - l_0 = \alpha \cdot l_0 \Delta t,$$
$$\Delta A = A_{(t+\Delta t)} - A_0 = \beta \cdot A_0 \Delta t,$$
$$\Delta V = V_{(t+\Delta t)} - V_0 = \gamma \cdot V_0 \Delta t,$$

unde l_0, A_0 şi V_0 reprezintă lungimea, aria secţiunii şi, respectiv, volumul corpului la temperatura t_0, iar α, β şi γ sînt coeficienţii medii, pentru intervalul $[t_0, t_0 + \Delta t]$

de dilatare liniară, de dilatare de suprafaţă şi, respectiv, de dilatare de volum. Pentru solide izotrope, $\beta \cong 2\alpha$, iar $\gamma \cong 3\alpha$.

Forţa care provoacă o alungire a unei bare solide, de arie S (a secţiunii transversale) şi de modul de elasticitate E, egală cu cea determinată de dilatarea termică, prin creşterea cu ΔT a temperaturii, este dată de expresia

$$F = ES\alpha\Delta T.$$

j. Lichefierea gazelor constituie trecerea din fază de gaz în fază lichidă, spaţiile intermoleculare micşorîndu-se cu cîteva ordine de mărime, căldura latentă specifică de lichefiere la temperatură constantă fiind:

$$\lambda_l = \frac{Q}{m},$$

unde Q este cantitatea de căldură transferată masei m de substanţă.

Vaporizarea are loc în vid sau în atmosferă gazoasă şi constitue transformarea unui lichid în gaz. Vaporizarea în volum nelimitat se poate face numai la suprafaţa lichidului (evaporarea) sau în toată masa lichidului (fierberea). Căldura latentă specifică de vaporizare are expresia:

$$\lambda_v = \frac{Q}{m},$$

fiind o măsură a variaţiei energiei interne de legătură a moleculelor, fără ca sistemul să-şi schimbe şi temperatura.

Viteza de evaporare (vaporizarea la suprafaţă) este dată de expresia:

$$v = K\frac{S(p_m - p_1)}{H},$$

unde K este o constantă care depinde de unităţile de măsură alese şi de viteza gazului în contact cu lichidul, H este presiunea atmosferei de deasupra lichidului, S aria suprafeţei de evaporare, p_m presiunea vaporilor lichidului, la temperatura mediului, iar p_1 presiunea vaporilor în atmosfera ambiantă, la temperatura mediului.

Condensarea este fenomenul fizic invers vaporizării.

Topirea este procesul de trecere a substanţei, la o temperatură bine determinată, din starea solidă în starea lichidă. Procesul de trecere a substanţei din starea lichidă în starea solidă, la o temperatură bine determinată, se numeşte solidificare sau cristalizare. Căldura latentă specifică de solidificare este

$$\lambda_f = \frac{Q}{m}.$$

Procesul de trecere a substanţelor din starea solidă direct în starea gazoasă se numeşte sublimare, iar procesul invers de trecere a substanţelor din starea gazoasă în starea solidă se numeşte desublimare.

Dacă se transcriu diagramele de fază pentru cele trei perechi de transformări vaporizare şi condensare, topire şi solidifcare şi sublimare şi desublimare, punctul aparţinînd celor trei diagrame, reprezintă starea unică în care se află, în echilibru, toate cele trei faze (solidă, lichidă şi gazoasă) ale substanţei. Parametrii p_t şi T_t, care caracterizează acest punct, variază cu natura substanţei, dar sînt ficşi pentru o substanţă dată. Acest punct poartă numele de punct triplu al substanţei.

În cazul substanţelor care au mai mult de trei faze (substanţele polimorfe, cristale diferite, stabile în anumite condiţii), diagrama stărilor prezintă mai multe puncte triple.

3. ELECTRICITATE

Fenomenele electrice și magnetice au la bază existența sarcinii electrice. Sarcina electrică are următoarele proprietăți: este de două feluri (pozitivă și negativă), se conservă (pentru un sistem izolat din punct de vedere electric, suma algebrică a sarcinilor electrice ale corpurilor din sistem rămîne constantă), este o observabilă fizică discontinuă (o sarcină electrică oarecare este egală cu produsul dintre un număr întreg și sarcina elementară $e \cong 1{,}6 \cdot 10^{-19}$ C) și este invariantă (nu depinde de sistemul de referință inerțial din care se face observarea).

a. Cîmpul electrostatic este produs de sarcini electrice în repaus.

O sarcină electrică punctiformă q_1, situată într-un mediu izotrop și omogen, de constantă dielectrică (permitivitate) ε exercită asupra altei sarcini punctiforme q_2, aflată într-un punct de rază vectoare $\bar{r}$ în raport cu q_1, forța electrostatică (fig. F.A.3):

$$\bar{F} = \frac{q_1 q_2}{4\pi\varepsilon r^3}\bar{r} \text{ (legea lui Coulomb).}$$

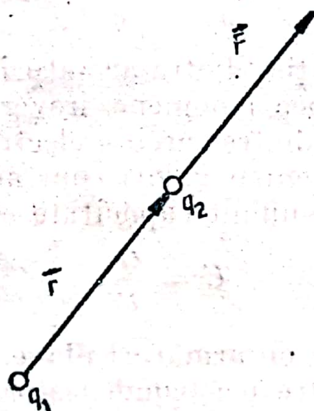


Fig. F.A.3

Permitivitatea mediului, ε, se exprimă funcție de permitivitatea vidului, ε_0, și de permitivitatea relativă a mediului, ε_r, prin relația:

$$\varepsilon = \varepsilon_0 \varepsilon_r.$$

Această formă a existenței materiei din jurul corpurilor electrizate, care se manifestă prin acțiuni asupra corpurilor cu sarcină electrică, se numește cîmp electric. Considerînd un corp punctual cu sarcina electrică Q, cîmpul electric din jurul acestuia va exercita asupra unui corp de probă care are sarcina q și este așezat la distanța r, forța

$$F = \frac{Qq}{4\pi\varepsilon r^2},$$

raportul $\frac{F}{q} = \frac{Q}{4\pi\varepsilon r^2}$ nedepinzînd de corpul de probă, ci numai de sarcina Q și de poziția punctului din cîmpul generat de aceasta. Acest cîmp electric este caracterizat printr-o mărime vectorială $\bar{E}$, numită intensitate a cîmpului electric în punctul respectiv, dată de expresia

$$\bar{E} = \frac{\bar{F}}{q}.$$

Astfel, intensitatea cîmpului electric generat de un corp punctiform, cu sarcina Q, la distanța r, va avea expresia:

$$\bar{E} = \frac{Q}{4\pi\varepsilon r^3}\bar{r}.$$

Diferența de potențial electric dintre două puncte, sau tensiunea electrică U dintre acele puncte este o mărime fizică egală cu raportul dintre lucrul mecanic efectuat de cîmp la deplasarea unui corp încărcat între cele două puncte și sarcina electrică a corpului:

$$U = V_M - V_N = \frac{Q}{4\pi\varepsilon}\left(\frac{1}{r_M} - \frac{1}{r_N}\right) = \frac{L}{q}.$$

Alegînd punctul de referință pînă la care se face deplasarea, la infinit ($r_N \to \infty$), atunci $V_N = 0$ și potențial în punctul M va fi:

$$V_M = \frac{Q}{4\pi\varepsilon r_M}.$$

În cazul unui cîmp electric uniform ($\vec{E}$ = constant), forța electrică ce acționează asupra corpului cu sarcina q pe o distanță d este constantă, $F = qE$, iar tensiunea electrică va fi:

$$U = \frac{Fd}{q} = \frac{qEd}{q} = Ed.$$

Pentru diferența de potențial dintre armăturile unui condensator, neglijabilă față de aceea care poate provoca fenomene ireversibile de polarizare a dielectricului dintre armături, raportul dintre sarcina electrică a unei armături și diferența de potențial dintre armături, pentru valori constante ale potențialelor conductorilor învecinați este constant și numit capacitate electrică a condensatorului:

$$C = \frac{Q}{U}.$$

În cazul unui condensator cu armături plane, ale căror dimensiuni sînt mult mai mari decît distanța d dintre ele (condensator „plan"), intensitatea cîmpului electric dintre armături este constantă și dată de expresia $E = \frac{U}{d}$, capacitatea condensatorului fiind $C = \frac{\varepsilon S}{d} = \frac{\varepsilon_0 \varepsilon_r S}{d}$, unde U este tensiunea dintre armături, iar ε, ε_r și ε_0 sînt permitivitatea absolută, permitivitatea relativă a dielectricului dintre armături și, respectiv, permitivitatea vidului.

Gruparea a n condensatori legați în serie conduce la o capacitate echivalentă, C_e, dată de expresia:

$$\frac{1}{C_e} = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{C_i};$$

iar gruparea a n condensatori legați în paralel conduce la o capacitate echivalentă:

$$C_e = \sum_{i=1}^{n} C_i.$$

Energia cîmpului electric dintre armăturile unui condensator de capacitate C, încărcat la o diferență de potențial U, are expresia:

$$W = \frac{1}{2} C U^2.$$

În cazul unui condensator plan, avem:

$$W = \frac{1}{2} \cdot \frac{\varepsilon S}{d} E^2 d^2 = \frac{1}{2} \varepsilon S d E^2 = \frac{\varepsilon}{2} E^2 V,$$

V fiind volumul dintre armăturile condensatorului.

b. Prin definiție, intensitatea curentului electric este o mărime care exprimă sarcina electrică ce străbate secțiunea transversală a circuitului în unitatea de timp.

$$I = \frac{Q}{t}.$$

Existența curentului electric se manifestă prin efectul termic (curentul electric încălzește conductorii prin care trece), efectul chimic (la trecerea curentului electric printr-o soluție de electrolit, la electrodul negativ se depune o anumită cantitate de substanță) și efectul magnetic (apariția unui cîmp magnetic în jurul unui conductor, cînd acesta este străbătut de un curent electric).

Dacă E este tensiunea electromotoare a unei surse, u căderea de tensiune pe sursă, iar U tensiunea la borne (căderea de tensiune pe circuitul exterior sursei), atunci:

$$E = U + u.$$

Legea lui Ohm ne arată că $R = \frac{U}{I}$, raportul $\frac{U}{I}$ evidențiind o proprietate a fiecărui conductor care poartă numele de rezistență electrică și pentru un conductor cilindric de lungime l și secțiune transversală S, ea se exprimă prin:

$$R = \rho \frac{l}{S},$$

unde ρ este rezistivitatea electrică a conductorului. Pentru o variație de temperatură nu prea mare, rezistivitatea electrică depinde de temperatură, după expresia:

$$\rho = \rho_0(1 + \alpha t),$$

ρ_0 fiind rezistivitatea electrică la temperatura 0°C, ρ rezistivitatea electrică la temperatura t°C, iar α coeficientul de temperatură al rezistivității.

Legea lui Ohm pentru un circuit simplu este:

$$I = \frac{E}{R + r},$$

unde r este rezistența interioară a sursei de tensiune electromotoare E, iar R este rezistența rezistorului exterior sursei.

Într-o rețea electrică sînt valabile următoarele două legi (teoreme) ale lui Kirchhoff:

— Suma algebrică a intensităților curenților într-un nod al unei rețele electrice este nulă:

$\sum_K I_K = 0$ (prima „lege" a lui Kirchhoff), numărul ecuațiilor scrise fiind egal cu $n - 1$ (n = numărul de noduri ale rețelei);

— Suma căderilor de tensiune pe diferitele componente ale unui „ochi" al unei rețele electrice este egală cu suma algebrică a tensiunilor electromotoare ale generatoarelor electrice în acest ochi:

$\sum_h (R_h + r_h)I_h = \sum_j E_j$ (a doua „lege" a lui Kirchhoff), numărul ecuațiilor scrise fiind egal cu $l - n + 1$ (l = numărul de laturi active ale rețelei).

Rezistența echivalentă a unei grupări de n rezistoare (de rezistențe R_1, R_2, ..., R_n) legate:

1°. în serie este $R_s = \sum_{k=1}^{n} R_k$,

2°. în paralel este $R_p = \left(\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{R_k}\right)^{-1}$.

Expresia legii lui Ohm pentru un circuit electric închis, alimentat de o baterie de n generatoare identice (avînd fiecare tensiunea electromotoare e şi rezistenţa internă r) legate:

1°. în serie este $I = \frac{ne}{R + nr}$,

2°. în paralel este $I = \frac{e}{R + \frac{r}{n}}$,

I fiind intensitatea curentului electric debitat în circuitul exterior, de rezistenţă R.

Energia electrică transformată de consumator în intervalul de timp t se poate scrie sub forma

$$W = U_{AB}q \text{ sau } W = U_{AB}It,$$

unde U_{AB} este căderea de tensiune pe consumator. Dacă consumatorul este un rezistor R, atunci:

$$W = \frac{U_{AB}^2}{R}t \text{ sau } W = I^2Rt.$$

Puterea electrică dezvoltată de un generator electric de tensiune electromotoare E, care alimentează, sub tensiunea U la borne, un circuit electric închis:

1°. pentru un circuit întreg este $P_t = EI$,

2°. pentru circuitul exterior este $P = U_bI$,

3°. pentru un consumator de rezistenţă R este $P_R = U_bI_R = \frac{U_b^2}{R} = I^2R$,

unde I, I_R şi U_b sînt intensităţile curenţilor debitaţi de generator în circuitul exterior, respectiv în rezistor şi tensiunea electrică la bornele rezistorului.

Masa de substanţă depusă la catodul unui voltmetru într-un proces de electroliză, în cursul căruia ionii respectivei substanţe transportă sarcina q este

$$m = \frac{1}{F} \cdot \frac{A}{n} q = \frac{1}{F} \cdot \frac{A}{n} It \text{ (legea lui Faraday a electrolizei)},$$

unde A şi n sînt masa atomică şi, respectiv, valenţa substanţei, iar $F = eN_A \cong$ $\cong 9{,}648670(54) \cdot 10^4 \text{ C} \cdot \text{mol}^{-1}$ este constantalui Faraday (e = sarcina elementară, N_A = numărul lui Avogadro).

c. Cîmpul magnetic este o formă a materiei, care se manifestă prin acţiunea asupra „acului" magnetic sau asupra conductoarelor parcurse de curent electric.

Observabila fizică inducţie a unui cîmp magnetic (inducţia magnetică), $\bar{B}$, este definită prin forţa exercitată de acest cîmp magnetic:

1°. asupra unui element $d\bar{l}$ al unui conductor parcurs de un curent electric de intensitate I

$$d\bar{F} = Id\bar{l} \times \bar{B} \text{ (expresia forţei Laplace)},$$

2°. sau asupra unei sarcini electrice punctiforme q, în mişcare cu viteza $\bar{v}$ faţă de cîmpul magnetic

$$\bar{F} = q\bar{v} \times \bar{B} \text{ (expresia forţei Lorentz)}.$$

În cazul unui mediu izotrop, parametrul fizic definit prin expresia:

$$\mu = \frac{B}{H} (= \mu_0\mu_r),$$

unde B este inducţia magnetică corespunzătoare unui cîmp magnetic de intensitate H, se numeşte permeabilitatea (totală) absolută, corespunzătoare intensităţii

H a cîmpului magnetic $\left(\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7} \frac{H}{m}\right)$ este permeabilitatea magnetică absolută a vidului, iar μ_r este permeabilitatea relativă, corespunzătoare intensității H a cîmpului magnetic.

Fluxul unui cîmp magnetic uniform (de inducție $\bar{B}$ constantă în spațiu, ca valoare, direcție și sens), printr-o suprafață Σ este definit prin expresia:

$$\Phi = \bar{B} \cdot \bar{S} = BS \cos (\bar{B}, \bar{S}),$$

unde $\bar{S}$ este aria orientată (în direcție normală pe direcția fluxului) a suprafeței Σ.

În funcție de forma geometrică a conductorului străbătut de un curent electric de intensitate I, avem următoarele principale expresii particulare ale intensității cîmpului magnetic:

1°. într-un punct situat la distanța d față de un conductor rectiliniu, filiform și infinit,

$$H = \frac{I}{2\pi d},$$

2°. în centrul unei spire circulare de rază r,

$$H = \frac{2I}{r},$$

3°. în interiorul unui solenoid drept de lungime mult mai mare decît dimensiunile secțiunii transversale,

$$H = \frac{NI}{l} = nI, \quad \left(n = \frac{N}{l}\right),$$

unde N și l sînt numărul de spire și, respectiv, lungimea solenoidului, direcția și sensul intensității cîmpului magnetic fiind date în toate cazurile de regula burghiului drept (fig. F.A.4).

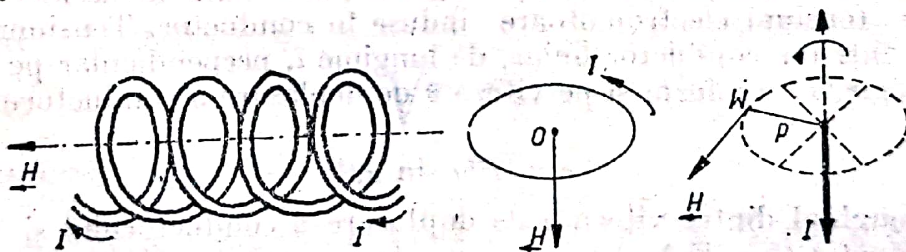


Fig. F.A.4

Forța electromagnetică, exercitată de un conductor rectiliniu parcurs de curentul de intensitate I_1 asupra unei porțiuni de lungime l dintr-un alt conductor rectiliniu parcurs de curentul de intensitate I_2, depinde direct proporțional de intensitățile curenților prin cele două conductoare de lungime l și invers proporțional de distanța dintre conductoare:

$$F_{12} = \frac{\mu_0 \mu_r I_1 I_2}{2\pi r} l.$$

Cu ajutorul acestei expresii se definește amperul ca fiind intensitatea unui curent electric constant, care se stabilește prin două conductoare rectilinii, paralele, foarte lungi, situate în vid la distanța de 1 m unul de altul, între care se exercită o forță de $2 \cdot 10^{-7}$ N pe fiecare metru de lungime.

d. Studiindu-se mișcarea unui electron care intră într-un cîmp electric uniform, între armăturile unui condensator plan, cu viteza v_0 normală la liniile de

cîmp, deviaţia electronului, y, este direct proporţională cu tensiunea U dintre armături:

$$y = \frac{eE}{2mv_0^2} x^2 = \frac{eU}{2mdv_0^2},$$

axa Ox fiind paralelă cu v_0.

În cazul în care o particulă, de masă m şi de sarcină q, intră într-un cîmp magnetic de inducţie $\bar{B}$, viteza particulei $\bar{v}$ fiind normală la liniile de cîmp, traiectoria particulei va fi un cerc a cărui rază se calculează din egalarea expresiei forţei Lorentz cu expresia forţei centripete, rezultînd:

$$r = \frac{mv}{qB}.$$

Viteza unghiulară ω a particulei şi frecvenţa ν a mişcării circulare în cîmp magnetic vor fi date de expresiile:

$$\omega = \frac{v}{r} = \frac{qB}{m}, \quad \nu = \frac{\omega}{2\pi} = \frac{qB}{2\pi m}.$$

e. Variaţia fluxului unui cîmp magnetic prin suprafaţa delimitată de conturul închis (C) produce o tensiune electromotoare de „inducţie electromagnetică", dată de legea lui Faraday:

$$e = -\lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta \Phi}{\Delta t} = -\frac{d\Phi}{dt},$$

unde $\Delta\Phi$ este variaţia fluxului magnetic prin suprafaţa delimitată de conturul (C), pe durata Δt. Tensiunea electromotoare indusă într-o bobină cu N spire este de N ori mai mare decît cea indusă într-o spiră:

$$e = -N\frac{d\Phi}{dt}.$$

Acţiunea forţei Lorentz asupra electronilor liberi dintr-un conductor „deschis", aflat în mişcare faţă de un cîmp magnetic, determină de asemenea (de regulă) apariţia unor tensiuni electromotoare induse în conductor. Tensiunea electromotoare indusă într-un conductor liniar, de lungime l, perpendicular pe inducţia $\bar{B}$ a unui cîmp magnetic uniform şi pe viteza $\bar{v}$ de deplasare a conductorului, este dată de expresia:

$$e = Blv \sin \alpha,$$

unde α este unghiul dintre viteza $\bar{v}$ de deplasare a conductorului şi inducţia $\bar{B}$ a cîmpului magnetic (fig. F.A.5).

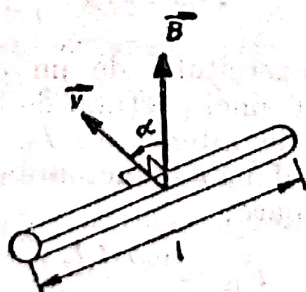


Fig. F.A.5

Pentru valori, ale intensităţii curentului electric într-un conductor (în particular solenoid), mici în raport cu cele care provoacă fenomene ireversibile de magnetizare, raportul dintre fluxul magnetic $\Phi(I)$, produs prin suprafaţa delimitată de conductor, şi intensitatea I a acestui curent, $L = \frac{\Phi(I)}{I}$, este constant şi se numeşte inductanţă a conductorului (solenoidului).

Variația fluxului magnetic propriu este $\Delta\Phi = L\Delta I$ și, ținînd seama de legea inducției electromagnetice, tensiunea electromotoare autoindusă este:

$$e = -\lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta\Phi}{\Delta t} = -L\frac{dI}{dt}.$$

Expresia inductanței unui solenoid „drept", de lungime l, mult mai mare decît dimensiunile secțiunii sale transversale, este:

$$L = \mu\frac{N^2S}{l},$$

unde μ este permeabilitatea absolută a miezului solenoidului, iar S și N sînt aria secțiunii transversale și, respectiv, numărul de spire al (înfășurării) solenoidului.

În cazul cuplajului inductiv a două circuite electrice, tensiunile electromotoare induse în acestea se pot scrie:

$$e_1 = -L_m\frac{\Delta I_2}{\Delta t}, \quad e_2 = -L_m\frac{\Delta I_1}{\Delta t}.$$

unde $L_m = L_{12} = L_{21}$ este coeficientul de inducție mutuală, care depinde numai de mediu și de geometria celor două circuite.

Energia cîmpului magnetic, produs de un curent electric de intensitate I, se exprimă prin:

$$W_m = \frac{1}{2}LI^2.$$

f. Curenții electrici produși de tensiuni electromotoare care depind sinusoidal de timp se numesc curenți alternativi sinusoidali.

Expresia intensității curentului electric „debitat" de un generator de curent alternativ, de tensiune la borne $u(t) = U \sin \omega t$, într-un

1°) circuit RLC serie este

$$i(t) = I\sin(\omega t + \varphi_s) = \frac{U}{\sqrt{R^2 + \left(L\omega - \frac{1}{C\omega}\right)^2}}\sin(\omega t + \varphi_s),$$

2°) circuit RLC derivație este

$$i(t) = I\sin(\omega t + \varphi_v) = U\sqrt{\frac{1}{R^2} + \left(\frac{1}{L\omega} - C\omega\right)^2}\sin(\omega t + \varphi_p),$$

unde U și I sînt amplitudinile tensiunii la borne și, respectiv, intensității curentului debitat; $Z = \frac{U}{I}$, $X_L = L\omega$, $X_C = \frac{1}{C\omega}$ și R sînt impedanța circuitului, reactanța bobinei de inductanță L, reactanța condensatorului de capacitate C $\left(\text{toate pentru un curent alternativ de frecvență } f = \frac{\omega}{2\pi}\right)$ și, respectiv, rezistența rezistorului, iar

$$\varphi_s = \text{arctg}\frac{1}{R}\left(\frac{1}{C\omega} - L\omega\right) \text{ și } \varphi_p = \text{arctg}\, R\left(C\omega - \frac{1}{L\omega}\right)$$

sînt defazajele intensității curentului debitat în raport cu tensiunea la borne, în cazul circuitului RLC serie, respectiv derivație.

În cazul în care frecvența tensiunii alternative la borne devine egală cu $f_{rez} = \frac{1}{2\pi\sqrt{LC}}$ (frecvența de rezonanță a circuitului), amplitudinea intensității

curentului debitat în circuitul RLC atinge, pentru o valoare dată a tensiunii la borne, mărimea:

1°) maximă, în cazul circuitului serie,
2°) minimă, în cazul circuitului derivație.

Raportul

$$Q = \left(\frac{U_L}{U}\right)_{\omega = \omega_0} = \left(\frac{U_C}{U}\right)_{\omega = \omega_0} = \frac{\omega_0 L}{R} = \frac{1}{\omega_0 RC},$$

care arată de cîte ori este mai mare, la rezonanță, tensiunea la bornele bobinei sau condensatorului decît tensiunea generatorului, se numește factor de supratensiune sau factor de calitate al circuitului.

Dacă tensiunea la bornele unui circuit de curent alternativ sinusoidal este $u = U_m \sin \omega t$, iar intensitatea curentului prin circuit este $i = I_m \sin (\omega t - \varphi)$, putere instantanee a circuitului va fi

$$p = ui = \frac{U_m I_m}{2} \cos \varphi - \frac{U_m I_m}{2} \cos (2\omega t - \varphi),$$

φ fiind defazajul dintre u și i.

Valoarea medie a puterii unui circuit de curent alternativ într-o perioadă este:

$$P = \frac{1}{T}\int_0^T p dt = \frac{1}{2} U_m I_m \cos \varphi = UI \cos \varphi,$$

aceasta purtînd numele de putere activă a circuitului de curent alternativ. Factorul $\cos \varphi$ poartă numele de factor de putere. Produsul $S = UI$ se numește putere aparentă (= energia transferată în unitatea de timp circuitului de către sursa de alimentare). Puterea activă este utilizată de consumator, iar cealaltă parte din puterea aparentă, $P_r = U_x I = UI \sin \varphi$, poartă numele de putere reactivă, aceasta fiind necesară pentru producerea cîmpului magnetic și a cîmpului electric.

Între puterile aparentă, activă și reactivă există relațiile:

$$P^2 + P_r^2 = S^2,\ P_r = P \operatorname{tg} \varphi,\ P = S \cos \varphi,\ P_r = S \sin \varphi.$$

Între tensiunile de linie U_l, respectiv de fază U_f, curenții de linie I_l și de fază I_f, și putere există, pentru montajele de curent trifazat, relațiile:

Tipul montajului	U	I	P
În stea	$\sqrt{3}\, U_f$	I_f	$\sqrt{3}\, U_l I_l \cos \varphi = 3 U_f I_f \cos \varphi$
În triunghi	U_f	$\sqrt{3}\, I_f$	

g. Tensiunea U la bornele unui dinam se exprimă prin rezistențele r a rotorului și r_i a înfășurării electromagneților inductorului, intensitățile curenților electrici I prin consumator, I_r prin rotor, I_e prin înfășurarea electromagneților inductorului, și tensiunea electromotoare $E = KN\Phi\nu$ produsă de dinam (unde K este un coeficient specific dinamului, N numărul de spire al rotorului, Φ fluxul magnetic produs de inductor, iar ν frecvența rotațiilor rotorului):

$U = E - (r + r_i)I$ (în cazul dinamului serie),
$U = E - rI_r = R_i I_e$ (în cazul dinamului șunt).

Pentru utilizarea mașinii de curent continuu ca motor, la bornele sale trebuie aplicată tensiunea $U = E_c + rI$, unde E_c este tensiunea interioară mașinii electrice.

În cazul transformatoarelor uzuale (cu pierderi mici: $U_2 = e_2$, $P_1 \cong P_2$) în sarcină (circuitul secundar închis printr-un consumator), între tensiunile U_1, U_2,

intensitățile curenților I_1, I_2 și numerele de spire N_1, N_2, corespunzătoare înfășurărilor primarului, respectiv secundarului, există relațiile:

$$\frac{U_1}{U_2} = \frac{I_2}{I^1} = \frac{N_1}{N_2}.$$

h. Dispozitivele electronice se clasifică, după mediul în care are loc conducția electrică, în: tuburi electronice cu vid, tuburi electronice cu gaz și dispozitive semiconductoare.

În cazul diodei, în regiunea de sarcină spațială, care corespunde funcționării obișnuite a diodelor, variația intensității curentului anodic I_A cu tensiunea anodică U_A este bine aproximată de formula lui Langmuir (legea 3/2):

$$I_A = KU_A^{3/2},$$

în care constanta K, numită perveanță, depinde de geometria sistemului catod-anod.

Parametrii triodei, care îi determină calitățile și funcțiile, sînt:

— panta $S = \left.\frac{\Delta I_A}{\Delta U_G}\right|_{U_A = \text{const}}$, ΔI_A fiind creșterea intensității curentului anodic, corespunzătoare creșterii ΔU_G a tensiunii de grilă, pentru o tensiune anodică constantă;

— factorul de amplificare, $\mu = \left.\frac{\Delta U_A}{\Delta U_G}\right|_{\Delta I_A = \text{const}}$; ΔU_A fiind variația tensiunii anodice, iar ΔU_G variația tensiunii de grilă;

— rezistența internă, $R_i = \left.\frac{\Delta U_A}{\Delta I_A}\right|_{U_G = \text{const}}$.

Ecuația internă a tubului electronic este $SR_i = \mu$.

Amplificarea unui etaj amplificator cu triodă poate fi exprimată în funcție de factorul de amplificare al triodei, de rezistența internă și de rezistența R_A a rezistorului de sarcină:

$$A = \frac{U_{R_a}}{U_g} = \frac{\mu R_A}{R_i + R_A} = \frac{\mu}{1 + \frac{R_i}{R_A}}.$$

În semiconductoare participă la conducție două feluri de purtători de sarcină mobili: electronii (negativi) și golurile (pozitivi).

Pentru semiconductorii intrinseci, concentrația intrinsecă n_i este: $n_i = n_0 = p_0$, unde n_0 și p_0 sînt concentrațiile de electroni, respectiv de goluri în semiconductorul pur la echilibru termic.

Semiconductorii cu impurități se împart în semiconductori extrinseci de tip n (negativ) și de tip p. Conductivitatea semiconductorului este dată de expresia:

$$\sigma = e(p\mu_p + n\mu_n),$$

unde μ_p și μ_n sînt mobilitățile golurilor și, respectiv, electronilor, p fiind concentrația de goluri, iar n concentrația de electroni.

h. În cazul unui circuit oscilant, legea conservării energiei electromagnetice se exprimă prin:

$$\frac{1}{2} \cdot \frac{q^2}{C} + \frac{1}{2} Li^2 = W_{\text{elmg.}} = \text{const.}$$

În circuitul oscilant, reactanța inductivă X_L este întotdeauna egală cu reactanța capacitivă X_C:

$$\omega_0 L = \frac{1}{\omega_0 C} \Rightarrow \omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}.$$



Perioada oscilațiilor libere ale circuitului oscilant va fi:

$$T_0 = 2\pi\sqrt{LC}.$$

Factorul de calitate, Q, al circuitului oscilant, este:

$$Q = \left(\frac{L\omega}{R}\right)_{\omega=\omega_0} = \left(\frac{1}{RC\omega}\right)_{\omega=\omega_0}.$$

i. Viteza de propagare a undelor electromagnetice în vid este

$$c = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon_0\mu_0}},$$

iar viteza de propagare a undelor electromagnetice într-un mediu omogen este

$$v = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon\mu}} = \frac{c}{\sqrt{\varepsilon_r\mu_r}}.$$

Valorile instantanee ale intensității cîmpului electric E și inducției magnetice B ale undei electromagnetice, într-un punct avînd coordonata y pe direcția de propagare, au expresiile:

$$E = E_0 \sin\left[2\pi\left(\frac{t}{T} - \frac{y}{\lambda}\right)\right],$$

$$B = \frac{E_0}{v} \sin\left[2\pi\left(\frac{t}{T} - \frac{y}{\lambda}\right)\right].$$

Densitatea volumică medie (în timp) a energiei electromagnetice, pentru mediile omogene și izotrope, are expresia:

$$\overline{W} = \frac{1}{2}\varepsilon E_0^2 + \frac{1}{2\mu} B_0^2.$$

4. OPTICĂ

Optica studiază interacțiunile undelor electromagnetice cu ele însăși și cu substanța în domeniul infraroșu, vizibil și ultraviolet.

Fenomenele fizice explicate ținînd seama de natura ondulatorie a luminii conduc la optica ondulatorie, iar cele explicate pe baza naturii corpusculare a luminii conduc la optica fotonică (corpusculară). Optica geometrică operează cu raze (fascicule foarte înguste) de lumină, fiind un caz particular al opticii ondulatorii, cînd $\lambda \to 0$.

a. Fenomenele de propagare sînt explicate pe baza principiului lui Huygens. Coincidența dintre valoarea vitezei de propagare a luminii, determinată experimental de Fizeau, și cea a vitezei undei electromagnetice în vid, calculată de Maxwell după formula $c = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon_0\mu_0}}$, a condus la ipoteza naturii electromagnetice a luminii. Ipoteza naturii electromagnetice a luminii a permis explicarea, în cadrul teoriei clasice, a fenomenelor fizice de interferență, difracție, reflexie și refracție, reflexie și absorbție și dispersie și absorbție.

Relația lui Maxwell care dă legătura dintre indicele de refracție și permitivitatea electrică și permeabilitatea magnetică relative:

$$n = \frac{c}{v} = \sqrt{\frac{\varepsilon\mu}{\varepsilon_0\mu_0}} = \sqrt{\varepsilon_r\mu_r}$$

este în concordanță cu experiența și în domeniul optic, dacă se ține seama de dispersia luminii.

Pentru a fi explicate fenomenele fizice în care intervine interacțiunea luminii cu molecule, atomi, electroni, este necesară teoria cuantică a luminii, la originea acesteia găsindu-se ipoteza lui Max Planck (1900), că lumina este emisă sub forma de cuante de energie luminoasă sau fotoni, și ipoteza lui Albert Einstein cu privire la noțiunea de foton.

b. Măsurătorile efectuate asupra radiațiilor electromagnetice din domeniul optic (infraroșu, vizibil și ultraviolet) fac obiectul fotometriei.

Caracterizarea luminii din punctul de vedere al energiei transportate de undele luminoase se face cu ajutorul mărimilor energetice, iar din punctul de vedere al percepерii acesteia de către ochi lumina este caracterizată prin mărimile fotometrice.

— Energia W care străbate o secțiune a unui con în vîrful căruia se află o sursă S, în unitatea de timp, se numește flux de energie radiantă:

$$\Phi_e = \frac{W}{t}\,[\mathrm{W}].$$

— Intensitatea energetică a unei surse punctiforme se definește ca fluxul de radiație emis în unitatea de unghi solid, $I_e = \dfrac{\Delta\Phi_e}{\Delta\Omega}$, unde $\Delta\Omega = \dfrac{\Delta A}{r^2}$, ΔA fiind aria calotei sferice, iar r raza sferei.

— Iluminarea (iradierea) energetică a unei suprafețe elementare este raportul dintre fluxul de radiație care cade normal pe aceasta și aria suprafeței elementare:

$$E_e = \frac{\Delta\Phi_e}{\Delta A}\,[\mathrm{W}\cdot\mathrm{m}^{-2}],$$

sau

$$E_e = \frac{I_e}{r^2},\ \text{respectiv}\ E_e' = E_e\cos\alpha = \frac{I_t}{r^2}\cos\alpha,$$

cînd fasciculul de lumină cade înclinat pe suprafață, axa conului formînd unghiul α cu normala la suprafață (fig. F.A.6).

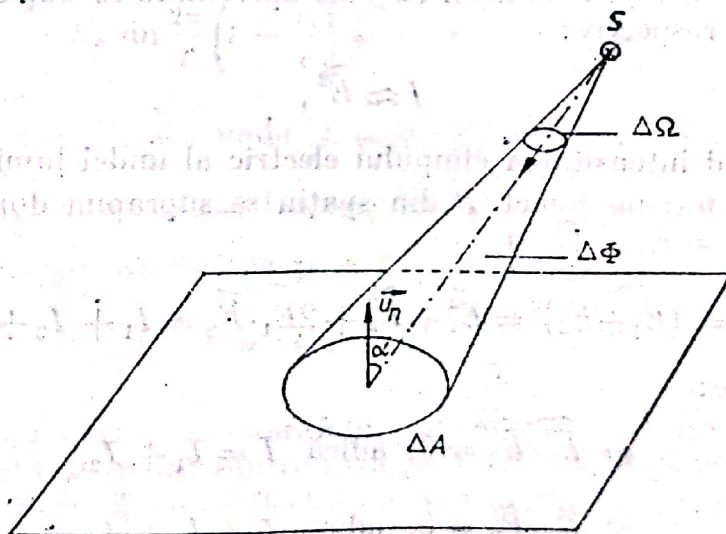


Fig. F.A.6

— Sensibilitatea spectrală relativă a ochiului este dată de expresia

$$V = \frac{\Phi_{e_0}}{\Phi_e},$$

Φ_{e_0}, fiind fluxul constant de energie al radiației cu lungimea de undă $\lambda = 550$ nm la care apare cea mai puternică senzație vizuală.

— Fluxul luminos, ținînd seama de sensibilitatea spectrală a ochiului, este:

$$\Phi = kV\Phi_e,$$

k fiind o constantă care poartă numele de echivalent fotometric al radiației.

— Intensitatea luminoasă a unei surse punctiforme este fluxul luminos emis în unitatea de unghi solid:

$$I = \frac{\Delta\Phi}{\Delta\Omega},$$

aceasta fiind mărimea fundamentală a fotometriei, a cărei unitate de măsură este candela (cd), care este și unitate fundamentală în SI (candela este intensitatea luminoasă în direcția normală, a unei suprafețe cu aria de $\frac{10^{-6}}{6}$ m² a unui corp negru la temperatura de solidificare a platinei și la presiunea de $1{,}01325 \cdot 10^5$ N · m²).

— Fluxul luminos emis de o sursă în toate direcțiile, cu aceeași intensitate, este:

$$\Phi = 4\pi I,$$

lumenul (lm), fiind fluxul luminos emis într-un unghi solid egal cu un steradian de către un izvor punctiform avînd intensitatea de 1 cd (adică, 1 lm = 1 cd · 1 sr).

— Iluminarea este fluxul luminos ce cade normal pe unitatea de arie

$$E = \frac{\Delta\Phi}{\Delta A} = \frac{I}{r^2},$$

unitatea acesteia fiind luxul (lx), luxul fiind iluminarea unei suprafețe de 1 m² care primește un flux luminos de 1 lm uniform repartizat pe această suprafață (1 lx = 1 lm/m²).

c. Interferența luminii reprezintă suprapunerea în același loc a două sau mai multe oscilații luminoase, rezultatul obținut apreciindu-se după intensitatea luminoasă în punctul respectiv:

$$I \approx \widetilde{\overline{E}^2},$$

$E = E_0 \sin \omega t$ fiind intensitatea cîmpului electric al undei luminoase.

Astfel, dacă într-un punct P din spațiu se suprapun două unde luminoase $\overline{E}_1$ și $\overline{E}_2$, avem $\overline{E} = \overline{E}_1 + \overline{E}_2$ și

$$I = \widetilde{\overline{E}^2} = (\widetilde{\overline{E}_1 + \overline{E}_2})^2 = \widetilde{\overline{E}_1^2} + \widetilde{\overline{E}_2^2} + 2\widetilde{\overline{E}_1 \cdot \overline{E}_2} = I_1 + I_2 + 2\widetilde{\overline{E}_1 \cdot \overline{E}_2},$$

deosebind cazurile:

$$\alpha)\ \widetilde{\overline{E}_1 \cdot \overline{E}_2} = 0, \text{ adică } I = I_1 + I_2,$$

$$\beta)\ \widetilde{\overline{E}_1 \cdot \overline{E}_2} \neq 0, \text{ adică } I \neq I_1 + I_2,$$

condiția necesară și suficientă pentru ca două unde luminoase să interfere într-un anumit loc din spațiu fiind $\widetilde{\overline{E}_1 \cdot \overline{E}_2} \neq 0$.

Considerînd două surse de lumină, S_1 și S_2, punctiforme, care emit radiații de aceeași frecvență:

$$E_1 = E_0 \sin(\omega t + \varphi_1),$$
$$E_2 = E_0 \sin(\omega t + \varphi_2),$$

atunci într-un punct P oarecare avem:

$$E = 2E_0 \cos \frac{\varphi_1 - \varphi_2}{2} \sin\left(\omega t + \frac{\varphi_1 + \varphi_2}{2}\right)$$

$\omega = \omega_1 = \omega_2$ şi $\Delta\varphi = \varphi_1 - \varphi_2 =$ constant în timp, făcînd parte din condiţiile de interferenţă.

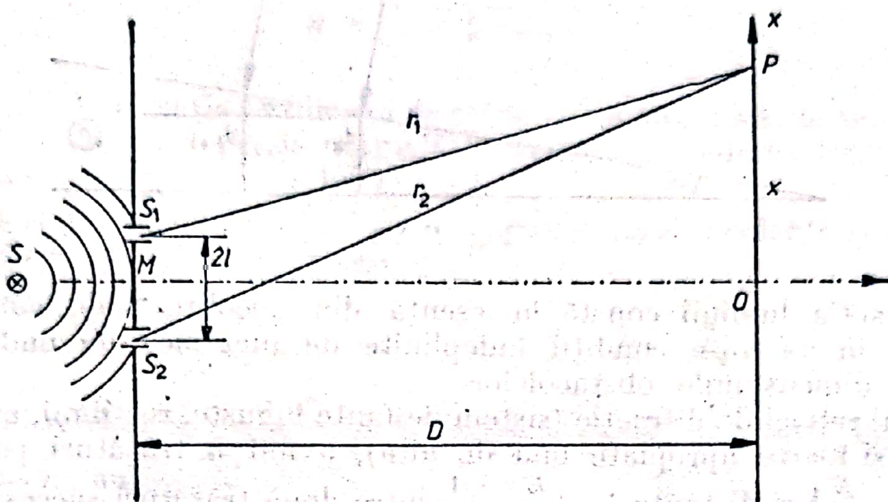


Fig. F.A.7

— În cazul unui dispozitiv Young (fig. F.A.7) avem:

$$I(P) = (\overline{E_1} + \overline{E_2})^2 = 4E_0^2 \cos \frac{2\pi(r_2 - r_1)}{\lambda},$$

unde

$$E = E_0 \sin \frac{2\pi}{T}\left(t - \frac{r_1}{c}\right) \text{ şi } E = E_0 \sin \frac{2\pi}{T}\left(t - \frac{r_2}{c}\right).$$

Pentru $r_2 - r_1 = 2k\frac{\lambda}{2}$, unde $k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots, I = I_{max}$, iar pentru $r_2 - r_1 = (2k + 1)\frac{\lambda}{2}$, $I = I_{min}$. Distanţa dintre două maxime (sau două minime) consecutive se numeşte interfranjă şi se notează cu i:

$$i = x_{k+1} - x_k = \frac{\lambda D}{2l}.$$

— În cazul unei lame cu suprafeţe plan-paralele, de grosime d şi indice de refracţie n, diferenţa de drum, dintre raza reflectată pe faţa de intrare a lamei şi raza care pătrunde în lamă, este reflectată pe suprafaţa de ieşire şi revine în regiunea din faţa suprafeţei de intrare, este:

$$\delta = 2nd \cos \hat{r} + \frac{\lambda}{2},$$

$\hat{r}$ fiind unghiul de refracţie ($n \sin \hat{r} = \sin \hat{i}$). Pentru $\hat{i} = 0$ avem $\hat{r} = 0$ şi:

$$\delta = 2nd + \frac{\lambda}{2}.$$

— În cazul unei pene optice, cînd două suprafețe plane ce delimitează lama subțire formează un unghi mic între ele (fig. F.A.8) interfranja este dată de relația:

$$i = \frac{\lambda}{2\alpha n}.$$

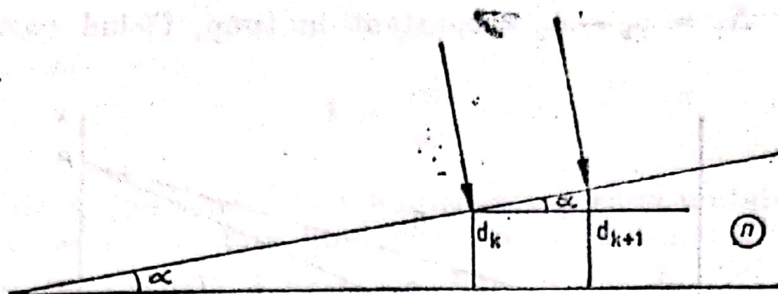


Fig. F.A.8

d. Difracția luminii constă în esență din „ocolirea“ de către lumină a obstacolelor, în anumite condiții îndeplinite de lungimea de undă a radiației luminoase și dimensiunile obstacolelor.

În cazul rețelei de difracție (sistem de fante înguste, rectilinii, egale, paralele, echidistante și foarte apropiate una de alta), avînd n trăsături pe unitatea de lungime $\left(n = \frac{N}{L}\right)$ și distanța $l = \frac{L}{N} = \frac{1}{n}$ între două trăsături succesive, maximele de difracție se obțin pentru

$$l(\sin \hat{i} \pm \sin \alpha) = k\lambda,$$

$\hat{i}$ fiind unghiul de incidență, α unghiul sub care se difractă undele, iar k ordinul de difracție.

Pentru $\hat{i} = 0$, avem

$$l \sin \alpha = k\lambda$$

și, pentru unghiuri de difracție mici, $\operatorname{tg} \alpha \approx \sin \alpha$, $n = \frac{1}{l}$; punctul P în care se va forma maximul de ordinul k se va afla la distanța $x = f \operatorname{tg} \alpha = f \sin \alpha \approx fk\lambda n$ și deci:

$$\lambda = \frac{x}{kfn},$$

f fiind distanța focală a lentilei.

e. La suprafața de separare a două medii transparente au loc fenomenele de reflexie a luminii (întoarcerea în mediul din care a venit a undei luminoase, atunci cînd întîlnește suprafața de separare a celor două medii) și de refracție a luminii (trecerea luminii în mediul al doilea schimbîndu-și direcția de propagare), care se supun următoarelor „legi“.

— Unda incidentă; normala la suprafață în punctul de incidență, unda reflectată și unda refractată se găsesc în același plan.

— Unghiul de reflexie, $\hat{r}$, este numeric egal cu unghiul de incidență, $\hat{i}$, adică $\hat{i} = \hat{r}$.

— $\frac{\sin \hat{i}}{\sin \hat{r}_e} = \frac{n_2}{n_1}$, $\hat{r}_e$ fiind unghiul de refracție, n_1 indicele de refracție al primului mediu, iar n_2 indicele de refracție al celui de-al doilea mediu.

Cînd lumina trece dintr-un mediu optic mai dens într-altul mai puțin dens ($n_2 < n_1$), există un unghi minim de incidență, $\hat{l}$, de la care raza refractată nu mai trece în cel de-al doilea mediu, avînd loc fenomenul de reflexie totală. Unghiul limită $\hat{i} = \hat{l}$, pentru $\hat{r} = \frac{\pi}{2}$, are valoarea $\sin \hat{l} = \frac{n_2}{n_1}$.

f. Indicele de refracție al unui mediu este

$$n = \frac{c}{v} = \sqrt{\varepsilon_r \mu_r}.$$

Fenomenul de variație a indicelui de refracție cu lungimea de undă se numește dispersie. Astfel, avem dispersie normală (n crește cu scăderea lui λ) și dispersie anomală (n scade cu descreșterea lui λ).

Unghiul de deviație δ (unghiul dintre direcția razei incidente și direcția razei emergente) într-o prismă are valoarea:

$$\delta = \hat{i} + \hat{i}' - (\hat{r} + \hat{r}') = \hat{i} + \hat{i}' - \hat{A},$$

$\hat{A}$ fiind unghiul refringent al prismei. Unghiul de deviație minimă, δ_m, corespunde la $\hat{i} = \hat{i}'$ și $\hat{r} = \hat{r}'$, adică:

$$\delta_m = 2\hat{i} - \hat{A}.$$

Ținînd seama de faptul că $\sin \hat{i} = n \sin \hat{r}$, avem:

$$n = \frac{\sin \frac{\hat{A} + \delta_m}{2}}{\sin \frac{\hat{A}}{2}}.$$

g. Dacă pe suprafața unui corp cade un fascicul paralel de raze, de intensitate I_0, experiența arată că intensitatea I a undei plane suferă o micșorare după legea

$$I = I_0 e^{-kd},$$

unde d este grosimea stratului de substanță străbătută și k este coeficientul de absorbție care, în general, depinde de lungimea de undă.

h. În general, interacțiunea a două fascicule de lumină poate fi pusă în evidență printr-o inegalitate a intensității fasciculelor, o modificare a direcției de propagare, o modificare a spectrelor lor sau o combinație a acestora. Acea caracteristică a luminii la care ochiul nu este sensibil, dar pentru care există elemente optice sensibile, este cunoscută sub numele de stare de polarizare. Cînd ne fixăm atenția asupra unui punct particular al fasciculului undei, locul geometric al vîrfului vectorului intensitate cîmp electric $\bar{E}$ constituie o măsură a polarizării.

Lumina în care vectorul intensitate cîmp electric $\bar{E}$ vibrează haotic în toate direcțiile posibile într-un plan perpendicular pe direcția de propagare se numește lumină naturală. Lumina în care vectorul intensitate cîmp electric $\bar{E}$ are o singură direcție de oscilație se numește lumină liniar polarizată. Cînd extremitatea vectorului $\bar{E}$ descrie un cerc, avem lumină polarizată circular, iar cînd descrie o elipsă, avem lumină polarizată eliptic.

Una dintre metodele de obţinere a luminii polarizate o constituie polarizarea prin reflexie. Există un unghi de incidenţă i_B, numit unghi Brewster, pentru care lumina reflectată este total polarizată, fiind exprimat prin

$$\operatorname{tg} \hat{i}_B = \frac{n_2}{n_1}.$$

i. Optica geometrică foloseşte noţiunea de rază (fascicul foarte îngust) de lumină definită ca direcţia de-a lungul căreia se propagă lumina, considerîndu-se că într-un mediu omogen şi izotrop lumina se propagă în linie dreaptă. De asemenea, se respectă principiul independenţei fasciculelor de lumină şi principiul reversibilităţii drumului razelor de lumină.

Spaţiul optic este împărţit în două regiuni: spaţiul obiect (regiunea în care se găseşte obiectul) şi spaţiul imagine (regiunea în care se află imaginea).

Suprafaţa care separă două medii transparente cu indici de refracţie diferiţi se numeşte dioptru. În cazul unui dioptru sferic avem următoarele relaţii fundamentale:

$$\frac{n_2}{x_2} - \frac{n_1}{x_1} = \frac{n_2 - n_1}{R},$$

numită relaţia punctelor conjugate (x_1 fiind distanţa de la vîrful dioptrului la imagine, x_2 distanţa de la vîrful dioptrului la obiect, iar R raza dioptrului), care mai poate avea forma:

$$\frac{f_2}{x_2} + \frac{f_1}{x_1} = 1,$$

f_1 fiind distanţa focală obiect, iar f_2 distanţa focală imagine.

A doua relaţie dă expresia măririi liniare β:

$$\beta = \frac{x_2}{x_1} \cdot \frac{n_1}{n_2}.$$

În cazul oglinzilor sferice, punîndu-se condiţia formală $n_2 = -n_1$, avem

$$\frac{1}{x_2} + \frac{1}{x_1} = \frac{2}{R},$$

sau, deoarece $f_1 = f_2 = f = \frac{R}{2}$, rezultă

$$\frac{1}{x_2} + \frac{1}{x_1} = \frac{1}{f},$$

iar mărimea liniară este $\beta = -\frac{x_2}{x_1}$.

Pentru fasciculele luminoase care străbat o lentilă subţire (de grosime neglijabilă în raport cu razele de curbură R_1 şi R_2 ale suprafeţelor) şi care formează cu axa optică a lentilei (direcţia trecînd prin centrele de curbură ale celor două suprafeţe ale lentilei) unghiuri neglijabile faţă de un radian (fascicule paraxiale) avem formula fundamentală a lentilelor subţiri

$$\frac{1}{x_2} - \frac{1}{x_1} = (n - 1)\left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2}\right),$$

în care x_1, x_2, R_1 şi R_2 se măsoară folosind ca origine centrul optic al lentilei. (Prin convenţie, ele sînt pozitive dacă se află în dreapta lentilei şi negative dacă se află în stînga ei.)

Folosind definiția distanței focale dată de

$$f = \frac{1}{(n-1)\left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2}\right)},$$

formula fundamentală a lentilelor subțiri devine

$$\frac{1}{x_2} - \frac{1}{x_1} = \frac{1}{f} = C,$$

C purtînd numele de puterea optică sau convergența lentilei.

Convergența unui sistem (bloc) optic format din lentile subțiri alipite este egală cu suma convergențelor lentilelor componente:

$$C = \frac{1}{f} = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{f_i}.$$

În cele prezentate s-au făcut anumite presupuneri ca: existența fasciculelor de lumină paraxiale, a unei imagini stigmatice, corespondența unei imagini plane și perpendiculare pe axul optic pentru un obiect mic plan și perpendicular pe ax, nedeformarea imaginii față de obiect, același indice de refracție pentru toate radiațiile (mediu nedispersiv sau lumină monocromatică). Neîndeplinirea acestor condiții duce la anumite imperfecțiuni prezentate de sistemele optice, numite aberații. Există două clase de aberații: aberații geometrice și aberații cromatice.

Un instrument optic este un ansamblu de lentile, oglinzi și diafragme cu ajutorul căruia se obțin imagini ale diferitelor obiecte. Un instrument optic se caracterizează prin mărire, putere, grosisment și puterea separatoare. Există două mari clase de instrumente: instrumente care dau imagini reale (aparatul fotografic, aparatul de proiecție) și instrumente care dau imagini virtuale (lupa, microscopul optic, luneta, telescopul).

j. Experiența lui Fizeau, experiența Michelson-Morley și experiența lui Kaufmann au jucat un rol hotărîtor în elaborarea teoriei relativității restrînse de către Albert Einstein, care are la bază următoarele postulate:

— Fenomenele fizice se desfășoară identic în toate sistemele de referință inerțiale, dacă condițiile inițiale sînt identice (formularea legilor fizicii este aceeași în toate sistemele de referință inerțiale).

— Viteza luminii în vid are aceeași valoare în toate sistemele de referință inerțiale și în toate direcțiile.

De asemenea, se ține seama de faptul că simultaneitatea a două evenimente din locuri diferite este relativă.

Între coordonatele spațio-temporale (x, y, z, t) ale unui eveniment în sistemul de referință inerțial S și coordonatele spațio-temporale (x', y', z', t') ale aceluiași eveniment în sistemul de referință inerțial S' — S' mișcîndu-se cu viteza constantă $\bar{v} = \bar{u}_x \cdot v$ față de S și Ox fiind paralelă cu $O'x'$ — există relațiile de transformare ale lui Lorentz:

$$\begin{cases} x' = \dfrac{x - vt}{\sqrt{1 - \dfrac{v^2}{c^2}}}, \\ y' = y, \\ z' = z, \\ t' = \dfrac{t - \dfrac{v}{c^2}x}{\sqrt{1 - \dfrac{v^2}{c^2}}}, \end{cases} \qquad \begin{cases} x = \dfrac{x' + vt'}{\sqrt{1 - \dfrac{v^2}{c^2}}}, \\ y = y', \\ z = z', \\ t = \dfrac{t' + \dfrac{v}{c^2}x'}{\sqrt{1 - \dfrac{v^2}{c^2}}}. \end{cases}$$

Consecinţele cinematice ale transformărilor Lorentz constau în existenţa unor relaţii între lungimea cinematică (măsurată în sistemul observatorului) şi lungimea proprie (măsurată în sistemul în care se află obiectul de studiat), $\Delta l = \Delta l' \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}$, între timpul cinematic şi timpul propriu, $\Delta t = \frac{\Delta t'}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$ şi a teoremei compunerii vitezelor în mecanica relativistă:

$$\begin{cases} u'_x = \dfrac{u_x - v}{1 - \dfrac{u_x v}{c^2}}, \\ u'_y = \dfrac{u_y \sqrt{1 - v^2/c^2}}{1 - \dfrac{u_x v}{c^2}}, \\ u'_z = \dfrac{u_z \sqrt{1 - v^2/c^2}}{1 - \dfrac{u_x v}{c^2}}, \end{cases} \qquad \begin{cases} u_x = \dfrac{u'_x + v}{1 + \dfrac{u'_x v}{c^2}}, \\ u_y = \dfrac{u'_y \sqrt{1 - v^2/c^2}}{1 + \dfrac{u'_x v}{c^2}}, \\ u_z = \dfrac{u'_z \sqrt{1 - v^2/c^2}}{1 + \dfrac{u'_x v}{c^2}}. \end{cases}$$

Noua concepţie despre spaţiu şi timp, în conformitate cu teoria relativităţii restrînse a lui Einstein, implică o schimbare fundamentală şi în dinamică. Astfel, legea fundamentală a dinamicii capătă forma:

$$\frac{d\bar{p}}{dt} = \bar{F};$$

masa unui corp în mişcare depinde de viteza sa:

$$m = \frac{m_0}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}},$$

iar energia cinetică a unei particule de masă de repaus m_0 este dată de expresia:

$$E_c = W - W_0,$$

unde $W = mc^2$ este energia totală a particulei, iar $W_0 = m_0 c^2$ este energia de repaus a particulei.

Variaţiei Δm a masei îi corespunde totdeauna o variaţie de energie, ΔW, dată de relaţia:

$$\Delta W = c^2 \Delta m.$$

5. FIZICĂ ATOMICĂ ŞI NUCLEARĂ

Fenomenele fizice în care se manifestă aspectul corpuscular al luminii, cuantificarea în sistemele materiale, radiaţia termică şi fenomenele fizice în care se manifestă aspectul ondulatoriu al microparticulelor constituie originea teoriei cuantice, fiind fenomene fizice, descoperite la finele secolului al XIX-lea şi în primul pătrar al secolului al XX-lea, care nu au putut fi explicate pe baza fizicii clasice.

a. Efectul fotoelectric extern este emisia de electrozi de către un corp aflat sub acţiunea radiaţiilor electromagnetice. Experimental se constată că: — intensitatea curentului fotoelectric de saturaţie este direct proporţională cu fluxul radiaţiilor electromagnetice incidente, cînd frecvenţa este constantă; — energia cinetică a

fotoelectronilor emiși crește liniar cu frecvența radiațiilor electromagnetice și nu depinde de fluxul acestora și — intensitatea curentului fotoelectric este diferită de zero numai dacă frecvența radiației incidente este mai mare sau cel puțin egală cu o valoare minimă. Aceste rezultate experimentale pot fi explicate cu ajutorul ecuației lui Einstein:

$$h\nu = L + \frac{1}{2} m_0 v^2,$$

$h\nu$ fiind energia fotonului cedată electronului, L lucrul mecanic de extracție al electronului din corp (energia de extracție), iar $\frac{1}{2} m_0 v^2$ energia cinetică a fotoelectronului extras.

Efectul Compton constă în ciocnirea foton-electron, fotonul cedînd numai o parte din energia sa electronului. Aceasta face ca lungimea de undă λ a radiației împrăștiate, față de lungimea de undă λ_0 a radiației incidente, să fie dată de expresia

$$\lambda = \lambda_0 + \Delta\lambda = \lambda_0 + 2\Lambda \sin^2 \frac{\theta}{2},$$

$\Lambda = \frac{h}{m_0 c}$ fiind lungimea de undă Compton, iar θ unghiul sub care este împrăștiată radiația incidentă.

Energia cinetică a electronului de recul este

$$E_c = \frac{hc}{\lambda_0} \cdot \frac{2\Lambda \sin^2 \frac{\theta}{2}}{\lambda_0 + 2\Lambda \sin^2 \frac{\theta}{2}},$$

iar unghiul sub care este difuzat electronul va fi

$$\varphi = \operatorname{arctg} \frac{\operatorname{ctg} \frac{\theta}{2}}{1 + \frac{\Lambda}{\lambda_0}}.$$

Ambele efecte, efectul fotoelectric și efectul Compton, au fost explicate admițînd natura corpusculară a radiației electromagnetice, particula numită foton avînd energia $\varepsilon = h\nu$, masa de repaus $m_0 = 0$, masa de mișcare $m = \frac{h\nu}{c^2}$, viteza $v = c$, impulsul $p = \frac{h\nu}{c} = \frac{h}{\lambda}$ și sarcina electrică $q = 0$.

b. Electronul constituent al oricărui atom este particula cu cea mai mică sarcină electrică $e = -1{,}6 \cdot 10^{-19}$ C, cu masa de repaus $m_0 \simeq 9{,}1 \cdot 10^{-31}$ kg și cu sarcina specifică $\frac{e}{m} = -1{,}76 \cdot 10^{11}$ C·kg^{-1}.

c. Ideea lui de Broglie cu privire la proprietățile ondulatorii ale microparticulelor a condus la presupunerea existenței fenomenelor fizice în care se manifestă aspectul ondulatoriu al microparticulelor. Conform lui de Broglie, unei particule de energie E și impuls p i se poate asocia o undă avînd frecvența $\nu = \frac{E}{h}$ și lungimea de undă $\lambda = \frac{h}{p} = \frac{h}{mv}$. Experiența lui Davisson și Germer confirmă ipoteza lui de Broglie, fiind verificată relația

$$2d \sin \theta = n\lambda, \quad n = 1, 2, 3, \ldots,$$

unde d este distanța interplanară (distanța dintre plane cristalografice), θ unghiul de împrăștiere a electronilor pe rețeaua plană cristalină și

$$\lambda = \frac{h}{p} = \frac{h}{\sqrt{2mE}} = \frac{h}{\sqrt{2em_eU}}.$$

d. Interpretarea statistică a dualismului undă-corpuscul înlătură contradicțiile care apar dacă se păstrează noțiunea de stare, pentru un sistem fizic, dată de fizica clasică.

Sistemele fizice cuantice sînt guvernate de relațiile de incertitudine ale lui Heisenberg:

$$\Delta x \cdot \Delta p_x \geqslant \frac{\hbar}{2},$$

$$\Delta y \cdot \Delta p_y \geqslant \frac{\hbar}{2},$$

$$\Delta z \cdot \Delta p_z \geqslant \frac{\hbar}{2}.$$

e. În cazul atomului de hidrogen avem formula lui Balmer generalizată pentru seriile spectrale:

$$\tilde{\nu} = \frac{1}{\lambda} = R\left(\frac{1}{n_1^2} - \frac{1}{n_2^2}\right),$$

unde R este constanta lui Rydberg, $n_1 = 1, 2, 3, ..., n_2$ tot întreg, dar $n_2 > n_1$.

Estimarea razei unui atom, $r_a \doteq \left(\frac{M}{\frac{4\pi}{3}\rho N_A}\right)^{1/2}$, M fiind masa unui kilomol, ρ densitatea corpului considerat, iar N_A numărul lui Avogadro, a condus la o valoare de $(1 \div 2) \cdot 10^{-10}$ m.

Experiența lui Rutherford a arătat că raza nucleului atomic este de ordinul a $(10^{-14} - 10^{-15})$ m.

Modelul planetar al atomului, ținînd seama de postulatele lui Bohr (a. stările legate ale atomului sînt stări staționare; b. la trecerea dintr-o stare staționară, m, în altă stare staționară, n, atomii absorb sau emit radiație electromagnetică a cărei frecvență este $\nu_{mn} = \frac{1}{h}(E_m - E_n)$) și de condiția de cuantificare $2\pi r = n\lambda = n\frac{h}{p}$, a condus la expresia razei primei orbite Bohr:

$$r_1 = \frac{\varepsilon_0 h^2}{\pi m_0 e^2} = 0{,}529 \cdot 10^{-10} \text{ m}$$

și la expresia energiei totale cuantificate a electronului în atomul de hidrogen

$$E_n = -\frac{m_0 e^4}{8h^2} \cdot \frac{1}{\varepsilon_0^2 n^2},$$

n fiind numărul cuantic principal. Pentru constanta Rydberg s-a obținut

$$R = \frac{m_0 e^4}{8h^2 \varepsilon_0^2} = 1{,}097373 \cdot 10^7 \text{ m}^{-1}.$$

Pentru un atom hidrogenoid, energia totală cuantificată a electronului este:

$$E_n = -RZ^2 \frac{1}{n^2}.$$

Tabloul periodic al elementelor poate fi explicat cu ajutorul numerelor cuantice (numărul cuantic principal $n = 1, 2, ...$; numărul cuantic orbital $l = 0, 1, 2, ..., n-1$, numărul cuantic magnetic $m = 0, \pm 1, ..., \pm l$, numărul cuantic de spin $s = \pm \frac{1}{2}$) și principiul de excluziune al lui Pauli, numărul maxim de electroni cu același număr cuantic principal fiind:

$$\sum_{l=0}^{n-1} 2(2l+1) = 2n^2.$$

e. Nucleul este format din Z protoni și $(A-Z)$ neutroni, A fiind numărul de masă, iar Z numărul atomic.

Stabilitatea nucleelor atomice este asigurată de energia de legătură (energia necesară pentru a desface un nucleu izolat, în repaus, în nucleoni izolați în repaus):

$$W_{\text{leg.}} = [Zm_p + (A-Z)m_n - M(A, Z)]c^2,$$

unde $M(A, Z)$ este masa nucleului de număr de masă A și de număr atomic Z.

Masa atomică este dată de expresia:

$$M_a(A, Z) = M(A, Z) + Zm_e - \frac{1}{c^2} W_{\text{leg.}}^{\text{electroni}},$$

unde $W_{\text{leg.}}^{\text{electroni}} = 15{,}73 \cdot Z^{7/3}$ [eV].

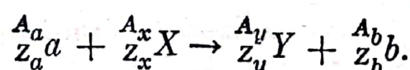
Deoarece masa atomică se poate determina experimental, avem:

$$W_{\text{leg.}} = [Zm_H + (A-Z)m_n - M_a(A, Z)]c^2.$$

Raza unui nucleu atomic este dată de expresia:

$$R = R_0 A^{1/3} = (1{,}20 \pm 0{,}01) \cdot 10^{-15} A^{1/3} \text{ [m]}.$$

f. Procesul prin care două particule sau sisteme de particule interacționează prin forțe nucleare, ansamblul desfăcîndu-se în mai multe particule (nuclee), poartă numele de reacție nucleară:



$${}^{A_a}_{Z_a}a + {}^{A_x}_{Z_x}X \rightarrow {}^{A_y}_{Z_y}Y + {}^{A_b}_{Z_b}b.$$

Legea conservării energiei într-o reacție nucleară conduce la energia de reacție:

$$Q = E_c^b + E_c^Y - E_c^a - E_c^X,$$

unde E_c sînt energiile cinetice ale componenților. Dacă $Q > 0$, reacția se numește exoenergetică, iar dacă $Q < 0$, reacția se numește endoenergetică.

Dacă se ține seama și de legea conservării impulsului, în sistemul laboratorului avînd $E_c^X = 0$, se poate obține o legătură între energia de reacție, Q, și caracteristicile particulei b, exprimată prin relația:

$$Q = \left(1 + \frac{m_b}{m_X}\right) E_c^b - \left(1 - \frac{m_a}{m_Y}\right) E_c^b - \frac{\sqrt{2m_a m_b E_c^a E_c^b}}{m_Y} \cos\theta,$$

θ fiind unghiul sub care este împrăștiată particula b față de direcția de deplasare a particulei a.

g. Legea dezintegrării radioactive este exprimată prin relația:

$$N = N_0 e^{-\frac{t}{\tau}},$$

unde N este numărul de sisteme în stare excitată la momentul t, N_0 numărul de sisteme în stare excitată la momentul inițial ($t_0 = 0$), iar τ este viața medie a sistemului; $\frac{1}{\tau} = \lambda$ poartă numele de constantă radioactivă sau probabilitatea de dezintegrare în unitate de timp: $T_{1/2} = \frac{\ln 2}{\lambda}$ se numește timp de înjumătățire.

Legea de atenuare a fotonilor γ se exprimă prin:

$$I(x) = I(0)e^{-\mu x},$$

x fiind grosimea stratului de substanță străbătută de fascicul, $I(0)$ intensitatea fasciculului la intrarea în strat, iar $I(x)$ intensitatea fasciculului la ieșirea din strat.

h. Particulele elementare pot să interacționeze, cunoscîndu-se trei tipuri de interacțiuni elementare: interacțiuni nucleare, interacțiuni electromagnetice și interacțiuni slabe. Aceste interacțiuni satisfac legea de conservare impuls-energie, legea de conservare a momentului cinetic și legea de conservare a sarcinii electrice și barionice. Interacțiunile tari mai satisfac legea de conservare a stranietății etc.

B. PROBLEME DATE LA CONCURSURILE DE ADMITERE ÎN ÎNVĂȚĂMÎNTUL SUPERIOR

ENUNȚURI
1984

1. ÎNVĂȚĂMÎNTUL TEHNIC

α. PROFILURILE: MECANIC, ELECTRIC, ENERGETIC, MINE, PETROL, METALURGIE, CONSTRUCȚII, GEODEZIE, TEHNOLOGIA ȘI CHIMIA TEXTILELOR, TEHNOLOGIA ȘI CHIMIA PRODUSELOR ALIMENTARE, FORESTIER (specializarea INDUSTRIALIZAREA LEMNULUI), GEOLOGIE

I.1°. Două corpuri cu masele $m_1 = 1$ kg și $m_2 = 0{,}5$ kg sînt aruncate vertical în sus, din același loc de pe suprafața Pămîntului, cu vitezele inițiale $v_{01} = 65\ \mathrm{m \cdot s^{-1}}$ și, respectiv, $v_{02} = 100\ \mathrm{m \cdot s^{-1}}$, la momentele $t_1 = 0$ și $t_2 = \Delta t$. În condițiile în care corpurile se ciocnesc plastic în aer, să se determine: a) viteza inițială a corpului format prin ciocnire, dacă $\Delta t = 7$ s; b) creșterea temperaturii celor două corpuri în urma ciocnirii (în condițiile de la punctul a), dacă înaintea ciocnirii corpurile au aceeași temperatură, iar căldura lor specifică are aceeași valoare, $c = 1\,500\ \mathrm{J \cdot kg^{-1} \cdot K^{-1}}$; c) intervalul de valori ale lui Δt pentru care ciocnirea se produce la o înălțime $h \geqslant 180$ m față de suprafața Pămîntului. Se va lua $g = 10\ \mathrm{m \cdot s^{-2}}$.

2°. O cantitate de heliu ocupă volumul $V_1 = 2$ l, la presiunea $p_1 = 10^5\ \mathrm{N \cdot m^{-2}}$ și temperatura $T_1 = 280$ K. Gazul este comprimat adiabatic pînă la volumul $V_2 = V_1/8$ și apoi destins izoterm pînă cînd presiunea sa devine $p_3 = 1{,}5\ p_1$. Gazul revine la starea inițială 1 printr-o transformare reprezentată în coordonatele p, V prin segmentul de dreaptă care unește punctele reprezentînd stările 3 și 1. Cunoscînd căldura molară la presiune constantă a heliului $C_p = \frac{5R}{2}$ (unde R este constanta universală a gazelor), să se determine: a) exponentul adiabatic al heliului, precum și temperatura și volumul său în starea 3; b) lucrul mecanic și căldura schimbate de gaz cu exteriorul în procesul $3 \to 1$; c) randamentul motorului termic care ar funcționa după ciclul reversibil considerat. Se dau: $\lg 2 = 0{,}301$ și $\lg 3 = 0{,}477$.

3°. Două condensatoare cu capacitățile $C_1 = 100\ \mu\mathrm{F}$ și $C_2 = 250\ \mu\mathrm{F}$ au cîte o armătură unite între ele printr-un fir legat la pămînt, celelalte armături fiind încărcate cu sarcinile $q_1 = 5 \cdot 10^{-3}$ C și, respectiv, $q_2 = -3 \cdot 10^{-3}$ C. Se leagă aceste armături printr-un solenoid. Se cere: a) tensiunea electrică dintre armăturile fiecărui condensator, după stabilirea echilibrului electrostatic.

După stabilirea echilibrului, la bornele solenoidului se conectează o sursă de tensiune alternativă. Știind că rezonanța circuitului LC considerat se obține pentru frecvența $\nu_0 = 159$ Hz a tensiunii alternative, să se determine: b) inductanța solenoidului și intensitatea efectivă a curentului debitat pe circuit de sursa cu tensiunea alternativă $U = 14{,}1 \sin 3\,140\ t$ (V), dacă — în acest caz — rezistența electrică a solenoidului este neglijabilă; c) valoarea maximă a vitezei de transport a electronilor liberi în conductorul solenoidului, în condițiile punctului b, dacă aria secțiunii conductorului solenoidului este $A = 0{,}5\ \mathrm{mm^2}$, iar concentrația electronilor liberi din conductor este $n = 10^{29}$ electroni liberi/m^3. Se dă sarcina electrică elementară $e = 1{,}6 \cdot 10^{-19}$ C.

4°. Să se deducă: a) teorema variației energiei cinetice a punctului material; b) viteza termică a moleculelor unui gaz ideal, pornind de la formula fundamentală a teoriei cinetico-moleculare a gazelor; c) tensiunea electromotoare indusă într-un conductor rectiliniu care se deplasează cu viteză constantă într-un cîmp magnetic uniform.

5°. Să se scrie, indicînd semnificațiile mărimilor fizice care intervin: a) legea lui Bernoulli; b) variația densității unui corp solid cu temperatura; c) expresia inductanței unei bobine.

II. 1°. Un corp cu masa $m = 10$ kg urcă pe un plan înclinat cu unghiul $\theta = 30°$, sub acțiunea unei forțe $F = 100$ N, orientată orizontal, care se aplică corpului din momentul în care acesta se află în repaus, la baza planului înclinat. Știind că în cea de-a doua secundă a mișcării corpul parcurge distanța $d = 3$ m, să se calculeze: a) accelerația mișcării corpului; b) coeficientul de frecare între corp și plan; c) lucrul mecanic efectuat de forța F pînă cînd corpul ajunge la înălțimea $h = 10$ m. Se va lua $g = 10$ m/s².

2°. Două vase cu volumele $V_1 = 10^{-3}$ m³ și $V_2 = 3 \cdot 10^{-3}$ m³ sînt puse în comunicație printr-un tub de volum neglijabil. Vasele conțin heliu la temperatura $T = 300$ K și presiunea $p = 1\,500$ N/m². Gazul din vasul 1 este încălzit pînă cînd temperatura sa se dublează, fără ca aceasta să afecteze temperatura gazului din vasul 2. Să se calculeze: a) masa totală de gaz din cele două vase; b) presiunea gazului din vase după încălzire; c) raportul dintre vitezele termice ale moleculelor gazului din cele două vase, în starea finală. Se dau: masa molară a heliului $\mu = 4\,\frac{\text{kg}}{\text{kmol}}$ și constanta universală a gazelor perfecte $R = 8\,310\,\frac{\text{J}}{\text{kmol} \cdot \text{K}}$. Se neglijează dilatarea vasului 1.

3°. Două sfere metalice, identice, de dimensiuni foarte mici și mase egale $m = 3 \cdot 10^{-5}$ kg, sînt atîrnate de două fire izolatoare, inextensibile, avînd fiecare lungimea $L = 11$ cm, distanța dintre punctele (aflate la aceeași înălțime) în care sînt fixate celelalte capete ale firelor fiind $d = 2$ cm. În situația în care firele sînt verticale, sferele sînt încărcate cu sarcini electrice egale și de același semn. După aceasta, sferele se deplasează și rămîn în echilibru cînd tensiunea din fire devine $T = 6 \cdot 10^{-4}$N. Să se calculeze: a) sarcina electrică de pe fiecare sferă; b) lucrul mecanic efectuat de forțele electrice pentru a aduce sferele din poziția inițială în cea finală; c) știind că o sferă identică cu cele considerate, inițial neîncărcată electric, este adusă în contact pe rînd, separat, cu fiecare dintre cele două sfere încărcate electric, să se determine ce parte din sarcina electrică inițială păstrează fiecare sferă. Se dau: $\frac{1}{4\pi\varepsilon_0} = 9 \cdot 10^9$ N · m²/C² și $g = 10$ m/s².

4°. Să se deducă expresiile: a) accelerației centripete; b) efortului unitar exercitat de o bară încălzită și fixată la capete; c) forței Lorentz care acționează asupra electronilor, într-un cîmp magnetic uniform.

5°. Să se formuleze: a) principiile I, II și III ale mecanicii newtoniene; b) principiul al doilea al termodinamicii; c) legile lui Kirchhoff pentru rețele electrice.

III. 1°. Se consideră sistemul din figura F.B.1. Știind că masele corpurilor 1 și 2 sînt egale ($m_1 = m_2 = 1$ kg), iar firul care le unește — trecînd peste scripetele S

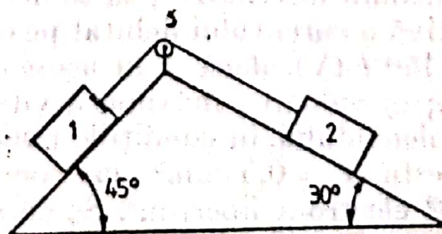


Fig. F.B.1

mobil, fără frecare — este inextensibil, să se determine: a) accelerația sistemului în absența frecărilor; b) accelerația sistemului în cazul în care coeficienții de frecare sînt $\mu_1 = \mu_2 = 0,1$; c) căruia dintre corpuri trebuie să i se adauge o masă suplimentară și care este valoarea acestei mase pentru ca sistemul să fie în echilibru sau să se miște uniform (rezolvare atît în condițiile punctului a, cît și în condițiile punctului b). Se va lua $g = 9,8$ m/s².

2°. Un calorimetru cu capacitatea calorică $C = 110$ J/K conține $m_1 = 0,5$ kg apă la temperatura $t_1 = 30$ °C. Se introduce în calorimetru o cantitate de gheață la $t_2 = -10$ °C, cu masa $m_2 = 0,2$ kg. Să se determine: a) temperatura finală a amestecului și masa de gheață care se topește; b) căldura necesară pentru aducerea amestecului și calorimetrului la $t_f = 100$ °C și vaporizarea întregii cantități rezultate de apă; c) randamentul motorului termic care ar funcționa după un ciclu Carnot reversibil, cu gaz perfect, între temperaturile t_f și t_2. Se dau căldurile specifice ale gheții $c_g = 2\,100 \frac{\text{J}}{\text{kg} \cdot \text{K}}$ și apei $c_a = 4\,180 \frac{\text{J}}{\text{kg} \cdot \text{K}}$ și căldurile latente de topire a gheții $\lambda_t = 334 \frac{\text{kJ}}{\text{kg}}$, respectiv de vaporizare a apei $\lambda_v = 2\,250 \frac{\text{kJ}}{\text{kg}}$.

3°. Un consumator format din 100 becuri identice și o baie de electroliza, conectate toate în paralel, este racordat la un generator de curent continuu cu tensiunea electromotoare $E = 144$ V și rezistența internă $r = 0,22\ \Omega$, prin conductoare de rezistivitate $\rho = 1,75 \cdot 10^{-8}\ \Omega \cdot$ m. Știind că generatorul debitează un curent de intensitate $I = 60$ A, lungimea fiecărui conductor $d = 325$ m, tensiunea electrică la consumator $U_c = 120$ V, iar intensitatea curentului în baie $I_e = 10$ A, să se determine: a) tensiunea la bornele generatorului și aria secțiunii conductorilor de alimentare; b) intensitatea curentului electric prin fiecare bec și puterea disipată într-un bec; c) durata în care baia de electroliză produce o cantitate de 16 g oxigen.

Se dă echivalentul electrochimic al oxigenului $K = 0,0829$ mg/C.

4°. Să se scrie, indicînd semnificațiile mărimilor fizice care intervin: a) ecuația undei plane; b) ecuația Clapeyron-Mendeleev; c) legea inducției electromagnetice.

5°. Să se deducă expresiile: a) elongației, vitezei și accelerației oscilatorului liniar armonic; b) lucrului mecanic într-o transformare adiabatică a unui gaz perfect; c) inductanței unei bobine.

IV.1°. De tavanul unui ascensor este legat un dinamometru, prevăzut în partea de jos cu un scripete care se poate roti liber. Peste scripete este trecut un fir inextensibil, la capetele căruia sînt legate două corpuri cu masele $m_1 = 0,1$ kg și $m_2 = 0,2$ kg. Neglijînd frecările, să se determine: a) accelerația sistemului de corpuri cînd ascensorul este în repaus; b) forța indicată de dinamometru cînd ascensorul este în repaus; c) accelerația mișcării ascensorului și accelerația sistemului de corpuri în cazul în care dinamometrul indică forța $F = 2$ N. Se va lua accelerația gravitațională $g = 9,8$ m/s².

2°. Un corp de pompă avînd volumul $V = 30$ l conține $N = 3,01 \cdot 10^{23}$ molecule de azot, la temperatura $t = 27$ °C. Temperatura gazului este mărită cu $\Delta t = 100$ °C, printr-o transformare izobară. Să se determine: a) presiunea azotului, volumul ocupat de acesta după încălzirea izobară și lucrul mecanic efectuat de gaz în cursul procesului izobar; b) viteza medie pătratică a moleculelor azotului în starea inițială; c) densitatea inițială a azotului. Se dau: masa molară a azotului $\mu = 28 \frac{\text{kg}}{\text{kmol}}$, constanta gazelor perfecte $R = 8\,310 \frac{\text{J}}{\text{kmol} \cdot \text{K}}$ și numărul lui Avogadro $N_A = 6,02 \cdot 10^{26} \frac{\text{molecule}}{\text{kmol}}$.

3°. Se consideră deplasarea uniformă, cu viteza $v = 1 \frac{\text{m}}{\text{s}}$, a unui conductor AB, în contact cu conductorii AC și BD, așezați într-un același plan orizontal, la

distanța $d = 0{,}4$ m unul de celălalt (v. fig. F.B.2). Între punctele C și D se conectează o sursă de tensiune electrică, întregul circuit fiind introdus într-un cîmp magnetic uniform de inducție B orientată vertical, de valoare $B = 2$ T. Utilizînd datele înscrise în figură, să se determine: a) tensiunea electromotoare indusă în conductorul AB; b) intensitatea curentului electric care străbate circuitul în condițiile în care

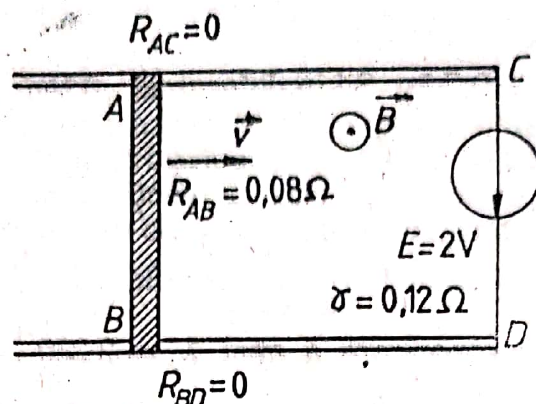


Fig. F.B.2

conductorul AB se mișcă cu viteza indicată; c) puterea necesară pentru învingerea forței rezistente care face ca mișcarea conductorului AB să decurgă cu viteza constantă indicată.

4°. Să se scrie expresiile: a) energiilor cinetică, potențială și totală ale unui oscilator liniar armonic; b) energiei interne a unui gaz ideal; c) forței de interacțiune dintre două conductoare paralele, parcurse de curenți electrici, indicînd semnificațiile fizice ale mărimilor care intervin.

5°. Să se definească: a) coeficientul de frecare la alunecare; b) căldura molară; c) echivalentul electrochimic, indicînd semnificațiile mărimilor fizice care intervin.

V.1°. Un corp cu masa $m = 1$ kg, legat de un resort elastic, efectuează o mișcare oscilatorie armonică cu amplitudinea $A = \frac{\sqrt{2}}{4}$ m, energia totală a oscilatorului fiind $E = 4$ J. Să se determine: a) pulsația mișcării oscilatorii; b) elongația și viteza corpului în momentele în care energia sa cinetică E_c este egală cu energia potențială E_p; c) forța elastică datorată resortului, în momentele în care $E_c = E_p$.

2°. O cantitate de gaz ideal se află într-o incintă de volum $V_1 = 1$ m³, sub presiunea $p_1 = 6 \cdot 10^3$ N/m². Dacă gazul se încălzește sub volum constant, pînă cînd temperatura lui crește cu $\Delta T = T_2 - T_1 = 120$ K, presiunea gazului crește cu 30% față de presiunea inițială p_1. Să se determine: a) temperatura inițială T_1 a gazului; b) numărul de molecule de gaz din incintă; c) căldura primită de gaz în cursul încălzirii izocore considerate. Se dau: exponentul adiabatic al gazului $\gamma = \frac{5}{3}$ și constanta lui Boltzmann $k = 1{,}38 \cdot 10^{-23} \frac{\text{J}}{\text{K}}$.

3°. Un ion pozitiv se mișcă cu viteza $v = 2 \cdot 10^6 \frac{\text{m}}{\text{s}}$ într-un cîmp magnetic uniform de inducție $B = 0{,}4$ T, viteza ionului fiind perpendiculară pe direcția inducției magnetice B. Să se determine: a) sarcina specifică $\frac{q}{m}$ a ionului, știind că raza traiectoriei acestuia în cîmpul magnetic indicat este $R = 10{,}4$ cm; b) timpul în care ionul efectuează o rotație completă în cîmpul magnetic; c) tensiunea electrică sub care a fost accelerat ionul pentru a căpăta viteza v, dacă la începutul accelerării ionul se află în repaus.

4°. Să se scrie, indicînd semnificațiile mărimilor fizice care intervin: a) legea mișcării rectilinii uniform variate; b) expresia randamentului unei mașini termice care funcționează după un ciclu Carnot (reversibil); c) legile lui Kirchhoff.

5°. Să se enunțe: a) teorema variației energiei cinetice a punctului material; b) principiul al doilea al termodinamicii în formulările lui W. Thomson și R. Clausius; c) legea Faraday a inducției electromagnetice.

3. PROFILURILE: CHIMIE, MECANO-CHIMIC

VI.1°. O masă de aer m este încălzită izobar cu $\Delta T = 100$ K, absorbind o cantitate de căldură $Q = 8\,310$ J. Se cer: a) masa de aer m; b) lucrul mecanic efectuat; c) variația energiei interne. Se cunosc: masa molară a aerului $\mu = 29$ kg/kmol; constanta gazelor $R = 8\,310$ J/kmol·K; căldura molară la volum constant $C_V = 5R/2$.

2°. Diferența de temperatură dintre sursa caldă și cea rece, într-o mașină termică care funcționează după un ciclu Carnot, este $\Delta T = 420$ K, iar randamentul ei este $\eta = 0{,}6$. La începutul destinderii izoterme gazul ocupă un volum $V_1 = 1{,}66 \cdot 10^{-2}$ m³ la presiunea $p_1 = 1{,}4 \cdot 10^5$ N/m². Știind că raportul de compresie izotermă este $V_3/V_4 = 2$, se cer: a) temperatura sursei reci T_2; b) numărul de kilomoli de gaz din mașină; c) concentrația n_2 de molecule la sfîrșitul destinderii izoterme. Se dau: constanta gazelor $R = 8\,310$ J/kmol·K; constanta lui Boltzmann $k = 1{,}4 \cdot 10^{-23}$ J/K.

3°. O sursă luminoasă punctiformă S avind intensitatea $I = 100$ cd este situată la distanța $a = 2$ m de un paravan vertical P și la distanțele $b = 2$ m și $c = 3$ m de oglinzile plane O_2 și O_1 perpendiculare una pe cealaltă (v. fig. F.B.3).

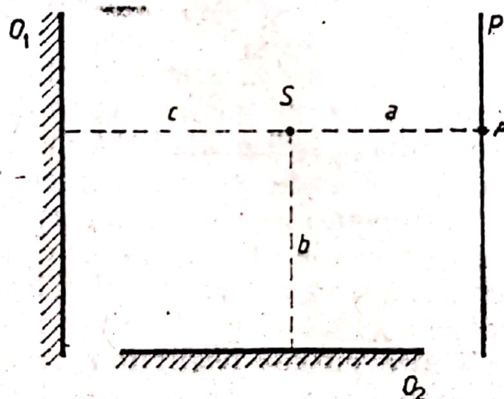


Fig. F.B.3

Se cer: a) fluxul luminos emis de sursa S în mod egal în toate direcțiile; b) iluminarea în punctul A de pe paravanul P; c) la distanța de 0,6 m de sursa S și avînd drept axă optică direcția SA se așază o lentilă biconvexă ($R_1 = R_2$) avînd indicele de refracție $n = 1{,}6$, astfel încît imaginea sursei S se formează în punctul A. Se cere raza de curbură a fețelor lentilei. Se dă: $20^{1,5} \approx 90$.

4°. Să se scrie, indicînd și semnificația simbolurilor care apar: a) formula fundamentală a teoriei cinetico-moleculare a gazelor; b) condițiile de maxim și de minim de interferență; c) interfranja în cazul unei pene optice.

5°. Să se enunțe: **1.** a) ce este un sistem telescopic (afocal); b) principiul II al termodinamicii. **2.** Să se deducă relațiile care ne dau focarele unui dioptru sferic.

VII.1°. Într-un cilindru cu piston mobil se găsesc 0,1 kmoli de aer. Volumul ocupat de gaz la temperatura $t_1 = 27$ °C este $V_1 = 0{,}5$ m³. Aerul absoarbe izobar o cantitate de căldură Q_p și se dilată pînă cînd volumul său devine $V_2 = 0{,}55$ m³. Se cer: a) lucrul mecanic efectuat de gaz; b) căldura Q_p absorbită; c) variația energiei interne a gazului.

Se dau: constanta gazelor ideale $R = 8\,310$ J/kmol·K și căldura molară $C_p = 7R/2$.

2°. O lentilă plan-convexă, din sticlă are indicele de refracție $n = 1{,}5$ și raza de curbură $R = 20$ cm. Se cer: a) distanța focală și convergența lentilei; b) poziția, mărimea și natura imaginii unui obiect înalt de 10 mm și situat la 20 cm de lentilă; c) care va fi distanța focală a lentilei cînd aceasta este cufundată în apă ($n_a = 4/3$)?

3°. O cantitate $\nu = 0{,}5$ kmoli de gaz ideal efectuează un ciclu Carnot (reversibil) cu un randament $\eta = 0{,}6$. Știind că diferența dintre temperaturile gazului pe cele două izoterme este $\Delta T = 420$ K, se cer: a) temperaturile gazului în cursul celor două transformări izoterme; b) lucrul mecanic în cursul destinderii izoterme, L_{12}, dacă raportul volumelor în stările finală, respectiv inițială, este $V_2/V_1 = 2$; c) energia cinetică medie de translație a moleculelor pe izoterma corespunzătoare temperaturii T_2.

Se dau: constanta universală a gazelor ideale $R = 8\,310$ J/kmol·K, constanta lui Boltzmann $k = 1{,}4 \cdot 10^{-23}$ J/K, ln 2 = 0,693.

4°. Să se definească: a) masa moleculară relativă; b) fluxul luminos; c) energia internă a unui sistem termodinamic.

5°. Să se scrie, indicînd și semnificația simbolurilor care apar: a) relația relativistă dintre masă și viteză; b) expresia interfranjei care se obține cu un dispozitiv Young; c) relația lui Robert Mayer între căldurile molare C_p și C_V ale gazului perfect.

γ. ÎNVĂȚĂMÎNTUL DE SUBINGINERI (3 ani) — toate profilurile; SPECIALIZĂRILE DIN ÎNVĂȚĂMÎNTUL PEDAGOGIC DE CHIMIE-FIZICĂ (3 ani) ȘI MATEMATICĂ-FIZICĂ (3 ani)

VIII.1°. Pe un disc care se rotește în plan orizontal cu turația de 120 rotații pe minut, se așază un corp de dimensiuni mici, cu masa de $3 \cdot 10^{-2}$ kg. Coeficientul de frecare la alunecare al corpului pe disc fiind 0,4, să se afle: a) la ce distanță maximă de centrul discului trebuie așezat corpul, pentru ca acesta să nu alunece; b) mărimea, direcția și sensul momentului cinetic al corpului față de centrul discului, cînd corpul este așezat la distanța $2 \cdot 10^{-2}$ m față de centru; c) mărimea momentului forței de greutate a corpului față de centrul discului, în condițiile de la punctul b.

2°. Un catod incandescent situat într-o incintă vidată, emite un fascicul de electroni. Electronii, avînd viteza inițială neglijabilă, sînt accelerați la o tensiune $U = 1\,000$ V, aplicată între catod și un anod situat la distanța $d = 10^{-2}$ m față de catod. Să se afle: a) viteza electronilor la anod; b) după cît timp de la emisie un electron va ajunge la anod; c) numărul de electroni care sosesc pe secundă la anod, dacă între catod și anod trece un curent cu intensitatea $I = 1{,}6$ mA. Se consideră masa electronului $m = 9{,}1 \cdot 10^{-31}$ kg, iar sarcina electrică elementară $e = 1{,}6 \cdot 10^{-19}$ C.

3°. Să se trateze următoarele subiecte: a) cuplul de forțe; b) oscilatorul armonic liniar; c) interacțiunea magnetică a curenților electrici liniari.

4°. Să se scrie, indicîndu-se și semnificația mărimilor care intervin: a) ecuația undei plane; b) legea inducției electromagnetice; c) puterea activă, reactivă și aparentă a unui circuit de curent alternativ.

IX.1°. Asupra unui corp cu masa $m = 2$ kg, care se deplasează pe un plan orizontal cu viteza inițială $v_0 = 4$ m/s, se aplică o forță orizontală $F = 8$ N, în sensul deplasării corpului. Coeficientul de frecare dintre corp și plan este $\mu = 0{,}2$. După ce forța F a efectuat lucrul mecanic $L = 18$ J, acțiunea sa încetează. Să se afle: a) accelerația corpului și timpul după care încetează acțiunea forței; b) spațiul total parcurs de corp pînă la oprire; c) graficele dependenței de timp a vitezei corpului și a spațiului parcurs, de la începutul aplicării forței și pînă la oprire. Se consideră $g \approx 10$ m/s² și coordonata inițială nulă.

2°. La bornele unui circuit serie de curent alternativ alcătuit dintr-un rezistor cu rezistența $R = 350\ \Omega$, o bobină de inductanță $L = \frac{4}{\pi}$ H și un condensator cu capacitatea $C = \frac{2}{\pi} \cdot 10^{-4}$ F, se aplică tensiunea alternativă $u = 240 \sin 100\,\pi t$ (V). Să se determine: a) expresia intensității instantanee a curentului din circuit; b) puterile activă, reactivă și aparentă; c) frecvența curentului alternativ pentru care are loc rezonanța și intensitatea curentului la rezonanță.

3°. Să se enunțe și să se scrie, indicînd semnificația mărimilor care intervin: a) legea atracției universale; b) legea lui Hooke; c) legea lui Ohm pentru un circuit electric simplu.

4°. Să se deducă: a) expresia randamentului unui plan înclinat; b) ecuația de continuitate în cazul curgerii staționare a lichidelor; c) capacitatea unei baterii de condensatori legați în paralel.

X.1°. Un ascensor are masa de 880 kg, iar cablul său de acționare are lungimea inițială de 25 m și masa pe unitatea de lungime de 0,8 kg/m. Accelerația mișcării la pornirea ascensorului în sus este 2 m/s^2. Efortul unitar admisibil în cablu este de 10^8 N/m^2, iar modulul său de elasticitate este $2 \cdot 10^{11}$ N/m^2. Să se afle: a) forța de tracțiune suportată de cablu la începutul urcării; b) secțiunea cablului pentru a nu se depăși efortul unitar admisibil; c) alungirea absolută a cablului datorată forței de tracțiune aplicată la pornire.

2°. Un circuit serie *RLC* cuprinde un rezistor care are $R = 4\ \Omega$, o bobină de inductanță $L = 6{,}37$ mH și un condensator de capacitate $C = 159\ \mu$F și este alimentat de la o sursă cu tensiunea efectivă $U = 120$ V și frecvența $\nu = 200$ Hz. Să se afle: a) intensitatea efectivă a curentului în circuit și tensiunile maxime la bornele rezistorului, bobinei și condensatorului; b) tangenta unghiului de defazaj dintre curent și tensiune la bornele circuitului; c) frecvența de rezonanță a circuitului.

3°. Să se trateze următoarele subiecte: a) forța centripetă și forța centrifugă; b) diferența de presiune dintre două puncte din interiorul unui lichid; c) electroliza și legile ei.

4°. Să se scrie, indicîndu-se și semnificația mărimilor care intervin: a) ecuația lui Bernoulli; b) legile lui Kirchhoff; c) expresia forței Lorentz.

XI.1°. Un corp cu masa $m = 15$ kg este pus în mișcare pe o suprafață orizontală sub acțiunea unei forțe $F = 50$ N, a cărei direcție face cu orizontala un unghi $\alpha = 30°$ (v. fig. F.B.4). Acțiunea forței durează $\Delta t = 4$ secunde. Considerînd coeficientul de frecare $\mu = 0{,}1$, să se afle: a) forța de frecare; b) accelerația corpului; c) lucrul mecanic efectuat de forța F (se consideră $g = 10$ m/s^2).

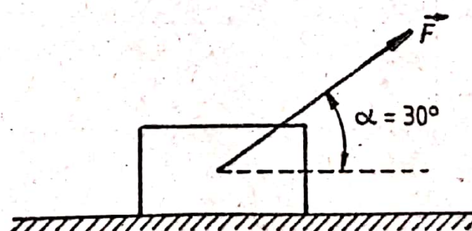


Fig. F.B.4

2°. Un galvanometru cu rezistența interioară de 9,5 Ω poate măsura curenți pînă la 50 mA. Scala aparatului posedă 50 diviziuni. Să se determine: a) rezistența șuntului pentru a putea măsura curenți pînă la 1 A; b) tensiunea la bornele galvanometrului cînd acul se află la jumătatea scalei; c) ce rezistență trebuie conectată în serie cu galvanometrul, pentru a obține un voltmetru capabil să măsoare tensiuni pînă la 30 V?

3°. Să se trateze următoarele subiecte: a) compunerea forțelor paralele de același sens; b) energia oscilatorului armonic; c) mișcarea purtătorilor de sarcină electrică în cîmp magnetic uniform.

4°. Să se scrie, indicînd și semnificația fizică a mărimilor care intervin: a) expresiile perioadelor oscilatorului liniar armonic și a pendulului gravitațional; b) expresia fluxului magnetic; c) legea lui Ohm pentru un circuit RLC serie în curent alternativ.

XII.1°. În două puncte A și B aflate la distanța $d = 26$ km se găsesc la același moment două mașini M_1 și M_2. Mașina M_1 are o mișcare rectilinie uniform accelerată, cu viteza inițială $v_0 = 14{,}4$ km/oră și se deplasează din A către B. Mașina M_2 are o mișcare rectilinie uniformă și se deplasează din B către A. În momentul întîlnirii, cele două mașini au aceeași viteză, iar raportul dintre spațiile parcurse de M_1 și, respectiv, M_2 este $k = \frac{5}{8}$. Se cer: a) accelerația mașinii M_1 și viteza mașinii M_2; b) care este distanța dintre mașini după $t = 10$ s de la întîlnire; c) expresiile perioadelor de oscilație ale unor pendule gravitaționale de aceeași lungime, care s-ar afla în fiecare mașină.

2°. O baterie cu tensiunea electromotoare $E = 24$ V este conectată la un rezistor avînd rezistența $R = 4\ \Omega$. Cunoscînd intensitatea curentului prin circuit $I = 5$ A, să se afle: a) căderea de tensiune pe sursă; b) puterea dezvoltată de sursă și puterea disipată sub formă de căldură în rezistor; c) inducția cîmpului magnetic produs de unul dintre firele de legătură ale circuitului, considerat practic infinit lung, la distanța $r = 1$ cm față de fir. Se consideră $\mu = 4\pi \cdot 10^{-7}$ N/A^2.

3°. Se cer: a) condiția de echilibru a unui punct material supus la legături; b) definirea fenomenelor de difracție și de interferență a undelor; c) definiția amperului.

4°. Să se deducă: a) conservarea energiei mecanice în mișcarea de cădere liberă; b) expresia inductanței unei bobine; c) expresia t.e.m. induse într-un conductor rectiliniu deplasat cu viteză constantă, perpendicular pe liniile de cîmp magnetic.

XIII.1°. O forță orizontală $F = 100$ N menține în echilibru un corp de dimensiuni neglijabile, așezat pe un plan înclinat cu unghiul $\alpha = 60°$ față de orizontală, la înălțimea $h = 20$ m față de baza planului ca în figura F.B.5. a) Să se calculeze

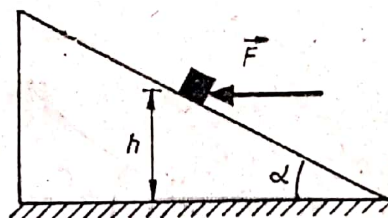


Fig. F.B.5

masa corpului și reacțiunea planului inclinat. b) Îndepărtînd forța F, corpul alunecă fără frecare pe planul înclinat și ajunge apoi pe un plan orizontal, pe care se deplasează cu frecare, oprindu-se după ce a parcurs distanța $l = 40$ m față de baza planului înclinat. Să se determine coeficientul de frecare dintre corp și planul orizontal. c) Care este energia cinetică a corpului, atunci cînd acesta a parcurs jumătate din distanța l, pe planul orizontal? Se consideră $g \approx 10$ m/s^2.

2°. Un circuit electric cuprinde două generatoare avînd tensiunile electromotoare $E_1 = 4$ V și $E_2 = 3{,}2$ V, cu rezistențele interioare $r_1 = 0{,}5\ \Omega$ și, respectiv, $r_2 = 1{,}5\ \Omega$, legate în serie, precum și un rezistor A avînd rezistența $R_1 = 10\ \Omega$. Să se afle: a) căderea de tensiune în circuitul exterior și tensiunea la

bornele fiecărui generator; b) numărul de electroni care trec printr-o secțiune transversală a circuitului în timpul $t = 10$ s, sarcina electronului fiind $e = 1{,}6 \cdot 10^{-19}$ C; c) intensitățile curenților prin fiecare latură a circuitului, dacă în paralel cu rezistorul A se leagă un alt rezistor B, avînd rezistența $R_2 = 5\ \Omega$.

3°. Să se enunțe și să se scrie, indicînd semnificația mărimilor care intervin: a) teorema variației energiei cinetice a punctului material; b) legea lui Arhimede; c) definiția inducției unui cîmp magnetic uniform.

4°. Să se deducă: a) expresia accelerației centripete în mișcarea circulară uniformă; b) expresia potențialului electric creat de o sarcină punctiformă; c) viteza unghiulară a unei particule încărcate electric într-un cîmp magnetic uniform.

XIV.1°. Două corpuri alăturate A și B, de mase $m_1 = 20$ kg și, respectiv, $m_2 = 5$ kg se află inițial în repaus pe un plan orizontal (fig. F.B.6). Corpul A este

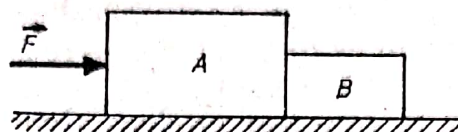


Fig. F.B.6

împins cu o forță orizontală $F = 100$ N, coeficientul de frecare dintre corpuri și plan fiind $\mu = 0{,}1$. a) Să se calculeze toate forțele care acționează asupra fiecărui corp. b) Care este spațiul total parcurs de corpuri pînă la oprire, dacă după $t = 2$ s acțiunea forței F încetează? c) Să se reprezinte grafic dependențele vitezei și spațiului celor două corpuri în funcție de timp, de la începutul mișcării și pînă la oprire. Se consideră $g \approx 10$ m/s².

2°. Un circuit serie de curent alternativ este format dintr-un rezistor cu rezistența $R = 150\ \Omega$, o bobină de inductanță $L = 10^{-2}$ H și un condensator avînd capacitatea $C = 1\ \mu$F. Să se determine: a) pulsația de rezonanță a curentului; b) impedanța circuitului pentru o frecvență a curentului alternativ $\nu = \frac{10^3}{\pi}$ Hz; c) frecvența curentului pentru care defazajul dintre curent și tensiunea la bornele circuitului este $\varphi = \frac{\pi}{4}$.

3°. Să se scrie: a) condițiile de echilibru ale solidului rigid liber; b) legea lui Pascal; c) definiția potențialului electric într-un punct.

4°. Să se deducă: a) perioada proprie de oscilație a pendulului gravitațional; b) rezistența echivalentă a doi rezistori legați în paralel; c) deviația unui electron care intră într-un cîmp electric uniform cu viteza inițială normală la liniile de cîmp.

XV.1°. Într-un calorimetru de capacitate calorică $C = 120$ J/K se află o masă $m_a = 1$ kg de apă la temperatura $t_a = 4°$ C. Se introduce o bilă de fier de masă $m_1 = 0{,}5$ kg și temperatură $t_1 = 150$ °C. Se cer: a) temperatura finală θ; b) cu cît se modifică volumul bilei de fier dacă la 0 °C ea are volumul $V_0 = 6{,}4 \cdot 10^{-5}$ m³; c) denivelarea care apare într-un tub capilar, avînd diametrul $d = 0{,}8$ mm, introdus în apa din calorimetru în starea inițială. Se dau: căldura specifică a apei $c_a = 4\,180$ J/kg·K, căldura specifică a fierului, $c_{Fe} = 500$ J/kg·K, coeficientul de dilatare volumică al fierului $\gamma = 3{,}6 \cdot 10^{-5}$ K^{-1}, coeficientul de tensiune superficială al apei, $\sigma = 0{,}073$ N/m, densitatea apei $\rho = 1\,000$ kg/m³ și accelerația gravitațională $g \approx 10$ m/s².

2°. O lentilă biconvexă de sticlă formează o imagine reală și de 3 ori mai mare decît obiectul. Știind că distanța dintre obiect și imagine este de 80 cm, se cer: a) poziția obiectului și a imaginii față de lentilă; b) distanța focală și convergența lentilei; c) indicele de refracție al lentilei, dacă $R_1 = R_2 = 20$ cm.

3°. Să se scrie, indicînd și semnificația simbolurilor care apar: a) formula indicelui de refracție al unei prisme; b) ecuația transformării adiabatice; c) condiția de reflexie totală.

4°. Se cer: a) să se enunțe condiția necesară și suficientă ca două unde să interfere; b) să se definească numărul lui Avogadro; c) să se deducă expresia vitezei termice a unei molecule de gaz ideal.

2. ÎNVĂȚĂMÎNTUL UNIVERSITAR

(PROFILUL FIZICĂ)

XVI.1°. Un automobil de masă $m = 1\,000$ kg se mișcă în plan orizontal pe un drum circular cu raza $R = 100$ m. Coeficientul de frecare la alunecare dintre roți și drum este $\mu = 0{,}4$. Știind că distanța dintre roți este $d = 1{,}6$ m, iar centrul de greutate al automobilului se află la înălțimea $h = 0{,}4$ m față de planul orizontal, să se afle: a) viteza minimă la care s-ar produce alunecarea laterală a automobilului; b) viteza minimă la care s-ar produce răsturnarea automobilului; c) admițînd că se produce răsturnarea, să se afle lucrul mecanic consumat de automobil pentru a se răsturna cu un unghi de 90°; d) momentul cinetic al automobilului, considerat punct material, față de centrul cercului, în momentul alunecării și în momentul răsturnării. Se va lua $g = 10$ m/s^2.

2°. O sferă de masă $M = 2$ kg este suspendată de un fir de lungime $l = 4{,}9$ m. Firul este deviat cu un unghi $\alpha = 60°$ față de verticală și lăsat liber. Cînd sfera trece prin poziția de echilibru, se ciocnește plastic cu o bilă de masă $m = 80$ g, care se mișcă în sens opus vitezei sferei. Știind unghiul de deviație maxim $\theta = 30°$ al corpurilor după ciocnire, să se afle viteza bilei înainte de ciocnire, pentru ambele sensuri de deviație față de verticală. Se va lua $g = 10$ m/s^2.

3°. O mașină termică funcționează după un ciclu format din două izocore V_1 și $V_2 = eV_1$ ($e \cong 2{,}7$ fiind baza logaritmului natural) și două izoterme $T_1 = 400$ K și $T_2 = 300$ K, substanța de lucru fiind un gaz ideal. Cunoscînd numărul de kilomoli de gaz $\nu = 1$ kmol și căldura molară la volum constant $C_V = \frac{5}{2} R$, unde $R = 8{,}31 \cdot 10^3$ J/kmol·K, să se calculeze: a) căldura absorbită de gaz într-un ciclu; b) căldura cedată de gaz într-un ciclu; c) lucrul mecanic efectuat de mașină într-un ciclu; d) randamentul mașinii; e) randamentul mașinii, dacă ar lucra după un ciclu Carnot între T_1 și T_2.

4°. Să se enunțe: a) principiul doi al dinamicii (principiul fundamental); b) legea lui Arhimede; c) principiul doi al termodinamicii în formulările lui W. Thomson și R. Clausius.

5°. Să se deducă: a) energia oscilatorului armonic; b) legea lui Jurin pentru tuburile capilare; c) viteza termică a moleculelor unui gaz ideal.

XVII.1°. O sursă de curent continuu disipă în circuitul exterior aceeași putere $P = 100$ W cînd la bornele ei este legat un rezistor cu rezistența $R_1 = 4\ \Omega$ sau un rezistor cu rezistența $R_2 = 9\ \Omega$.

Să se determine: a) rezistența interioară a sursei; b) tensiunea electromotoare E a sursei; c) definind randamentul transferului de putere de la sursă la circuitul exterior ca raportul dintre puterea disipată în circuitul exterior și puterea totală debitată de sursă, să se afle pentru care dintre rezistori randamentul transferului de putere de la sursă la circuitul exterior este mai mare și să se calculeze aceste randamente.

2°. Nucleul de ${}^{8}_{4}Be^*$ în stare excitată se poate dezexcita pentru a ajunge în starea fundamentală prin emisia unui foton cu energia de 17,600 MeV.

Se cer: a) să se calculeze energia cinetică de recul a nucleului ${}^{8}_{4}Be$; b) să se calculeze energia totală de dezexcitare.

Se dau: masa nucleului de ${}^{8}_{4}Be$: $M({}^{8}_{4}Be) = 8$ u; echivalentul în energie al unității atomice de masă: $1\ u \cdot c^2 = 931,5$ MeV.

3°. Distanța dintre fantele unui dispozitiv Young este $2l = 1$ mm, iar ecranul de observație se află la $D = 0,75$ m. Interfranja măsurată pe ecran este de 0,5625 mm.

Se cer: a) lungimea de undă a radiației folosite; b) dacă spațiul experienței se umple cu un lichid transparent, valoarea interfranjei devine $4,219 \cdot 10^{-4}$ m. Care este valoarea indicelui de refracție al lichidului?

4°. Să se scrie, indicînd semnificația mărimilor fizice care intervin: a) factorul de calitate al circuitelor de curent alternativ serie; b) mărimi și unități fotometrice.

5°. Să se definească: a) tensiunea electrică și potențialul electric; b) energia de ionizare a atomului de hidrogen în stare fundamentală.

3. ÎNVĂȚĂMÎNTUL MEDICO-FARMACEUTIC

(PROFILURILE: MEDICINĂ, STOMATOLOGIE)

XVIII.1°. Se cere: a) să se enunțe legile efectului fotoelectric extern; b) să se scrie condiția de reflexie totală; c) să se definească randamentul unei mașini termice care funcționează după un ciclu Carnot.

2°. Să se scrie, indicînd semnificația mărimilor fizice care intervin: a) formula oglinzilor sferice; b) energia cinetică maximă pe care o poate atinge o particulă accelerată într-un ciclotron; c) viteza termică.

3°. Să se trateze subiectul: modelul planetar al atomului.

4°. Într-o reacție de fuziune se formează ${}^{4}_{2}He$ din nuclee de deuteriu, ${}^{2}_{1}H$. Ce căldură se degajă la formarea unui gram de ${}^{4}_{2}He$?

Se dau masele atomice $M({}^{4}He) = 4,0026$ u, $M({}^{2}H) = 2,0141$ u, echivalentul în energie al unității atomice de masă

$$1\ u \cdot c^2 = 931,5\ \text{MeV}; \qquad 1\ \text{MeV} = 1,6 \cdot 10^{-13}\ \text{J},$$

numărul lui Avogadro, $N_A = 6,023 \cdot 10^{26}$ kmol^{-1}.

5°. Un kilomol de gaz perfect avînd căldura molară la volum constant $C_V = \frac{3}{2} R$ efectuează o transformare ciclică formată din două izocore la volumele $V_1 = 25$ m^3 și $V_2 = 50$ m^3 și două izobare la presiunile $p_1 = 10^5$ N/m^2 și $p_2 = 2 \cdot 10^5$ N/m^2.

Același kilomol de gaz perfect efectuează o transformare ciclică Carnot între temperaturile maximă, respectiv minimă atinse în primul ciclu. Gazul primește aceeași căldură de la sursa cu temperatura mai ridicată în ambele cicluri. Se cere să se calculeze: a) randamentul ciclului Carnot; b) căldura primită de la sursa cu temperatura mai ridicată; c) raportul dintre lucrurile mecanice efectuate în cele două cicluri.

XIX.1°. Se cere: a) să se enunțe legile reflexiei; b) să se definească lungimea de undă Compton; c) să se definească exponentul adiabatic.

2°. Să se scrie, indicînd semnificația mărimilor fizice care intervin: a) formula fundamentală a teoriei cinetico-moleculare a gazelor; b) variația lungimii de undă a unui foton în efectul Compton; c) legea de atenuare a unui fascicul de fotoni gamma în substanță.

3°. Să se trateze subiectul: determinarea lungimii de undă cu ajutorul rețelei optice.

4°. Care va fi energia cinetică a fotoelectronilor extrași prin efect fotoelectric extern dintr-un catod de fier de către fotoni cu lungimea de undă de 0,2 μm?

Se dă lungimea de undă corespunzătoare pragului efectului fotoelectric extern, egală cu $\lambda_0 = 268$ nm.

Se dau: viteza luminii, $c=3\cdot10^8$ m/s, constanta lui Planck, $h=6,626\cdot10^{-34}$ J·s.

5°. Un mol de gaz ideal care efectuează un ciclu Carnot produce un lucru mecanic $L = 1,2\cdot10^5$ J la fiecare ciclu parcurs. Cunoscînd temperatura sursei reci, $T_2 = 280$ K, valoarea minimă $V_m = 0,014$ m³ atinsă de volumul unui mol de gaz in cursul transformării ciclice și presiunea în starea de volum minim $p = 4,155\cdot10^5$ N/m², să se determine: a) randamentul mașinii termice; b) căldura cedată sursei reci în fiecare ciclu; c) valoarea maximă atinsă de numărul moleculelor de gaz din unitatea de volum în cursul transformării ciclice. Se dau: constanta gazelor perfecte $R = 8\,310$ J/kmol·K, numărul lui Avogadro, $N_A = 6,023\cdot10^{26}$ molecule/kmol.

ENUNȚURI
1985

1. ÎNVĂȚĂMÎNTUL TEHNIC

α. PROFILURILE: MECANIC, ELECTRIC, ENERGETIC, MINE, PETROL, METALURGIE, CONSTRUCȚII, GEODEZIE, TEHNOLOGIA ȘI CHIMIA TEXTILELOR, TEHNOLOGIA ȘI CHIMIA PRODUSELOR ALIMENTARE, FORESTIER (specializarea INDUSTRIALIZAREA LEMNULUI), GEOLOGIE

XX.1°. Două corpuri de mase $m_1 = m_2 = 1$ kg, aflate la aceeași înălțime $h = 5$ m față de pămînt și la distanța $d = 8$ m unul de altul sînt lansate unul spre celălalt cu viteze orizontale egale, $v_{01} = v_{02} = 10$ m/s în același moment. Să se calculeze: a) după cît timp de la lansare și la ce înălțime se ciocnesc corpurile; b) viteza corpului format, considerînd ciocnirea plastică; c) variația temperaturii corpurilor în procesul de ciocnire. Se cunosc: căldura specifică a materialului corpurilor $c = 10^3$ J/kg·K și $g = 10$ m/s².

2°. O cantitate $\nu = 12$ moli de gaz ideal, aflată în starea 1, caracterizată de presiunea $p_1 = 10^5$ N/m², volumul $V_1 = 0,5$ m³ și temperatura T_1, este comprimat izobar pînă în starea 2 și apoi comprimat adiabatic pînă în starea 3, în care $T_3 = T_1$ și $V_3 = V_1/8$. Să se calculeze: a) lucrul mecanic efectuat în transformarea 1—2; b) randamentul unei mașini termice care ar funcționa după ciclul 1—2—3—1,

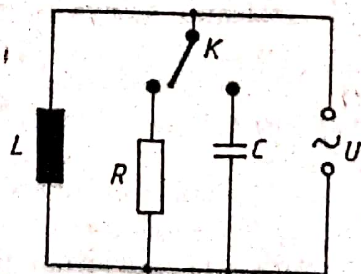


Fig. F.B.7

dacă transformarea 3—1 se face la temperatură constantă; c) viteza termică a moleculelor gazului în starea 2. Se cunosc: $R = 8\,310$ J/kmol·K, $\gamma = 1,5$, $\mu = 29$ kg/kmol și $\ln 2 = 0,693$.

3°. Se dă circuitul din figura F.B.7. Cînd circuitul este alimentat la tensiunea efectivă $U = 220$ V, cu frecvența $\nu = 50$ Hz, reactanța bobinei este $X_L = 30\ \Omega$.

Se cer: a) valorile R și C pentru care, atunci cînd se închide contactul k pe poziția 1, intensitatea curentului debitat de sursă este de două ori mai mare decît în cazul în care k este deschis, iar pentru k pe poziția 2 intensitatea curentului debitat de sursă este $\alpha = 4/9$ din intensitatea curentului pentru k deschis; b) intensitatea curentului prin R și factorul de putere; c) frecvența de rezonanță a circuitului cu k pe poziția 2.

4°. Să se deducă: a) formula lui Galilei; b) randamentul ciclului Carnot; c) expresia potențialului în cîmpul electric al unei sarcini punctiforme.

5°. Să se enunțe și să se scrie ecuațiile pentru: a) legea lui Bernoulli; b) principiul întîi al termodinamicii; c) legea inducției electromagnetice.



XXI.1°. Două corpuri de dimensiuni mici și de mase $m_1 = 10^{-2}$ kg și $m_2 = 2{,}5 \cdot 10^{-2}$ kg sînt suspendate din același punct cu ajutorul unor fire inextensibile, de mase neglijabile și de lungimi egale $l = 1$ m, formînd două pendule gravitaționale. Pendulele sînt deplasate din poziția de echilibru în sensuri opuse, pînă cînd firele de suspensie, întinse, formează cu verticala (poziția de echilibru) unghiurile $\alpha_1 = 60°$ și, respectiv, $\alpha_2 = 30°$. Se lasă libere cele două pendule, astfel încît corpurile se ciocnesc plastic în poziția comună de echilibru. Să se calculeze: a) viteza inițială a corpului format prin ciocnirea plastică a celor două corpuri; b) cantitatea de căldură care ia naștere în procesul de ciocnire; c) perioada de oscilație a corpului format prin ciocnire. Se va lua $g = 10$ m/s^2.

2°. O mașină termică ideală funcționează după un ciclu Carnot reversibil între temperaturile $T_1 = 1\,200$ K și $T_2 = 300$ K, utilizînd drept gaz de lucru 5 moli de heliu. Știind că presiunea gazului la sfîrșitul destinderii izoterme este egală cu presiunea gazului la începutul comprimării adiabatice să se determine: a) randamentul mașinii; b) căldura preluată de la sursa caldă în cursul unui ciclu; c) puterea utilă a mașinii dacă se efectuează într-o secundă $n = 10$ cicluri. Se dau: $R = 8\,310$ J/kmol·K; $C_V = \frac{3}{2} R$, $\ln 2 = 0{,}693$.

3°. Se consideră o bobină cu rezistența R și inductanța L. Cînd aceasta e legată la o sursă de tensiune continuă, cu $U = 6$ V, prin bobină trece un curent de intensitate $I_1 = 2$ A, iar cînd se leagă la o sursă a cărei tensiune alternativă are valoarea efectivă $U = 6$ V și frecvența $\nu = 10^3$ Hz, intensitatea efectivă a curentului prin bobină este $I_2 = \sqrt{3}$ A. Să se determine: a) rezistența R și inductanța L; b) defazajul dintre tensiunea la borne și curentul prin bobină și puterea activă consumată de bobină; c) capacitatea unui condensator, care, legat la sursa de tensiune continuă, se încarcă cu o sarcină $Q = 18$ μC.

4°. Să se deducă: a) expresia accelerației centripete; b) legea lui Jurin; c) expresia impedanței unui circuit RLC paralel.

5°. Să se scrie și să se menționeze semnificația fiecărei mărimi fizice: a) expresia coeficientului de dilatare termică liniară; b) ecuația undei plane; c) ecuația internă a triodei.

XXII.1°. Un proiectil cu masa $m_p = 2$ g, deplasîndu-se pe direcție orizontală cu viteza $v_1 = 500$ m/s, străbate un bloc de lemn cu masa $m_b = 1$ kg, aflat inițial în repaus pe o suprafață orizontală, și iese din acesta cu viteza $v_2 = 100$ m/s. Considerînd neglijabilă deplasarea blocului în timpul interacțiunii cu proiectilul și știind că blocul alunecă apoi, pînă la oprire, pe o distanță $d = 20$ cm, se cer: a) coeficientul de frecare dintre bloc și suprafață; b) energia cinetică pierdută de proiectil; c) energia cinetică a blocului imediat după trecerea proiectilului. Se dă $g = 10$ m/s^2.

2°. O cantitate $\nu = 4$ kmol de gaz ideal efectuează un ciclu format dintr-o comprimare izotermă, o izobară și o izocoră, în această ordine. Cunoscînd că izoterma este caracterizată de temperatura $T_1 = 400$ K și că raportul dintre volumul maxim și volumul minim atinse de gaz în cursul ciclului este $\varepsilon = 2$, se cer: a) lucrul

mecanic efectuat într-un ciclu; b) randamentul ciclului; c) randamentul unui ciclu Carnot care ar funcționa între temperaturile extreme ale ciclului considerat. Se dau: $\gamma = 5/3$, $R = 8\,310$ J/kmol·K, $\ln 2 = 0{,}693$.

3°. Un circuit serie este format dintr-o bobină cu inductanța L și un rezistor cu rezistența R. Dacă circuitul este alimentat la o tensiune alternativă cu valoarea efectivă $U = 100$ V, defazajul dintre tensiune și intensitatea curentului este $\varphi_1 = \frac{\pi}{4}$. Dacă în circuit se inseriază și un condensator cu reactanța capacitivă $X_C = 12{,}7\ \Omega$, defazajul devine $\pi/6$. Se cer: a) rezistența R; b) reactanța bobinei, X_L; c) puterile activă, reactivă și aparentă pentru circuitul care conține și condensatorul, în cazul $X_L > X_C$.

4°. Să se deducă: a) expresia accelerației în mișcarea circulară uniformă; b) formula vitezei termice a moleculelor unui gaz ideal; c) expresia forței Lorentz.

5°. a) Să se enunțe teorema momentului cinetic pentru punctul material; b) să se scrie formulările principiului II al termodinamicii; c) să se definească unitatea de măsură pentru intensitatea curentului electric în S.I.

XXIII.1°. Un corp cu masa $m = 0{,}25$ kg este legat de un resort elastic, orizontal și sub acțiunea unei forțe orizontale de 100 N este deplasat la distanța de 10^{-2} m față de poziția de echilibru. Lăsat apoi liber, corpul începe să oscileze armonic. Să se afle: a) constanta elastică a resortului; b) frecvența oscilațiilor; c) viteza maximă atinsă de corp; d) ecuația de mișcare, dacă în momentul inițial corpul este în poziția de echilibru.

2°. Un rezistor care are rezistența $R_1 = 2\ \Omega$ este conectat la bornele unei surse de curent continuu și este străbătut de un curent $I_1 = 0{,}64$ A. Dacă se înlocuiește rezistorul cu un altul, care are rezistența $R_2 = 6\ \Omega$, intensitatea curentului devine $I = 0{,}24$ A. Să se afle: a) tensiunea electromotoare și rezistența interioară a sursei utilizate; b) intensitatea curentului prin sursă la legarea celor două rezistoare în paralel între ele și în serie cu sursa; c) cîți kWh se consumă în timp de 10 ore în fiecare rezistor, în situația de la punctul b?

3°. Să se scrie: a) principiul acțiunilor reciproce; b) formula lui Galilei; c) legile electrolizei, indicînd și semnificația mărimilor care intervin.

4°. Să se deducă: a) expresia energiei cinetice a unui punct material; b) capacitatea echivalentă a unei baterii de condensatori grupați în paralel; c) expresia forței electromagnetice care apare între doi conductori parcurși de curent.

XXIV.1°. Un corp cu masa $m = 0{,}1$ kg și densitatea $\rho = 800$ kg/m³ cade liber, de la înălțimea $h = 0{,}8$ m, pe suprafața apei dintr-un lac. Să se afle: a) viteza cu care corpul ajunge la suprafața apei; b) adîncimea lacului, în locul de cădere a corpului, știind că acesta ajunge pe fundul lacului cu viteza zero; c) intervalul de timp după care corpul revine la suprafața apei; d) graficul mărimii impulsului corpului în funcție de timp, din momentul începerii mișcării și pînă în momentul revenirii sale la suprafața apei. Se consideră densitatea apei $\rho_a = 1\,000$ kg/m³, $g = 10$ m/s² și se neglijează frecările.

2°. În circuitul exterior al unei surse de curent continuu, cu t.e.m. $E = 20$ V și rezistență interioară neglijabilă, se montează, în paralel, un reșou cu rezistența $R_1 = 10\ \Omega$, un vas pentru electroliza cuprului cu rezistența $R_2 = 4\ \Omega$ și un solenoid de rezistență $R_3 = 5\ \Omega$, avînd $N = 1\,000$ spire, lungimea $l = 0{,}4$ m și secțiunea transversală $S = 10^{-3}$ m². Dacă echivalentul electrochimic al cuprului este $K = 0{,}33$ mg/C și $\mu = 4\pi \cdot 10^{-7}$ N/A², să se afle: a) rezistența totală a circuitului realizat; b) masa de cupru depusă la catod într-o oră; c) fluxul magnetic ce străbate solenoidul și inductanța acestuia.

3°. Să se prezinte: a) compunerea a două forțe paralele și de sens opus; b) diferența de presiune dintre două puncte din interiorul unui lihid; c) capacitatea condensatorului plan.

4°. Să se scrie, indicînd și semnificația mărimilor care intervin: a) principiul fundamental al dinamicii; b) legea lui Coulomb; c) legea inducției electromagnetice.

β. PROFILURILE: CHIMIE, MECANO-CHIMIC

XXV.1°. Prin încălzirea apei dintr-un vas care are temperatura inițială de 0 °C, se obține într-o oră o cantitate $m_1 = 100$ kg de vapori, avînd temperatura de 100° C. Știindu-se că randamentul instalației de încălzire este $\eta = 60\%$, se cere: a) ce cantitate de căldură este necesară pentru funcționarea instalației timp de 2 ore; b) să se calculeze intensitatea curentului electric, care, trecînd prin rezistența electrică $R = 200\ \Omega$ a unui cuptor cu randamentul $\eta_1 = 0,9$, produce într-o oră aceeași cantitate de vapori; c) ce masă de vapori de apă s-a condensat ca urmare a introducerii în atmosfera de vapori a unei bucăți de gheață, care are masa $m_2 = 1$ kg și temperatura inițială $t_2 = 0$ °C, dacă temperatura finală de echilibru este $\theta = 100$ °C. Se cunosc: căldura specifică a apei, $c_a = 4\,180$ J/kg · K, căldura latentă de topire pentru gheață, $\lambda_t = 0,335 \cdot 10^6$ J/kg; căldura latentă de vaporizare a apei, $\lambda_v = 2,257 \cdot 10^6$ J/kg.

2°. Două incinte cu azot, care au volumele $V_1 = 4 \cdot 10^{-3}$ m³ și $V_2 = 8 \cdot 10^{-3}$ m³, aflate la temperatura $T = 300$ K, sînt puse în legătură printr-un tub subțire prevăzut cu un robinet. Inițial în incinta 1 presiunea azotului este $p_1 = 3 \cdot 10^5$ N/m², iar în incinta 2 presiunea este $p_2 = 2 \cdot 10^5$ N/m². a) Să se afle masa totală a gazului aflat în cele două incinte și masele de gaz din fiecare incintă, după deschiderea robinetului, temperatura rămînînd neschimbată; b) care este presiunea finală din fiecare incintă, după închiderea robinetului, incinta 1 fiind încălzită la 400 K; c) să se calculeze viteza termică și concentrația moleculelor din incinta 2, după închiderea robinetului. Se cunosc: masa molară a azotului, $\mu = 28$ kg/kmol; constanta gazelor perfecte, $R = 8,31 \cdot 10^3$ J/kmol · K; numărul lui Avogadro, $N_A = 6,02 \cdot 10^{26}$ molecule/kmol.

3°. Se consideră circuitul din figura F.B.8, în care pe reostatul de rezistență R se leagă în paralel două baterii de acumulatoare. Prima baterie este formată din

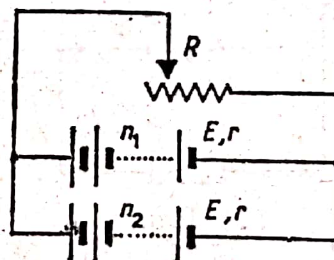


Fig. F.B.8

$n_1 = 8$ elemente legate în serie, iar a doua din $n_2 = 5$ elemente legate, de asemenea, în serie. Elementele celor două baterii sînt identice, fiecare avînd tensiunea electromotoare $E = 2$ V și rezistența internă $r = 0,2\ \Omega$. a) Să se calculeze curenții I_1 și I_2 prin cele două baterii și curentul I prin rezistența $R = 4\ \Omega$; b) pentru ce valoare a rezistenței R curentul I_2 se anulează?; c) să se afle valoarea rezistenței R pentru care puterea disipată de aceasta este maximă și maximul acestei puteri.

4°. Să se definească: a) coeficienții de dilatare termică în volum și aparentă ai lichidelor; b) inducția unui cîmp magnetic și unitatea de măsură a inducției magnetice; c) parametrii triodei.

5°. Să se scrie, indicîndu-se semnificațiile mărimilor fizice care intervin: a) formula fundamentală a teoriei cinetico-moleculare; b) legea lui Coulomb; c) expresia impedanței circuitului *RLC* paralel.

XXVI.1°. O mașină termică avînd ca agent termic 5 moli de gaz perfect funcționează după ciclul Carnot din figura F.B.9. Știind că temperatura sursei calde este $t_1 = 327$ °C, temperatura sursei reci este $t_2 = 27$ °C și că lucrul mecanic efectuat într-un ciclu este $L = 4 \cdot 10^3$ J, se cere: a) să se calculeze randamentul ciclului și

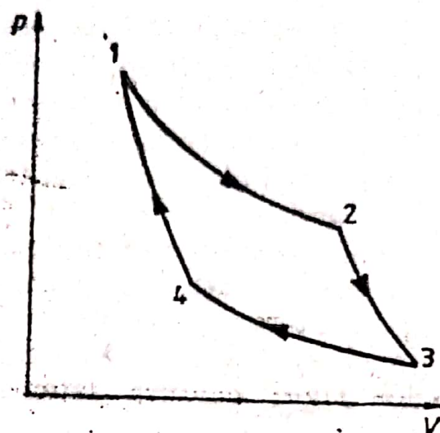


Fig. F.B.9

căldurile primită, Q_1, și cedată, Q_2, într-un ciclu; b) care este variația energiei interne ΔU în cursul destinderii adiabatice $2 \rightarrow 3$? c) să se afle raportul de compresie $\varepsilon = V_4/V_1$. Se cunosc: constanta gazelor perfecte, $R = 8{,}31 \cdot 10^3$ J/kmol·K și exponentul adiabatic $\gamma = 1{,}4$.

2°. Două surse de tensiuni electromotoare $E_1 = 130$ V și $E_2 = 125$ V și de rezistențe interne $r_1 = 0{,}5\ \Omega$, respectiv $r_2 = 0{,}2\ \Omega$ sînt conectate în paralel pe un rezistor care are rezistența $R = 2\ \Omega$, ca în figura F.B.10. Să se calculeze: a) intensi-

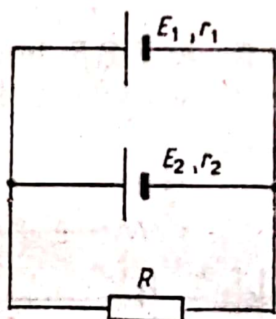


Fig. F.B.10

tățile I_1 și I_2 ale curenților prin cele două surse și căderea de tensiune pe rezistorul R; b) energia pe care o disipă rezistorul R în timp de 2 minute; c) cît trebuie să fie tensiunea electromotoare a sursei E_1, pentru a se anula curentul I_1 prin această sursă? Dar pentru ca $I_1 = I_2$?

3°. a) Să se definească capacitatea calorică și căldurile specifică și molară ale unui corp; b) să se scrie formula fundamentală a teoriei cinetico-moleculare, arătîndu-se semnificațiile mărimilor fizice; c) să se stabilească formula lui Jurin privind fenomenele capilare.

4°. a) Să se definească intensitatea cîmpului electric și unitatea de măsură corespunzătoare; b) să se scrie expresia inductanței unei bobine, arătîndu-se semnificațiile mărimilor fizice; c) să se stabilească expresia forței Lorentz.

2. ÎNVĂȚĂMÎNTUL UNIVERSITAR

(PROFILUL FIZICĂ)

XXVII.1°. Un corp suspendat de un fir oscilează într-un plan vertical cu o amplitudine unghiulară $\alpha = 60°$. Care va fi raportul dintre tensiunea maximă și tensiunea minimă din fir în timpul oscilațiilor?

2°. Fie sistemul din figura F.B.11, format din bilele 1, 2, 3 și bilele 4, 5, fixate la capetele unui fir inextensibil, trecut peste un scripete ce se poate roti fără frecare. Bilele, considerate puncte materiale de aceeași masă, se află inițial toate la înălțimea $h = 13$ m față de sol. Se lasă sistemul să se miște liber. După 2 s se

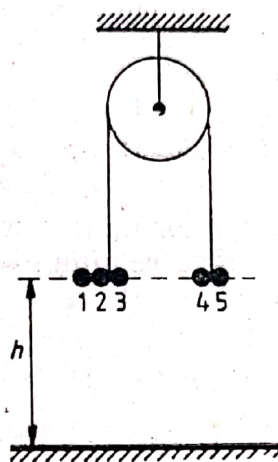


Fig. F.B.11

desprinde bila 1, iar după încă 1 s se desprinde bila 2. Să se determine: a) timpul după care bila 1 va atinge solul; b) timpul după care bila 2 va atinge solul; c) timpul după care bila 3 se va afla la același nivel cu bilele 4 și 5. Se va lua $g = 10$ m/s^2.

3°. Două vase identice ce conțin aer la temperatura $T = 300$ K sînt legate printr-un tub orizontal cu diametrul $d = 0{,}4$ cm, la jumătatea căruia se află o picătură de mercur care împarte sistemul în două volume egale, fiecare avînd 314 cm^3. Considerînd aerul un gaz ideal, să se determine: a) viteza termică a moleculelor de aer, dacă masa molară a aerului este $\mu = 29$ kg/kmol, iar $R = 8\,310$ J/kmol·K; b) cu cît se va deplasa picătura de mercur dacă unul dintre vase se încălzește cu 3 °C, iar celălalt se răcește cu 3 °C; c) variația energiei interne a întregului sistem.

4°. Să se scrie, indicînd semnificația fizică a mărimilor: a) momentul unui cuplu de forțe; b) legea lui Charles sau legea transformării izocore; c) expresia cinetico-moleculară a presiunii.

5°. Să se studieze: a) compunerea oscilațiilor de aceeași direcție și aceeași frecvență; b) procesul adiabatic din cadrul proceselor simple ale gazului perfect.

XXVIII.1°. a) Să se enunțe legile efectului fotoelectric extern.

b) Să se scrie cu semnificații fizice relația interfranjei în cazul penei optice.

c) Să se definească unitatea de măsură a intensității curentului electric în S.I.

2°. Să se trateze subiectul: legi de conservare în interacțiunile nucleare.

3°. Un fascicul de electroni emiși de un tun electronic sînt trimiși pe un cristal pe care suferă fenomenul de difracție pe un sistem de plane cristaline, paralele, distanțate prin $d = 0{,}3$ nm. Ce tensiuni de accelerare sînt necesare pentru a pune în evidență comportarea ondulatorie a electronilor prin difracție?

Se dau: constanta lui Planck, $h = 6{,}626 \cdot 10^{-34}$ J.s; masa electronului, $m = 9{,}1 \cdot 10^{-31}$ kg; sarcina electronului, $e = -1{,}6 \cdot 10^{-19}$ C.

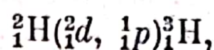
4°. Se dau două oglinzi concave care au aceeași distanță focală f și fețele reflectătoare una spre cealaltă. a) Să se găsească condiția pe care trebuie să o îndeplinească distanța d dintre vîrfurile oglinzilor pentru ca imaginea unui punct luminos A de pe axa principală să se formeze tot în A, în urma reflexiilor razelor de lumină ce provin de la punctul luminos A, succesiv pe cele două oglinzi; b) să se construiască imaginea obiectului A în cele două oglinzi.

5°. Două bile mici, identice, suspendate în același punct de cîte un fir de aceeași lungime, se resping datorită electrizării, sarcina lor fiind de aceeași valoare și semn. Cunoscînd faptul că uleiul de transformator are densitatea $0{,}9 \cdot 10^3$ kg/m³ și permitivitatea absolută $\varepsilon = 2{,}2\varepsilon_0$, să se afle care trebuie să fie densitatea materialului din care trebuie făcute bilele pentru ca unghiul dintre firele de suspensie să fie același pentru bilele situate în aer sau în ulei.

XXIX.1°. Frecvența de rezonanță a unui circuit serie, în curent alternativ, format dintr-un condensator și o bobină, este $\nu_0 = 2$ kHz. Pentru o frecvență $\nu = 1$ kHz a tensiunii de alimentare impedanța circuitului este $Z = 1$ kΩ. Rezistența bobinei este $R = 10$ Ω. Să se calculeze: a) capacitatea C a condensatorului; b) inductanța L a bobinei.

2°. Se dă o oglindă sferică, concavă, cu raza de 2 m. La o distanță de 1,4 m de vîrful V al oglinzii se așază un mic cerc luminos, cu raza de 1 cm, al cărui centru coincide cu axa optică principală. Să se afle la ce distanță de vîrf trebuie să se așeze o oglindă plană, perpendiculară pe axă, pentru ca centrul imaginii să se confunde cu centrul cercului. Care va fi diametrul cercului acestei imagini?

3°. Să se calculeze energia de reacție a reacției nucleare



$$^2_1\mathrm{H}(^2_1d,\ ^1_1p)^3_1\mathrm{H},$$

dacă energia cinetică a deuteronilor incidenți este de 1,2 MeV și protonul care iese la un unghi drept față de direcția de mișcare a deuteronului are energia cinetică de 3,3 MeV și să se precizeze ce fel de reacție este, endoenergetică sau exoenergetică.

4°. Să se deducă variația lungimii de undă în efectul Compton.

5. Să se definească: a) rezistivitatea electrică; b) constanta rețelei de difracție; c) timpul de înjumătățire al unui ansamblu de nuclee radioactive.

3. ÎNVĂȚĂMÎNTUL MEDICO-FARMACEUTIC

(PROFILURILE: MEDICINĂ, STOMATOLOGIE)

XXX.1°. a) Să se definească convergența lentilei și unitatea sa în SI.

b) Să se enunțe legea transformării izobare.

c) Să se enunțe regula lui Lenz.

2°. Să se scrie, indicînd semnificația mărimilor fizice care intervin: a) ecuația termică de stare a gazului ideal; b) distanțele focale ale unei lentile subțiri; c) intensitatea cîmpului electric generat de un corp punctiform, electrizat.

3°. Să se trateze subiectul: gruparea condensatorilor.

4°. Două incinte de volume $V_1 = 5 \cdot 10^{-3}$ m³ și, respectiv, $V_2 = 10^{-2}$ m³, umplute cu același gaz monoatomic și aflate la temperatura $T_1 = 300$ K, pot comunica între ele printr-un tub de volum neglijabil, închis inițial cu un robinet. În incinta (1) presiunea gazului este $p_1 = 2 \cdot 10^5$ N/m², iar în incinta (2) este $p_2 = 3 \cdot 10^5$ N/m². Se deschide robinetul și se răcește după aceea incinta (2) la temperatura $T_2 = 250$ K, menținînd incinta (1) la temperatura T_1.

Să se determine: a) numărul de kilomoli de gaz aflaţi în fiecare incintă în starea iniţială; b) numărul de kilomoli de gaz aflaţi în fiecare incintă în starea finală; c) variaţia energiei interne a gazului din ambele recipiente.

Se dau: constanta universală a gazelor, $R = 8\,310$ J/kmol·K; căldura molară izocoră $C_V = \frac{3}{2} R$.

5°. Cu o sursă de curent continuu, două voltmetre identice şi două miliampermetre identice, se realizează montajul din figura F.B.12. Instrumentele de măsură legate în paralel indică $U_1 = 0{,}25$ V şi $I_1 = 0{,}75$ mA. Al doilea miliampermetru indică $I = 1$ mA. Să se calculeze: a) tensiunea U de la bornele sursei; b) tensiunea

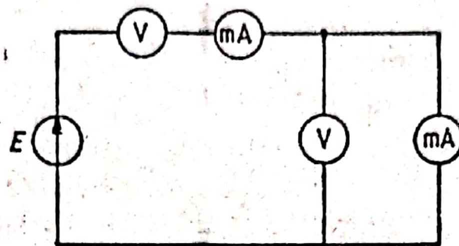


Fig. F.B.12

electromotoare E a sursei, cunoscînd că rezistenţa interioară a ei este $r = 100\ \Omega$; c) rezistenţa rezistorului şunt pentru ca unul dintre miliampermetre să măsoare curenţi pînă la 10 A, cunoscînd că acesta măsoară curenţi pînă la 1 mA.

XXXI.1°. a) Să se definească randamentul maşinii termice care funcţionează după un ciclu Carnot reversibil.

b) Să se enunţe legile reflexiei.

c) Să se definească unitatea de măsură a intensităţii curentului electric în SI.

2°. Să se scrie, indicînd semnificaţia mărimilor fizice care intervin: a) relaţiile care exprimă distanţele focale ale unei lentile subţiri; b) viteza termică a moleculelor; c) legea lui Coulomb.

3°. Să se deducă relaţiile fundamentale ale dioptrului sferic.

4°. Într-un vas de alamă avînd masa $m_3 = 200$ g se găseşte apă cu masa $m_2 = 480$ g la temperatura de echilibru $t_0 = 15$ °C. Se introduce apoi masa de mercur $m_1 = 500$ g la temperatura $t = 100$ °C şi se stabileşte o nouă temperatură de echilibru la $\theta = 17{,}7$ °C.

a) Să se calculeze valoarea căldurii specifice a mercurului.

b) Care este temperatura finală a unui amestec format din masa de gheaţă $m = 10$ g la temperatura $t = 0$ °C şi masa de mercur în condiţiile de la punctul a?

Se dau: căldura specifică a apei, $c_2 = 4\,180$ J/kg·K; căldura specifică a alamei, $c_3 = 386$ J/kg·K; căldura latentă de topire a gheţii, $\lambda_t = 335\,000$ J/kg.

5°. Un bec de 6,3 V, cu puterea de 2 W, trebuie alimentat la o sursă de curent continuu cu tensiunea electromotoare 12,6 V şi rezistenţa internă neglijabilă.

a) Să se calculeze valoarea rezistenţei rezistorului ce trebuie montat în circuit pentru ca becul să funcţioneze normal.

b) Intensitatea curentului ce trece prin bec trebuie măsurată cu un miliampermetru care are rezistenţa interioară de 1 Ω, are 100 diviziuni şi poate măsura 1 mA pe diviziune.

Să se calculeze valoarea rezistenţei şuntului ce trebuie montat pentru ca miliampermetrul să măsoare curenţi pînă la 0,5 A.

ENUNȚURI
1986

1. ÎNVĂȚĂMÎNTUL TEHNIC

α. PROFILURILE: MECANIC, ELECTRIC, ENERGETIC, MINE, PETROL, METALURGIE, CONSTRUCȚII, GEODEZIE, TEHNOLOGIA ȘI CHIMIA TEXTILELOR, TEHNOLOGIA ȘI CHIMIA PRODUSELOR ALIMENTARE, FORESTIER (specializarea INDUSTRIALIZAREA LEMNULUI), GEOLOGIE

XXXII. 1°. Un corp cu masa $m = 0{,}01$ kg, legat de un resort elastic orizontal, oscilează fără frecare pe o masă orizontală, conform ecuației: $y = 0{,}2(\sqrt{3}\cos 2t + \sin 2t)$ [m]. Să se determine: a) pulsația, perioada și frecvența oscilației; b) momentele în care elongația este egală cu jumătate din amplitudinea oscilației, precum și faza oscilației la momentul $t = 0$; c) energia potențială elastică maximă pe care o poate atinge corpul în cazul în care — pornind din poziția dată de ecuația oscilației armonice pentru $t = 0$, cu viteza corespunzătoare aceluiași moment — s-ar deplasa cu frecare, coeficientul de frecare fiind $\mu = 0{,}1$. Se va lua accelerația gravitațională $g = 10$ m/s^2.

2°. O mașină termică utilizînd drept agent 5 moli de gaz perfect funcționează după un ciclu format din izocora AB, izobara BC, izocora CD și izobara DA. Știind că $p_A = 10^5$ N/m^2, $V_A = 0{,}1$ m^3, $p_B = 2p_A$ și $V_C = 4V_A$, să se determine: temperaturile la care se află gazul în stările A, B, C și D; b) lucrul mecanic efectuat de mașina termică într-un ciclu; c) randamentul mașinii termice. Se dau: $C_V = \frac{3R}{2}$, $R = 8\,310$ J/kmol · K.

3°. O bobină realizată din fir de nichelină cu diametrul de 0,5 mm și rezistivitatea $\rho = 4{,}5 \cdot 10^{-7}$ Ω · m este înfășurată pe un miez magnetic cilindric cu permeabilitatea $\mu = 4\pi \cdot 10^{-5}$ N/A^2 și diametrul $D = 1$ cm. Știind că înfășurarea bobinei are 500 spire pe o lungime de 4 cm și că este alimentată cu tensiunea $U(t) = 204{,}4 \sin(100\,\pi t)$ [V], să se calculeze: a) inductanța bobinei, b) intensitatea efectivă a curentului electric prin bobină, c) puterile activă, reactivă și aparentă.

4°. Să se deducă: a) expresiile vitezei liniare și accelerației centripete în mișcarea circulară uniformă; b) variația cu temperatura și presiunea a densității unui gaz perfect; c) perioada de rotație a unei particule încărcate electric într-un cîmp magnetic uniform.

5°. Să se scrie, indicînd semnificațiile fizice ale mărimilor care intervin: a) legea lui Hooke; b) formula fundamentală a teoriei cinetico-moleculare a gazelor; c) definiția și expresia factorului de supratensiune (calitate) în curent alternativ monofazat pentru circuitul serie RLC.

XXXIII. 1°. De un corp de masă $m = 2$ kg, aflat inițial în repaus pe o suprafață orizontală este legat un resort elastic de constantă $k = 40$ N/m. Asupra capătului liber al resortului se aplică o forță F cu sensul spre corp (v. figura F.B. 13). Pentru a scoate corpul din repaus este necesar ca resortul să fie comprimat cu cel puțin $x_m = 5$ cm. Aplicînd o forță F constantă, astfel încît — pe întreaga durată a mișcării corpului pînă la racordul suprafeței plane cu o trambulină avînd raza de curbură $R = 84{,}12$ m — resortul să fie comprimat cu $x = 0{,}1$ m, se imprimă corpului o mișcare uniform accelerată pe distanța $D = 50$ m pînă la trambulină, cînd acțiunea forței F încetează. Să se determine: a) coeficientul de frecare dintre corp și suprafața orizontală; b) viteza corpului la intrarea pe trambulină; c) lun-

gimea traseului parcurs de corp pe trambulină pînă la desprinderea sa. Se neglijează frecarea corpului cu trambulina. Se va lua $g = 9{,}8$ m/s².

2°. Un mol de hidrogen aflat inițial în starea A, caracterizată de parametrii $p_A = 4{,}155 \cdot 10^5$ N/m², $V_A = 2 \cdot 10^{-2}$ m³, ajunge, printr-o destindere izotermă, în starea B în care volumul gazului este $V_B = 4 \cdot 10^{-2}$ m³, după care printr-o comprimare izobară BC revine la volumul inițial ($V_C = V_A$). Să se determine: a) temperaturile și presiunile corespunzînd stărilor A, B și C; b) lucrul mecanic efectuat și căldura schimbată de gaz cu exteriorul în comprimarea izobară BC; c) randamentul motorului termic care funcționează după ciclul $ABCA$. Se dau: $C_p = 7R/2$, $R = 8\,310$ J/kmol · K, ln 2 = 0,693.

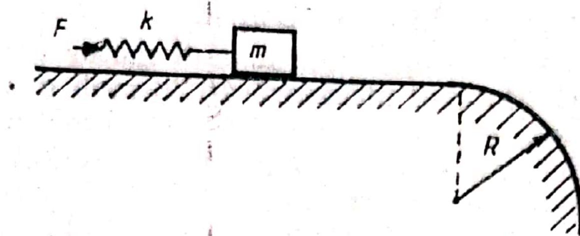


Fig. F.B.13

3°. Pe cadrul metalic orizontal $MPQS$ din figura F.B.14 se deplasează cu viteza constantă $v = 2$ m/s conductorul NR, confecționat din aceleași bare metalice de rezistivitate $\rho = 1{,}7 \cdot 10^{-8}\ \Omega \cdot$ m, densitate $\rho_m = 8\,900$ kg · m⁻³ și secțiune $S = 1$ cm², ca și cadrul. Știind că $\overline{PQ} = \overline{NR} = 1$ m, să se determine: a) valoarea și sensul tensiunii electromotoare induse în conductor în prezența unui cîmp magnetic uniform, a cărei inducție $B = 10$ mT are direcția verticală și sensul indicat în figură; b) intensitatea curentului prin conductor atunci cînd $\overline{PN} = \overline{QR} = 1{,}5$ m; c) coeficientul de frecare dintre conductorul $\overline{NR}$ și cadru, știind că pentru a asigura deplasarea conductorului cu viteza indicată trebuie acționat asupra acestuia cu o forță exterioară, în sensul mișcării, a cărei valoare — atunci cînd $\overline{PN} = \overline{QR} = 1{,}5$ m — este $F = 1{,}4$ N. Se va lua $g = 9{,}8$ m/s².

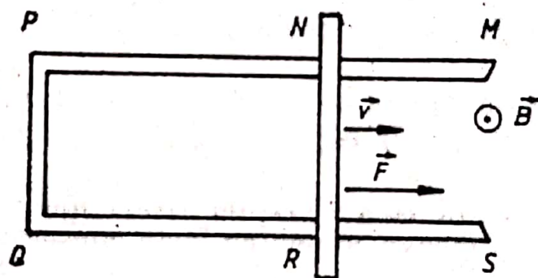


Fig. F.B.14

4°. Să se deducă: a) legea (ecuația) lui Bernoulli a dinamicii fluidelor; b) randamentul motorului termic care funcționează după un ciclu Carnot reversibil; c) expresiile impedanțelor circuitelor RLC serie, respectiv derivație, în curent alternativ.

5°. Să se enunțe și să se scrie, indicînd semnificațiile mărimilor care intervin: a) legea lui Newton a atracției universale; b) legile transformărilor termodinamice elementare: izotermă, izobară, respectiv izocoră; c) legile lui Faraday ale electrolizei.

XXXIV. 1°. Un corp cu masa $m = 0{,}1$ kg este legat de tavanul unei încăperi cu înălțimea $H = 2{,}5$ m, printr-un fir inextensibil de lungime $L = 1$ m. Se scoate

pendulul din poziția de echilibru, astfel încît firul întins formează un unghi $\theta = 30°$ cu poziția de echilibru. În această poziție se imprimă corpului o viteză orizontală, în direcția perpendiculară pe fir. Să se determine: a) valoarea vitezei care trebuie imprimată corpului pentru ca unghiul θ să rămînă constant în timpul mişcării; b) energia necesară pentru aducerea corpului din poziția sa de echilibru în această stare de mişcare; c) în cît timp şi cu ce viteză atinge corpul podeaua, dacă la un moment dat se rupe firul. Se va lua $g = 9{,}8\ m/s^2$.

2°. Sursa caldă, respectiv sursa rece a unui motor termic, au temperaturile $t_1 = 527°\ C$ şi $t_2 = 127°\ C$. Motorul utilizează 16,28 moli gaz perfect, care parcurg un ciclu Carnot. Ştiind că, efectuînd $n = 120$ cicluri/minut, motorul dezvoltă o putere de 75 kW, să se determine: a) randamentul termic al motorului; b) căldura primită de la sursa caldă, respectiv căldura cedată sursei reci, în timp de o oră; c) rapoartele de compresie V_3/V_4 al volumului inițial (V_3) şi volumului final (V_4) în comprimarea izotermă, respectiv V_4/V_1 al volumului inițial (V_4) şi volumului final (V_1) în comprimarea adiabatică. Se dau: exponentul adiabatic al gazului perfect $\gamma = \frac{4}{3}$, constanta gazelor perfecte $R = 8\,310\ J/kmol \cdot K$ şi $\ln 2 = 0{,}693$.

3°. În vîrful unei piramide regulate cu baza un pătrat cu latura a se află o sarcină electrică punctiformă $-2q$, iar în cele patru colțuri ale pătratului bazei sînt aşezate sarcinile electrice punctiforme pozitive identice $+\frac{q}{2}$. Ştiind că sistemul de sarcini se găseşte în vid, să se deducă: a) potențialul electric produs de sarcinile bazei în vîrful piramidei, ştiind că înălțimea acesteia este egală cu h; b) direcția, sensul şi valoarea rezultantei forțelor care acționează asupra sarcinii din vîrful piramidei; c) diferența de potențial dintre două armături plane şi paralele, de aceeaşi arie $A(\gg h^2)$, distanțate cu h, ştiind că pe o armătură se depune sarcina electrică din vîrful piramidei, iar pe cealaltă armătură se depun sarcinile din colțurile bazei piramidei.

4°. Să se deducă: a) expresia lucrului mecanic al forței elastice; b) legea lui Jurin a fenomenelor capilare; c) expresia impedanței circuitului serie RLC în curent alternativ.

5°. Să se scrie, indicînd semnificațiile fizice ale mărimilor care intervin: a) legea conservării energiei mecanice pentru forțe conservative; b) expresia inductanței unei bobine; c) formula conductivității electrice a unui semiconductor cu impurități.

XXXV. 1°. Doi cilindri omogeni cu masele $m_1 = 0{,}3\ kg$, $m_2 = 0{,}2\ kg$, avînd o aceeaşi înălțime $h = 5\ cm$, sînt legați de un fir cu greutatea neglijabilă, care trece peste un scripete. După ce cilindrul 2 este coborît pînă cînd atinge solul, cilindrul 1 ajungînd la înălțimea $H = 1\ m$, se lasă liber sistemul. Să se determine: a) accelerația sistemului şi tensiunea în fir în cazul în care ambii cilindri se deplasează în aer; b) durata după care cei doi cilindri ajung la aceeaşi înălțime, în condițiile specificate mai sus; c) frecvența oscilațiilor pe care le execută sistemul în condițiile în care sub cilindrul 1, aflat la înălțimea H, se introduce un vas cu lichid cu densitatea $\rho = \frac{2}{3} \cdot \rho_c$, unde ρ_c este densitatea cilindrului 1 (figura F.B.15). Se vor neglija frecările cilindrilor cu aerul şi lichidul, precum şi a firului cu scripetele. Se va lua $g = 9{,}8\ m/s^2$.

2°. O cantitate de gaz perfect efectuează un proces ciclic format din comprimarea adiabatică $1 \to 2$, încălzirea izocoră $2 \to 3$, detenta adiabatică $3 \to 4$ şi răcirea izocoră $4 \to 1$, raportul de compresie fiind $V_1/V_2 = 32$. Ştiind că variația temperaturii în încălzirea izocoră $2 \to 3$ este $T_3 - T_2 = 200\ K$, căldura cedată sursei reci într-un ciclu este $Q_r = 1\,600\ J$, iar aria ciclului în diagrama presiune-volum este $4\,800\ J$, să se determine: a) randamentul motorului care funcționează

după acest ciclu; b) variația temperaturii în răcirea izocoră $4 \to 1$; c) exponentul adiabatic și căldura molară la volum constant C_V a gazului. Se dă constanta $R = 8\,310 \frac{J}{kmol \cdot K}$.

3°. Un circuit serie de curent alternativ este format dintr-o bobină cu inductanța $L = 3$ mH, un rezistor cu rezistența $R = 8\,\Omega$ și din condensatoarele C_1 și C_2 montate în serie. Condensatorul C_1 are capacitatea 2 nF, iar C_2 este un condensator plan cu aer avînd aria unei armături $S = 4 \cdot 10^{-2}$ m^2, iar distanța dintre

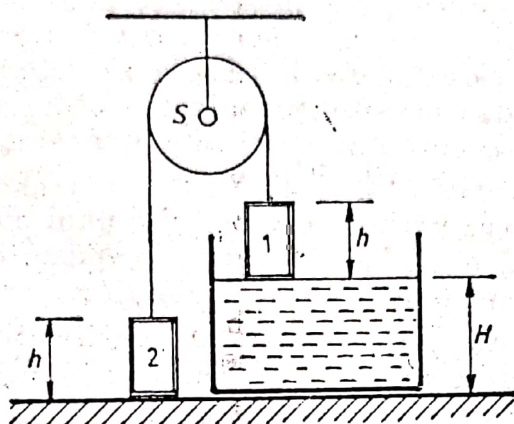


Fig. F.B.15

ele $d = 3{,}54 \cdot 10^{-4}$ m. Circuitul este alimentat de o sursă care asigură o aceeași amplitudine a tensiunii alternative la borne pentru frecvențe variabile. Să se determine: a) capacitatea condensatorului C_2; b) frecvența tensiunii alternative pentru care se produce rezonanța; c) valoarea maximă a fluxului inducției magnetice în bobină Φ_{max}, la rezonanță, știind că în acest caz valoarea maximă a sarcinii electrice pe armăturile condensatorului C_1 este $Q_{1,\,max} = 2\,\mu$C. Se dă permitivitatea aerului: $\varepsilon_a = 8{,}85 \cdot 10^{-12}$ F/m.

4°. Să se deducă: a) expresia diferenței de presiune dintre două puncte din interiorul unui lichid; b) expresia vitezei medii pătratice a moleculelor unui gaz ideal; c) capacitatea unei baterii de condensatoare legate în serie.

5°. Să se scrie, indicînd semnificațiile fizice ale mărimilor care intervin: a) randamentul planului înclinat; b) ecuația Clapeyron-Mendeleev a gazelor perfecte; c) inducția magnetică în centrul unei spire circulare parcursă de curent electric.

XXXVI. 1°. Dintr-un același punct, aflat la înălțimea $h = 240{,}1$ m deasupra unei mări, sînt lăsate să cadă liber, la un interval de timp $\Delta t = 2$ s, două corpuri identice, avînd fiecare masa $m = 10$ kg și volumul $V = 1{,}6 \cdot 10^{-2}$ m^3. Să se determine: a) distanța maximă dintre corpurile aflate încă în aer; b) accelerația mișcării corpurilor în apă; c) timpul scurs de la lansarea primului corp pînă la întîlnirea cu celălalt, precum și distanța față de suprafața apei la care are loc întîlnirea. Se dau: $g = 9{,}8$ m/s^2 și densitatea apei $\rho = 10^3$ kg/m^3. Se neglijează frecările și se admite că, în locul considerat, corpurile nu ating fundul mării.

2°. Într-un rezervor cu volumul $V_1 = 150$ l se găsesc 10 moli de heliu la presiunea $p_1 = 2 \cdot 10^5$ N/m^2, rezervorul fiind separat printr-o supapă, inițial închisă, de un recipient vidat, avînd volumul $V_2 = 200$ l. Să se determine: a) temperatura inițială a heliului; b) temperatura la care trebuie să fie încălzit gazul pentru ca supapa să se deschidă, știind că forța rezistentă la deschiderea supapei este $F = 300$ N, iar aria supapei $S = 10$ cm^2; c) temperatura finală, precum și viteza medie pătratică finală a moleculelor de heliu, știind că – după realizarea echilibrului termodinamic al gazului în rezervor și recipient (supapa rămînînd deschisă)

presiunea finală a gazului este $p = 10^5 N/m^2$. Se dau: $R = 8\,310 \frac{J}{kmol \cdot K}$ și masa molară a heliului $\mu = 4$ kg/kmol.

3°. O baterie cu tensiunea electromotoare $E_1 = 60$ V, formată din n elemente galvanice identice avînd fiecare rezistența internă $r = 0,5\ \Omega$, legate în serie, debitează pe un rezistor R un curent de intensitate $I_1 = 1,5$ A. Legînd în serie, la bornele rezistorului, doar jumătate dintre elementele considerate, intensitatea curentului scade la valoarea $I_2 = 1$ A. Dacă se înlocuiește rezistorul cu un condensator plan avînd aria $S = 4 \cdot 10^{-2}$ m² și distanța dintre armături $d = 2,95$ mm, în condensator aflîndu-se o placă dielectrică de grosime d și arie $S' = 2 \cdot 10^{-2}$ m², condensatorul se încarcă cu sarcina $q = 18$ nC. Să se determine: a) rezistența R a rezistorului și numărul n de elemente galvanice; b) energia disipată în rezistorul R străbătut timp de o oră de curentul I_1; c) permitivitatea relativă a plăcii. Se dă permitivitatea vidului $\varepsilon_0 = 8,85 \cdot 10^{-12}$ F/m.

4°. Să se deducă: a) expresia randamentului unui plan înclinat; b) înălțimea la care urcă (sau coboară) un lichid într-un vas capilar; c) expresia factorului de supratensiune (de calitate) într-un circuit serie *RLC*.

5°. Să se enunțe și să se scrie, indicînd semnificațiile mărimilor fizice care intervin: a) legea atracției universale a lui Newton; b) legea Boyle-Mariotte; c) legile electrolizei.

XXXVII. 1°. Un corp cu masa $m = 1$ kg efectuează o mișcare oscilatorie armonică descrisă de ecuația $y = 0,1 \sin\left(2\pi t + \frac{\pi}{4}\right)$ [m]. Să se determine: a) valorile maxime ale vitezei și accelerației corpului în cursul oscilației; b) durata în care corpul se deplasează, în sensul pozitiv al axei Oy, din poziția de elongație $y_1 = \frac{A}{2}$ pînă în poziția de elongație $y_2 = \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot A$, unde A este amplitudinea oscilației; c) energia cinetică, respectiv energia potențială elastică a corpului în poziția corespunzătoare elongației y_2.

2°. Un circuit electric este format dintr-o bobină cu 1 000 spire și rezistența $R = 20\ \Omega$, înseriată cu un vas de electroliză cu soluție de sulfat de cupru. Bobina, de lungime $l = 62,8$ cm are un miez de fier cu permeabilitatea relativă $\mu_r = 300$ și aria secțiunii $S = 10$ cm². Prin circuit trece un curent electric continuu care transportă la catod $9 \cdot 10^{20}$ ioni de cupru, producînd, totodată, un cîmp magnetic cu inducția $B = 8$ T în bobină. Să se determine: a) inductanța bobinei; b) intensitatea curentului electric prin bobină și puterea disipată sub formă de căldură în bobină; c) masa de cupru depusă la catod. Se dau: masa atomică a cuprului $A = 63,6$, permeabilitatea vidului $\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7}$ N/A², numărul lui Avogadro, $N_A = 6,023 \cdot 10^{23}$ molecule/mol.

3°. Să se deducă: a) dependențele de timp ale vitezei, respectiv coordonatei (spațiului), în mișcarea uniform variată, cu viteză inițială; b) rezistența electrică echivalentă unei grupări serie, respectiv unei grupări derivație (în paralel) de rezistoare; c) expresia forței electromagnetice exercitată de cîmpul magnetic produs de un curent electric care străbate un conductor rectiliniu foarte lung, asupra unei porțiuni dintr-un alt conductor rectiliniu foarte lung, paralel cu primul, parcurs de un alt curent electric.

4°. Să se scrie, indicînd denumirile mărimilor fizice care intervin: a) expresia forței centrifuge; b) legea (ecuația) lui Bernoulli a dinamicii fluidelor; c) expresiile puterilor activă, reactivă și — respectiv — aparentă în curent alternativ monofazat.

XXXVIII. **1°.** O masă $m = 0,4$ kg de heliu este supusă ciclului din figura F.B.16, în care 1—2 este o transformare izocoră, 3—1 o transformare izobară, iar transformarea 2—3 este reprezentată printr-o dreaptă. Cunoscînd lucrul mecanic pe întreg ciclul $L = 1,247 \cdot 10^5$ J, densitatea gazului în starea 2, $\rho_2 = 0,08$ kg/m³, presiunea $p_2 = 2p_1$ și volumul $V_3 = 2V_1$, se cer: a) temperatura gazului în starea

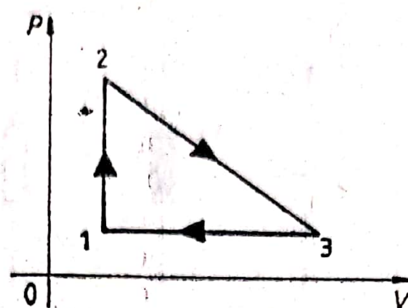


Fig. F.B.16

1; b) variația energiei interne în cursul transformării 2—3; c) presiunea gazului în starea 2. Se dau: masa molară a heliului, $\mu = 4$ kg/kmol; constanta gazelor perfecte, $R = 8\,310$ J/kmol · K; $C_V = 3/2\ R$.

2°. O sursă de tensiune electromotoare $E = 220$ V alimentează circuitul din figura F.B.17, în care se cunosc $C_1 = 1\ \mu$F, $C_2 = 3\ \mu$F, $R_1 = 100\ \Omega$, $R_2 = 80\ \Omega$ și $R_3 = 20\ \Omega$. Să se calculeze: a) sarcinile electrice de pe armăturile condensatorilor C_1 și C_2 atunci cînd comutatorul K este deschis; b) sarcinile electrice de pe armăturile condensatorilor atunci cînd comutatorul K este închis; c) energiile cîmpului electric dintre armăturile condensatorului C_1 în cele două cazuri.

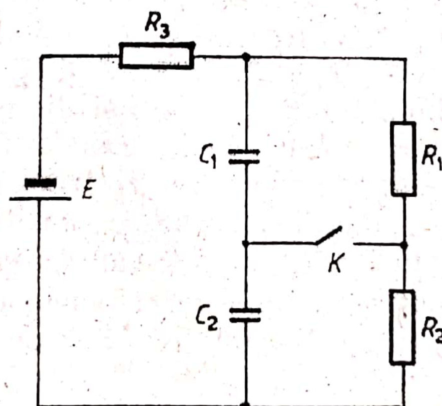


Fig. F.B.17

3°. La bornele circuitului din figura F.B.18, în care $R = 10\ \Omega$, $L = \frac{1}{10\pi}$ H și $C = \frac{10^{-3}}{2\pi}$ F se aplică o tensiune alternativă cu valoarea eficace $U = 220$ V și frecvența $\nu = 50$ Hz. Se cer: a) intensitățile curenților din circuit și diagrama fazorială; b) impedanța circuitului și defazajul dintre curent și tensiune la bornele circuitului; c) modificînd frecvența sursei, pentru ce valoare ν_1 a frecvenței s-ar obține intensitatea minimă și care ar fi valoarea acesteia.

4°. a) Să se enunțe principiul al doilea al termodinamicii; b) Să se enunțe legile fierberii; c) Să se definească parametrii unei triode.

5°. Să se scrie, indicînd semnificația simbolurilor care apar: a) ecuația Clapeyron-Mendeleev; b) expresia randamentului ciclului Carnot; c) formula conductivității electrice a unui semiconductor cu impurități.

XXXIX. 1°. Se consideră un corp de pompă vertical cu secțiunea $S = 0{,}01$ m², prevăzut în partea superioară cu un piston mobil de masă $M = 50$ kg. În corpul de pompă se află $m = 14$ g de azot la temperatura $t_1 = 27$°C. Gazul suferă o încălzire izobară pînă la o temperatură $T_2 = 400$ K, după care pistonul este blocat și corpul de pompă este pus în legătură cu un vas de volum $V_2 = 3 \cdot 10^{-3}$ m³, în care se află, de asemenea, azot avînd presiunea $p_2 = 4 \cdot 10^5$ N/m² și temperatura T_2. Se cer: a) înălțimea h la care se găsește pistonul față de baza corpului de pompă în starea inițială; b) lucrul mecanic efectuat de gaz în cursul încălzirii izobare; c) presiunea finală, după stabilirea legăturii între corpul de pompă și vas. Se dau: constanta gazelor perfecte $R = 8\,310$ J/kmol · K; masa molară a azotului $\mu = 28$ kg/kmol; accelerația gravitațională $g \simeq 10$ m/s²; presiunea atmosferică $p_0 = 10^5$ N/m².

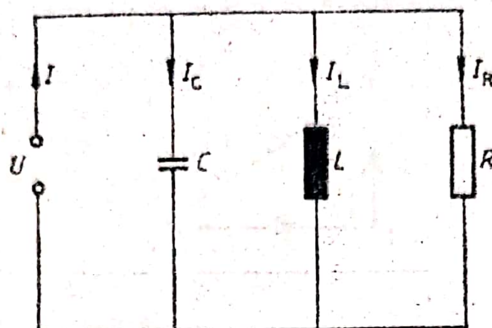


Fig. F.B.18

2°. Un gaz ideal monoatomic se află inițial în starea caracterizată de parametrii: $p_1 = 2 \cdot 10^5$ N/m², $V_1 = 2 \cdot 10^{-3}$ m³ și $T_1 = 400$ K. În starea finală gazul are parametrii: $p_5 = 10^5$ N/m², $V_5 = 3 \cdot 10^{-3}$ m³ și $T_5 = 300$ K. Din starea inițială se poate ajunge în starea finală pe trei căi distincte: transformare izocoră 1—4 urmată de o transformare izobară 4—5; transformare izotermă 1—2 urmată de o transformare izocoră 2—5; transformare arbitrară 1—3 urmată de o transformare izobară 3—5. Se cer: a) lucrul mecanic și cantitatea de căldură schimbate de gaz pe calea 1—4—5; b) lucrul mecanic și cantitatea de căldură schimbate de gaz pe calea 1—2—5; c) variația energiei interne pe calea 1—3—5. Se dau: constanta gazelor perfecte $R = 8\,310$ J/kmol · K; căldura molară la volum constant $C_V = 3R/2$; ln 1,5 = 0,4.

3°. O diodă este conectată la o tensiune continuă $U = 20$ V prin intermediul unei rezistențe R_1, căderea de tensiune pe diodă fiind $U_d = 9$ V. Se cer: a) valoarea rezistenței R_1 astfel încît curentul prin diodă să aibă valoarea $I_d = 10$ mA; b) ce valoare va trebui să aibă rezistența R_1, dacă în paralel cu dioda se conectează o rezistență de sarcină $R_s = 600\ \Omega$, astfel încît curentul prin diodă nu se modifică; c) curentul total rămînînd constant, între ce limite variază rezistența de sarcină (pentru $R_1 = 440\ \Omega$), astfel încît intensitatea curentului prin diodă să fie cuprinsă între $I_{d,\,\text{minim}} = 0{,}5$ mA și $I_{d,\,\text{maxim}} = 19{,}5$ mA.

4°. Să se scrie, indicînd semnificația simbolurilor care apar: a) legea lui Jurin; b) legile lui Kirchhoff; c) legile electrolizei.

5°. Să se definească: a) energia internă a unui sistem termodinamic; b) unitatea de măsură a fluxului magnetic; c) inductanța unui circuit.

XL. 1°. Un circuit RLC paralel, format dintr-un rezistor $R = 10\ \Omega$, o bobină de inductanţă $L = 10^{-4}$ H şi un condensator C este alimentat de un generator de curent alternativ de frecvenţă $f = 10^4$ Hz. La rezonanţă, valoarea efectivă a intensităţii totale a curentului este $I = 20$ mA. Se cer: a) puterea disipată pe rezistorul R şi valoarea capacităţii C a condensatorului, la rezonanţă; b) impedanţa circuitului, dacă frecvenţa generatorului se dublează; c) care este permeabilitatea magnetică relativă a miezului bobinei ştiind că are o lungime $l = 0{,}1$ m, secţiunea $S = 10^{-4}$ m^2 şi $N = 100$ de spire. Se dă permeabilitatea magnetică a vidului $\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7}$ N/A^2.

2°. O bară de fier de masă $m_1 = 0{,}05$ kg şi una de aluminiu de masă $m_2 = 0{,}1$ kg, aflate la aceeaşi temperatură $t_1 = 100$°C, sînt introduse într-un calorimetru de capacitate calorică $C = 125$ J/K în care se află o masă $m_3 = 0{,}2$ kg de apă la temperatura $t_2 = 20$°C. Se cer: a) temperatura finală de echilibru; b) care trebuie să fie masa m_4 a unei bucăţi de gheaţă avînd temperatura $t_4 = -5$°C şi care, introdusă în calorimetru, face ca, prin topirea ei integrală, noua temperatură de echilibru să fie de 0°C; c) cu cît se modifică volumul barei de fier în cursul procesului de la punctul b)?

Se dau: căldurile specifice: $c_{Fe} = 500$ J/kg · K; $c_{Al} = 900$ J/kg · K; $c_{apă} = 4\,180$ J/kg · K; $c_{gheaţă} = 2\,090$ J/kg · K; căldura latentă de topire a gheţii $\lambda = 334\,000$ J/kg; densitatea fierului ρ_{Fe} (0°C) = 7 800 kg/m^3; coeficientul de dilatare în volum al fierului $\gamma_{Fe} = 3{,}5 \cdot 10^{-5}$ K^{-1}.

3°. Un cilindru orizontal de volum $V = 4 \cdot 10^{-3}$ m^3 în care se află azot, închis în ambele capete, este împărţit în două compartimente de un piston mobil termoizolant. Echilibrul mecanic al pistonului se realizează atunci cînd raportul volumelor celor două compartimente este $V_1/V_2 = 5$, la temperatura $T_1 = 300$ K. Se cer: a) cu cîte grade trebuie încălzit un compartiment, ştiind că prin răcirea celuilalt compartiment cu acelaşi număr de grade, volumele celor două compartimente devin egale; b) în ce raport se află presiunea finală faţă de cea iniţială; c) care este viteza termică a moleculelor din compartimentul încălzit.

Se dau: constanta gazelor perfecte $R = 8\,310$ J/kmol · K şi masa molară a azotului $\mu = 28$ kg/kmol.

4°. Să se definească: a) masa moleculară relativă a unei substanţe; b) intensitatea cîmpului electric într-un punct; c) capacitatea electrică a unui conductor izolat.

5°. Să se scrie, indicînd semnificaţia simbolurilor care apar: a) expresia randamentului ciclului Carnot; b) expresia inducţiei cîmpului magnetic generat de un curent electric rectiliniu; c) expresia forţei Lorentz.

γ. ÎNVĂŢĂMÎNTUL DE SUBINGINERI (3 ani) — TOATE PROFILURILE; SPECIALIZĂRILE DIN ÎNVĂŢĂMÎNTUL PEDAGOGIC DE CHIMIE-FIZICĂ (3 ani) ŞI MATEMATICĂ-FIZICĂ (3 ani)

XLI. 1°. Într-o incintă de volum $V = 2 \cdot 10^{-3}$ m^3, prevăzută cu o supapă care se deschide la o presiune $p = 2 \cdot 10^4$ N/m^2, se află azot la presiunea $p_1 = 1{,}38 \cdot 10^4$ N/m^2 şi temperatura $t_1 = 127$°C. Se cere să se determine: a) numărul de molecule din incintă; b) masa de gaz şi energia cinetică medie de translaţie a moleculelor; c) masa de gaz care a ieşit din incintă dacă gazul se încălzeşte cu $\Delta T = 300$ K.

Se dau: masa molară a azotului, $\mu = 28$ kg/kmol.; constanta lui Boltzmann, $k = 1{,}38 \cdot 10^{-23}$ J/K.

2°. Un circuit serie RLC în care $R = 4\ \Omega$, $L = 25{,}48$ mH şi $C = 637\ \mu$F este alimentat de la un generator de curent alternativ cu tensiunea efectivă $U = 120$ V şi frecvenţa $\nu = 50$ Hz. Să se calculeze: a) intensitatea curentului din

circuit și tensiunile la bornele rezistorului U_R, bobinei U_L și condensatorului U_C: b) pentru ce valoare C_1 a capacității condensatorului apare rezonanța în circuit; c) factorul de supratensiune al circuitului dat.

3°. a) Să se enunțe principiul întîi al termodinamicii; b) să se scrie expresia lucrului mecanic într-o transformare izotermă, indicîndu-se semnificația simbolurilor care apar; c) să se definească coeficientul de dilatare aparentă a lichidelor.

4°. Să se scrie, indicînd semnificația simbolurilor: a) legile lui Kirchhoff; b) expresia forței Lorentz; c) expresia energiei înmagazinate în cîmpul electric dintre armăturile unui condensator.

2. ÎNVĂȚĂMÎNTUL UNIVERSITAR

(PROFILUL FIZICĂ)

XLII. 1° Un vas conține un lichid cu densitatea $\rho_0 = 1\,000$ kg/m³. Pe marginea superioară a vasului se sprijină liber, la capătul superior, o tijă subțire, omogenă și uniformă, de lungime $l = 1$ m și densitatea $\rho = 910$ kg/m³, capătul inferior al tijei fiind cufundat în lichid. Capătul superior al tijei se află la înălțimea $h = 0{,}15$ m față de nivelul lichidului. Să se determine: a) lungimea porțiunii de tijă cufundată în lichid: b) unghiul pe care îl face tija cu suprafața lichidului; c) coeficientul de frecare la alunecare minim, dintre tijă și marginea vasului, pentru ca tija să nu alunece.

2°. Un vagon cu masa $m_1 = 10$ t se deplasează pe o cale ferată orizontală și liniară cu viteza $v_0 = 10$ m/s. După un timp $t = 10$ s el se ciocnește și se cuplează (ciocnire plastică) cu un al doilea vagon de masă $m_2 = 20$ t aflat în repaus. În timpul mișcării, atît înainte cît și după ciocnire, asupra fiecărui vagon acționează o forță de rezistență egală cu a $n = 100$ parte din greutatea respectivului vagon. Să se determine: a) viteza primului vagon înainte de ciocnire; b) viteza vagoanelor cuplate, imediat după ciocnire: c) căldura degajată prin ciocnire: d) timpul și distanța pînă la oprirea vagoanelor cuplate. Se dă $g = 10$ m/s².

3°. Un motor termic avînd ca substanță de lucru un gaz ideal funcționează după un ciclu ca cel din figura F.B.19. În starea inițială 1 gazul ideal ocupă volumul $V_0 = 2$ dm³ la presiunea $p_0 = 100$ kPa. Să se determine: a) lucrul mecanic,

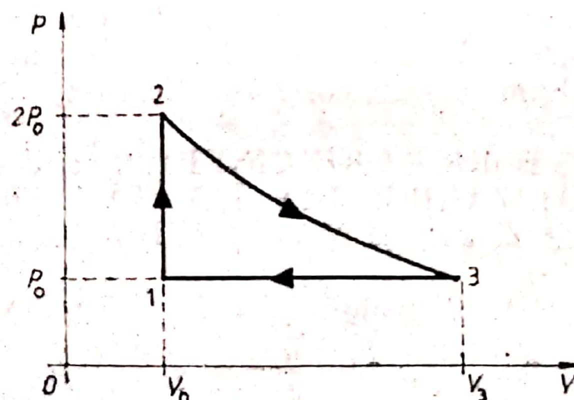


Fig. F.B.19

căldura și variația energiei interne în transformările 1—2, 2—3, 3—1: b) randamentul ciclului. Se dă căldura molară la volum constant a gazului ideal $C_V = \frac{5}{2}R$.

4°. Să se scrie indicînd semnificația fizică a mărimilor: a) legea lui Hooke pentru întinderea unei bare: b) viteza termică a moleculelor unui gaz perfect; c) variația densității corpurilor cu temperatura.

5°. a) Să se stabilească expresia accelerației centripete în mișcarea circulară uniformă; b) Să se studieze izotermele lui Andrews. Starea critică; c) Să se enunțe, în diverse formulări, legea lui Gay-Lussac.

XLIII. 1°. Un dispozitiv Young avînd distanța dintre fante $2l = 0{,}5$ mm și distanța de la planul fantelor la ecran $D = 1$ m se iluminează cu lumină albă. Considerînd că lungimile de undă extreme din spectrul vizibil sînt $\lambda_1 = 0{,}4$ µm, respectiv, $\lambda_2 = 0{,}7$ µm, să se calculeze: a) lungimile de undă ale radiațiilor care vor da minime într-un punct de pe ecran situat la distanța $x = 3{,}5$ cm de franja centrală; b) în calea unui fascicul, perpendicular pe el, se interpune o lamă de sticlă plan-paralelă de grosime $d = 13$ µm, al cărei indice de refracție variază cu lungimea de undă conform relației $n = a + b/\lambda^2$. Știind că pentru $\lambda_1 = 0{,}4$ µm indicele de refracție este $n_1 = 1{,}52$, iar pentru $\lambda_2 = 0{,}7$ µm, $n_2 = 1{,}5$, să se calculeze la ce distanță față de poziția franjei centrale de ordin zero de la punctul precedent se va forma franja centrală pentru radiația cu $\lambda = 0{,}6$ µm.

2°. Se consideră circuitul electric din figura F.B.20, în care tensiunea electromotoare a sursei $E_1 = 2$ V, iar rezistorii au rezistențele $R_1 = R_3 = 1\ \Omega$, $R_2 = R_4 = 2\ \Omega$. Puterea disipată pe R_4 este $P_4 = 2$ W. Se cere: a) intensitatea curentului prin fiecare rezistor; b) tensiunea electromotoare a sursei E_2; c) puterea furnizată de sursa E_1 circuitului. Rezistențele interne ale surselor sînt neglijabile.

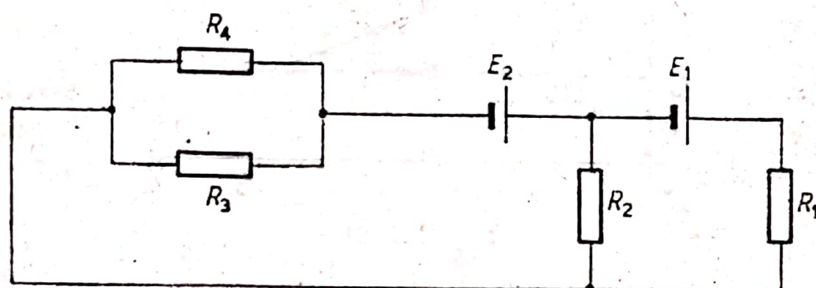


Fig. F.B.20

3°. Radiocobaltul $^{60}_{27}Co$ are timpul de înjumătățire $T_{1/2} = 5{,}3$ ani și se dezintegrează emițînd o particulă β^- cu energia cinetică medie de 0,1 MeV și cîte doi fotoni gamma cu energiile 1,17 respectiv, 1,33 MeV. a) Calculați căldura dezvoltată prin absorbția integrală a fotonilor și electronilor emiși de 2 g de radiocobalt timp de 10,6 ore. b) Fotonii emiși extrag dintr-o foiță de Pb fotoelectroni. Să se calculeze viteza acestora știind că energia de legătură a electronilor în plumb este de 88 keV. Se dau: $N_A = 6{,}023 \cdot 10^{26}$ kmol^{-1}, $c = 3 \cdot 10^8$ m/s, $m_0 = 9{,}1 \cdot 10^{-31}$ kg, 1 eV $= 1{,}6 \cdot 10^{-19}$ J, $\ln 2 = 0{,}693$.

4°. Scrieți indicînd semnificația fizică a termenilor care intervin: a) parametrii triodei. b) condiția de cuantificare a momentului magnetic în modelul atomic al lui Bohr. c) forța de interacțiune electromagnetică între doi conductori liniari, paraleli și infiniți parcurși de curenți electrici continui.

5°. Tratați subiectele: a) efectul Compton, b) autoinducția; inductanța unui circuit.

3. ÎNVĂȚĂMÎNTUL MEDICO-FARMACEUTIC

(PROFILURILE: MEDICINĂ, STOMATOLOGIE)

XLIV. 1°. Să se scrie indicînd semnificația fizică a mărimilor: a) ecuația Poisson (ecuația transformării adiabatice); b) legea lui Ohm pentru un circuit *RLC* paralel în curent alternativ; c) expresiile pentru intensitatea luminoasă și iluminare, unități de măsură.

2°. Să se deducă: a) expresia efortului unitar exercitat de o bară încălzită și fixată la ambele capete; b) expresia forței Lorentz; c) legătura dintre masă și energie.

3°. Să se trateze subiectul: Relațiile fundamentale ale dioptrului sferic (inclusiv focarele dioptrului sferic).

4°. Un motor termic avînd ca substanță de lucru un gaz ideal funcționează după un ciclu, cum este cel din figura F.B.21. în care transformarea 2 — 3 este izotermă. În starea inițială 1 gazul ideal ocupă volumul $V_0 = 2\ dm^3$ la presiunea $p_0 = 10^5$ N/m². Să se determine: a) lucrul mecanic, căldura și variația energiei interne în transformările 1—2, 2—3 și 3—1; b) randamentul ciclului; c) randamentul ciclului Carnot care ar lucra între temperaturile extreme ale ciclului din figură. Se dau: căldura molară la volum constant $C_V = \frac{5}{2}$, ln 2 = 0,693.

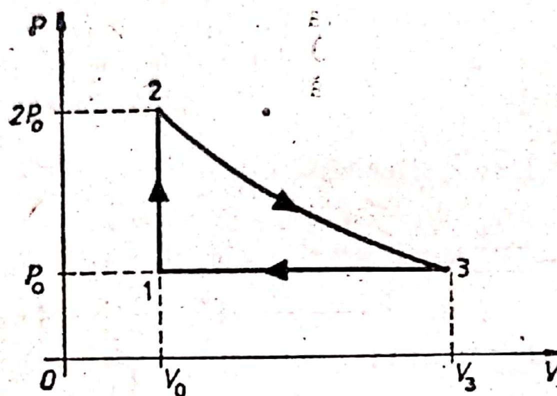


Fig. F.B.21

5°. Un condensator plan, cu aer, care are permitivitatea relativă $\varepsilon_{r_1} = 1$, are distanța dintre armături $d = 2$ cm și se încarcă sub tensiunea $U = 20$ kV, după care se deconectează de la sursă. Se introduce între armăturile condensatorului, lipit de una din plăci, o lamă de sticlă plan-paralelă de grosime $d/2$ cu permitivitatea relativă $\varepsilon_{r_2} = 4$. Tensiunea măsurată la bornele condensatorului devine U_1. Se scoate lama de sticlă și se umple în întregime jumătate din condensator, tot cu sticlă, astfel că limita de separare aer-sticlă să fie perpendiculară pe armăturile condensatorului. Tensiunea măsurată la bornele condensatorului este acum U_2. Să se calculeze: a) tensiunile U_1 și U_2; b) raportul capacităților C_2/C_1 în cele două cazuri și să se comenteze rezultatul; c) intensitățile cîmpului electric în aer și în sticlă în cele două cazuri.

XLV. 1°. Să se scrie indicînd semnificația fizică a mărimilor: a) expresia vitezei de evaporare pentru vaporizarea la suprafață; b) legile electrolizei; c) legea lui Brewster, semnificație fizică.

2°. Să se demonstreze: a) randamentul motorului Otto; b) legea lui Ohm pentru un circuit *RLC* serie în curent alternativ; c) expresia pentru grosismentul unui microscop.

3°. Să se trateze subiectul: Principiile termodinamicii.

4°. Într-un cîmp magnetic omogen de inducție magnetică $\vec{B}$ se află imobilizată o spiră circulară din cupru, de rază $r = 12$ cm. Aria secțiunii conductorului este $S = 1\ mm^2$, avînd rezistivitatea electrică $\rho = 1{,}7 \cdot 10^{-8}\ \Omega \cdot m$. Normala la suprafața spirei este paralelă cu direcția inducției magnetice $\vec{B}$. Să se calculeze sarcina totală ce străbate spira circulară la dispariția cîmpului magnetic și valoarea

inducției magnetice $\vec{B}$, dacă prin spira circulară imobilă trece un curent cu intensitatea $I = 2$ A, normala la suprafața spirei fiind perpendiculară pe direcția inducției B, aflată într-un plan orizontal, atunci un ac magnetic așezat în centrul spirei va fi deviat cu un unghi la 5° față de direcția inducției magnetice $\vec{B}$. Se dă: permeabilitatea magnetică a vidului $\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7}$ H/m și se neglijează cîmpul magnetic terestru. Se va lucra în aproximația unghiurilor mici ($\text{tg}\, \alpha \simeq \alpha$).

5°. Pe o rețea de difracție plană, cade normal un fascicul de lumină paralelă. Rețeaua de difracție este alipită de fața plană a unei lentile plan-convexe în focarul căreia este așezat un ecran, perpendicular pe axa optică. Să se determine: a) ordinul de difracție k al radiației cu lungimea de undă $\lambda_1 = 600$ nm, care se suprapune pe ecran, cu ordinul $k+1$ al radiației cu lungimea de undă $\lambda_2 = 400$ nm, la distanța $x_k = \frac{25}{\sqrt{2}}$ cm de franja centrală de difracție; b) constanta rețelei de difracție și distanța focală a lentilei știind că dacă rețeaua se așază la distanța de $d = 55$ cm de lentilă, imaginea sa va fi de $n = 10$ ori mai mare decît obiectul; c) ordinul maxim de difracție pentru lungimile de undă λ_1 și λ_2; d) de cîte ori se suprapune radiația cu lungimea de undă λ_1 cu radiația de ordin superior de difracție a radiației cu lungimea de undă λ_2.

ENUNȚURI
1987

1. ÎNVĂȚĂMÎNTUL TEHNIC

α. PROFILURILE: MECANIC, ELECTRIC, ENERGETIC, MINE, PETROL, METALURGIE, CONSTRUCȚII, GEODEZIE, TEHNOLOGIA ȘI CHIMIA TEXTILELOR, TEHNOLOGIA ȘI CHIMIA PRODUSELOR ALIMENTARE, FORESTIER (specializarea INDUSTRIALIZAREA LEMNULUI), GEOLOGIE

XLVI. 1°. Se cere: a) să se demonstreze teorema momentului cinetic pentru punctul material; b) să se definească temperatura empirică a unui sistem termodinamic; c) să se trateze subiectul: concentrația purtătorilor de sarcină în semiconductorii cu impurități.

2°. Se cere: a) să se trateze subiectul: legea lui Hooke; b) să se prezinte transformarea de fază gaz-lichid, utilizîndu-se izotermele Andrews; c) să se definească intensitatea efectivă a curentului electric și să se interpreteze geometric.

3°. O particulă este lansată cu viteza inițială $v_0 = 10$ m/s, sub un unghi α față de orizontală, în cîmp gravitațional uniform. a) Să se scrie ecuațiile de mișcare ale particulei și să se afle traiectoria acesteia. La ce înălțime maximă ajunge particula pentru $\alpha = 45°$? b) Pentru ce unghi α de lansare particula cade într-un punct de abscisă $x = x_1$ de pe axa orizontală Ox? Discuție. c) Să se determine în cazul general condiția ca, pentru un anumit v_0, particula să treacă printr-un punct de coordonate x_2 și y_2 din planul xOy. Să se afle domeniul de valori y_2 pentru $x_2 = 4$ m și $v_0 = 12$ m/s. Se consideră $g = 10$ m/s².

4°. O cantitate $m = 2$ g de gaz ideal, aflată la temperatura inițială $t_1 = 47$°C, se dilată izobar la presiunea $p = 200$ kN/m², volumul final fiind $V_2 = 2$ l. Să se afle: a) lucrul mecanic efectuat în acest proces și exponentul adiabatic al gazului;

b) căldura absorbită în timpul dilatării izobare și creșterea ΔU a energiei interne: c) dacă gazul se destinde după legea $p = \alpha V$, unde $\alpha = 10^8$ N/m^5, de la volumul $V_1 = 1$ l la volumul $V_2 = 2$ l, să se calculeze lucrul mecanic efectuat de gaz, variația energiei interne și capacitatea calorică a gazului în cursul transformării. Se cunosc pentru gazul considerat: masa molară $\mu = 20$ kg/kmol; căldura molară la volum constant $C_V = \frac{3}{2} R$; constanta gazelor perfecte $R = 8\,310$ J/kmol · K.

5°. Spațiul dintre armăturile unui condensator plan este umplut cu două straturi de dielectric. Grosimea primului strat este $d_1 = 0{,}5$ cm, iar permitivitatea lui relativă este $\varepsilon_{r_1} = 6$. Al doilea strat dielectric are permitivitatea relativă $\varepsilon_{r_2} = 5$. Cunoscînd capacitatea condensatorului $C = 100$ pF, suprafața unei armături $S = 180$ cm^2 și sarcina de pe o armătură $Q = 10^{-7}$ C, se cer: a) grosimea stratului al doilea și diferența de potențial dintre armături; b) diferența de potențial dintre fiecare armătură și suprafața de contact a celor două straturi; c) dacă între armăturile condensatorului se introduce în locul straturilor de dielectric o placă metalică de grosime d_1 și se așază simetric în raport cu armăturile, să se calculeze capacitatea condensatorului în acest caz. Variază energia cîmpului electric din condensator prin această modificare? Se știe: $\varepsilon_0 = 8{,}85 \cdot 10^{-12}$ F/m.

XLVII. 1°. Se cere: a) să se formuleze principiile mecanicii newtoniene; b) să se enunțe legile fierberii; c) să se trateze subiectul: clasificarea corpurilor solide în metale, semiconductori și dielectrici, pe baza schemei benzilor energetice.

2°. Se cere: a) să se stabilească expresiile elongației, vitezei și accelerației oscilatorului liniar armonic; b) să se stabilească expresia forței care se dezvoltă în procesul de dilatare liniară a unei bare; c) să se definească permitivitatea electrică și permeabilitatea magnetică a unui mediu.

3°. Pe o scîndură se află un corp cu masa $m = 1$ kg. Scîndura efectuează oscilații armonice în plan vertical, cu perioada $T = 1/2$ s și amplitudinea $A = 2$ cm. Se cer: a) forța de apăsare a corpului pe scîndură și valoarea maximă a acesteia: b) ce amplitudine maximă A' ar putea să aibă oscilațiile pentru a nu se desprinde de corpul de pe scîndură? c) dacă scîndura oscilează într-un plan orizontal cu perioada $T = 5$ s, corpul începe să alunece la o amplitudine $A'' = 0{,}6$ m. Care este coeficientul de frecare dintre scîndură și corp? Se cunoaște $g = 10$ m/s^2.

4°. Se formează un sistem fizic din 5 corpuri (subsisteme) de mase $m_i (i = 1, 2, 3, 4, 5)$, călduri specifice c_i, temperaturi inițiale t_i, coeficienți de dilatare volumică γ_i și densități la 0°C, ρ_{0i}. Subsistemele schimbă între ele căldură și se ajunge la o stare de echilibru termic. a) Să se stabilească expresia temperaturii de echilibru. b) Să se particularizeze această expresie pentru cazul unor cantități egale din același lichid $m_i = 1$ kg, avînd temperaturile corelate prin relația $t_{i+1} = \eta t_i$, unde $\eta = 1{,}2$ și $t_1 = 30$ °C. c) Să se afle expresia variației totale a volumului sistemului, considerat izolat termic față de exterior. d) Să se calculeze în condițiile de la punctul b această variație, dacă se consideră $\gamma_i = 9 \cdot 10^{-4}$ K^{-1} și $\rho_{0i} = 0{,}8 \cdot 10^3$ kg/m^3.

5°. Doi condensatori plani, C_1 și C_2, cu aer, au armăturile de aceeași suprafață, $S = 1\,000$ cm^2, situate la distanțele d și, respectiv, $d/2$ (cu $d = 1$ cm). Condensatorii sînt montați în paralel și încărcați la o tensiune $U_0 = 1\,000$ V. a) Să se calculeze sarcina și energia înmagazinată de fiecare dintre condensatori. b) Dacă C_1 și C_2 rămîn montați în paralel, ansamblul celor doi condensatori fiind izolat de sursa de tensiune, iar una dintre armăturile condensatorului C_2 este mobilă și se deplasează paralel față de poziția inițială pînă la o distanță între armături $d = 1$ cm, să se calculeze în acest caz capacitățile, sarcinile și diferența de potențial pentru fiecare dintre cei doi condensatori, precum și energia înmagazinată de fiecare dintre ei. Se cunoaște $\varepsilon_0 = 8{,}85 \cdot 10^{-12}$ F/m.

XLVIII. 1°. Se cere: a) să se trateze subiectul: teorema variației energiei cinetice a punctului material; b) să se stabilească expresia variației densității unui lichid cu temperatura; c) să se stabilească formula conductivității unui semiconductor cu impurități.

2°. Se cere: a) să se trateze subiectul: legea lui Pascal; b) să se definească coeficientul de tensiune superficială al lichidelor; c) să se trateze fenomenul de rezonanță pentru circuitul serie *RLC*.

3°. Un corp de formă cubică plutește pe suprafața mercurului dintr-un vas cilindric de înălțime $h_0 = 0{,}4$ m și secțiune $S = 6 \cdot 10^{-2}$ m², astfel încît un sfert din volumul său este scufundat. a) Ce fracțiune din volumul corpului se va scufunda în mercur, dacă la suprafața acestuia se toarnă un strat de lichid avînd densitatea $\rho_1 = 800$ kg/m³, care acoperă la limită corpul? b) Dacă se scoate corpul și se consideră vasul umplut complet numai cu lichidul de densitate ρ_1, iar la baza vasului se face un orificiu de secțiune $s = 10^{-4}$ m², să se afle viteza v_1 de coborîre a nivelului lichidului în vas și viteza v_2 de ieșire a lichidului prin orificiu și să se particularizeze pentru $h = h_0/2$. Se cunosc: densitatea mercurului, $\rho_{Hg} = 13\,600$ kg/m³; accelerația gravitațională, $g = 10$ m/s².

4°. Un gaz perfect ocupă în starea A, inițială, un volum $V_A = 1$l la presiunea $p_A = 2 \cdot 10^5$N/m² și temperatura $t_A = 27$°C. a) Se comprimă izoterm gazul pînă la o presiune de zece ori mai mare decît presiunea inițială, ajungînd în starea B; să se calculeze volumul final al gazului, lucrul mecanic și căldura schimbată de sistem cu exteriorul. b) Dacă în continuare gazul se destinde adiabatic pînă la presiunea inițială (starea C), să se calculeze volumul gazului, variația de temperatură, lucrul mecanic și variația energiei interne. c) Din starea C gazul ajunge în starea A printr-o transformare izobară; să se determine variația energiei interne a gazului, lucrul mecanic și căldura schimbată cu exteriorul în această transformare. Se cunoaște căldura molară la volum constant a gazului, $C_V = 5/2\ R$. (Se va lua $10^{5/7} = 5{,}18$).

5°. Rezistența R_1, conectată la rețeaua orașului, degajă o cantitate de căldură Q în 15 minute. Rezistența R_2 degajă, în aceleași condiții, aceeași cantitate de căldură în 30 minute. Se cer: a) timpul în care cele două rezistențe, legate în serie și conectate la rețea, vor degaja împreună cantitatea de căldură Q pe care o degajă separat fiecare dintre ele; b) timpul în care cele două rezistențe, legate în paralel și conectate la rețea, vor degaja împreună aceeași cantitate Q de căldură; c) rezistența R_1 este confecționată dintr-un fir cu lungimea $l = 1$ m, secțiunea $s = 1$ mm², densitatea $d = 2{,}7 \cdot 10^3$ kg/m³, căldura specifică $c = 1\,100$ J/kgK, rezistivitatea la 0 °C, $\rho_0 = 3 \cdot 10^{-8}\ \Omega \cdot$ m; coeficientul termic al rezistivității $\alpha = 4 \cdot 10^{-3}$ grad⁻¹ și temperatura de topire 650°C. Cunoscînd temperatura mediului în care se lucrează, $t = 20$ °C și pierderile de căldură de 10%, să se afle dacă firul poate suporta un curent $I = 10$ A, timp de 3 minute, fără să se topească. Se neglijează dilatarea firului.

XLIX. 1°. Se cere: a) să se deducă expresia accelerației centripete; b) să se trateze subiectul: vaporizarea la suprafața unui lichid; c) să se trateze subiectul: caracteristica diodei cu vid și legea Langmuir.

2°. Se cere: a) să se trateze subiectul: compunerea a două mișcări oscilatorii de aceeași frecvență care se efectuează pe aceeași direcție; b) să se deducă expresia randamentului ciclului Carnot; c) să se demonstreze structura discontinuă a sarcinii electrice utilizîndu-se legile electrolizei.

3°. Un pendul conic este format dintr-un mic corp de masă $m = 0{,}1$ kg, atîrnat de un fir cu lungimea $l_1 = 1$ m, ca în figura F.B.22. În timpul rotației firul face unghiul $\alpha_1 = 45°$ cu verticala. Firul poate fi scurtat printr-un orificiu aflat în suport, astfel încît unghiul format de fir cu verticala devine $\alpha_2 = 60°$. Să se afle: a) perioada mișcării înainte de scurtarea firului; b) lungimea l_2 a firului după scurtare;

c) lucrul mecanic efectuat în cursul operației de scurtare, dacă se neglijează frecările. Se consideră $g = 10$ m/s² (se va lua $\sqrt[6]{3} = 1{,}2$).

4°. Un densimetru cilindric (de forma unui tub închis la ambele capete), cu diametrul $d = 8$ mm și masa $m = 25$ g plutește în poziție verticală, scufundat parțial într-un lichid cu densitatea la 0 °C, $\rho_0 = 10^3$ kg/m³ și coeficientul de dilatare volumică $\gamma = 2{,}2 \cdot 10^{-4}$ grad^{-1}. a) Să se afle, la temperatura $t_0 = 0$ °C, eroarea Δh asupra adîncimii de scufundare care se face prin neglijarea fenomenelor de

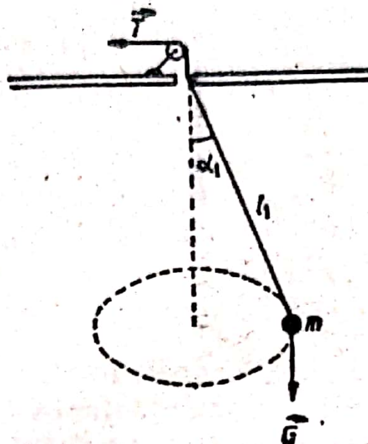


Fig. F.B.22

suprafață, dacă se știe coeficientul de tensiune superficială al lichidului $\sigma = 0{,}073$ N/m și că lichidul udă peretele tubului. b) Să se afle cu cît se modifică adîncimea de scufundare, dacă sistemul este încălzit la $t = 50$ °C, coeficientul de dilatare liniară al materialului densimetrului fiind $\alpha = 10^{-5}$ grad^{-1} (se neglijează fenomenele de suprafață). c) Dacă densimetrul este ridicat puțin și apoi lăsat liber în lichid, densimetrul va executa o mișcare oscilatorie. Neglijînd frecările și fenomenele de suprafață, să se afle perioada oscilațiilor la $t = 50$°C. Se consideră $g = 10$ m/s².

5°. Două sfere mici, conductoare, de aceeași dimensiune, avînd masele $m_1 = 20$ g și $m_2 = 33{,}3$ g și sarcinile $Q_1 = 2$ μC și, respectiv, $Q_2 = -4\,\mu C$ se află la distanța $l = 2$ m una de alta. Lăsate liber, sferele se apropie între ele, mișcîndu-se orizontal și fără frecare. a) Să se afle potențialul și intensitatea cîmpului electric, la mijlocul distanței dintre sfere, la momentul inițial. b) Să se afle vitezele sferelor, cînd acestea se află la distanța $l/2$ una de alta. c) Se aduce o sferă de aceleași dimensiuni, inițial neîncărcată, în contact cu sfera 1 și apoi cu sfera 2. Se repetă operația de $n = 3$ ori. Să se afle sarcinile finale de pe cele trei sfere. Se va considera și cazul cu n foarte mare (sfera a treia este de asemenea conductoare). Se cunoaște: $\varepsilon_0 = 8{,}85 \cdot 10^{-12}$ F/m.

L. 1°. Se cere: a) să se stabilească expresia accelerației centripete în mișcarea circulară uniformă; b) să se enunțe principiul al doilea al termodinamicii în formulările lui W. Thomson și R. Clausius; c) să se stabilească ecuația internă a unei triode.

2°. Se cere: a) să se stabilească ecuația undei plane; b) să se enunțe legile fierberii; c) să se definească cîmpul electric și cîmpul magnetic.

3°. La capătul de sus al unui plan înclinat de unghi $\alpha = 30°$ este fixat un scripete de masă neglijabilă, peste care este trecut un fir inextensibil. La un capăt al firului este legat un corp de masă $m_1 = 2$ kg, așezat pe planul înclinat, iar la celălalt capăt atîrnă un alt corp de masă m_2. Coeficientul de frecare dintre corp și plan este $\mu = 0{,}1$. a) Să se determine domeniul de valori ale masei m_2 pentru care sistemul rămîne în repaus, atunci cînd este lăsat liber. b) Să se calculeze forța de

inerţie care acţionează asupra sistemului pentru $m_2 = 2{,}5$ kg. c) Care este tensiunea T în fir, în cazul în care $m_2 = 0{,}5$ kg? Se consideră $g = 10$ m/s².

4°. O sferă metalică are masa $m = 20{,}5$ kg şi volumul egal cu 1,8 dm³, la temperatura de 0 °C. Sfera este încălzită pînă cînd volumul ei devine 1 816 cm³ şi apoi este introdusă într-un vas cu 4 kg de apă care are temperatura iniţială de 12 °C, ce-şi ridică temperatura la 22 °C. Să se afle: a) coeficientul de dilatare liniară a metalului din care este făcută sfera; b) variaţia densităţii sferei în cursul răcirii acesteia; c) dependenţa de temperatură a forţei arhimedice exercitate asupra sferei de metal în jurul temperaturii de 0 °C. Se cunosc: căldura specifică a apei, $c_{apă} = 4\,180$ J/kg · K; căldura specifică a metalului din care e făcută sfera, $c = 120$ J/kg · K. Se neglijează capacitatea calorică a vasului.

5°. Un circuit este alcătuit din nouă rezistenţe egale, care formează laturile unui hexagon şi diagonalele care pleacă din acelaşi vîrf, ca în figura F.B.23. Circuitul este alimentat de o baterie de acumulatori cu tensiunea electromotoare

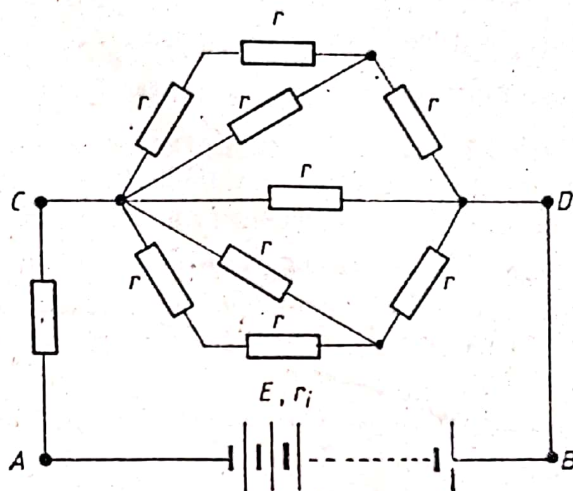


Fig. F.B.23

$E = 110$ V şi cu rezistenţa internă $r_i = 2\ \Omega$, printr-o rezistenţă $R = 7\ \Omega$. Circuitul exterior absoarbe de la sursă o putere de 968 W. Se cer: a) curentul debitat de baterie şi puterea consumată în rezistenţele hexagonului; b) tensiunea la bornele CD şi valoarea rezistenţelor care formează hexagonul; c) curenţii care trec prin laturile hexagonului.

β PROFILURILE: CHIMIE, MECANO-CHIMIC

LI. 1°. Se cere: a) să se deducă legea lui Jurin; b) să se enunţe legile electrolizei; c) în ce constă anomalia dilatării termice a apei?

2°. Se cere: a) să se deducă sarcina specifică a electronului din devierea în cîmpuri electrice şi magnetice; b) să se scrie expresia diferenţei de potenţial electric dintre două puncte, indicînd semnificaţia mărimilor; c) ce se înţelege prin energie internă?

3°. Un mol de oxigen se găseşte la temperatura $t_1 = 47$ °C, are densitatea $\rho = 1{,}22$ g/dm³ şi suferă o destindere izobară, efectuînd lucrul mecanic $L = 2\,800$ J. Să se determine: a) presiunea în starea iniţială şi temperatura în starea finală; b) variaţia energiei interne în acest proces; c) valorile vitezelor pătratice medii la începutul şi la sfîrşitul procesului. Se dau: masa molară a oxigenului $\mu_{O_2} = 32$ kg/kmol, exponentul adiabatic $\gamma = 1{,}4$, constanta gazelor ideale $R = 8{,}31$ J/mol · K.

4°. Se consideră circuitul din figura F.B.24, în care E este o baterie compusă din $n = 5$ elemente galvanice, fiecare avînd tensiunea electromotoare $E_i = 2$ V şi rezistenţa internă $r_i = 0{,}2\ \Omega$; rezistoarele au rezistenţele $R_1 = 4\ \Omega$, respectiv

$R_2 = 6\ \Omega$, iar solenoidul are $N = 200$ spire, diametrul $D = 4$ cm, rezistența $R_3 = 3\ \Omega$ și inductanța $L = 2$m H. Se cer: a) intensitățile curenților prin rezistențele R_1, R_2 și R_3; b) fluxul magnetic care străbate bobina și inducția magnetică în lungul axei solenoidului; c) căldura degajată în R_1 în timp de o oră.

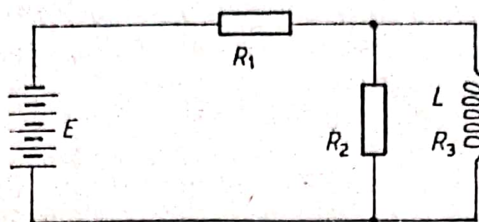


Fig. F.B.24

5°. Un circuit *RLC* paralel de curent alternativ este alimentat de o tensiune alternativă cu valoarea efectivă $U = 60$ V și frecvența $\nu = 50$ Hz. Știind că inductanța bobinei este $L = 1$ H, puterea activă în circuit este $P = 10$ W, iar defazajul dintre curentul total și tensiune este $\varphi = \frac{\pi}{6}$, să se determine: a) valoarea rezistenței R și a capacității C; b) valoarea instantanee a curentului prin bobină; c) inductanța bobinei pentru care curentul total devine minim și valoarea minimă a curentului, frecvența și capacitatea rămînînd constante.

LII. 1°. Se cere: a) să se enunțe legea lui Coulomb explicînd semnificația mărimilor; b) să se deducă expresia vitezei medii pătratice a moleculelor unui gaz ideal; c) suprafața de separare dintre două lichide nemiscibile este întotdeauna plană?

2°. Se cere: a) să se deducă expresia deviației unui electron în cîmp electric uniform; b) să se scrie expresia forței Lorentz, indicînd semnificațiile mărimilor; c) să se definească coeficientul de tensiune superficială.

3°. O baterie cu tensiunea electromotoare $E = 9$ V și rezistența internă r_i este conectată la un circuit alcătuit dintr-o rezistență $R_1 = 2\ \Omega$ și un solenoid cu rezistența $R_s = 8\ \Omega$ format din 100 spire, cu secțiunea $S = 25$ cm² și lungimea $l = 9{,}42$ cm. În paralel cu solenoidul se găsește un voltametru cu sulfat de cupru care are rezistența $R_v = 4\ \Omega$. Știind că într-un timp de 100 secunde se depun la catodul voltametrului 32 mg de cupru, se cer: a) intensitatea curentului prin voltametru; b) valoarea fluxului magnetic care străbate bobina și inductanța bobinei; c) rezistența internă a bateriei. Se dau: echivalentul electrochimic al cuprului $K = 0{,}32 \cdot 10^{-6}$ kg/C și permeabilitatea vidului $\mu_0 = 4\ \pi \cdot 10^{-7}$ N/A².

4°. Un circuit serie de curent alternativ, alimentat de o tensiune $U = 4{,}5$ V la frecvența $\nu = 1$ M Hz este alcătuit dintr-o inductanță L, o rezistență R și un condensator variabil C. Știind că variind condensatorul există două valori $C_1 = 200$ pF și $C_2 = 400$ pF pentru care intensitatea curentului are aceeași valoare, $I = 10$ mA, să se determine: a) valorile inductanței L și rezistenței R; b) puterea consumată în circuit la rezonanță; c) defazajul dintre curent și tensiune corespunzător valorilor C_1, respectiv C_2.

5°. Un gaz ideal se găsește în starea definită prin $p_1 = 10^5$ N/m², $T_1 = 300$ K, $V_1 = 1$ dm³ și suferă un proces ciclic, constînd dintr-o comprimare izotermă, cînd presiunea devine $p_2 = 10\ p_1$, o destindere adiabatică, după care revine în starea inițială printr-o transformare izobară. Să se determine: a) parametrii de stare necunoscuți; b) căldurile implicate în transformările izotermă și izobară; c) randamentul unui ciclu Carnot care ar funcționa între temperaturile extreme ale ciclului dat. Se dau: constanta gazelor perfecte $R = 8{,}31$ J/mol K, exponentul adiabatic $\gamma = 3/2$, $\sqrt[3]{10} = 2{,}15$.

LIII. 1°. Se cere: a) să se deducă expresia deviației electronului într-un cîmp electric uniform; b) să se specifice caracteristicile vaporizării în vid; c) să se scrie expresia capacității echivalente a unei baterii de condensatori în serie, respectiv în paralel.

2°. Se cere: a) să se deducă variația cu temperatura a densității unui solid; b) să se enunțe legile lui Kirchhoff; c) să se definească noțiunea de temperatură empirică.

3°. O mașină termică funcționează după un ciclu Carnot între temperaturile $t_1 = 500$ °C și $t_2 = 23$ °C și primește de la sursa caldă într-un minut căldura $Q_1 = 6 \cdot 10^5$ J. Se cer: a) randamentul mașinii; b) căldura cedată într-un minut sursei reci și puterea mașinii; c) cantitatea de apă cu temperatura inițială $t_3 = 20$ °C, care poate fi transformată în vapori la $t_4 = 100$ °C folosind o căldură egală cu cea cedată sursei reci în timp de 50 minute. Se dau: căldura specifică a apei $c_a = 4{,}18$kJ/kg K și căldura latentă de vaporizare a apei $\lambda_v = 2\,255$ kJ/kg.

4°. Un circuit este alcătuit dintr-o sursă cu tensiunea electromotoare $E = 18$ V și rezistența internă $r_i = 1\ \Omega$ și două rezistoare de rezistențe R_1 și R_2. Știind că intensitatea curentului este $I_1 = 2$ A, cînd rezistoarele sînt montate în serie, și $I_2 = 7{,}2$ A, cînd sînt montate în paralel, să se calculeze: a) valorile rezistențelor R_1 și R_2; b) tensiunile la bornele sursei în fiecare caz; c) puterile consumate în rezistoare în cele două cazuri.

5°. Un circuit este alcătuit dintr-o bobină cu inductanța $L = 0{,}4$ H și rezistența $R = 17{,}2\ \Omega$ și o sursă de curent continuu care are tensiunea electromotoare $E = 100$ V și rezistența internă neglijabilă. Bobina conține 500 de spire, are lungimea $l = 0{,}1$ m și diametrul $D = 2$ cm. Să se determine: a) permeabilitatea relativă a miezului bobinei; b) intensitatea curentului prin bobină și fluxul magnetic; c) ce valoare ar trebui să aibă capacitatea unui condensator, care, legat în serie cu bobina, ar lăsa să treacă același curent cînd s-ar aplica tensiunea alternativă $U = 100 \cdot \sqrt{2} \sin 100\,\pi\, t\ (V)$. Se dă permeabilitatea vidului $\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7}$ N/A².

γ. ÎNVĂȚĂMÎNTUL DE SUBINGINERI (3 ANI) — TOATE PROFILURILE; SPECIALIZĂRILE DIN ÎNVĂȚĂMÎNTUL PEDAGOGIC DE CHIMIE-FIZICĂ (3 ANI) ȘI MATEMATICĂ-FIZICĂ (3 ANI)

LIV. 1°. Să se prezinte: a) momentul unei forțe în raport cu un punct; b) pendulul gravitațional; c) fluxul magnetic.

2°. Să se scrie, indicînd și semnificația mărimilor care intervin: a) expresia momentului cinetic al punctului material în raport cu un pol; b) ecuația undei plane; c) legile lui Kirchhoff.

3°. Un avion cu masa $m = 8{,}5$ tone pleacă, din repaus, pe o pistă orizontală de lungime $l = 800$ m. Presupunînd deplasarea avionului pe pistă uniform accelerată și știind că viteza la sfîrșitul pistei este $v = 180$ km/h, calculați: a) accelerația și durata deplasării avionului pe pistă; b) mărimea forței de propulsie; c) puterea medie dezvoltată de avion la parcurgerea pistei.

4°. Un condensator plan, situat în vid, cu distanța dintre plăci $d = 3$ mm, are aplicată o tensiune $U = 100$ V. Să se calculeze: a) viteza cu care un electron, plecat din repaus de pe placa negativă, ajunge la cealaltă; b) timpul de trecere a elec-

tronului de la o placă la alta; c) intensitatea cîmpului electric dintre plăcile condensatorului. Se dau masa electronului $m = 9{,}1 \cdot 10^{-31}$ kg și sarcina sa $e = 1{,}6 \cdot 10^{-19}$ C.

LV. 1°. Să se prezinte: a) legea lui Hooke; b) compunerea forțelor paralele, de același sens; c) mișcarea unei particule cu sarcina q într-un cîmp magnetic uniform.

2°. Să se scrie, indicînd și semnificația mărimilor care intervin: a) legile de conservare în ciocnirea perfect elastică; b) ecuația lui Bernoulli; c) legile electrolizei.

3°. Un corp cu masa $m = 0{,}1$ kg este prins de un resort care are masa neglijabilă și constanta elastică $k = 10^3$ N/m. Sistemul oscilează armónic în direcția axei orizontale și are la distanța $x_1 = 3$ cm de poziția de echilibru o viteză $v_1 = 3\sqrt{3}$ m/s. Să se afle: a) pulsația și amplitudinea oscilațiilor; b) viteza maximă a oscilatorului; c) energia cinetică și energia potențială în momentul în care distanța față de echilibru este $x_2 = 2$ cm.

4°. La un acumulator cu tensiunea electromotoare $E = 3$ V și rezistența internă $r = 1\ \Omega$ se leagă, în serie, o rezistență $R_1 = 3\ \Omega$ și o bobină cu rezistența $R_2 = 8\ \Omega$. Bobina are $N = 1\,000$ spire, secțiunea $S = 25 \cdot 10^{-4}$ m² și lungimea $l = 0{,}314$ m. Să se afle: a) intensitatea curentului; b) inducția cîmpului magnetic în interiorul bobinei; c) inductanța bobinei. Se dă permeabilitatea mediului din bobină $\mu = 4\pi \cdot 10^{-7}$ N/A².

LVI. 1°. Să se scrie, indicînd și semnificația mărimilor care intervin: a) legea deformărilor elastice; b) energia mecanică totală a oscilatorului liniar armonic; c) legea lui Ohm pentru circuitul *RLC* serie în curent alternativ.

2°. Să se trateze: a) legile reflexiei și refracției; b) forța Lorentz; c) valoarea efectivă a intensității curentului și tensiunii alternative.

3°. Într-un vas cu mercur lichid plutește, cufundat pînă la jumătate, un corp cubic și omogen cu latura $h = 4$ cm. Densitatea mercurului fiind $\rho_m = 13\,600$ kg/m³, să se afle: a) densitatea corpului; b) fracțiunea din latură cufundată în mercur în cazul în care în vasul cu mercur se toarnă apă pînă cînd corpul este acoperit complet; c) masa apei dislocuite de corp în cazul b. Se dă densitatea apei, $\rho_a = 10^3$ kg/m³.

4°. La bornele unui acumulator cu tensiunea electromotoare $E = 3$ V și rezistența internă 1 Ω se leagă un rezistor cu rezistența $R = 32\ \Omega$. Să se afle: a) intensitatea curentului prin circuit și căderea de tensiune pe rezistor; b) numărul de kWh disipați în rezistența R în timp de 8 ore; c) care este valoarea lui R pentru care puterea disipată în rezistor este maximă?

LVII. 1°. Se cere: a) să se deducă dependența de temperatură și presiune a densității unui gaz; b) să se scrie expresia impedanței și defazajului curent-tensiune pentru un circuit *RLC* paralel, de curent alternativ, indicînd semnificația mărimilor; c) cum trebuie deplasată o spiră în cîmp magnetic uniform, pentru ca în ea să nu apară curent electric?

2°. Se cere: a) să se deducă expresia capacității echivalente a unei baterii de condensatori în serie, respectiv în paralel; b) să se definească coeficienții calorici; c) să se enunțe legile referitoare la presiunea maximă a vaporilor saturanți.

3°. Se consideră circuitul electric din figura F.B.25, în care sursele $E_1 = E_3 = 9$ V, $E_2 = 4{,}5$ V au rezistențele interioare $r_1 = r_2 = r_3 = 1\ \Omega$, iar $R = 100\ \Omega$. Să se determine: a) curenții prin cele trei ramuri ale circuitului; b) tensiunea dintre punctele A și B; c) puterea disipată în rezistorul R și puterea totală furnizată de baterii.

4°. O cantitate $\nu = 0,2$ moli de oxigen, aflată într-o stare inițială (1), caracterizată prin presiunea $p_1 = 6 \cdot 10^5$ N/m² și volumul $V_1 = 3$ dm³, ajung într-o stare finală (2), aflată pe aceeași izotermă, la presiunea $p_2 = 3 \cdot 10^5$ N/m². Se cer: a) viteza pătratică medie a moleculelor de gaz; b) lucrul mecanic efectuat cînd trecerea din starea (1) în starea (2) se face printr-o transformare izocoră urmată

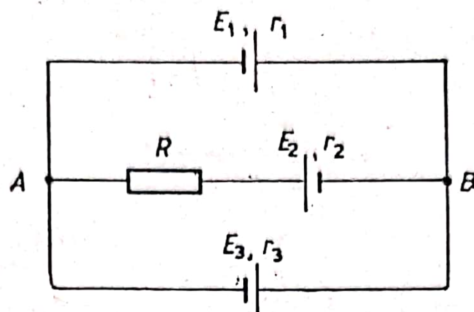


Fig. F.B.25

de una izobară; c) randamentul unui ciclu Carnot care ar funcționa între temperaturile extreme atinse în transformările enunțate. Se dau: constanta gazelor ideale $R = 8,31$ kJ/kmol K și masa molară a oxigenului $\mu_{O_2} = 32$ kg/kmol.

2. ÎNVĂȚĂMÎNTUL UNIVERSITAR

(PROFILUL FIZICĂ)

LVIII. 1°. Două baloane de volume egale $V = 1$ m³, dar de mase diferite, $m_1 = 7,2$ kg și $m_2 = 5,2$ kg, sînt legate între ele printr-un fir lung. Baloanele coboară vertical, în atmosferă liniștită, de la o înălțime foarte mare, întîmpinînd o forță de rezistență care crește cu viteza. a) Aflați tensiunea din fir cînd baloanele ajung în vecinătatea Pămîntului; b) la suprafața Pămîntului primul balon ciocnește perfect elastic acoperișul orizontal al unui bloc; să se determine accelerația acestui balon imediat după ciocnire. Se dau: densitatea aerului $\rho = 1,3$ kg/m³ și $g = 10$ m/s².

2°. Un resort de constantă elastică $k = 10$ N/m are capătul superior fixat, iar la capătul inferior este prins un corp de masă $m = 50$ g. Ținem inițial resortul vertical și alungit cu $y_0 = 10$ cm, apoi îi dăm drumul să oscileze pe verticală. Să se determine: a) amplitudinea oscilațiilor; b) la un moment dat, cînd corpul trece prin poziția extremă inferioară, de corp se lipește un alt corp de masă $m' = 100$ g, avînd inițial o viteză verticală $v_0 = 1,2$ m/s; care va fi noua amplitudine a oscilațiilor? c) căldura disipată prin stingerea oscilațiilor, în cazul punctului b, $g = 10$ m/s².

3°. Un motor termic funcționează cu un gaz ideal conform ciclului din figura F.B.26, în care $T_2 = eT_1$, unde $e = 2,71$ este baza logaritmilor naturali. Să se calculeze: a) randamentul ciclului; b) randamentul ciclului Carnot care ar lucra între temperaturile extreme ale ciclului.

4°. Să se demonstreze: a) teorema momentului cinetic pentru punctul material; b) ecuația Clapeyron-Mendeleev pentru o masă m de gaz ideal; c) expresia energiei interne a unui gaz ideal monoatomic.

5°. Să se răspundă la întrebările: a) cum variază faza mișcării oscilatorii armonice a particulelor mediului de-a lungul unei unde staționare? b) un gaz ideal suferă o transformare ciclică reprezentată în coordonate (p, T) printr-un cerc; în ce puncte ale ciclului volumul gazului este maxim, respectiv minim? c) un lichid urcă într-un tub capilar la înălțimea h; cu cît este egală presiunea în lichid, imediat sub menisc, dacă presiunea atmosferică este H?

LIX. 1°. Pe două șine paralele, conductoare, înclinate cu unghiul $\alpha = 60°$ față de orizontală, formînd astfel un plan înclinat, lunecă cu viteza constantă $v = 10$ m/s o bară conductoare, orizontală, de masă $m = 50$ g și lungime $l = 10$ cm, egală cu distanța dintre șine, într-un cîmp magnetic de inducție B, orientată vertical în jos. La bază șinele sînt legate între ele printr-un rezistor de rezistență $R = 0,1$ Ω. Unghiul de frecare dintre șine și bară este $\varphi = 15°$. Să se determine:

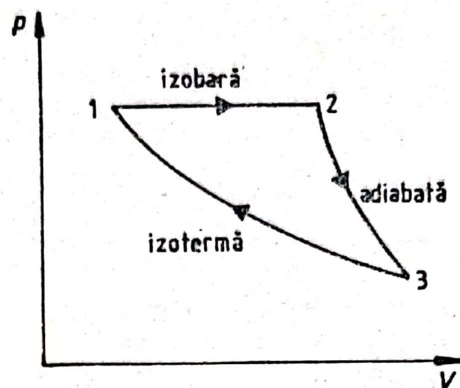


Fig. F.B.26

a) valoarea inducției magnetice B; b) puterea calorică totală degajată. Se neglijează rezistența șinelor și a barei, iar $g = 10$ m/s².

2°. Lumina solară directă dă pe un ecran transversal o anumită iluminare. Să se determine: a) în ce raport se schimbă iluminarea ecranului, dacă proiectăm pe ecran imaginea Soarelui cu o lentilă care are distanța focală $f = 1$ m și diametrul $D = 40$ mm, dacă unghiul sub care se vede diametrul discului solar este $\alpha = 30'$; b) pînă la ce diametru trebuie diafragmată lentila pentru a obține aceeași iluminare?

3°. Atomii de hidrogen aflați în stare fundamentală, în repaus, sînt bombardați cu electroni. Cînd tensiunea de accelerare a electronilor ajunge la $U_e = 10,2$ V, atomii de hidrogen încep să emită fotoni. Să se determine: a) energia de ionizare (în eV) a atomului de hidrogen; b) tensiunea minimă de accelerare a protonilor incidenți U_p, pentru ca atomii de hidrogen să înceapă să emită fotoni.

4°. Se cere: a) să se calculeze randamentul cu care un condensator este încărcat de la o baterie; b) să se arate că o lentilă subțire, cu distanța focală f_1, lipită de o oglindă sferică cu distanța focală f_0, avînd aceeași axă principală, reprezintă un sistem echivalent cu o oglindă; calculați distanța focală a oglinzii echivalente; c) să se stabilească relația dintre energia totală și energia potențială a electronului într-un atom hidrogenoid după modelul lui Bohr.

5°. Să se răspundă la întrebările: a) care este schema completă de montaj a unui redresor cu ambele alternanțe cu filtru de netezire LC?; b) cît este unghiul dintre raza reflectată și raza refractată în cazul incidenței Brewster?; c) de ce în reacția de anihilare $e^- + e^+$ apar cel puțin doi fotoni?

3. ÎNVĂȚĂMÎNTUL MEDICO-FARMACEUTIC

(PROFILURILE: MEDICINĂ, STOMATOLOGIE)

LX. 1°. Un tub capilar de diametru $d = 0,5$ mm este introdus într-un lichid care udă pereții vasului. Coeficientul de tensiune superficială a lichidului este $\sigma = 0,0245$ N/m, înălțimea la care se ridică lichidul în tub este $h = 2,5$ cm.

a) Care este densitatea lichidului? b) Care este presiunea într-un punct în interiorul capilarului la o înălţime $H = 1$ cm faţă de suprafaţa lichidului din vas? Presiunea atmosferică este $p_0 = 10^5$ N/m², acceleraţia gravitaţională $g = 9,8$ m/s².

2°. O spiră circulară cu raza $r = 20$ cm şi rezistenţa $R = 0,04$ Ω este plasată într-un cîmp magnetic uniform de inducţie $B = 2 \cdot 10^{-3}$ T. Poziţia iniţială a spirei este paralelă cu liniile de cîmp magnetic. Spira se roteşte cu un unghi α în jurul unui diametru perpendicular pe liniile de cîmp magnetic. Se cere: a) care este fluxul prin spiră în poziţia iniţială? ; b) care este sensul curentului indus în bobină? explicaţi; c) ce sarcină electrică trece prin spiră la rotirea ei cu unghiul $\alpha = 60°$?

3°. Un obiect luminos se găseşte la distanţa d de un ecran fix. O lentilă convergentă cu distanţa focală f se poate deplasa între obiectul luminos şi ecran. Prin deplasarea ei prindem două imagini clare ale obiectului pe ecran. a) Ce fel de imagini se formează şi pentru ce poziţii ale lentilei? desenaţi-le; b) Ce condiţii trebuie să îndeplinească f şi d pentru a putea obţine aceste două imagini?; c) Care este raportul dintre mărimile celor două imagini? Aplicaţie numerică: $d = 40$ cm, $f = 10$ cm.

4°. Să se evalueze: a) masa de argint depusă la catod într-o cuvă electrolitică prin care trece un curent cu intensitatea de 1 A, timp de o oră; masa atomică a argintului este 108 şi valenţa 1; b) numărul de molecule dintr-un cm³ de H_2 în condiţii normale de temperatură şi presiune. Ce masă are acest volum de gaz? Se dă: $k = 1,38 \cdot 10^{-23}$ J/K; c) ce constantă de reţea are o reţea de difracţie cu care prindem, la incidenţă normală, maximul de difracţie de ordinul 2 sub unghiul α, pentru care sin $\alpha = 0,2$, în lumină monocromatică cu $\lambda = 500$ nm?

5°. Să se trateze subiectul: transformarea adiabatică a gazului ideal.

LXI. 1°. Se consideră circuitul din figura F.B.27, în care $E = 120$ V, $r = 1$ Ω, $R_1 = 19$ Ω, $R_2 = 20$ Ω. Să se calculeze: a) valorile pe care le poate avea rezistenţa rezistorului X pentru ca puterea disipată pe acesta să fie $P = 80$ W; b) pentru care dintre aceste valori puterea dezvoltată de sursă este mai mare? Calculaţi valorile puterii sursei.

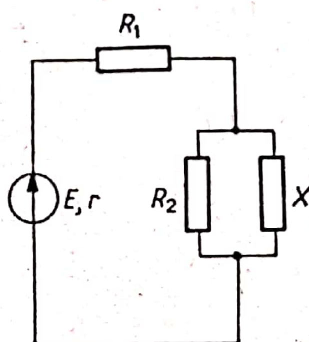


Fig. F.B.27

2°. Un vas de volum $V = 8$ dm³ conţine o masă $m = 2,6$ g de gaz ideal, monoatomic, la presiunea $p = 2 \cdot 10^5$ N/m². Vasul este prevăzut cu un tub cu robinet. a) Presupunînd că prin deschiderea robinetului are loc destinderea izotermă a gazului cu debitul de masă constant, $Q = \frac{\Delta m}{\Delta t} = 10^{-3}$ g/s, să se determine variaţia energiei interne a gazului în intervalul de timp $\Delta t = 15$ min; b) să se determine temperatura la care are loc procesul. Se dau: constanta gazelor $R = 8\,310$ J/kmol · K şi masa molară a gazului, $\mu = 4$ kg/kmol.

3°. O oglindă sferică concavă, așezată în poziție orizontală, este umplută cu apă (un strat subțire de apă). Știind că raza de curbură a oglinzii este $R = 40$ cm și că indicele de refracție al apei este $\frac{4}{3}$, să se determine distanța focală a sistemului apă-oglindă.

4°. Să se evalueze: a) Rezistența unei sîrme de aluminiu de 1 m la 100 °C, dacă secțiunea sa este 1 mm², rezistivitatea la 20 °C este de $2{,}8 \cdot 10^{-8}\ \Omega \cdot m$, iar coeficientul de temperatură al rezistivității este $4 \cdot 10^{-3}$ grad^{-1}; b) Lucrul mecanic efectuat de un kmol de gaz ideal într-o transformare adiabatică de la presiunea de 10^5 N/m² între volumele $V_1 = 10$ cm³ și $V_2 = 20$ cm³. Se dă coeficientul transformării adiabatice, $\gamma = 1{,}4$; c) Grosimea stratului de substanță pentru care intensitatea unui fascicul paralel de lumină care îl străbate scade la jumătate, dacă se știe coeficientul de absorbție, $k = 0{,}46$ cm^{-1}. Se dă $\ln 2 = 0{,}693$.

5°. Să se trateze subiectul: dispozitive interferențiale.

REZOLVĂRI

I. 1°. a) Pornind de la ecuația spațiului în aruncarea pe verticală, de jos în sus, $h = v_0 t - \frac{1}{2} g t^2$, se determină durata t, de la aruncarea primului corp, pînă la momentul ciocnirii celor două corpuri, din condiția $h_1 = v_{01} t - \frac{1}{2} g t^2 = v_{02}(t - \Delta t) - \frac{g}{2}(t - \Delta t)^2 = h_2$, de unde

$$t = \frac{\Delta t(2v_{02} + g\Delta t)}{2(v_{02} - v_{01} + g\Delta t)} = \frac{7(2 \cdot 100 + 10 \cdot 7)}{2(100 - 65 + 10 \cdot 7)} = 9 \text{ s}.$$

Pe baza ecuației vitezei pentru aruncarea pe verticală, de jos în sus, $v = v_0 - gt$, se determină vitezele celor două corpuri în momentul ciocnirii: $v_1 = 65 - 10 \cdot 9 = -25 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$ și $v_2 = 100 - 10(9 - 7) = 80 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$. În cazul ciocnirii plastice a celor două corpuri, condiția conservării impulsului are expresia $m_1 v_1 + m_2 v_2 = (m_1 + m_2) v_0$, de unde rezultă că viteza inițială v_0 a corpului format prin ciocnire este

$$v_0 = \frac{m_1 v_1 + m_2 v_2}{m_1 + m_2} = \frac{-25 \cdot 1 + 80 \cdot 0{,}5}{1 + 0{,}5} = 10 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}.$$

b) Conform legii conservării energiei, căldura degajată în ciocnirea plastică a celor două corpuri este

$$Q = \frac{m_1 v_1^2}{2} + \frac{m_2 v_2^2}{2} - \frac{(m_1 + m_2) v_0^2}{2} = \frac{1(-25)^2 + 0{,}5 \cdot 80^2 - 1{,}5 \cdot 10^2}{2} = 1\,837{,}5 \text{ J}.$$

Pe baza ecuației calorimetrice, $Q = (m_1 c_1 + m_2 c_2)\Delta\theta$, și ținînd seamă că pentru corpurile considerate $c_1 = c_2 = c$, obținem

$$\Delta\theta = \frac{Q}{c(m_1 + m_2)} = \frac{1837{,}5}{1\,500(1 + 0{,}5)} = 0{,}817 \text{ °C}.$$

c) Duratele t_1' și t_2' de la lansarea primului corp pînă în momentele cînd acesta se găsește la altitudinea $h_{min} = 180$ m, pot fi determinate cu ajutorul ecuației spațiului în aruncarea pe verticală (de jos în sus), obținînd $v_{01} t' - \frac{1}{2} g t'^2 = h_{min}$, de unde

$$t'_{1,2} = \frac{v_{01} \pm \sqrt{v_{01}^2 - 2gh_{min}}}{g} = \frac{65 \pm \sqrt{65^2 - 2 \cdot 10 \cdot 180}}{10} \rightarrow t_1' = 4 \text{ s}, t_2' = 9 \text{ s}.$$

Deci, pentru momente situate după o durată $t' \in [4; 9]$ s de la momentul lansării primului corp, acesta se găsește la o altitudine $h_1 \geq h_{min} = 180$ m. Duratele

$(t'-\Delta t)_1$ și $(t'-\Delta t)_2$ de la lansarea celui de-al doilea corp pînă în momentele cînd acesta se găsește la altitudinea h_{min}, pot fi determinate din ecuația analoagă

$$(t'-\Delta t)_{1,2} = \frac{v_{02} \pm \sqrt{v_{02}^2 - 2gh_{min}}}{g} = \frac{100 \pm \sqrt{100^2 - 2 \cdot 10 \cdot 180}}{10},$$

de unde, $(t'-\Delta t)_1 = 2$ s, $(t'-\Delta t)_2 = 18$ s.

Prin urmare, pentru momente situate după o durată $(t'-\Delta t) \in [2;\ 18]$ s de la lansarea celui de-al doilea corp, acesta se găsește la o altitudine $h_2 \geqslant h_{min} = 80$ m. Deoarece $(t'-\Delta t)_2 = 18 \text{ s} > t_2' = 9$ s, rezultă că duratele minimă Δt_{min} și, respectiv, maximă Δt_{max}, de la lansarea primului corp pînă la lansarea celui de-al doilea, care satisfac cerința ca altitudinea h la care se ciocnesc cele două corpuri să fie $h \geqslant h_{min} = 180$ m, sînt date de expresiile (v. și fig. F.B.28)

$$\Delta t_{min} = t_1' - (t'-\Delta t)_1 = 4 - 2 = 2 \text{ s},\quad \Delta t_{max} = (t_2' - (t'-\Delta t)_2 = 9 - 2 = 7 \text{ s}.$$

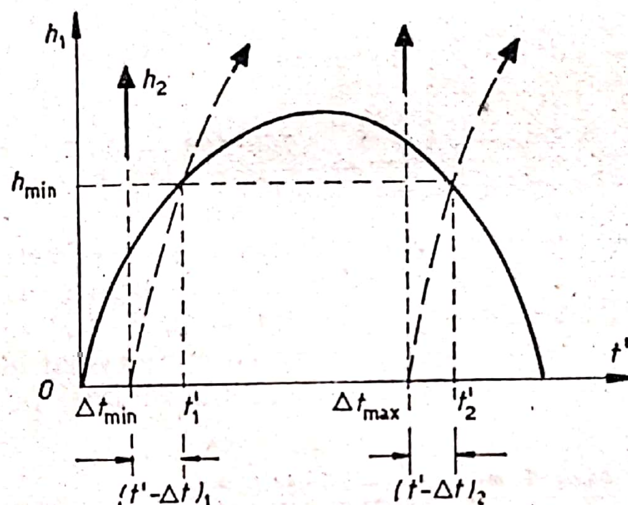


Fig. F.B.28

2°. a) Căldura molară C_V la volum constant a heliului poate fi determinată în funcție de cea la presiune constantă, C_p, din relația lui Robert Meyer, $C_V = C_p - R$, obținînd $C_V = \frac{5R}{2} - R = \frac{3R}{2}$. Deci, pentru heliu, exponentul adiabatic $\gamma = \frac{C_p}{C_V}$ are valoarea $\gamma = \frac{5R}{2} : \frac{3R}{2} = \frac{5}{3}$.

Deoarece heliul (presupus gaz perfect) trece din starea inițială 1 în starea 2 printr-o comprimare adiabatică, avem $T_1V_1^{\gamma-1} = T_2V_2^{\gamma-1}$. Întrucît gazul trece apoi din starea 2 în starea 3 printr-o destindere izotermă $(T_2 = T_3)$, rezultă că temperaturile termodinamice corespunzătoare stărilor 2 și 3 pot fi determinate din relația

$$T_3 = T_2 = T_1\left(\frac{V_1}{V_2}\right)^{\gamma-1} = 280 \cdot 8^{5/3-1} = 280 \cdot 4 = 1\,120 \text{ K}.$$

Pe baza ecuației de stare a gazelor perfecte, $pV = \nu RT$, găsim că $V_3 = \frac{p_1V_1}{T_1} \cdot \frac{T_3}{p_3}$, de unde

$$V_3 = \frac{p_1 \cdot 2 \cdot 10^{-3}}{280} \cdot \frac{1\,120}{1{,}5\,p_1} = 5{,}33 \cdot 10^{-3} \text{ m}^3\ (= 5{,}33 \text{ l}).$$

b) Deoarece $V_1 = 2\,l < V_3 \approx 5{,}33$ l, în procesul $3 \to 1$ gazul primește, sub formă de lucru mecanic, o cantitate de energie egală numeric cu aria cuprinsă între segmentul de dreaptă care unește punctele reprezentative ale stărilor 3 și 1 (v. și fig. F.B.29) și axa volumelor (V),

$$L_{\text{primit } 31} = \frac{p_1 + p_3}{2}(V_3 - V_1) = \frac{2{,}5\,p_1}{2}(V_3 - V_1) = \frac{2{,}5 \cdot 10^5}{2}(5{,}33 - 2) \cdot 10^3 = 416{,}7 \text{ J}.$$

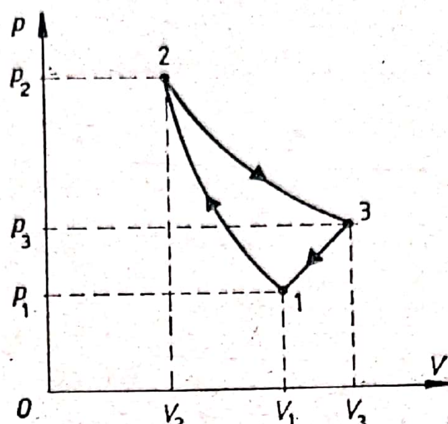


Fig. F.B.29

Primul principiu al termodinamicii poate fi scris — pentru procesul $3 \to 1$ — în formele (echivalente)

$$Q_{31} = \frac{3}{2}\,\nu R(T_1 - T_3) - L_{\text{primit } 31} = \frac{3}{2}\,p_1 V_1\left(1 - \frac{T_3}{T_1}\right) - L_{\text{primit } 31} =$$

$$= \frac{3}{2} \cdot 10^5 \cdot 2 \cdot 10^{-3}(1 - 4) - 416{,}7 \text{ J} = -1\,316{,}7 \text{ J},$$

adică — în procesul $3 \to 1$ — cantitatea considerată de heliu cedează o căldură de circa 1 316,7 J.

c) În cursul destinderii izoterme $2 \to 3$ gazul primește căldura Q_{23}, egală cu lucrul mecanic L_{23} efectuat în acest proces ($\Delta U_{23} = 0$), ambele schimburi de energie putînd fi calculate pe baza relației

$$Q_{23} = L_{23} \approx 2{,}3\ \nu R T_2 \log\left(\frac{V_3}{V_2}\right) = 2{,}3\ p_1 V_1 \cdot \frac{T_2}{T_1} \log\left(\frac{V_3}{V_1} \cdot \frac{V_1}{V_2}\right) =$$

$$= 2{,}3 \cdot 10^5 \cdot 2 \cdot 10^{-3} \cdot 4 \log\left(\frac{8}{3} \cdot 8\right) = 1\,840(6 \log 2 - \log 3) \approx 2\,445{,}4 \text{ J}.$$

Deoarece, pentru întreg ciclul reversibil considerat, variația ΔU_{1231} a energiei interne este nulă, conform principiului întîi al termodinamicii lucrul mecanic L_{ef}, efectuat la parcurgerea ciclului, este $L_{\text{ef}} = Q_{12} + Q_{23} + Q_{31}$. Avînd în vedere faptul că, în cadrul procesului ciclic reversibil considerat, gazul primește căldură numai în cursul destinderii izoterme $2 \to 3$, iar în cursul comprimării adiabatice $Q_{12} = 0$, randamentul motorului termic, care ar funcționa după ciclul reversibil considerat, (1231), este

$$\eta = \frac{L_{\text{ef}}}{Q_{\text{primit}}} = \frac{Q_{23} + Q_{31}}{Q_{23}} = \frac{2\,445{,}4 - 1\,316{,}7}{2\,445{,}4} = 0{,}461 = 46{,}1\ \%.$$

3°. a) Fie Q_1' și Q_2' sarcinile electrice rămase pe armăturile celor două condensatoare, legate prin solenoid, după stabilirea echilibrului electrostatic. Întrucît echilibrul electrostatic se stabilește prin egalizarea potențialelor celor două armături, avem $\frac{Q_1'}{C_1} = U_1' = U_2' = \frac{Q_2'}{C_2} = \frac{Q_1' + Q_2'}{C_1 + C_2}$. Pe de altă parte, datorită conservării

sarcinii electrice, avem $Q'_1 + Q'_2 = q_1 + q_2$, deci tensiunea electrică U' dintre armăturile fiecărui condensator, după stabilirea echilibrului electrostatic, este

$$U' = \frac{q_1 + q_2}{C_1 + C_2} = \frac{(5-3)\cdot 10^{-3}}{(100+250)\cdot 10^{-6}} \approx 5{,}71 \text{ V}.$$

b) Întrucît și celelalte armături ale celor două condensatoare sînt unite între ele (prin firul legat la pămînt), după conectarea sursei de tensiune la bornele solenoidului, sursa va alimenta un circuit derivație, în care ramura capacitivă include condensatoarele C_1 și C_2 înseriate (v. fig. F.B.30).

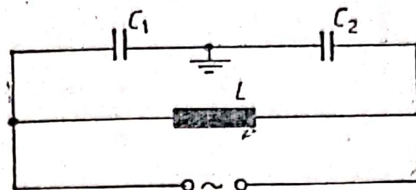


Fig. F.B.30

Capacitatea C, echivalentă celor două condensatoare înseriate, poate fi determinată cu relația $\frac{1}{C} = \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2}$.

Pe baza formulei Thompson a frecvenței de rezonanță ν_0 a circuitului LC derivație considerat, $\nu_0 = \frac{1}{2\pi\sqrt{LC}}$, rezultă că inductanța solenoidului este

$$L = \frac{1}{C\cdot 4\pi^2\nu_0^2} = \left(\frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2}\right)\frac{1}{4\pi^2\nu_0^2} = \left(\frac{1}{100\cdot 10^{-6}} + \frac{1}{250\cdot 10^{-6}}\right)\frac{1}{(2\pi\cdot 159)^2} \approx 0{,}014 \text{ H}.$$

Admitanța circuitului LC derivație este

$$\frac{1}{Z} = \sqrt{\left(C\omega - \frac{1}{L\omega}\right)^2} = \left|C\omega - \frac{1}{L\omega}\right|,$$

deci, ținînd seamă de relația dintre valoarea efectivă U_{ef} și amplitudinea U_m a tensiunii la bornele sursei, $U_{ef} = \frac{U_m}{\sqrt{2}}$, obținem intensitatea efectivă I_{ef} a curentului debitat,

$$I_{ef} = \frac{U_{ef}}{Z} = \frac{U_m}{\sqrt{2}}\left|C\omega - \frac{1}{L\omega}\right| = \frac{U_m}{\sqrt{2}}\left|\frac{C_1C_2}{C_1+C_2}\,\omega - \frac{1}{L\omega}\right| =$$

$$= \frac{14{,}1}{\sqrt{2}}\left|\frac{100\cdot 10^{-6}\cdot 250\cdot 10^{-6}}{(100+250)\cdot 10^{-6}}\cdot 3\,140 - \frac{1}{0{,}014\cdot 3\,140}\right| \approx 2{,}016 \text{ A}.$$

c) Valoarea maximă a vitezei de transport a electronilor liberi în conductorul solenoidului corespunde amplitudinii $I_{Lm} = \frac{U_m}{L\omega}$ a intensității curentului prin solenoid, fiind dată — conform relațiilor de bază ale electrocineticii — de expresia

$$v_{max} = \frac{I_{Lm}}{neA} = \frac{U_m}{L\omega}\cdot\frac{1}{neA} = \frac{14{,}1}{0{,}014\cdot 3\,140\cdot 10^{29}\cdot 1{,}6\cdot 10^{-19}\cdot 0{,}5\cdot 10^{-6}} \approx$$

$$\approx 3{,}97\cdot 10^{-5}\ \text{m}\cdot\text{s}^{-1}.$$

4°. a) Pornind de la formula lui Galilei a mișcării rectilinii uniform variate, $v_2^2 - v_1^2 = 2\,ad$, și ținînd seamă că, în conformitate cu legea a doua a dinamicii, $a = \frac{F}{m}$, găsim că $Fd = \frac{m}{2}\cdot v_2^2 - \frac{m}{2}\cdot v_1^2$. Întrucît produsul Fd reprezintă lucrul

mecanic L efectuat în cursul deplasării d, iar $\frac{mv_1^2}{2} = E_{c1}$ și $\frac{mv_2^2}{2} = E_{c2}$ sînt energiile cinetice inițială și, respectiv, finală ale punctului material considerat, rezultă că $L = E_{c2} - E_{c1}$, adică variația energiei cinetice a unui punct material care se deplasează în raport cu un sistem de referință inerțial este egală cu lucrul mecanic efectuat de forța rezultantă, care acționează asupra punctului material în timpul acestei variații.

b) Ținînd seamă că numărul ν al kilomolilor unei anumite cantități de substanță poate fi exprimat prin numărul N al moleculelor respectivei cantități, și numărul Avogadro N_A prin relația $\nu = \frac{N}{N_A}$, ecuația termică de stare a gazelor perfecte: $pV = \nu RT$ poate fi transcrisă în forma: $p = \frac{N}{V} \cdot \frac{R}{N_A} \cdot T = n \cdot k \cdot T$, unde $n = \frac{N}{V}$ este concentrația moleculelor gazului (în unitatea de volum), iar $k = \frac{R}{N_A}$ este constanta lui Boltzmann. Comparînd ultima expresie de mai sus a ecuației termice de stare a gazelor perfecte cu formula fundamentală a teoriei cinetico-moleculare a gazelor, $p = \frac{1}{3} \cdot n \cdot m\overline{v^2}$, rezultă că energia cinetică medie a fiecărei molecule a gazului este $\frac{m\overline{v^2}}{2} = \frac{3kT}{2}$. Rezultă că viteza pătratică medie (viteza termică) a moleculelor unui gaz perfect este dată de expresiile echivalente

$$v_T = \sqrt{\overline{v^2}} = \sqrt{\frac{3kT}{m}} = \sqrt{\frac{3N_AkT}{N_Am}} = \sqrt{\frac{3RT}{\mu}},$$

unde μ este masa (kilo)molară a gazului.

c) Ținînd seamă că fluxul unui cîmp magnetic uniform de inducție $\overline{B}$ printr-o suprafață de arie A și normală $\overline{n}$, care formează unghiul θ cu inducția $\overline{B}$ este $\Phi = B \cdot A \cdot \cos\theta$, putem transcrie legea Faraday a inducției electromagnetice,

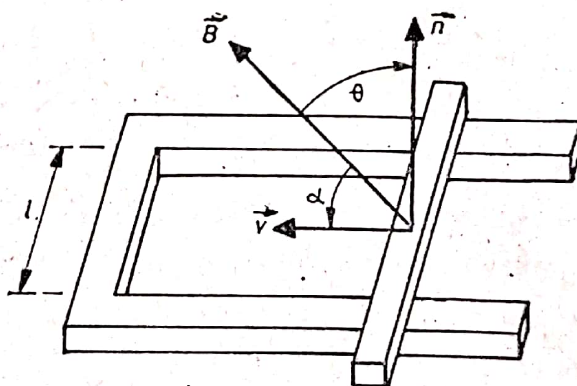


Fig. F.B.31

$e = -\frac{\Delta\Phi}{\Delta t}$, pentru cazul particular al unui circuit care delimitează o arie A, variabilă în timp, care se află într-un cîmp magnetic de inducție constantă (în timp), în forma: $e = -B \cdot \cos\theta \cdot \frac{\Delta A}{\Delta t}$. În cazul în care variația ariei delimitate de circuitul considerat este datorată deplasării cu viteza $\overline{v}$ (paralelă cu planul format de vectorii $\overline{n}$ și $\overline{B}$) a unui conductor de lungime l (v. fig. F.B.31), avem $\Delta A = -l \cdot v\Delta t$, rezultînd că $e = B \cdot l \cdot v \cdot \sin\alpha$ (deoarece vectorii $\overline{n}$, $\overline{B}$ și $\overline{v}$ sînt situați în același plan, iar vectorii $\overline{n}$ și $\overline{v}$ sînt perpendiculari, avem $\cos\theta = \sin\alpha$,

unde α este unghiul format de viteza $\bar{v}$ a deplasării conductorului cu inducția $\bar{B}$ a cîmpului magnetic uniform).

Ținînd seamă de faptul că sarcina electronilor este negativă, direcția și sensul forței Lorentz $\bar{F}_{-e}$ care acționează asupra acestora la deplasarea conductorului într-un cîmp magnetic poate fi determinată cu ajutorul regulii mîinii stîngi, ca în figura F.B.32. Deoarece sensul deplasării electronilor coincide (deoarece aceștia au sarcini electrice negative) cu *sensul tensiunii electromotoare induse în conductorul mobil*, acest sens *poate fi stabilit cu ajutorul regulii mîinii drepte*: se așază mîna dreaptă în lungul conductorului, astfel încît vectorul $\bar{B}$ să iasă din palmă, iar degetul mare să fie în sensul vitezei de deplasare a conductorului; celelalte patru degete vor indica sensul tensiunii electromotoare induse în conductor (dacă mîna dreaptă se așază astfel încît $\bar{B}$ să intre în palmă, celelalte 4 degete indică sensul (tehnic al) curentului indus în conductor).

Desigur, sensurile forței $\bar{F}_{+e}$ și tensiunii electromotoare induse pot fi determinate și pornind de la expresia vectorială a forței Lorentz, $\bar{F}=q\bar{v}\times\bar{B}$ și a regulii „burghiului drept": „Se așază burghiul după direcția perpendicularei pe planul format de vectorii $\bar{v}$ și $\bar{B}$, după care se rotește burghiul în sensul suprapunerii — pe drumul cel mai scurt — a vectorului $\bar{v}$ peste vectorul $\bar{B}$. Sensul înaintării burghiului ne dă sensul produsului vectorial $\bar{v}\times\bar{B}$ (fig. F.B.33).

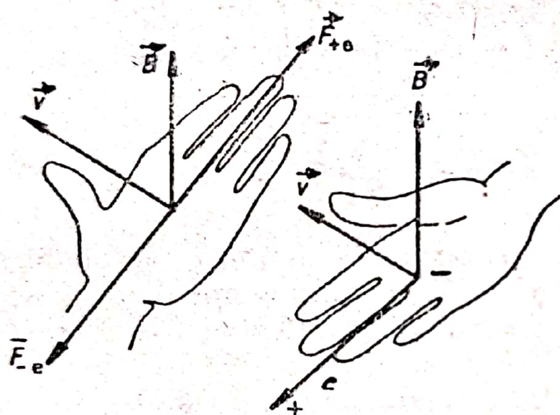


Fig. F.B.32

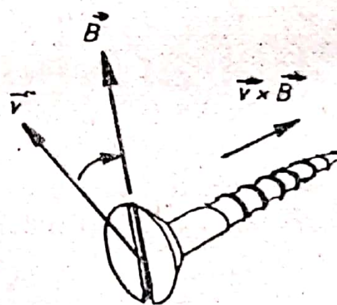


Fig. F.B.33

5°. a) $p+\frac{\rho v^2}{2}+\rho gz=\text{const}$, unde p este presiunea statică, $\frac{1}{2}\rho v^2$ este presiunea dinamică, iar ρgz este presiunea de poziție, datorată energiei potențiale.

b) $\rho=\frac{\rho_0}{1+\gamma\Delta T}$, unde ρ este densitatea sistemului (corpului solid) la temperatura T, ρ_0 este densitatea la temperatura T_0 (de regulă, $t_0=0\,°C$), γ este coeficientul de dilatare termică în volum, iar $\Delta T=T-T_0$.

c) $L=\mu\frac{N^2S}{l}$, unde μ este permeabilitatea magnetică a miezului bobinei, N este numărul spirelor bobinei, S este aria secțiunii bobinei, iar l este lungimea acesteia.

II. 1°. a) Pornind de la ecuația spațiului în mișcarea uniform-accelerată fără viteză inițială, $S=\frac{at^2}{2}$, obținem expresia distanței d parcurse în intervalul $[t_1, t_2]$ de la pornire,

$$d=\frac{a}{2}(t_2^2-t_1^2).$$

Rezultă că accelerația mișcării corpului poate fi calculată pe baza expresiei $a=\frac{2d}{t_2^2-t_1^2}$; introducînd valorile numerice indicate în enunț, găsim $a=\frac{2\cdot 3}{2^2-1^2}=2\ \frac{m}{s^2}$.

b) Componentele paralele (F_t, G_t), respectiv perpendiculare (F_n, G_n) pe planul înclinat ale forței $\vec{F}$, respectiv greutății $\vec{G}$ a corpului, sînt date de expresiile (v. fig. F.B.34): $F_t=F\cos\theta$, $G_t=G\sin\theta$, $F_n=F\cdot\sin\theta$, $G_n=G\cdot\cos\theta$. Deoarece forța de apăsare exercitată asupra planului înclinat este $N=F_n+G_n=F\sin\theta+$ $+G\cos\theta$, forța de frecare între corp și planul înclinat este dată de expresia

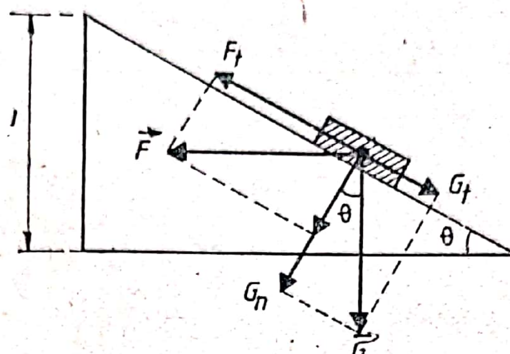


Fig. F.B.34

$F_{fr}=\mu N=\mu(F\sin\theta+G\cos\theta)$. Forța activă care acționează asupra corpului (la urcarea acestuia pe planul înclinat) fiind $F_{act}=F_t-G_t=F\cos\theta-G\sin\theta$, legea a doua a dinamicii capătă — pentru urcarea corpului considerat pe planul înclinat — expresia

$$ma=F_{act}-F_{fr}=F\cos\theta-G\sin\theta-\mu(F\sin\theta+G\cos\theta).$$

Deoarece între greutatea G și masa m a corpului există relația $G=m\cdot g$, din relația precedentă obținem

$$\mu=\frac{F\cos\theta-mg\sin\theta-ma}{mg\cos\theta+F\sin\theta}=\frac{100\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}-10\cdot 10\cdot\frac{1}{2}-10\cdot 2}{10\cdot 10\frac{\sqrt{3}}{2}+100\frac{1}{2}}\simeq 0{,}1215.$$

c) Fie $l=\frac{h}{\sin\theta}$ lungimea planului înclinat de înălțime h. Lucrul mecanic efectuat de forța $\vec{F}$ în cursul urcării corpului pe planul înclinat este $L=F_t\cdot l=$ $=F\cos\theta\cdot\frac{h}{\sin\theta}=100\cdot\sqrt{3}\cdot 10\simeq 1\,732$ J.

2°. a) Ținînd seamă că între numărul de kilomoli ν și masa m a unei anumite cantități de substanță există relația: $\nu=\frac{m}{\mu}$, ecuația termică de stare a gazelor perfecte, $pV=\nu RT$, permite determinarea masei unei cantități de gaz perfect pe baza relației $m=\mu\cdot\frac{pV}{RT}$. În cazul în care două cantități ale aceluiași gaz ocupă — la o aceeași temperatură T și la o aceeași presiune p — volumele V_1 și V_2, avem

$$m_1+m_2=\frac{\mu p}{RT}(V_1+V_2)=\frac{4\cdot 1\,500(10^{-3}+3\cdot 10^{-3})}{8\,310\cdot 300}\simeq 9{,}62\cdot 10^{-6}\ \text{kg}.$$

b) Fie p' presiunea în cele 2 vase, după încălzirea gazului din primul vas pînă la temperatura T', iar m_1', m_2' — masele cantităților de gaz aflate, în cele 2 vase după încălzirea considerată. Deoarece masele m_1', m_2' satisfac relațiile:

$$m_1' = \frac{\mu p'}{RT'} \cdot V_1, \quad m_2' = \frac{\mu p'}{RT} \cdot V_2, \quad m_1' + m_2' = m_1 + m_2,$$

avem:

$$\frac{\mu p'}{R}\left(\frac{V_1}{T'} + \frac{V_2}{T}\right) = \frac{\mu p}{RT}(V_1 + V_2),$$

de unde

$$p' = \frac{p(V_1 + V_2)}{V_2 + \dfrac{V_1 \cdot T}{T'}} = \frac{1\,500 \cdot 4 \cdot 10^{-3}}{3 \cdot 10^{-3} + 10^{-3} \cdot \dfrac{1}{2}} \simeq 1\,714\,\frac{N}{m^2}.$$

c) Deoarece viteza pătratică medie a moleculelor unui gaz perfect aflat la temperatura T este dată de expresia $v_T = \sqrt{\dfrac{3kT}{m}}$, raportul vitezelor termice ale moleculelor gazului din cele două vase, în starea finală, este: $\dfrac{v_{T1}}{v_{T2}} = \sqrt{\dfrac{T'}{T}} = \sqrt{2}(\approx 1{,}4142)$.

3°. a) Tensiunea $\bar{T}$ din fiecare fir este rezultanta greutății $\bar{G}$ și forței coulombiene $\bar{F}$ care acționează asupra fiecărei sfere, $\bar{T} = \bar{G} + \bar{F}$. Deoarece forțele $\bar{F}$ și $\bar{G}$ acționează după direcții perpendiculare între ele (v. fig. F.B.35), avem $F = \sqrt{T^2 - G^2} = \sqrt{36 \cdot 10^{-8} - 9 \cdot 10^{-8}} = \sqrt{27} \cdot 10^{-4}$ N. Unghiul θ format de firele de suspensie cu verticala în poziția de echilibru este determinat de relația: $\sin\theta = \dfrac{F}{T} = \dfrac{\sqrt{27}}{6} = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$, rezultînd că distanța r dintre cele două sfere, în poziția de echilibru, este $r = d + 2L \cdot \sin\theta = 2 + 2 \cdot 11 \cdot \dfrac{\sqrt{3}}{2} \simeq 21{,}05$ cm. Din legea lui Coulomb, aplicată aici, $F = \dfrac{Q^2}{4\pi\varepsilon_0 r^2}$, reiese că $Q = r\sqrt{4\pi\varepsilon_0 F} \approx 5{,}05 \cdot 10^{-8}$ C.

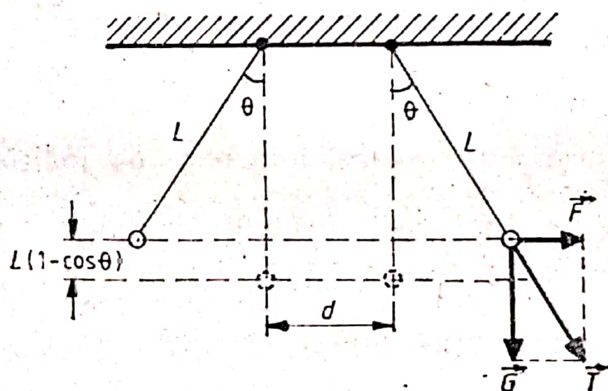


Fig. F.B.35

b) Variația energiei potențiale gravitaționale a celor două sfere între poziția inițială (sfere aflate la distanța d) și cea finală este $\Delta W_{pg} = 2mg\,L(1 - \cos\theta) = 2 \cdot 3 \cdot 10^{-5} \cdot 10 \cdot 11 \cdot 10^{-2}(1 - 0{,}5) = 3{,}3 \cdot 10^{-5}$ J. Variația energiei potențiale coulombiene între starea inițială (sfere încărcate, aflate la distanța d) și cea finală este $\Delta W_{pc} = \dfrac{q^2}{4\pi\varepsilon_0}\left(\dfrac{1}{r} - \dfrac{1}{d}\right) = \dfrac{q^2(d - r)}{4\pi\varepsilon_0 r \cdot d} = \dfrac{F \cdot r(d - r)}{d} = \dfrac{\sqrt{27} \cdot 10^{-4} \cdot 21(-19 \cdot 10^{-2})}{2} \simeq$ $\simeq -103{,}92 \cdot 10^{-5}$ J. Lucrul mecanic L efectuat pentru aducerea sferelor în

poziţia finală poate fi dedus (neglijind frecările) din legea conservării energiei, $L = -\Delta W_{pg} - \Delta W_{pc} \simeq 100{,}62 \cdot 10^{-5}$ J.

c) Fie q sarcina electrică aflată pe fiecare dintre cele două sfere identice (1 şi 2) considerate. La aducerea în contact cu prima dintre aceste sfere a unei a treia sfere, identică cu precedenta, iniţial neîncărcate electric, se atinge un nou echilibru electrostatic (între sferele 1 şi 3) la potenţialul $V = \frac{Q_1}{C_1} = \frac{Q_3}{C_3}$, unde Q_1 şi Q_3 sînt sarcinile pe cele 2 sfere la echilibru electrostatic. Deoarece $Q_1 + Q_3 = q$, iar $C_1 = C_3$, rezultă că $Q_1 = Q_3 = \frac{q}{2}$, de unde $\frac{Q_1}{q} = \frac{1}{2}$. La aducere în contact, în continuare, a sferei 3 cu sfera 2, avem $V' = \frac{Q_2'}{C_2} = \frac{Q_3'}{C_3}$, de unde $Q_2' = Q_3'$ (deoarece $C_2 = C_3$); în plus, din condiţia $Q_3 + q = \frac{q}{2} + q = Q_2' + Q_3' = 2Q_2'$, rezultă că $Q_2' = \frac{3q}{4}$, deci $\frac{Q_2'}{q} = \frac{3}{4}$.

4°. a) Variaţia $\Delta\bar{v}$ a vitezei unui corp, aflat într-o mişcare circulară, uniformă, într-un interval de timp Δt mult mai mic decît perioada T a mişcării, poate fi calculată considerînd-o ca bază a unui triunghi isoscel de laturi egale v, cu unghiul la vîrf $\Delta\alpha = \omega\Delta t$ neglijabil de mic în raport cu 1 radian (fig. F.B.36).

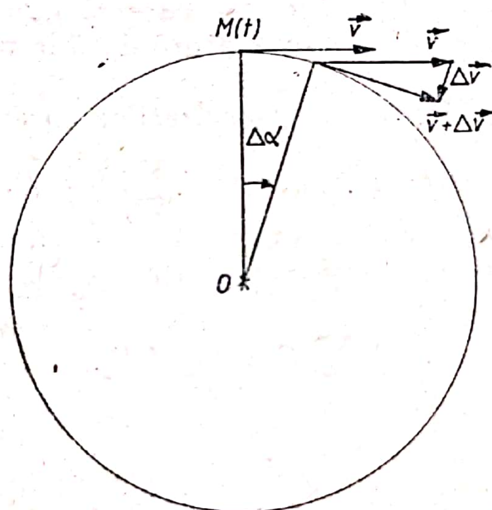


Fig. F.B.36

Rezultă $|\Delta\bar{v}| = v \cdot \Delta\alpha = v \cdot \omega\Delta t$.

Deoarece $\Delta\bar{v}$ are direcţia razei şi sensul spre centrul mişcării de rotaţie uniformă, acceleraţia centripetă are direcţia radială, sensul spre centrul mişcării de rotaţie şi valoarea dată de expresia $a_n = \frac{\Delta v}{\Delta t} = v \cdot \omega = \frac{v^2}{R} = \omega^2 R$, unde R este raza traiectoriei circulare.

b) În conformitate cu legea dilatării liniare, alungirea unei bare — avînd la temperatura de referinţă lungimea l_0 — în urma creşterii temperaturii cu ΔT, este $\Delta l = l_0 \cdot \alpha \Delta T$. În conformitate cu legea lui Hooke, efortul unitar corespunzător alungirii cu Δl este $\frac{F}{S} = E \cdot \frac{\Delta l}{l_0}$, deci efortul unitar exercitat de bara încălzită şi fixată la capete este dat de expresia $\sigma = \frac{F}{S} = E \cdot \frac{l_0 \alpha \Delta T}{l_0} = E \cdot \alpha \cdot \Delta T$.

c) Intensitatea curentului electric care străbate un conductor este dată de expresiile echivalente $I = \frac{Q}{t} = \frac{n \cdot e}{t}$, unde n este numărul electronilor care traversează secţiunea conductorului (metalic) considerat în durata t. Forţa care acţio-

nează asupra unui conductor rectiliniu, de lungime l, străbătut de un curent electric de intensitate I și supus acțiunii unui cîmp magnetic de inducție B, care formează unghiul θ cu direcția conductorului, este $F = BIl \cdot \sin\theta$. Dacă $l = v \cdot t$, unde v este viteza medie a mișcării ordonate a electronilor, atunci — la un moment dat — în conductorul de lungime l se vor găsi atîția electroni liberi cîți străbat secțiunea conductorului în durata t, adică n electroni liberi; forța (Lorentz) care va acționa asupra fiecărui electron (liber) în mișcare cu viteza $\bar{v}$, într-un cîmp magnetic a cărui inducție $\bar{B}$ formează unghiul θ cu viteza, rezultă ca fiind $f_e = \frac{F}{n} = \frac{ne}{t} \cdot \frac{Bl}{n} \cdot \sin\theta = e \cdot \frac{l}{t} \cdot B \cdot \sin\theta = e \cdot v \cdot B \cdot \sin\theta$.

5°. a) Principiul I: un punct material își menține starea de repaus sau de mișcare rectilinie și uniformă atîta timp cît asupra sa nu acționează alte corpuri care să-i schimbe această stare de mișcare. Principiul II: vectorul forță este proporțional cu produsul dintre masă și vectorul accelerație, $\bar{F} = m \cdot \bar{a}$. Principiul III: fiecărei acțiuni i se opune întotdeauna o reacțiune egală în modul și de sens opus, sau acțiunile reciproce a două corpuri sînt întotdeauna egale ca mărime și dirijate în sensuri opuse.

b) Formularea Thompson: într-o transformare ciclică, monotermă, sistemul nu poate ceda lucru mecanic în exterior. Dacă transformarea ciclică monotermă este și ireversibilă, atunci sistemul primește lucru mecanic din exterior. Formularea Clausius: nu este posibilă o transformare care să aibă ca rezultat trecerea de la sine a căldurii de la un corp cu o temperatură dată la un corp cu temperatura mai ridicată.

c) Legea I: suma algebrică a intensităților curenților electrici care se întîlnesc într-un nod electric este egală cu zero: $\sum_{i=1}^{n} I_i = 0$. Legea a II-a: suma algebrică a tensiunilor electromotoare este egală cu suma algebrică a produselor dintre intensitatea curentului și rezistența totală pentru fiecare ramură:

$$\sum E_i = \sum_{j=1}^{m} I_j R_j.$$

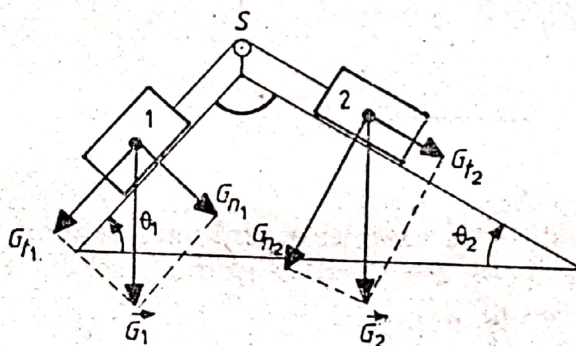


Fig. F.B.37

III 1°. a) Notăm cu θ_1 și θ_2 unghiurile formate de planele înclinate pe care se deplasează corpurile 1, respectiv 2, cu planul orizontal. Componentele tangențiale (în lungul planelor înclinate pe care se deplasează respectivele corpuri) ale greutăților celor două corpuri sînt: $G_{t1} = G_1 \sin\theta_1 = m_1 g \sin\theta_1$, $G_{t2} = m_2 g \sin\theta_2$ (v. și fig. F.B.37). Deoarece masele celor două corpuri sînt egale, forța activă care acționează asupra sistemului format de cele două corpuri este dată de expresia: $F_{act} = G_{t1} - G_{t2} = mg(\sin\theta_1 - \sin\theta_2)$, accelerația mișcării acestui sistem fiind $a = \frac{F_{act}}{m_1 + m_2} = \frac{g(\sin\theta_1 - \sin\theta_2)}{2} = \frac{9{,}8\left(\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{1}{2}\right)}{2} \approx 1{,}015 \frac{m}{s^2}$. Deoarece $G_{t1} > G_{t2}$,

accelerația este dirijată în sensul coborîrii primului corp și al urcării celui de al doilea corp pe planele înclinate corespunzătoare.

b) Deoarece componentele normale (pe planele înclinate corespunzătoare) ale greutăților corpurilor 1, respectiv 2, sînt date de expresiile $G_{n1} = G_1 \cos\theta_1 = m_1 g \cos\theta_1$, $G_{n2} = m_2 g \cos\theta_2$, forțele de frecare între cele 2 corpuri și planele înclinate corespunzătoare sînt: $F_{f1} = \mu_1 G_{n1} = \mu_1 m_1 g \cos\theta_1$, $F_{f2} = \mu_2 G_{n2} = \mu_2 m_2 g \cos\theta_2$. În condițiile în care $m_1 = m_2$ $(= m)$, $\mu_1 = \mu_2$ $(=\mu)$, rezultanta forțelor care acționează asupra sistemului format de cele două corpuri este

$$F = G_{t1} = G_{t2} - F_{f2} = mg[\sin\theta_1 - \sin\theta_2 - \mu(\cos\theta_1 + \cos\theta_2)],$$

iar accelerația mișcării sistemului,

$$a = \frac{F}{m_1 + m_2} = \frac{g}{2}[\sin\theta_1 - \sin\theta_2 - \mu(\cos\theta_1 + \cos\theta_2)] =$$

$$= \frac{9{,}8}{2}\left[\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{1}{2} - 0{,}1\left(\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}\right)\right] \approx 0{,}2439\,\frac{\text{m}}{\text{s}^2}.$$

c) Întrucît $G_{t1} > G_{t2}$, pentru echilibrarea forței G_{t1} este necesar să se atașeze corpului 2 un al treilea corp. În absența frecărilor, masa m_3 a corpului atașat corpului 2 va trebui să satisfacă cerința $G_{t2} + G_{t3} = (m_2 + m_3) g \sin\theta_2 = G_{t1} = m_1 g \sin\theta_1$. Rezultă că

$$m_3 = \frac{m_1 \sin\theta_1 - m_2 \sin\theta_2}{\sin\theta_2} = m\left(\frac{\sin\theta_1}{\sin\theta_2} - 1\right) = 1\left(\frac{\frac{\sqrt{2}}{2}}{\frac{1}{2}} - 1\right) \approx 0{,}414 \text{ kg}.$$

În prezența frecărilor, valoarea minimă m_3' a masei corpului (3) atașat corpului 2, pentru care sistemul format de cele 3 corpuri este în echilibru, corespunde cazului „limită“ în care sistemul se deplasează uniform, corpul 1 coborînd, iar corpul 2 urcînd. În acest caz,

$$G_{t1} - G_{t2} - G_{t3}' = m_1 g \sin\theta_1 - (m_2 + m_3') g \sin\theta_2 = F_{f1} + F_{f2} + F_{f3}' =$$
$$= \mu_1 m_1 g \cos\theta_1 + \mu_2 (m_2 + m_3') g \cos\theta_2. \quad \text{Cum: } m_1 = m_2 \ (= m),\ \mu_1 = \mu_2 \ (=\mu),$$

rezultă că

$$m_3' = \frac{m(\sin\theta_1 - \mu\cos\theta_1)}{\sin\theta_2 + \mu\cos\theta_2} = \frac{1\left(\frac{\sqrt{2}}{2} - 0{,}1\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}\right)}{\frac{1}{2} + 0{,}1\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}} \approx 0{,}0849 \text{ kg}.$$

Valoarea maximă m_3'' a masei corpului (3) atașat corpului 2, pentru care sistemul (format de cele 3 corpuri) mai este (încă) în echilibru în prezența frecărilor, corespunde cazului limită în care sistemul se deplasează uniform, corpul 1 urcînd, iar corpul 2 coborînd. În acest caz, $G_{t2} + G_{t3}'' - G_{t1} = (m_2 + m_3'') g \sin\theta_2 - m_1 g \sin\theta_1 = F_{f1} + F_{f2} + F_{f3}'' = \mu_1 m_1 g \cos\theta_1 + \mu_2 (m_2 + m_3'') g \cos\theta_2$, de unde

$$m_3'' = m\left(\frac{\sin\theta_1 + \mu\cos\theta_1}{\sin\theta_2 - \mu\cos\theta_2} - 1\right) = 1\left(\frac{\frac{\sqrt{2}}{2} + 0{,}1\frac{\sqrt{2}}{2}}{\frac{1}{2} - 0{,}1\frac{\sqrt{3}}{2}} - 1\right) \approx 0{,}8815 \text{ kg}.$$

Rezultă că valorile masei corpului 3, atașat corpului 2, pentru care în prezența frecărilor — sistemul (format de cele 3 corpuri) este în echilibru — aparțin intervalului $[m_3', m_3'']$, adică $0{,}0849 \text{ kg} \leqslant m_3 \leqslant 0{,}8815$ kg.

2°. a) Notînd cu t_0 (= 0°C) temperatura de topire a gheții, obținem pentru căldura Q_1 primită de masa m_2 de gheață aflată la temperatura inițială t_2, pentru a fi adusă la temperatura t_0,

$$Q_1 = m_2 c_g (t_0 - t_2) = 0{,}2 \cdot 2\,100 \cdot 10 = 4\,200 \text{ J}.$$

Căldura Q_2, necesară pentru topirea cantității de gheață, de masă m_2, este $Q_2 = m_2 \lambda_t = 0{,}2 \cdot 334\,000 = 66\,800$ J. Pe de altă parte, căldura cedată de calorimetru (de capacitate calorică c) și cantitatea de apă (de masă m_1) aflată — la temperatura (inițial, de echilibru) t_1 — în acesta este

$$Q_3 = (m_1 c_a + C)(t_1 - t_0) = (0{,}5 \cdot 4\,180 + 110) \cdot 30 = 66\,000 \text{ J}.$$

Deoarece $Q_3 = 66\,000 \text{ J} > Q_1 = 4\,200$ J, căldura cedată de calorimetru și cantitatea de apă aflată inițial la temperatura t_1 este suficientă pentru topirea cantității de gheață considerate (de masă m_2, aflată inițial la temperatura t_2) însă — întrucît $Q_3 = 66\,000 \text{ J} < Q_1 + Q_2 = 71\,000$ J — nu este suficientă pentru topirea întregii cantități de gheață. Rezultă că în calorimetru vom avea în final un amestec de apă și gheață, la temperatura (de echilibru) $t_f' = 0$ °C.

Masa m_t a gheții topite poate fi dedusă din ecuația calorimetrică, $Q_1 + m_t \lambda_t = Q_3$, de unde $m_t = \frac{Q_3 - Q_1}{\lambda_t} = \frac{66\,000 - 4\,200}{334\,000} \approx 0{,}185$ kg.

b) Cantitatea de gheață rămasă în calorimetru are masa $\Delta m_g = m_2 - m_t = 0{,}2 - 0{,}185 = 0{,}015$ kg. Pentru aducerea amestecului de apă și gheață rezultat în calorimetru la temperatura t_f și vaporizarea întregii cantități de apă rezultate, la temperatura t_f, este necesară căldura

$$Q = m_g \cdot \lambda_t + [(m_1 + m_2) c_a + C](t_f - t_0) + (m_1 + m_2)\lambda_v = 0{,}015 \cdot 334\,000 + (0{,}7 \cdot 4\,180 + 110) \cdot 100 + 0{,}7 \cdot 2\,250\,000 = 1{,}883 \cdot 10^6 \text{ J}.$$

c) Randamentul motorului termic care ar funcționa după un ciclu Carnot reversibil, cu gaz perfect, între temperaturile t_f și t_2 este

$$\eta_c = 1 - \frac{T_2}{T_f} = 1 - \frac{273{,}15 + t_2}{273{,}15 + t_f} = 1 - \frac{273{,}15 - 10}{273{,}15 + 100} \approx 0{,}295 \ (29{,}5\ \%).$$

3°. a) În conformitate cu legea lui Ohm pentru întregul circuit, tensiunea la bornele generatorului este

$$U_b = E - r \cdot I = 144 - 0{,}22 \cdot 60 = 130{,}8 \text{ V}.$$

Căderea de tensiune pe conductoarele (linia electrică) care racordează consumatorul la generator este: $U_l = U_b - U_c = 130{,}8 - 120 = 10{,}8$ V.

Deoarece lungimea liniei electrice care racordează consumatorul la generator este egală cu $2d$, rezistența electrică a liniei este dată de expresia $R_l = \rho \cdot \frac{2d}{S}$.

Pe de altă parte, conform legii Ohm pentru o porțiune de circuit, $R_l = \frac{U_l}{I}$.

Rezultă că $S = \rho \cdot \frac{2d}{U_l} \cdot I = 1{,}75 \cdot 10^{-8} \cdot \frac{2 \cdot 325}{10{,}8} \cdot 60 = 6{,}32 \cdot 10^{-5}$ m².

b) În conformitate cu prima lege a lui Kirchhoff, scrisă pentru unul dintre cele două noduri din care se ramifică baia de electroliză și cele n(= 100) becuri, conectate toate în paralel, $I = I_e + nI_b$, rezultă că intensitatea curentului electric prin fiecare bec este

$$I_b = \frac{I - I_e}{n} = \frac{60 - 10}{100} = 0{,}5 \text{ A}.$$

Puterea disipată într-un bec este $P_b = U_c \cdot I_b = 120 \cdot 0{,}5 = 60$ W,

c) Pornind de la prima lege Faraday a electrolizei, $m = K \cdot I \cdot t$, rezultă că durata în care baia de electroliză produce o cantitate de oxigen cu masa $m = 16$ g, este $t = \frac{m}{K \cdot I_e} = \frac{16 \cdot 10^{-3}}{8{,}29 \cdot 10^{-2} \cdot 10^{-6} \cdot 10} \approx 19\,300$ s (5 h 21 min și 40 s).

4°. a) $u = A \sin 2\pi \left(\frac{t}{T} - \frac{x}{\lambda}\right)$, sau $u = A \sin \omega \left(t - \frac{x}{v_f}\right) = A \sin \left(\omega t - \frac{\omega x}{v_f}\right)$, unde u este elongația, A — amplitudinea, iar T — perioada oscilațiilor undei, v_f este viteza de fază, iar λ — lungimea de undă.

b) $pV = \nu RT = \frac{m}{\mu} RT$, unde p este presiunea, V — volumul, ν — numărul de kilomoli, R — constanta universală a gazelor, T — temperatura termodinamică, m — masa cantității de gaz considerate, iar μ — masa (kilo)molară a gazului.

c) $e = -\frac{\Delta\Phi}{\Delta t}$, unde e este tensiunea electromotoare indusă, iar $\Delta\Phi$ este variația fluxului magnetic, în durata Δt, prin suprafața delimitată de circuitul electric considerat.

5°. a) Mișcarea oscilatorie armonică a unui punct material corespunde proiecției unei mișcări circulare uniforme după o direcție Oy din planul în care are loc rotația uniformă (v. fig. F.B.38).

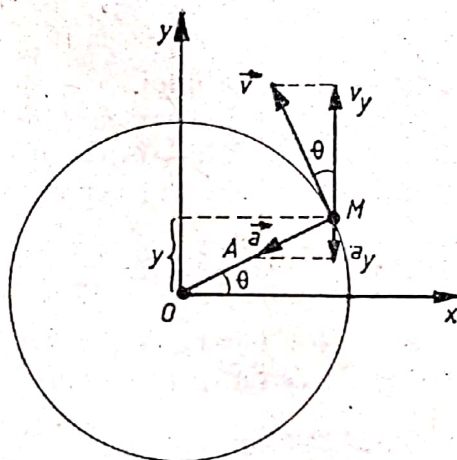


Fig. F.B.38

În cazul în care raza circumferinței în lungul căreia se deplasează punctul material este egală cu A, ținînd seamă de legea mișcării de rotație uniformă: $\theta = \omega t + \varphi$, obținem pentru elongația y (deplasarea față de originea O a proiecției pe axa Oy a punctului M) expresia $y = A \sin\theta = A \cdot \sin(\omega t + \varphi)$. Mărimile fizice care intervin în ecuația elongației se numesc: A — amplitudine, ω — pulsație, φ — fază inițială (a oscilației armonice).

Viteza mișcării circulare uniforme este dată de expresia $v = \omega A$. Deoarece viteza v_y în mișcarea oscilatorie armonică este proiecția pe axa Oy a vitezei $\bar{v}$ în mișcarea circulară uniformă, din figura F.B.38 obținem:

$$v_y = v \cdot \cos\theta = \omega A \cdot \cos(\omega t + \varphi).$$

Accelerația (centripetă, a) mișcării circulare uniforme este dată de expresia $a = -\omega^2 A$. Accelerația a_y în mișcarea oscilatorie armonică fiind proiecția pe axa Oy a accelerației $\bar{a}$ din mișcarea circulară uniformă, din figura F.B.38 găsim că: $a_y = a \cdot \sin\theta = -\omega^2 A \sin(\omega t + \varphi)$. Semnul minus din expresia accelerației a_y arată că aceasta are sensul opus elongației. De regulă, în simbolurile vitezei și accelerației în mișcarea oscilatorie armonică se omite indicele y, folosindu-se deci simbolurile simplificate v și a.

b) Pornind de la expresia cantitativă a primului principiu al termodinamicii, $\Delta U = Q - L$, și, ținînd seamă că într-o transformare adiabatică $Q = 0$, rezultă că lucrul mecanic efectuat într-o transformare adiabatică este $L = -\Delta U$. Pe de altă parte, ținînd seamă că — într-o transformare izocoră — lucrul mecanic efectuat este nul ($L = 0$), din expresia primului principiu al termodinamicii rezultă că — într-o transformare izocoră — căldura primită de gaz este $\nu C_V \Delta T = Q_V = \Delta U$, unde C_V este căldura (kilo)molară la volum constant. Oținem astfel, pentru lucrul mecanic efectuat într-o transformare adiabatică a unui gaz perfect, expresia $L = -\Delta U = -\nu C_V \Delta T = \nu C_V (T_1 - T_2)$.

c) Ținînd seamă că inducția cîmpului magnetic dintr-un solenoid, format prin bobinarea a N spire pe lungimea l, este $B = \mu_0 \mu_r \frac{N}{l} I$ (unde μ_0 este permeabilitatea vidului, μ_r este permeabilitatea relativă a miezului bobinei, iar I este intensitatea curentului electric care străbate înfășurarea solenoidului), fluxul magnetic care străbate bobina (solenoidul) este: $\Phi = N \cdot B \cdot S = \mu_0 \mu_r \frac{N^2 S}{l} \cdot I$. Deoarece inductanța bobinei este definită prin expresia $L = \frac{\Phi}{I}$, rezultă că inductanța unui solenoid (bobine) poate fi exprimată prin mărimile fizice caracteristice prin relația

$$L = \mu_0 \mu_r \cdot \frac{N^2 S}{l},$$

unde S este aria secțunii transversale a bobinei.

IV.1°. a) Deoarece $m_2 > m_1$, forța activă care acționează asupra sistemului format de cele două corpuri este $F_a = G_2 - G_1 = g(m_2 - m_1)$, accelerația sistemului de corpuri atunci cînd ascensorul este în repaus fiind

$$a = \frac{F_a}{m_1 + m_2} = g \cdot \frac{m_2 - m_1}{m_1 + m_2} = 9{,}8 \cdot \frac{0{,}2 - 0{,}1}{0{,}1 + 0{,}2} \approx 3{,}27\ \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}.$$

b) Porțiunile de fir de care sînt legate cele două corpuri acționează asupra scripetelui (mobil), de o parte și de cealaltă a acestuia (v. și fig. F.B.39), cu forțe

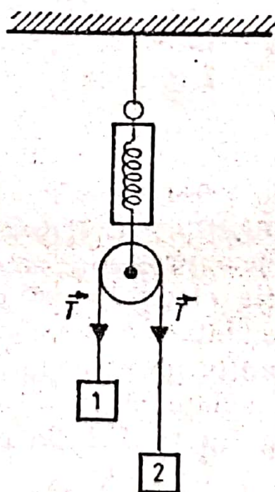


Fig. F.B.39

egale între ele și cu tensiunea din fir: $T = m_1 g + m_1 a = m_2 g - m_2 a$. Înlocuind expresia dedusă mai sus pentru accelerația sistemului, atunci cînd ascensorul este în repaus, obținem

$$T = m_1 g + m_1 g \cdot \frac{m_2 - m_1}{m_1 + m_2} = \frac{2\, m_1 m_2 g}{m_1 + m_2}.$$

Rezultă că forța care acționează asupra dinamometrului, atunci cînd ascensorul este în repaus, este

$$F_a = 2T = \frac{4\ m_1 m_2 g}{m_1 + m_2} = \frac{4 \cdot 0,1 \cdot 0,2 \cdot 9,8}{0,1 + 0,2} \approx 2,61\ \text{N}.$$

c) Considerăm cazul în care accelerația a_a a mișcării ascensorului are același sens (în jos) ca și accelerația gravitațională. Deoarece la compunerea mișcărilor, vitezele și — implicit — accelerațiile se compun vectorial, accelerația a_g a unui corp în cădere liberă față de ascensorul care se deplasează cu accelerația a_a, dirijată în sensul greutății corpului, este $a_g = g - a_a$. Repetînd considerațiile anterioare pentru cazul în care ascensorul se mișcă cu accelerația a_a dirijată în jos, găsim că forța F care va acționa asupra dinamometrului va fi

$$F = \frac{4\ m_1 m_2}{m_1 + m_2} \cdot a_g = \frac{4\ m_1 m_2}{m_1 + m_2}(g - a_a).$$

Rezultă că

$$a_a = g - \frac{m_1 + m_2}{4\ m_1 m_2} \cdot F = 9,8 - \frac{4 \cdot 0,1 \cdot 0,2}{0,1 + 0,2} \cdot 2 = 2,3\ \frac{\text{m}}{\text{s}_2}\ \text{(cu sensul în jos)}.$$

Ținînd seama de cele de mai sus, rezultă că accelerația sistemului de corpuri atunci cînd dinamometrul indică forța F, deci ascensorul se deplasează cu accelerația a_a, este

$$a' = \frac{m_2 - m_1}{m_1 + m_2}(g - a_a) = \frac{0,2 - 0,1}{0,1 + 0,2}(9,8 - 2,3) = 2,5\ \frac{\text{m}}{\text{s}_2}.$$

2°. a) Numărul kilomolilor conținuți de cantitatea de azot considerată este: $\nu = \frac{N}{N_A} = \frac{3,01 \cdot 10^{23}}{6,02 \cdot 10^{26}} = 5 \cdot 10^{-4}$ kmol, iar temperatura termodinamică inițială a azotului este $T = T_0 + t = 273,15 + 27 \approx 300$ K.

Presiunea azotului poate fi dedusă din ecuația termică de stare a gazelor perfecte $p = \frac{\nu RT}{V} = \frac{5 \cdot 10^{-4} \cdot 8\,310 \cdot 300}{30 \cdot 10^{-3}} = 41\,550\ \frac{\text{N}}{\text{m}^2}$. Temperatura T_f atinsă de azot după încălzirea izobară fiind $T_f = T + \Delta t \approx 300 + 100 = 400$ K, volumul V_f ocupat de azot după această încălzire (izobară) va fi $V_f = V \cdot \frac{T_f}{T} = 30 \cdot 10^{-3} \cdot \frac{400}{300} =$ $= 4 \cdot 10^{-2}\ \text{m}^2$ (= 40 l). În fine, lucrul mecanic efectuat de gaz în cursul procesului izobar este $L = p(V_f - V) = 4,155 \cdot 10^4 (40 - 30) \cdot 10^{-3} = 415,5$ J.

b) Viteza medie pătratică a moleculelor azotului în starea inițială este

$$V_T = \sqrt{\frac{3\ RT}{\mu}} = \sqrt{\frac{3 \cdot 8\,310 \cdot 300}{28}} \approx 516,8\ \frac{\text{m}}{\text{s}}.$$

c) Deoarece masa m a azotului este $m = \nu \cdot \mu$, densitatea inițială a acestuia este $\rho = \frac{m}{V} = \frac{\nu \cdot \mu}{V} = \frac{5 \cdot 10^{-4} \cdot 28}{30 \cdot 10^{-3}} \approx 0,467\ \frac{\text{kg}}{\text{m}^3}$.

3°. a) Tensiunea electromotoare indusă în conductorul AB este dată de expresia $e = Bdv \sin \theta$. Deoarece din figura indicată în enunț rezultă că inducția B a cîmpului magnetic uniform este perpendiculară pe planul circuitului electric, avem: $\theta = 90°$, obținînd $e = 2 \cdot 0,4 \cdot 1 \cdot \sin 90° = 0,8$ V. Deoarece, conform regulii (legii) Lenz, curentul I_e produs de tensiunea electromotoare indusă „e" trebuie să „genereze" o forță (electromagnetică) $\bar{F}_e = I_e \bar{d} \times \bar{B}$, care să se opună cauzei fenomenului de inducție electromagnetică (deci mișcării conductorului AB cu viteza $\bar{v}$),

curentul I_e și tensiunea electromotoare indusă e au sensurile indicate în figura F.B.40.

b) Deoarece tensiunile electromotoare E (a sursei) și e (indusă) au sensuri opuse, legea Ohm pentru întreg circuitul $ABCD$ are forma: $I = \frac{E - e}{R_{AB} + R_{BD} + r + R_{AC}}$ obținînd: $I = \frac{2 - 0,8}{0,08 + 0,12} = 6$ A. Întrucît $E > e$, curentul electric care străbate circuitul are sensul opus celui al curentului de intensitate I_e (v. fig. F.B.41).

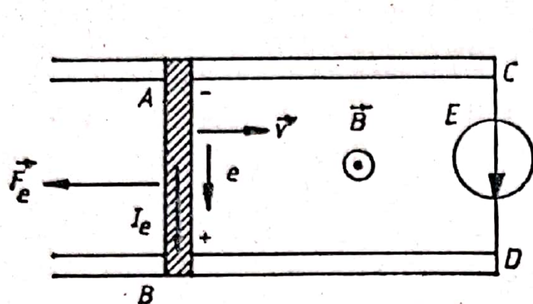


Fig. F.B.40

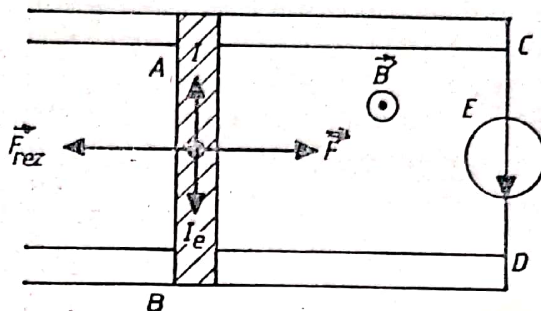


Fig. F.B.41

c) Forța electromagnetică rezultantă, care acționează asupra conductorului AB, este dată de expresia $\bar{F} = I\bar{d} \times \bar{B}$ și are valoarea $F = 6 \cdot 0,4 \cdot 2 \cdot \sin 90° = 4,8$ N și sensul opus celui al forței F_e. Pentru ca mișcarea conductorului AB să decurgă uniform, asupra acestui conductor trebuie să acționeze o forță rezistentă $F_{rez} = -F$, iar pentru ca mișcarea conductorului să decurgă cu viteza $\bar{v}$ (constantă), va fi necesară (pentru învingerea forței rezistente) puterea

$$P = -\bar{F}_{rez}\bar{v} = \bar{F}\bar{v} = 4,8 \cdot 1 \cdot \cos 0° = 4,8 \text{ W}.$$

4°. a) $E_c = \frac{mA^2\omega^2}{2}\cos^2(\omega t + \varphi) = \frac{kA^2}{2}\cos^2(\omega t + \varphi)$, $E_p = \frac{mA^2\omega^2}{2}\sin^2(\omega t + \varphi) = \frac{kA^2}{2}\sin^2(\omega t + \varphi)$, $E_t = \frac{mA^2\omega^2}{2} = \frac{kA^2}{2}$, unde E_c, E_p și E_t sînt energiile cinetică, potențială, respectiv totală, ale oscilatorului liniar armonic, m este masa, iar k este constanta elastică corespunzînd oscilatorului considerat și — în fine — A este amplitudinea, ω — pulsația proprie, iar φ — faza inițială a oscilațiilor oscilatorului liniar armonic.

b) $U = \nu C_V T$, unde U este energia internă, ν este numărul de kilomoli, C_V este căldura (kilo)molară la volum constant, iar T este temperatura termodinamică. Pentru gaze ideale cu molecule monoatomice $C_V = \frac{3R}{2}$ (pentru gaze ideale cu molecule liniare $C_V = \frac{5R}{2}$, iar pentru gaze ideale cu molecule neliniare $C_V = 3R$).

c) $F = \mu \frac{I_1 I_2 l}{2\pi d}$, unde F este forța cu care un conductor rectiliniu filiform și infinit, străbătut de un curent electric de intensitate I_1, acționează asupra unei porțiuni de lungime l a altui conductor rectiliniu filiform și infinit, așezat — într-un mediu de permeabilitate (magnetică) μ — în poziție paralelă cu primul, la distanța d de acesta, în condițiile în care cel de al doilea conductor este străbătut de un curent electric de intensitate I_2.

5°. a) $\mu = \frac{F_f}{F_n}$, unde F_f este forța de frecare la alunecarea corpului pe o anumită suprafață, F_n este componenta normală pe suprafața respectivă, a forței de apăsare a corpului pe suprafață, iar μ este coeficientul de frecare la alunecare.

b) $C = \frac{Q}{\nu \Delta T}$, unde Q este căldura primită de sistemul termodinamic considerat într-un proces în cursul căruia temperatura sistemului crește cu ΔT, ν este numărul de kilomoli de substanță, conținuți de sistem, iar C este căldura molară a sistemului pentru procesul termodinamic considerat.

c) $k = \frac{m}{It}$, unde m este masa de metal depusă la catodul unui electrolizor, în durata t în care electrolizorul este străbătut de un curent electric de intensitate I.

V.1°. a) Pornind de la expresia energiei totale a oscilatorului armonic $E_t = \frac{m}{2} A^2\omega^2$, se obține $\omega = \sqrt{\frac{2E_t}{mA^2}} = 8 \frac{\text{rad}}{\text{s}}$.

b) Ținînd seamă de expresiile energiei cinetice E_c, respectiv energiei potențiale E_p, a oscilatorului armonic, condiția $E_c = E_p$ capătă forma $\frac{m}{2} A^2\omega^2 \cos^2(\omega t + \varphi) = \frac{kA^2}{2} \sin^2(\omega t + \varphi)$. Deoarece $m\omega^2 = k$, din relația de mai sus reiese că $\sin(\omega t + \varphi) = \pm \cos(\omega t + \varphi)$, de unde $\sin(\omega t + \varphi) = \pm\frac{\sqrt{2}}{2}$ și $\cos(\omega t + \varphi) = \pm\frac{\sqrt{2}}{2}$. Rezultă valorile elongației y și vitezei v ale corpului în momentele în care $E_c = E_p$,

$$y = A \sin(\omega t + \varphi) = \pm \frac{1}{4} = \pm 0{,}25 \text{ m}, \quad v = A\omega \cos(\omega t + \varphi) = \pm 2 \frac{\text{m}}{\text{s}}.$$

c) Pe baza aceleiași relații, $k = m\omega^2$, găsim că $F_e = ky = m\omega^2 A \sin(\omega t + \varphi) = \pm 16$ N.

2°. a) Pornind de la legea lui Charles a transformărilor izocore ale gazelor ideale, $\frac{p_1}{T_1} = \frac{p_2}{T_2}$, se găsește că $\frac{p_1}{T_1} = \frac{p_2 - p_1}{T_2 - T_1}$, de unde $T_1 = \frac{p_1}{\Delta p} \cdot \Delta T = \frac{120}{0{,}3} = 400$ K.

b) Ținînd seama de relația dintre numărul lui Avogadro N_A, constanta R a gazelor perfecte și constanta k a lui Boltzmann, $R = N_A \cdot k$, ecuația termică de stare a gazelor ideale capătă forma $pV = \nu RT = \nu N_A kT = NkT$. Reiese că numărul moleculelor de gaz din incintă este

$$N = \frac{p_1 V_1}{kT_1} = \frac{6 \cdot 10^3 \cdot 1}{1{,}38 \cdot 10^{-23} \cdot 400} \simeq 1{,}09 \cdot 10^{24} \text{ molecule.}$$

c) Din relația Robert Mayer, $C_p - C_V = R$ și expresia exponentului adiabatic, $\gamma = \frac{C_p}{C_V}$, găsim că $C_V = \frac{R}{\gamma - 1} = \frac{3R}{2} = \frac{3}{2} N_A k$. Rezultă căldura primită de gaz în cursul încălzirii izocore,

$$Q = \nu C_V \Delta T = \frac{3}{2} \nu N_A k \Delta T = \frac{3}{2} Nk \Delta T = \frac{3}{2} p_1 V_1 \frac{\Delta T}{T_1} = 2\,700 \text{ J}.$$

3°. a) Pentru ca traiectoria ionului într-un cîmp magnetic uniform să fie circulară, forța centrifugă trebuie să fie egală cu forța Lorentz care acționează asupra ionului, $\frac{mv^2}{R} = qvB$, de unde $\frac{q}{m} = \frac{v}{RB} \approx 4{,}8 \cdot 10^7 \frac{\text{kg}}{\text{C}}$.

b) $T = \frac{2\pi R}{v} \approx 3{,}27 \cdot 10^{-7}$ s ($= 0{,}327$ µs).

c) Din condiția de conservare a energiei ionului, $qU = \frac{mv^2}{2}$, reiese că $U = \frac{mv^2}{2q} \approx 4{,}1 \cdot 10^4$ V ($= 41$ kV).

4°. a) $x = x_0 + v_0(t - t_0) + \frac{a}{2}(t - t_0)^2$, unde x este coordonata de poziție la momentul t, x_0 și v_0 sînt coordonata, respectiv viteza, la momentul t_0, iar a este accelerația mișcării rectilinii uniform-variate.

b) Expresia randamentului unei mașini termice care funcționează după un ciclu Carnot este $\eta = 1 - \frac{T_2}{T_1}$, unde T_1 și T_2 sînt temperaturile absolute (termodinamice) ale sursei calde, respectiv sursei reci.

c) Acest subiect a fost tratat la II.5°.c.

5°. a) Variația energiei cinetice a unui punct material, care se deplasează în raport cu un sistem de referință inerțial, este egală cu lucrul mecanic efectuat de forța rezultantă asupra punctului material în timpul acestei variații,

$$E_c = E_{c2} - E_{c1} = L.$$

b) Acest subiect a fost tratat la II.5°.b.

c) Tensiunea electromotoare indusă într-un circuit este egală cu viteza de variație a fluxului magnetic prin suprafața acelui circuit, luată cu semn schimbat, $e = -\frac{\Delta\Phi}{\Delta t}$.

VI.1°. a) Din relația lui Robert Mayer $C_p - C_V = R$, reiese că pentru aer $C_p = C_V + R = \frac{7R}{2}$. Căldura Q primită în timpul încălzirii izobare este $Q = \nu C_p \Delta T = \frac{m}{\mu} \cdot \frac{7R}{2} \Delta T$. Rezultă că $m = \frac{2\mu Q}{7R\Delta T} \approx 0{,}083$ kg.

b) $L_{ef} = p\Delta V = \nu R\Delta T = \frac{m}{\mu} R\Delta T = \frac{2Q}{7} \approx 2\,373$ J.

c) În conformitate cu primul principiu al termodinamicii, $\Delta U = Q - L_{ef} \approx \approx 8\,310 - 2\,373 = 5\,937$ J.

2°. a) Pornind de la expresia randamentului mașinii termice care funcționează după un ciclu Carnot, $\eta = \frac{T_1 - T_2}{T_1} = \frac{\Delta T}{T_1}$, obținem $T_1 = \frac{\Delta T}{\eta} = 700$ K, $T_2 = T_1 - \Delta T = 280$ K.

b) Din ecuația termică de stare a gazelor perfecte, $pV = \nu RT$, rezultă că $\nu = \frac{p_1 V_1}{RT_1} \approx 0{,}4 \cdot 10^{-3}$ kmoli.

c) În cazul unei mașini termice care funcționează după un ciclu Carnot, raportul de destindere izotermă $\frac{V_2}{V_1}$ este egal cu cel de compresie izotermă $\frac{V_3}{V_4}$, deci $V_2 = \frac{V_3}{V_4} \cdot V_1 = 2V_1 = 3{,}32 \cdot 10^{-2}\text{m}^3$. Concentrația n_2 de molecule la sfîrșitul destinderii izoterme reiese ca fiind

$$n_2 = \frac{N}{V_2} = \frac{\nu N_A}{V_2} = \frac{\nu R}{V_2 k} \approx 7{,}2 \cdot 10^{24} \text{ molecule/m}^3.$$

3°. a) $\Phi = 4\pi I = 1\,256{,}6$ lm.

b) Contribuția fasciculului luminos incident direct de la sursa S pe paravanul P la iluminarea în punctul A este

$$E_d = \frac{I}{a^2} = \frac{100}{2^2} = 25 \text{ lx}.$$

Fie S_1, S_2 — imaginile sursei S în oglinzile plane O_1, respectiv O_2 (v.fig.F.B.42). După cum este cunoscut, prelungirile razelor reflectate de cele două oglinzi se

întîlnesc în imaginile S_1, respectiv S_2, ale sursei în cele două oglinzi. În consecință, contribuția razelor reflectate de oglinda O_1 la iluminarea în punctul A al paravanului este egală cu cea produsă de o sursă cu aceeași intensitate I ca și sursa S, plasată în punctul S_1 (oglinda O_1 fiind îndepărtată),

$$E_{01} = \frac{I}{S_1A^2} = \frac{I}{(a+2c)^2} \simeq 1,56 \text{ lx}.$$

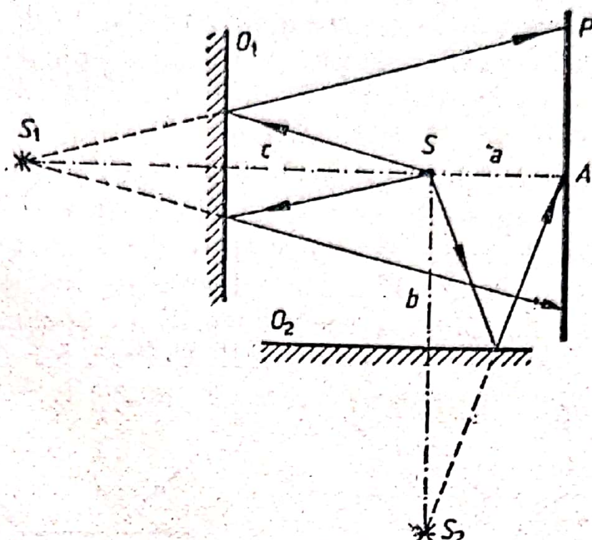


Fig. F.B.42

În fine, contribuția la iluminarea în A a razelor luminoase reflectate de oglinda O_2 este egală cu cea a unei surse de aceeași intensitate I ca și S, aflată însă în punctul S_2 (în condițiile în care oglinda O_2 ar fi îndepărtată),

$$E_{02} = \frac{I}{S_2A^2} \cos \widehat{S_2AS} = \frac{I}{a^2+4b^2} \cdot \frac{a}{\sqrt{a^2+4b^2}} = \sqrt{5} \approx 2,23 \text{ lx}.$$

Iluminarea rezultantă în punctul A este egală cu suma contribuțiilor datorate fasciculului direct, respectiv fasciculelor reflectate de oglinda O_1, respectiv de oglinda O_2,

$$E_{rez} = E_d + E_{01} + E_{02} \approx 28,79 \text{ lx}.$$

c) Pornind de la formula fundamentală a lentilelor subțiri, $\frac{1}{x_2} - \frac{1}{x_1} = \frac{1}{f}$ și observînd că $x_1 - x_2 = -(x_2 - x_1) = -a$, deci că $x_2 = a + x_1$, se determină mai întîi distanța focală a lentilei,

$$f = \frac{x_2x_1}{x_1 - x_2} = \frac{(a+x_1)x_1}{-a} = \frac{(2-0,6)(-0,6)}{-2} = 0,42 \text{ m}.$$

Pentru o lentilă biconvexă simetrică, $R_1 = R_2 = R$, expresia convergenței unei lentile subțiri, $C = \frac{1}{f} = (n-1)\left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}\right)$, capătă forma $\frac{1}{f} = \frac{2}{R}$ $(n-1)$, de unde $R = 2f(n-1) = 2 \cdot 0,42 \cdot 0,6 = 0,504$ m.

4°. a) $p = \frac{2}{3} n \cdot \frac{m\overline{v^2}}{2}$, unde p este presiunea gazului, n este numărul de molecule din unitatea de volum a gazului, m este masa unei molecule, iar $\overline{v^2}$ este valoarea medie a pătratului vitezei (moleculelor gazului).

b) $r_2 - r_1 = k\lambda$ (pentru maxime de interferență), respectiv $r_2 - r_1 = (2k+1)\frac{\lambda}{2}$ (pentru minime de interferență), unde $r_2 - r_1$ este diferența de drum (geometric)

între fasciculele care interferă, k este un întreg numit ordin de interferență, iar λ este lungimea de undă a radiațiilor care interferă.

c) $i = \frac{\lambda}{2\alpha n}$, unde i este interfranja, λ este lungimea de undă a radiației utilizate, α este valoarea în radiani ($\alpha \ll 1$) a unghiului (de la vîrful) penei, iar n este indicele de refracție al mediului din care este formată pana.

5°.1. a) Un sistem telescopic este un dispozitiv pentru observarea obiectelor îndepărtate, al cărui obiectiv este constituit dintr-o oglindă sferică sau parabolică. Imaginea formată de obiectiv este preluată de o oglindă plană și trimisă spre sistemul convergent (cu corecție a aberațiilor), îndeplinind rolul de ocular.

b) Acest subiect a fost tratat la II.5°.b.

2. Focarele dioptrului sferic sînt acele puncte în care: a) fiind situat un izvor punctiform, razele care pornesc de la acest izvor părăsesc dioptrul paralel cu axa optică, b) se întîlnesc razele refractate provenite dintr-un fascicul incident paralel. Există deci, pe axa optică principală, două focare — numite focare principale, iar pe axele secundare, vor exista focare secundare. Dacă focarele se află la intersecția razelor reale, ele se numesc focare reale (fig.F.B.43a), iar dacă se găsesc la intersecția prelungirilor razelor, se numesc focare virtuale (fig.F.B.43b).

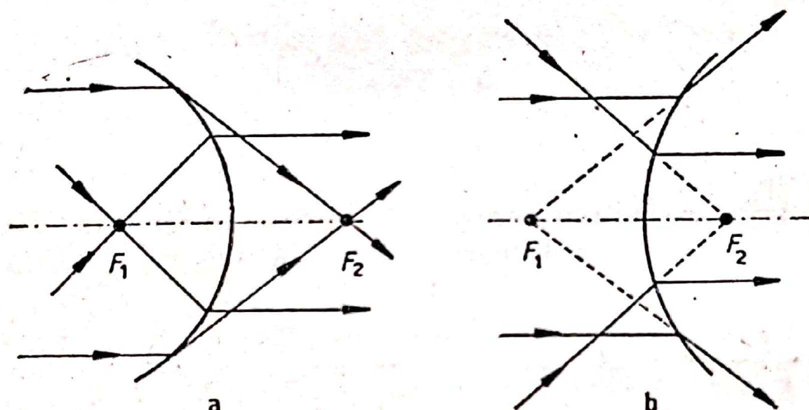


Fig. F.B.43

b) Coordonatele x_1, x_2 ale focarelor F_1, F_2 (deci, valorile particulare ale lui x_1, respectiv x_2, cînd x_2 sau x_1 devin infinite) se numesc distanțe focale (simboluri f_1, f_2).

Pornind de la prima relație fundamentală a dioptrului sferic (relația punctelor conjugate), $\frac{n_2}{x_2} - \frac{n_1}{x_1} = \frac{n_2 - n_1}{R}$, rezultă

$$f_1 = \lim_{x_2 \to \infty} x_1 = -\frac{n_1 R}{n_2 - n_1} \text{ (distanța focală obiect)},$$

$$f_2 = \lim_{x_1 \to \infty} x_2 = \frac{n_2 R}{n_2 - n_1} \text{ (distanța focală imagine)}.$$

Amplificînd prima relație fundamentală a dioptrului sferic cu $\frac{R}{n_2 - n_1}$, se obține

$$\frac{n_2 R}{n_2 - n_1} \cdot \frac{1}{x_2} - \frac{n_1 R}{n_2 - n_1} \cdot \frac{1}{x_1} = 1, \text{ de unde } \frac{f_1}{x_1} + \frac{f_2}{x_2} = 1.$$

Menționăm că, datorită indicilor de refracție n_1 și n_2 diferiți, distanțele focale f_1 și f_2 au — în general — valori diferite, deci distanțele pînă la vîrful dioptrului sferic ale focarelor principale sînt — în general — diferite.

VII.1°. a) Pornind de la legea Gay-Lussac a proceselor izobare, $\frac{V_1}{T_1} = \frac{V_2}{T_2}$, găsim $T_2 = (t + 273{,}15)\cdot\frac{V_2}{V_1} \approx 330$ K. Rezultă că $L_{ef} = p\Delta V = \nu R(T_2 - T_1) \simeq$ $\simeq 2{,}493\cdot 10^4$ J ($= 24{,}93$ kJ).

b) Căldura primită de gaz în cursul încălzirii izobare este $Q_p = \nu C_p \Delta T =$ $= \nu\frac{7R}{2}(T_2 - T_1) \approx 8{,}725\cdot 10^4$ J ($= 87{,}25$ kJ).

c) În conformitate cu primul principiu al termodinamicii, $\Delta U = Q - L_{ef} \approx$ $\approx 6{,}232\cdot 10^4$ J ($= 62{,}32$ kJ).

2°. a) Pornind de la expresia convergenței unei lentile subțiri, $C = \frac{1}{f} =$ $= (n-1)\left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}\right)$ și ținînd seamă că pentru o lentilă plan-convexă; $\frac{1}{R_1} = 0$, iar $R_2 \to R$, găsim $C = \frac{n-1}{R} = \frac{0{,}5}{0{,}2} = 2{,}5$ dioptrii, $f = \frac{1}{C} = 0{,}4$ m.

b) Pe baza formulei fundamentale a lentilelor subțiri, $\frac{1}{x_2} - \frac{1}{x_1} = \frac{1}{f}$, se găsește că $x_2 = \frac{x_1 f}{x_1 + f} = \frac{-0{,}2\cdot 0{,}4}{-0{,}2 + 0{,}4} = -0{,}4$m (imagine virtuală). Mărimea imaginii se găsește prin relația $y_2 = \beta y_1 = \frac{x_2}{x_1} - y_1 = \frac{-0{,}4}{-0{,}2}\cdot 10^{-2} = 2\cdot 10^{-2}$ m ($= 2$ cm).

c) În cazul în care lentila este cufundată în apă, indicele său relativ de refracție (față de apă) este $n_r = \frac{n}{n_a}$, deci $\frac{1}{f_a} = \left(\frac{n}{n_a} - 1\right)\frac{1}{R}$, de unde $f_a = \frac{R}{\frac{n}{n_a} - 1} = 1{,}6$ m.

3°. a) Întrucît pentru un ciclu Carnot $\eta = \frac{T_1 - T_2}{T_1} = \frac{\Delta T}{T_1}$, găsim că $T_1 = \frac{\Delta T}{\eta} = 700$ K și $T_2 = T_1 - \Delta T = 280$ K.

b) Lucrul mecanic efectuat în cursul destinderii izoterme este dat de expresia $L_{12} = \nu R T_1 \ln\frac{V_2}{V_1}$, de unde — efectuînd calculele — găsim

$$L_{12} = 0{,}5\cdot 8\,310\cdot 700\cdot \ln 2 \approx 2\cdot 10^6 \text{ J}.$$

c) Energia cinetică medie de translație a moleculelor la temperatura sursei reci este

$$\overline{E}_{c,tr} = \frac{3}{2}kT_2 \approx 5.8\cdot 10^{-21} \text{ J}.$$

4°. a) Se numește masă moleculară relativă numărul care arată de cîte ori masa unei molecule este mai mare decît a 12-a parte din masa atomului de carbon $^{12}_{6}C$.

b) Fluxul luminos Φ este definit prin relația: $\Phi = KV\Phi_e$, în care K este echivalentul fotometric al radiației ($= 675$ lm/W), V este sensibilitatea spectrală relativă a ochiului, iar Φ_e este fluxul de energie radiantă.

c) Prin energie internă a unui sistem termodinamic se înțelege suma dintre energiile cinetice ale mișcării termice, energiile potențiale determinate de forțele intermoleculare și energiile potențiale în cîmpurile de forțe exterioare ale tuturor moleculelor din care este format sistemul.

5°. a) $m = \frac{m_0}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$, unde m este masa de mișcare (la viteza v) a corpului, m_0 este masa de repaus a corpului, iar c este viteza luminii în vid.

b) $i = \frac{\lambda D}{2l}$, în care i este interfranja, λ este lungimea de undă a radiației utilizate, D este distanța de la planul surselor coerente (cele două fante, în cazul dispozitivului Young) la ecranul de observație, iar $2l$ este distanța dintre sursele coerente.

c) $C_p - C_V = R$, unde C_p este căldura molară la presiune constantă, C_V este căldura molară la volum constant, iar R este constanta universală a gazelor perfecte.

VIII.1°. a) Frecvența de rotație a discului este $\nu = \frac{n}{60} = 2$ Hz. Pentru a nu se produce alunecarea corpului la rotația discului, este necesar ca forța centrifugă care acționează asupra sa să nu depășească forța corespunzătoare de frecare, $F_{cf} = m\omega^2 r = m \cdot 4\pi^2\nu^2 r \leqslant F_{fr} = \mu mg$. Rezultă că distanța maximă de centrul discului la care trebuie așezat corpul, pentru ca acesta să nu alunece este

$$r_{max} = \frac{\mu g}{4\pi^2\nu^2} = \frac{0{,}4 \cdot 9{,}8}{4 \cdot 3{,}14^2 \cdot 2^2} \approx 2{,}47 \text{ cm}.$$

b) $L = rm\,v = mr^2\omega = 2\pi mr^2\nu \approx 1{,}51 \cdot 10^{-4}\ \text{kg} \cdot \frac{\text{m}^2}{\text{s}}$.

Deoarece raza vectoare $\bar{r}$ a corpului față de axa de rotație și viteza $\bar{v}$ a corpului sînt „cuprinse" în planul discului, direcția momentului cinetic $\bar{L} = \bar{r} \times \bar{p} = \bar{r} \times m\bar{v}$ este perpendiculară pe planul discului, iar sensul momentului cinetic este dat de sensul înaintării burghiului drept rotit în sensul mișcării corpului (echivalent cu sensul rotației razei vectoare pentru a o suprapune — pe drumul cel mai scurt — peste direcția vitezei), în cazul mișcării în sens direct trigonometric, sensul L reiese ca fiind spre partea discului de unde mișcarea corpului este observată ca avînd acest sens (v. și fig.F.B.44).

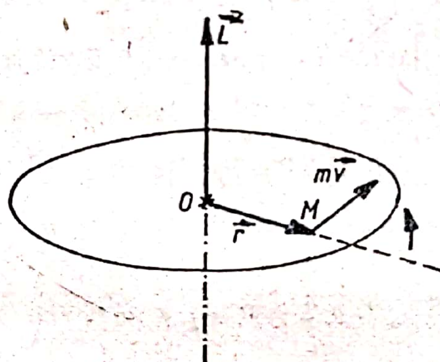


Fig. F.B. 44

c) $|\bar{M}_F| = |\bar{r} \times \bar{G}| = mgr = 5{,}88 \cdot 10^{-3}$ N·m.

2°. a) Din condiția de conservare a energiei electronului, $0 = \frac{mv^2}{2} - eU$, găsim că $v = \sqrt{\frac{2eU}{m}} \approx 1{,}87 \cdot 10^7 \frac{\text{m}}{\text{s}}$.

b) Deoarece mișcarea electronilor între catod și anod este uniform accelerată $\left(a = \frac{eE}{m}\right)$, iar viteza inițială a electronilor este presupusă neglijabilă, viteza medie v_m a electronilor între catod și anod este $v_m = \frac{v}{2}$, deci timpul de „trecere" a electronului de la catod la anod este $t = \frac{d}{v_m} = \frac{2d}{v} \approx 10{,}6 \cdot 10^{-10}$ s.

c) $N = \frac{I}{e} \approx 10^{16}$ electroni/s.

3°. a) Un sistem de două forțe paralele, de sensuri contrare, avînd același modul, însă suporturi diferite, aplicate aceluiași solid, se numește cuplu de forțe. Deoarece $\bar{F}_1 = -\bar{F}_2 = \bar{F}$, rezultanta forțelor care formează un cuplu este nulă, $\bar{R} = \bar{F}_1 + \bar{F}_2 = 0$, în schimb momentul rezultant al forțelor care formează un cuplu, $\bar{M} = \bar{r}_1 \times \bar{F}_1 + \bar{r}_2 \times \bar{F}_2 = (\bar{r}_1 - \bar{r}_2) \times \bar{F} = \bar{r} \times \bar{F}$ (v. și fig. F.B.45) este independent de poziția aleasă pentru punctul O (originea) de referință, și diferit de zero,

$$|\bar{M}| = rF \sin(\widehat{\bar{r}, \bar{F}}) = Fb.$$

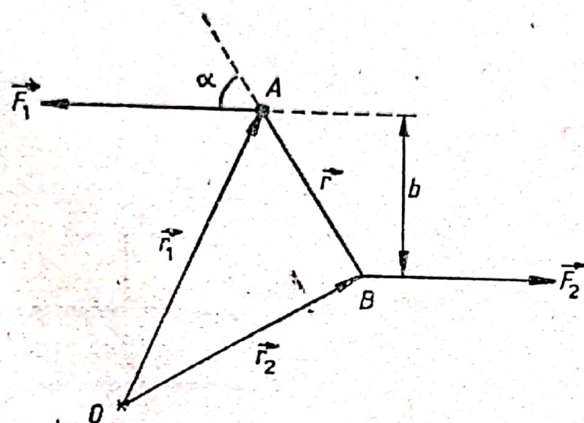


Fig. F.B.45

unde $b = r \sin(\widehat{\bar{F}, \bar{r}})$ este brațul cuplului (distanța dintre suporturile forțelor $\bar{F}_1$ și $\bar{F}_2$). Datorită momentului cuplului M (momentul rezultant al forțelor $\bar{F}_1$ și $\bar{F}_2$), cuplul rotește corpul asupra căruia este aplicat în jurul unei axe perpendiculare pe planul celor două forțe (planul cuplului). Cuplurile care au același moment produc același efect, dacă sînt aplicate succesiv aceluiași corp (se spune că aceste cupluri sînt echivalente). În cazul corpurilor rigide, un cuplu poate fi rotit, deplasat în propriul său plan sau într-un plan paralel, fără ca efectul său să se modifice (deoarece nici momentul cuplului nu se modifică, în aceste condiții).

Drept exemple simple de cupluri de forțe pot fi date acțiunile mîinilor asupra unui volan de automobil sau asupra ghidonului unei biciclete, acțiunea vîrfului (lamei) unei șurubelnițe asupra crestăturii unui șurub ș.a.

b) Un punct material care se mișcă rectiliniu sub acțiunea unei forțe de forma $F = -ky$ (sau $F = -kx$) se numește oscilator liniar armonic. Mișcarea sa de oscilație este numită mișcare oscilatorie armonică. Oscilatorul liniar armonic este un oscilator ideal (fără frecare).

Ecuațiile mărimilor care caracterizează mișcarea oscilatorie armonică se obțin din ecuațiile mărimilor corespunzătoare mișcării circulare uniforme (figura F.B.46). Proiecția mișcării circulare uniforme pe un diametru reprezintă o mișcare oscilatorie armonică, $OM' = y = r \sin \varphi = A \sin(\omega t + \varphi_0)$, unde am notat $r = A$ și am ținut seamă că $\omega = \frac{\varphi - \varphi_0}{t}$. Viteza în mișcarea oscilatorie armonică reiese ca fiind $v = v_t \cos \varphi = \omega A \cos(\omega t + \varphi_0)$, unde $v_t = \omega r = \omega A$ este viteza tangențială în mișcarea circulară uniformă. În fine, pornind de la expresia accelerației centripete, $a_c = -\omega^2 r = -\omega^2 A$ (este orientată în sens opus razei vectoare), se poate deduce și expresia accelerației într-o mișcare oscilatorie armonică, $a = a_c \sin \varphi = -\omega^2 A \sin(\omega t + \varphi_0)$ [v. eventual și figura F.B.46].

Ecuația principiului II al dinamicii, $F = ma$, capătă, pentru un oscilator armonic liniar realizat prin legarea unui corp de mici dimensiuni și masă m de un resort elastic de masă neglijabilă și constantă elastică k, expresia $-ky = -m\omega^2 y$, de unde reiese că pulsația ω a oscilatorului elastic este $\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$. Deoarece între frecvența ν, perioada T și pulsația ω a oscilatorului armonic liniar există aceleași relații ca și între ν, T și viteza unghiulară ω a mișcării circulare uniforme, pentru un oscilator elastic (armonic),

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}.$$

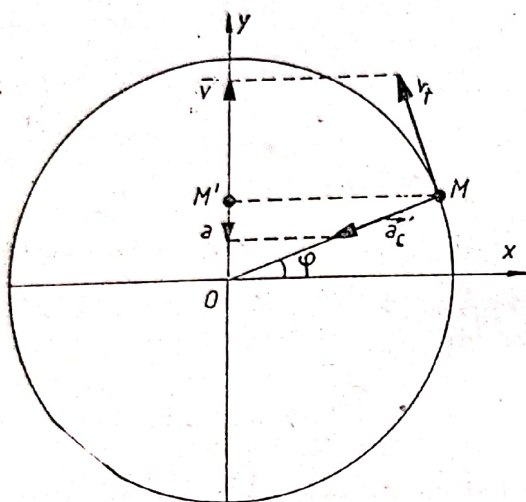
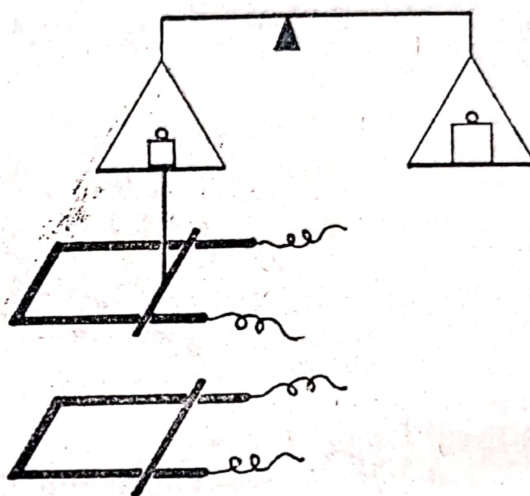


Fig. F.B.46


Fig. F.B.47

c) Două circuite parcurse de curent electric interacționează prin cîmpurile magnetice din jurul lor. Experiența arată (v., spre exemplu, fig. F.B.47) că, dacă două conductoare paralele sînt parcurse de curenți electrici de același sens, ele se atrag, iar dacă sînt parcurse de curenți electrici de sensuri opuse, se resping.

Forța de interacțiune dintre două conductoare paralele parcurse de curent electric reprezintă forța electromagnetică cu care fiecare conductor interacționează cu cîmpul magnetic generat de celălalt conductor; astfel $F_1 = I_1 l B_2$ va reprezenta forța care se exercită pe o lungime l a conductorului 1, parcurs de curentul I_1.

Considerînd conductoarele foarte lungi, atunci cîmpul magnetic generat de conductorul prin care circulă curentul I_2 la distanța r (distanța dintre conductoare) este caracterizat de inducția $B_2 = \frac{\mu_0 \mu_r I_2}{2\pi r}$, unde μ_0 este permeabilitatea vidului, iar μ_r este permeabilitatea relativă a substanței. Introducînd în expresia forței, rezultă $F_1 = \frac{\mu_0 \mu_r I_1 I_2}{2\pi r} \cdot l$. Forța F_2 care acționează asupra conductorului parcurs de curentul I_2 va avea aceeași expresie, dar va fi de sens opus (este satisfăcut principiul acțiunii și reacțiunii).

4°. a) Acest subiect a fost tratat la III.4°. a.

b) Acest subiect a fost tratat la III.4°. c.

c) $P = UI \cos\varphi$, $P_r = UI \sin\varphi$, $S = UI$, unde P, P_r și S sînt respectiv puterea activă, puterea reactivă și puterea aparentă, U și I sînt valorile efective ale tensiunii la borne, respectiv intensității curentului prin circuitul de curent alternativ considerat, iar φ este defazajul dintre tensiunea la borne și intensitatea curentului în circuit ($\cos\varphi$ se numește și factor de putere).

IX.1°. a) Deoarece rezultanta R a forțelor care acționează asupra corpului este egală cu diferența dintre forța „activă" F și forța de frecare $F_{fr} = \mu G = \mu mg$ dintre corp și planul orizontal, $R = F - F_{fr}$, accelerația mișcării corpului sub acțiunea forței F este $a = \frac{R}{m} = \frac{F - F_{fr}}{m} = \frac{F}{m} - \mu g = 2\ \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$. Distanța d străbătută de corp sub acțiunea forței F este $d = \frac{L}{F} = 2{,}25$ m. Durata t_F în care este străbătută această distanță (durata acțiunii forței F) poate fi determinată din ecuația spațiului în respectiva mișcare uniform-accelerată, $d = v_0 t_F + \frac{a}{2} t_F^2$, de unde, $t_F = \frac{\sqrt{v_0^2 + 2ad} - v_0}{a} = 0{,}5$ s.

b) Viteza „finală", atinsă de corp la încetarea acțiunii forței F, este: $v_f = v_0 + at_F = 5\ \frac{\text{m}}{\text{s}}$. După încetarea acțiunii forței F asupra corpului acționează numai forța de frecare, ceea ce face ca accelerația corpului să devină: $a_{fr} = \frac{-F_{fr}}{m} = -\mu g = -2\ \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$. Rezultă că spațiul suplimentar străbătut de corp de la încetarea acțiunii forței F și pînă la oprire este $s_{fr} = \frac{v_0^2}{-2a_{fr}} = 6{,}25$ m, deci spațiul total parcurs de corp pînă la oprire este $s = d + s_{fr} = 8{,}5$ m.

c) Durata de la încetarea acțiunii forței F pînă la oprirea corpului este $t_{fr} = \frac{v_f}{-a_{fr}} = 2{,}5$ s. Ecuațiile vitezei corpului în cele două părți ale mișcării sînt:

$$v(t) = v_0 + at = 4 + 2t, \text{ pentru } t \in [0,\ t_F],$$
$$v(t) = v_f + a_{fr}(t - t_F) = 6 - 2t, \text{ pentru } t \in [t_F,\ t_F + t_{fr}],$$

iar ecuațiile spațiului în cele două părți ale mișcării sînt:

$$x(t) = v_0 t + \frac{at}{2} = 4t + t^2, \text{ pentru } t \in [0,\ t_F],$$

respectiv

$$x(t) = d + v_f(t - t_F) + \frac{a_{fr}}{2}(t - t_F)^2 = -t^2 + 6t - 0{,}5, \text{ pentru } t \in [t_F,\ t_F + t_{fr}].$$

Reprezentările grafice cerute ale dependențelor de timp ale vitezei corpului, respectiv spațiului parcurs, de la începutul aplicării forței și pînă la oprirea corpului, sînt date în figurile F.B.48, a și b.

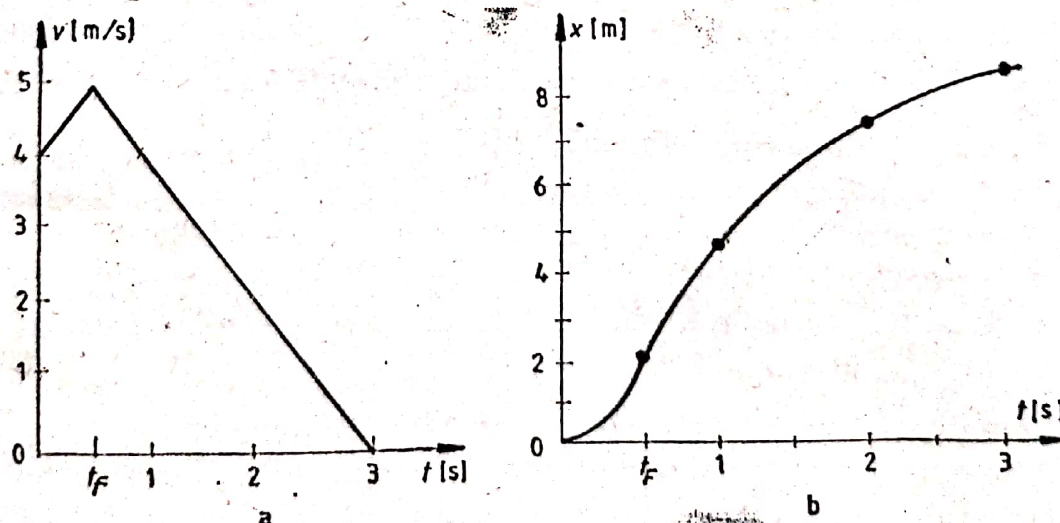


Fig. F.B.48

2°. a) Din expresia $u = 240 \sin 100 \pi t$ (V) a (valorilor instantanee ale) tensiunii alternative aplicate la bornele circuitului se determină pulsația curentului alternativ $\omega = 314 \frac{\text{rad}}{\text{s}}$. Rezultă că reactanțele inductivă, respectiv capacitivă, sînt $X_L = L\omega = 400\ \Omega$, $X_C = \frac{1}{C\omega} = 50\ \Omega$, iar impedanța circuitului RLC serie este $Z = \sqrt{R^2 + \left(L\omega - \frac{1}{C\omega}\right)^2} = 350\sqrt{2}\ \Omega$. Din relația $\text{tg}\ \varphi = \frac{X_L - X_C}{R}$ rezultă că defazajul între tensiunea la bornele circuitului și intensitatea curentului electric care îl străbate este $\varphi = \frac{\pi}{4}$ radiani. Se obține expresia intensității instantanee a curentului din circuit $i = \sqrt{2} I \sin (100\ \pi t - \varphi) = \frac{\sqrt{2}\ U}{Z} \sin\left(100\ \pi t - \frac{\pi}{4}\right)$, de unde, în final $i = \frac{240}{350\sqrt{2}} \sin\left(100\ \pi t - \frac{\pi}{4}\right)$ (A).

b) Comparînd expresiile de mai sus ale intensității instantanee a curentului din circuit, găsim că valoarea efectivă a intensității curentului este $I = \frac{240}{700}$ A. În mod asemănător, comparînd expresia din enunț a tensiunii instantanee la bornele circuitului cu cea teoretică, $u = \sqrt{2}\ U \sin \omega t$, reiese că tensiunea efectivă la bornele circuitului este $U = \frac{240}{\sqrt{2}}$ V. Obținem valorile cerute ale puterilor activă, reactivă și aparentă, $P = UI \cos \varphi = \frac{576}{14} \approx 41{,}14$ W, $P_r = UI \sin \varphi = \frac{576}{14} \approx 41{,}14$ VAR, $S = UI = \frac{576}{14}\sqrt{2} \approx 58{,}18$ VA.

c) Frecvența curentului alternativ pentru care are loc rezonanța este $\nu = \frac{1}{2\pi\sqrt{LC}} = \frac{100\sqrt{2}}{8} \approx 17{,}7$ Hz. Valoarea efectivă a intensității curentului electric la rezonanță este

$$I = \frac{U}{R} = \frac{240}{350\sqrt{2}} \approx 0{,}485 \text{ A.}$$

3°. a) Forța gravitațională dintre două corpuri cu masele m_1 și m_2, considerate punctiforme față de distanța dintre ele, situate la o distanță r unul față de altul, este o forță de atracție care acționează de-a lungul liniei ce unește corpurile și are valoarea $F = K\frac{m_1 m_2}{r^2}$, unde K este o constantă universală, care are aceeași valoare pentru orice pereche de corpuri din univers.

b) Alungirea unui corp de forma unei tije (fir) sub acțiunea unei forțe deformatoare este proporțională cu forța F deformatoare și cu lungimea l_0 a corpului nedeformat, și invers proporțională cu aria S_0 a secțiunii transversale a corpului nedeformat, $\Delta l = \frac{1}{E} \cdot \frac{F l_0}{S_0}$, unde E este modulul de elasticitate longitudinal, numit și modulul lui Young.

c) Intensitatea I a curentului electric printr-un circuit este direct proporțională cu tensiunea electromotoare E din circuit și invers proporțională cu rezistența totală a circuitului, $I = \frac{E}{R + r}$, unde R este rezistența circuitului exterior, iar r este rezistența internă a sursei (surselor) de tensiune electromotoare din circuit.

4°. a) Greutatea $G = mg$ a unui corp aflat pe un plan înclinat de unghiul α se descompune într-o componentă „tangențială“ (în lungul planului înclinat) $G_t = G \sin \alpha$ și o componentă „normală“ (perpendiculară pe planul înclinat) $G_n = G \cos \alpha$ (v. și fig. F.B.49). În condițiile în care deplasarea corpului pe planul înclinat se face cu frecare (coeficientul de frecare fiind μ), forța de frecare cu planul înclinat este $F_{fr} = \mu G_n = \mu G \cos \alpha$. Rezultă că, pentru a ridica uniform corpul de greutate G, pe planul înclinat, în prezența frecării, este necesar ca forța de tracțiune să fie egală cu $F_{tr} = G_t + F_{fr} = G(\sin \alpha + \mu \cos \alpha)$. Dacă lungimea planului înclinat este l, iar înălțimea planului este h $(= l \sin \alpha)$, lucrul mecanic efectuat de forța de tracțiune pentru a ridica pe planul înclinat corpul considerat este $L_{ef} = F_{tr} l = G(\sin \alpha + \mu \cos \alpha) l$. Lucrul mecanic util pentru ridicarea corpului înclinat fiind egal cu cel efectuat în absența frecării, $L_u = G_t l = G \sin \alpha \cdot l$, reiese că randamentul mașinii simple-plan înclinat este

$$\eta = \frac{L_u}{L_c} = \frac{G \sin \alpha \cdot l}{G (\sin \alpha + \mu \cos \alpha)\, l} = \frac{1}{1 + \mu \operatorname{ctg} \alpha}.$$

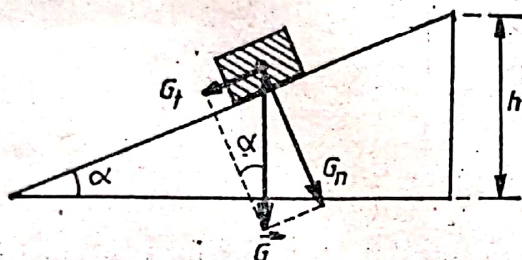


Fig. F.B.49



Fig. F.B.50

b) În condițiile unei curgeri staționare, masele Δm_1, Δm_2 ale cantităților de fluid care traversează într-o aceeași durată Δt două secțiuni oarecare Σ_1, Σ_2 (fig. F.B.50) ale unui tub de curent sînt egale, $\Delta m_1 = \Delta m_2$, deci și debitele masice prin cele două secțiuni sînt, de asemenea, egale,

$$Q_{m1} = \frac{\Delta m_1}{\Delta t} = \frac{\Delta m_2}{\Delta t} = Q_{m2}.$$

Dacă, în plus, curgerea fluidului are loc în regim de incompresibilitate, cu alte cuvinte densitatea ρ_1 a cantității de fluid (de masă Δm_1) care a traversat secțiunea Σ_1 în durata Δt este aceeași cu densitatea ρ_2 a cantității de fluid (de masă Δm_2) care a traversat secțiunea Σ_2 în aceeași durată Δt, atunci și debitele volumice prin cele două secțiuni sînt, de asemenea, egale,

$$Q_{V1} = \frac{\Delta V_1}{\Delta t} = \frac{\Delta m_1}{\Delta t} \cdot \frac{1}{\rho_1} = \frac{Q_{m1}}{\rho_1} = \frac{Q_{m2}}{\rho_2} = \frac{\Delta m_2}{\Delta t} \cdot \frac{1}{\rho_2} = \frac{\Delta V_2}{\Delta t} = Q_{V2}.$$

În cazul în care secțiunile Σ_1, Σ_2, de arii S_1, respectiv S_2, sînt perpendiculare pe liniile de curent (deci pe direcțiile vitezelor v_1, respectiv v_2, din zonele secțiunilor), atunci

$$Q_{V1} = \frac{\Delta V_1}{\Delta t} = \frac{S_1 v_1 \Delta t}{\Delta t} = S_1 v_1 = Q_{V2} = \frac{\Delta V_2}{\Delta t} = \frac{S_2 v_2 \Delta t}{\Delta t} = S_2 v_2.$$

În concluzie, ecuația de continuitate, care corespunde curgerilor staționare, poate fi exprimată prin: constanța debitului masic, prin orice secțiune, $Q_{m1} = Q_{m2}$ (cazul general), constanța debitului volumic, $Q_{V1} = Q_{V2}$ (cazul curgerilor în regim de incompresibilitate), respectiv prin ecuația (utilă pentru stabilirea unor relații între vitezele de curgere prin diferite secțiuni), $S_1 v_1 = S_2 v_2$ (valabilă dacă unghiurile formate de vitezele $\bar{v}_1$, $\bar{v}_2$ cu planele secțiunilor de arii S_1, respectiv S_2, sînt egale).

c) Capacitatea electrică a unui condensator este definită prin raportul dintre sarcina electrică Q de pe o armătură și diferența de potențial $(V_A - V_B)$ dintre cele două armături, $C = \frac{Q}{V_A - V_B}$. Deoarece sarcina totală (de un anumit semn) a unei baterii de condensatori legați în paralel este egală cu suma sarcinilor armăturilor legate la o aceeași bornă a bateriei (fig. F.B.51),

$$Q = Q_1 + Q_2 + \dots + Q_n = \sum_{i=1}^{n} Q_i,$$

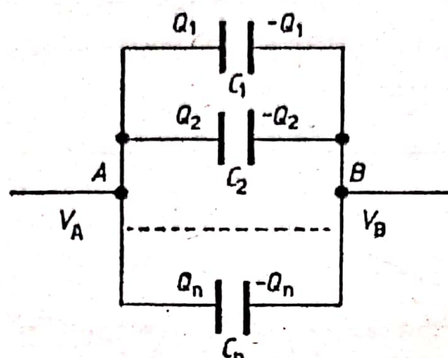


Fig. F.B 51

capacitatea bateriei de condensatori legați în paralel, definită prin aceeași expresie ca și capacitatea unor condensatori, reiese ca fiind

$$C = \frac{Q}{V_A - V_B} = \frac{Q_1 + Q_2 + \dots + Q_n}{V_A - V_B} = \frac{Q_1}{V_A - V_B} + \frac{Q_2}{V_A - V_B} + \dots + \frac{Q_n}{V_A - V_B} =$$

$$= C_1 + C_2 + \dots + C_n = \sum_{i=1}^{n} C_i.$$

În concluzie, capacitatea unei baterii de condensatori legați în paralel este egală cu suma capacităților condensatorilor componenți.

X.1°. a) Masa cablului de acționare a ascensorului este $m = \rho_l l_0 = 0{,}8 \cdot 25 = 20$ kg. Deoarece, la pornirea ascensorului, accelerația mișcării are sensul în sus, forța de inerție $F_i = (M + m)a$ are sensul în jos, deci forța de tracțiune suportată de cablu la pornire este $F_{tr} = G_{tot} + F_i = (M + m)(g + a) = (880 + 20)(9{,}8 + 2) = 10\,620$ N.

b) Pentru ca efortul unitar la tracțiune să nu depășească efortul unitar maxim admisibil este necesar ca $\sigma_{tr} = \frac{F_{tr}}{S_0} \leqslant \sigma_{max}$, de unde $S_0 \geqslant \frac{F_{tr}}{\sigma_{max}} = 1{,}062 \cdot 10^{-4}$ m², deci ca aria secțiunii cablului (nedeformat) să fie mai mare sau cel puțin egală cu 1,062 cm².

c) Din legea lui Hooke, obținem $\Delta l = \frac{F_{tr} l_0}{S_0 E} \leqslant \frac{\sigma_{max} l_0}{E} = 1{,}25 \cdot 10^{-2}$ m. Rezultă că, în funcție de secțiunea aleasă pentru cablul ascensorului (mai mare sau cel puțin egală cu secțiunea minimă admisibilă $S_{min} = 1{,}062 \cdot 10^{-4}$ m²), alungirea absolută a cablului la pornire va fi mai mică sau cel mult egală cu alungirea maximă admisibilă, $\Delta l_{max} = 1{,}25$ cm.

2°. a) Pulsația tensiunii alternative, dată de sursă, este $\omega = 2\pi\nu \approx 1\,256 \frac{\text{rad}}{\text{s}}$. Reactanțele inductivă, respectiv capacitivă, sînt $X_L = L\omega \simeq 8\Omega$, $X_C = \frac{1}{C\omega} \simeq 5\Omega$,

iar impedanța circuitului RLC serie considerat este $Z = \sqrt{R^2 + (X_L - X_C)^2} \simeq 5\Omega$. Rezultă că intensitatea efectivă a curentului în circuit este $I = \frac{U}{Z} = 24$ A. Pe această bază, pot fi determinate și tensiunile maxime la bornele rezistorului bobinei și, respectiv, condensatorului, $U_{R,\max} = \sqrt{2}IR = 96\sqrt{2} \approx 135{,}8$ V, $U_{L,\max} = \sqrt{2}IX_L = 192\sqrt{2} \approx 271{,}5$ V și $U_{C,\max} = \sqrt{2}IX_C = 120\sqrt{2} \approx 169{,}7$ V.

b) Tangenta unghiului de defazaj dintre tensiunea la bornele circuitului și intensitatea curentului în circuit este dată de expresia: $\operatorname{tg}\varphi = \frac{X_L - X_C}{R}$. Deoarece în enunț se cere tangenta unghiului de defazaj dintre curent și tensiunea la bornele circuitului (în ordinea inversată), avem

$$\operatorname{tg}\varphi_{I/U} = -\operatorname{tg}\varphi = \frac{X_C - X_L}{R} = -0{,}75.$$

c) Frecvența de rezonanță a circuitului este dată de formula lui Thomson,

$$\nu_0 = \frac{1}{2\pi\sqrt{LC}} \approx 158 \text{ Hz}.$$

3°. a) Forța a cărei acțiune asupra unui corp determină mișcarea circulară uniformă a corpului se numește forță centripetă. În conformitate cu principiul al doilea al dinamicii, între această forță și accelerația centripetă $\bar{a}_c$ există relația $\bar{F}_c = m\bar{a}_c = -m\omega^2\bar{r}$, este raza vectoare a corpului, ω este viteza unghiulară a rotației sale, iar $\bar{r}$ este raza vectoare a corpului față de punctul (sau axa) în jurul căruia se produce rotația. Forța centripetă este o forță reală (de interacțiune). Spre exemplu, pot îndeplini rolul de forță centripetă: forța elastică de tensiune a unui fir legat de corpul aflat în mișcare de rotație, forța gravitațională exercitată de către corpul central (în cazul sistemelor stelare), forța electrică exercitată de nucleul atomic asupra electronilor ș.a.

Principiile mecanicii sînt formulate pentru sisteme de referință inerțiale. Forțele inexistente în cadrul sistemelor de referință inerțiale, care nu corespund deci unor interacțiuni, dar care se manifestă totuși — și trebuie luate în considerație pentru a extinde domeniul de aplicare al principiului mecanicii (și) — în sistemele de referință neinerțiale, se numesc forțe complementare (pseudoforțe sau forțe de inerție). Forța complementară care se manifestă față de un sistem de referință neinerțial, aflat în mișcare de rotație față de un sistem de referință inerțial, se numește forță centrifugă (simbol F_{cf}). Deoarece un corp solidar legat de un sistem de referință neinerțial, aflat în rotație cu viteza unghiulară ω față de un referențial inerțial, este în repaus — deci are o accelerație nulă — față de sistemul neinerțial considerat, deși asupra sa acționează forța reală (de interacțiune) centripetă $\bar{F}_c = -m\omega^2\bar{r}$, rezultă că — pentru a aplica principiul al doilea al dinamicii în acest caz — forța centrifugă $\bar{F}_{cf}$ trebuie să îndeplinească relația $\bar{F}_c + \bar{F}_{cf} = m\bar{a} = 0$, de unde $\bar{F}_{cf} = -\bar{F}_c = +m\omega^2\bar{r}$.

Existența și chiar dependențele forței centrifuge de masa corpului, de viteza unghiulară ω a rotației și de raza r a traiectoriei circulare pot fi evidențiate și studiate cu ajutorul unor experimente, în particular folosind mașina centrifugă (v. fig. F.B.52). Menționăm și aplicațiile forței centrifuge: separatorul centrifugal, supraînălțarea șinei exterioare pentru evitarea solicitării inegale a șinelor și chiar răsturnării vagoanelor la curbe ș.a.

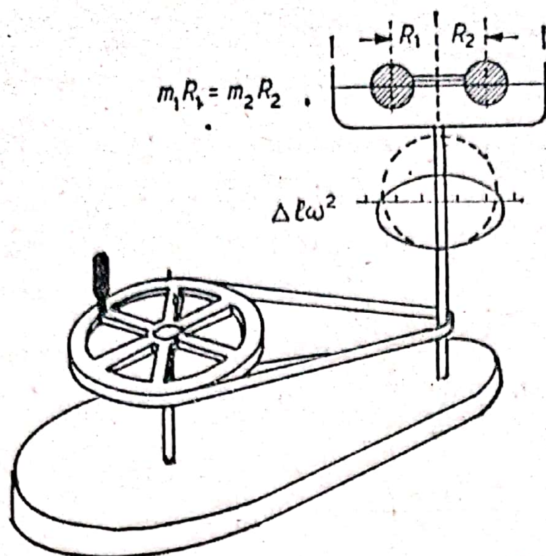


Fig. F.B.52

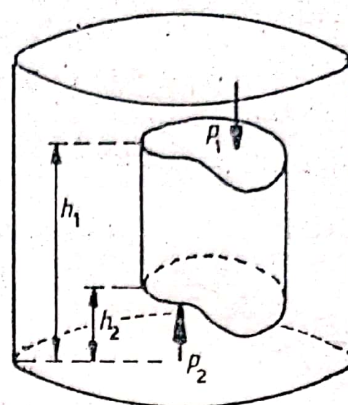


Fig. F.B.53

b) Se consideră un element de volum al lichidului de forma unui cilindru, ale cărui baze (avînd fiecare aria S) sînt situate în plane orizontale, situate la înălțimile h_1, respectiv h_2, deasupra fundului vasului. Dacă p_1 și p_2 sînt presiunile exercitate de lichid asupra celor două baze (fig. F.B.53), diferența forțelor $F_1 = p_1S$, $F_2 = p_2S$ datorate acestor presiuni va trebui să fie egală — în cazul în care lichidul este în echilibru — cu greutatea $G = mg = \rho Vg = \rho S(h_1 - h_2)g$ a elementului de lichid considerat (ρ este densitatea lichidului), astfel încît rezultanta forțelor care acționează asupra elementului de fluid să fie nulă, $\bar{F}_1 + \bar{F}_2 + \bar{G} = 0$. Rezultă că $F_2 - F_1 = (p_2 - p_1)S = G = \rho S(h_1 - h_2)g$, de unde: $p_2 - p_1 = \rho gh$, unde $h = h_1 - h_2$ este diferența de nivel dintre suprafețele la nivelul cărora se exercită, în lichid, presiunile p_1 și p_2. Rezultatul obținut (numit și principiul fundamental al hidrostaticii) poate fi enunțat astfel: Diferența de presiune dintre două puncte dintr-un lichid în echilibru este numeric egală cu greutatea unei coloane din acel lichid care are ca bază unitatea de suprafață și ca înălțime distanța dintre planele care conțin punctele respective.

Dacă nivelul 1 corespunde suprafeței libere a lichidului la care presiunea coincide cu cea atmosferică H, iar nivelul 2 se găsește la adîncimea h în lichid, atunci presiunea p_2 este $p_2 = p_1 + \rho gh = H + \rho gh$.

c) Procesul de dirijare — de către cîmpul electric aplicat între plăcile metalice (electrozii) unui vas cu soluție — a ionilor din soluție către electrozi și transformarea lor în atomi sau radicali prin neutralizare se numește electroliză.

Prin cîntărirea electrozilor înaintea și la sfîrșitul electrolizei, efectuată pentru diferite durate t și intensități diferite I ale curentului electric care străbate vasul cu soluție, se constată că masa m de substanță separată dintr-un electrolit este proporțională cu intensitatea curentului prin vasul de electroliză și cu durata acesteia, $m = KIt$ (prima lege a lui Faraday a electrolizei), K fiind echivalentul electrochimic al substanței separate din electrolit.

Studiul dependenței echivalentului electrochimic al diferitelor substanțe de masa atomică A și valența n a acestora evidențiază proporționalitatea echivalentului electrochimic cu masa atomică a substanței, invers proporționalitatea cu valența n, precum și faptul că valoarea expresiei $\frac{Kn}{A}$ este o constantă universală ($F \approx 96\,400$ C/echivalent-gram), numită număr al lui Faraday (prin echivalent-gram al unei substanțe se înțelege cantitatea din respectiva substanță, a cărei masă exprimată în grame este numeric egală cu raportul dintre masa atomică A și valența n

a substanței). Dependențele constatate mai sus pot fi exprimate prin relația $K = \frac{1}{F} \cdot \frac{A}{n}$, numită a doua lege (a lui Faraday) a electrolizei.

După cum a fost arătat prima dată de către Helmholtz (1881), legile electrolizei pot fi explicate dacă se admite că fiecare ion simplu are sarcina electrică e, fiecare ion dublu (corespunzînd valenței $n = 2$) are sarcina electrică $2e$, iar fiecare ion n — multiplu are sarcina electrică, ne, unde $e = \frac{F}{N_A}$, N_A fiind numărul lui Avogadro.

Într-adevăr, trecerea prin soluție a unei sarcini electrice $Q = It$ corespunde străbaterii soluției (între electrozi) de către $\frac{Q}{ne}$ ioni cu valența n, deci depunerii la electrozi a unei cantități de substanță cu masa $m = \frac{Q}{ne} \cdot m_c = \frac{N_A \cdot m_c}{nF} \cdot Q = \frac{A}{nF} \cdot It$, unde m_c este masa ionului cu valența n. Se constată astfel că ipoteza lui Helmholtz conduce la sinteza celor două legi ale lui Faraday ale electrolizei. Sarcina electrică $e = \frac{F}{N_A} \approx 1{,}602 \cdot 10^{-19}$ C se numește sarcină electrică elementară (ulterior, particula elementară cu sarcina electrică $-e$ a fost numită electron).

Printre principalele aplicații ale electrolizei se numără: obținerea anumitor substanțe pe cale electrolitică (sodă caustică, sodă, hipoclorați, hidrogen ș.a.), obținerea unor metale din combinațiile lor naturale (electrometalurgia), obținerea de depuneri metalice pe suprafețele unor corpuri, în scopul protejării lor anticorozive (galvanostegia), modelarea metalelor și reproducerea — după anumite tipare — a unor obiecte (galvanoplastia).

4°. a) Acest subiect a fost tratat la I.5°.a.

b) Acest subiect a fost tratat la II.5°.c.

c) $\bar{f} = q\bar{v} \times \bar{B}$, unde f este forța Lorentz care acționează asupra unei particule încărcate cu sarcina electrică q, aflată în mișcare cu viteza $\bar{v}$ într-un cîmp magnetic uniform de inducție $\bar{B}$. Menționăm faptul că direcția și sensul forței Lorentz pot fi determinate și cu ajutorul regulii mîinii stîngi (în cazul particulelor încărcate pozitiv), respectiv regulii mîinii drepte (în cazul particulelor încărcate negativ) (v. și fig. F.B.54).

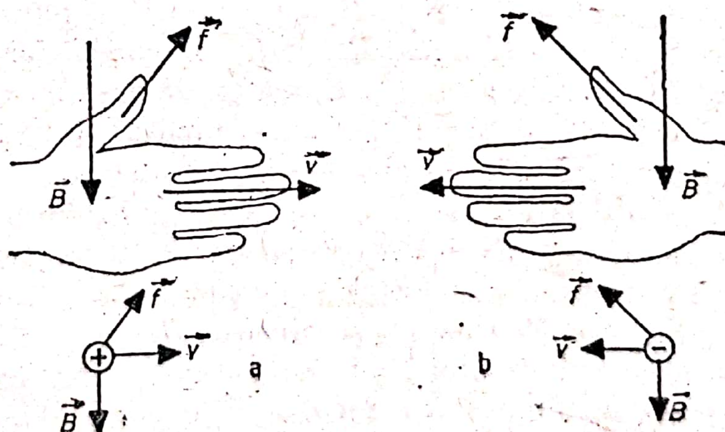


Fig. F.B.54

XI. 1°. a) Forța F_n de „apăsare" pe plan a corpului este dată de expresia (v. și fig. F.B.4) $F_n = G - F \sin\alpha = mg - F \sin\alpha$. Rezultă că forța de frecare dintre corp și suprafața orizontală este $F_{fr} = \mu F_n = \mu(mg - F \sin\alpha) = 12{,}5$ N.

b) Deoarece forța activă este egală cu $F \cos\alpha$, accelerația imprimată corpului este $a = \frac{F\cos\alpha - F_{fr}}{m} \approx 2{,}06 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$.

c) Distanța d străbătută în durata Δt este $d=\frac{a}{2}(\Delta t)^2=16{,}48$ m. Rezultă că lucrul mecanic efectuat de forța F este $L=F\cos\alpha\cdot d\approx 713{,}6$ J.

2°. a) Introducerea șuntului trebuie să permită creșterea valorii maxime a intensității curentului electric măsurat de galvanometru de $n=\frac{I'_{max}}{I_{max}}=\frac{1}{5\cdot 10^{-2}}=$ $=20$ ori. Rezultă că rezistența șuntului trebuie să fie $R_s=\frac{R_g}{n-1}=\frac{9{,}5}{19}=0{,}5\ \Omega$.

b) În absența șuntului, tensiunea la bornele galvanometrului, cînd acul se află la jumătatea scalei este $U=R\frac{I_{max}}{2}\simeq 0{,}2375$ V. În prezența șuntului, tensiunea la bornele galvanometrului cînd acul se află la jumătatea scalei este

$$U'=R_{ech}\frac{I'_{max}}{2}=\frac{R_gR_s}{R_g+R_s}\cdot\frac{I_{max}}{2n}=\frac{\frac{R_g^2}{n-1}}{\frac{R_g\cdot n}{n-1}}\cdot\frac{I_{max}}{2n}=U$$

(tensiunea la bornele galvanometrului, atunci cînd acul se găsește la jumătatea scalei, este aceeași, atît în absența, cît și în prezența șuntului).

c) Introducerea rezistenței adiționale trebuie să permită creșterea valorii maxime a tensiunii măsurate cu galvanometrul de la valoarea $U_{max}=RI_{max}=$ $=0{,}475$ V, la valoarea $U'_{max}=30$ V, deci de $n'=\frac{U'_{max}}{U_{max}}=63{,}16$ ori. Reiese că rezistența adițională trebuie să aibă valoarea $R_A=R_g(n'-1)=590{,}6\ \Omega$.

3°. a) Deducerea din manual a valorii, direcției, sensului și punctului de aplicație al rezultantei a două forțe paralele de același sens se bazează pe „artificiul" adăugării la sistemul celor două forțe studiate a încă două forțe $\bar{f}_1, \bar{f}_2$, avînd punctele de aplicație A_1, A_2, comune cu forțele $\bar{F}_1, \bar{F}_2$, care au direcția în lungul dreptei care unește punctele de aplicație A_1 și A_2, și satisfac în plus relația $\bar{f}_1+\bar{f}_2=0$ (în consecință, rezultatele forțelor $\bar{f}_1$ și $\bar{f}_2$ și momentelor forțelor respective sînt nule; v. și fig. F.B.55). Fie $\bar{R}_1=\bar{F}_1+\bar{f}_1$, $\bar{R}_2=\bar{F}_2+\bar{f}_2$, iar A' — punctul de intersecție al suporturilor (direcțiilor) rezultantelor $\bar{R}_1$ și $\bar{R}_2$. Deoarece forțele au caracterul unor vectori „alunecători", rezultantele $\bar{R}_1$, $\bar{R}_2$ pot fi „deplasate" astfel încît punctul lor de aplicație să devină A' (v. fig. F.B.55). În punctul A', rezultantele $\bar{R}_1$, $\bar{R}_2$ pot fi descompuse după o direcție paralelă cu A_1A_2 (rezultă componentele $\bar{f}_1$, $\bar{f}_2$) și după direcția $A'A$ paralelă cu direcțiile forțelor $\bar{F}_1$, $\bar{F}_2$ (după această direcție se reobțin — drept componente ale lui $\bar{R}_1$, respectiv $\bar{R}_2$ — forțele $\bar{F}_1$ și $\bar{F}_2$). Deoarece $\bar{f}_1+\bar{f}_2=0$, reiese că rezultanta forțelor considerate are direcția $A'A$, paralelă cu direcțiile (comune ale) forțelor F_1 și F_2, și valoarea $R=F_1+F_2$. În figura F.B.55 am notat cu A — intersecția dreptei A_1A_2 cu paralela dusă prin A' la direcția forțelor $\bar{F}_1$, $\bar{F}_2$; deoarece rezultanta $\bar{R}$ a forțelor $\bar{F}_1$, $\bar{F}_2$ este de asemenea un vector alunecător și are direcția $A'A$, reiese că punctul A are și semnificația fizică de punct de aplicație al forțelor $\bar{F}_1$ și $\bar{F}_2$. Din asemănarea triunghiului A_1AA' cu cel format de forțele $\bar{f}_1$, $\bar{F}_1$ și $\bar{R}_1$ se obține $\frac{A_1A}{AA'}=\frac{f_1}{F_1}$, iar din asemănarea triunghiului A_2AA' cu cel format de forțele $\bar{f}_2$, $\bar{F}_2$ și $\bar{R}_2$, $\frac{A_2A}{AA'}=\frac{f_2}{F_2}$. Deoarece $f_1=|\bar{f}_1|=|\bar{f}_2|=f_2$, din împărțirea membru cu membru a ultimelor două relații, rezultă că $\frac{A_1A}{A_2A}=\frac{F_2}{F_1}$,

cu alte cuvinte, punctul de aplicație A al rezultantei forțelor paralele și de același sens $\bar{F}_1$, $\bar{F}_2$ împarte segmentul A_1A_2 al punctelor de aplicație ale celor două forțe, în părți invers proporționale cu forțele respective (punctul de aplicație A este mai apropiat de punctul de aplicație A_1 al forței mai mari).

Menționăm că, pornind de la faptul că rezultanta celor două forțe este $\bar{R}=\bar{F}_1+\bar{F}_2$, se poate obține poziția punctului de aplicație A al rezultantei și în următorul mod (mai simplu). Fie $\bar{r}_1$, $\bar{r}_2$ — razele vectoare ale punctelor de aplicație

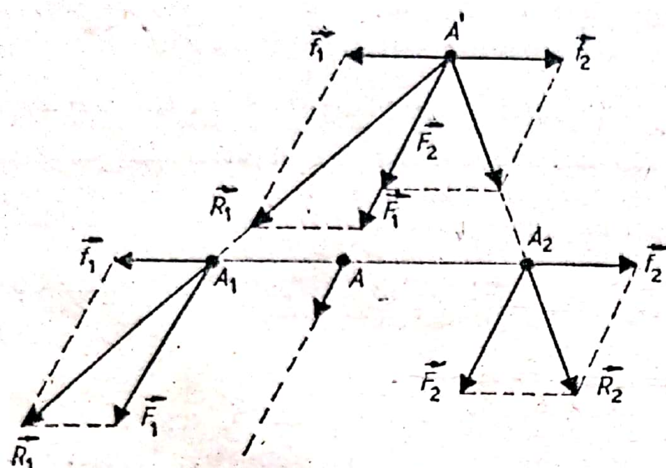


Fig. F.B.55

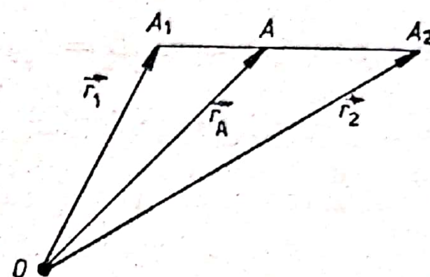


Fig. F.B.56

A_1, A_2 (fig. F.B.56), iar $\bar{1}_F$ — vectorul unitar (versorul) direcției comune a forțelor $\bar{F}_1$ și $\bar{F}_2$ (v. fig. F.B.55). Rezultanta momentelor celor două forțe este $\bar{M}=\bar{r}_1\times\bar{F}_1+\bar{r}_2\times\bar{F}_2=F_1\bar{r}_1\times\bar{1}_F+F_2\bar{r}_2\times\bar{1}_F=\frac{F_1\bar{r}_1+F_2\bar{r}_2}{F_1+F_2}\times(F_1+F_2)\bar{1}_F=\bar{r}_A\times\bar{R}$, unde $\bar{r}_A$ este raza vectoare a punctului A de aplicație al rezultantei R a forțelor, față de aceeași origine O, arbitrar aleasă. Atît din relația obținută, $\bar{r}_A=\frac{F_1\bar{r}_1+F_2\bar{r}_2}{F_1+F_2}$, cît și din particularizări ale acestei relații prin alegerea convenabilă a originii (spre exemplu, dacă luăm pentru origine poziția $O'\equiv A_1$, avem $\bar{r}'_1=\overline{A_1A_1}=0$, $\bar{r}'_2=\overline{A_1A_2}$ și $\bar{r}'_A=\overline{A_1A}=\frac{F_2}{F_1+F_2}\cdot\overline{A_1A_2}$, de unde $\overline{AA_2}=\overline{A_1A_2}-\bar{r}'_A=\frac{F_1}{F_1+F_2}\overline{A_1A_2}$ și $\frac{A_1A}{AA_2}=\frac{F_2}{F_1}$), reiese că punctul A împarte segmentul A_1A_2 în părți invers proporționale cu forțele paralele, de același sens, care se compun.

b) Pornind de la expresiile elongației și vitezei în mișcarea oscilatorie armonică, $y=A\sin(\omega t+\varphi_0)$, $v=\omega A\cos(\omega t+\varphi_0)$, precum și de la expresia pulsației oscilatorului elastic, $\omega=\sqrt{\frac{k}{m}}$ (v. eventual VIII. 3°. b), deducem pentru energia cinetică, respectiv pentru energia de poziție în cîmpul forțelor elastice, expresiile $E_c=\frac{mv^2}{2}=\frac{mA^2\omega^2}{2}\sin^2(\omega t+\varphi_0)=\frac{kA^2}{2}\sin^2(\omega t+\varphi_0)$, $E_p=\frac{ky^2}{2}=\frac{kA^2}{2}\cos^2(\omega t+\varphi_0)$. Reiese că energia totală a oscilatorului armonic (de tip elastic) este dată de expresiile echivalente

$$E_t=E_c+E_p=\frac{kA^2}{2}=\frac{mA^2\omega^2}{2}=2\pi^2mA^2\nu^2,\text{ unde }\nu=\frac{\omega}{2\pi}$$

este frecvența oscilației armonice. În condițiile în care, în descrierea mișcării oscilatorului armonic nu au fost luate în considerație procesele cu disipare de

energie sub formă de căldură (în particular, frecările) este normal ca energia mecanică totală a oscilatorului ideal (fără frecări) să rezulte constantă (invariantă în timp).

c) Descompunem viteza $\bar{v}$ a unui purtător de sarcină electrică la intrarea într-un cîmp magnetic uniform în componentele $\bar{v}_{\parallel}$ (paralelă cu direcția inducției $\bar{B}$ a cîmpului magnetic) și $\bar{v}_{\perp}$ (perpendiculară pe direcția inducției $\bar{B}$; v. și fig. F.B.57). Deoarece forța Lorentz care acționează asupra purtătorului de sarcină electrică, $\bar{f} = q\bar{v} \times \bar{B} = q\bar{v}_{\perp} \times \bar{B}$, este perpendiculară pe direcția inducției $\bar{B}$, reiese că asupra particulei nu va acționa nici o forță cu direcția inducției $\bar{B}$, deci componenta $\bar{v}_{\parallel}$ rămîne invariantă în timp. În schimb, forța Lorentz — acționînd ca forță centripetă — provoacă o curbare a traiectoriei particulei din planul perpendicular pe direcția $\bar{B}$. Din condiția de echilibru între forța Lorentz și forța centrifugă, $f = qv_{\perp}B = F_{cf} = \frac{mv_{\perp}^2}{r}$, reiese expresia razei r a traiectoriei particulei din planul perpendicular pe inducția $\bar{B}$, $r = \frac{mv_{\perp}}{qB}$, precum și expresiile vitezei unghiulare și frecvenței rotației, $2\pi\nu = \omega = \frac{v_{\perp}}{r} = \frac{qB}{m}$. Se constată că mișcarea unei particule încărcate într-un cîmp magnetic uniform are — în cazul în care viteza inițială (la intrarea în zona cîmpului magnetic) $\bar{v}$ este perpendiculară pe inducția $\bar{B}$ a cîmpului — caracterul unei mișcări circulare uniforme (avînd mărimile caracteristice date de expresiile deduse mai sus); în cazul general, în care viteza $\bar{v}$ a particulei încărcate la intrarea în zona cîmpului magnetic nu este perpendiculară pe inducția $\bar{B}$, particula prezintă o mișcare elicoidală, rezultată din compunerea precedentei mișcări circulare uniforme (cu viteza $\bar{v}_{\perp}$) din planul perpendicular pe direcția inducției $\bar{B}$ cu o mișcare uniform-rectilinie (cu viteza $\bar{v}_{\parallel}$) în lungul direcției inducției $\bar{B}$ (v. și fig. F.B.57). Faptul că, în cazul mișcărilor nerelativiste, frecvența rotației particulei încărcate în jurul direcției inducției $\bar{B}$ a cîmpului magnetic uniform nu depinde de viteza $v_{\perp}$ a mișcării particulei (rămînînd aceeași atunci cînd — în particular — viteza $v_{\perp}$ crește) stă la baza principiului de funcționare al ciclotronului (dispozitiv pentru accelerarea particulelor încărcate).

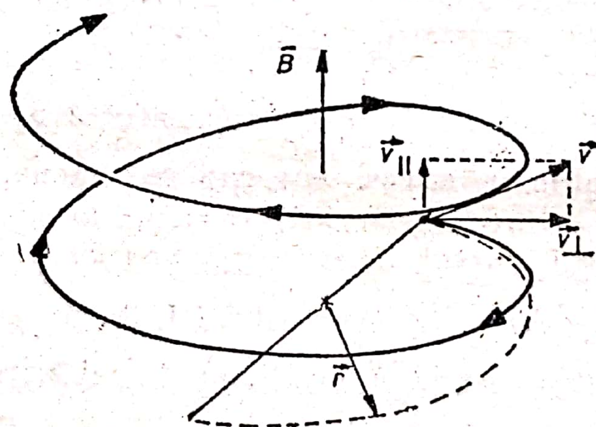


Fig. F.B.57

4°. a) $T_l = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}$, respectiv $T_g = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}$, unde T_l și T_g sînt perioada oscilatorului liniar armonic (elastic), respectiv perioada pendulului gravitațional, m este masa oscilatorului liniar, k este constanta elastică a resortului de care este legat corpul (oscilatorul) de masă m, l este lungimea pendulului gravitațional, iar g este accelerația gravitațională.

b) $\Phi = BS\cos\alpha$, unde Φ este fluxul magnetic într-un cîmp magnetic uniform de inducție $\bar{B}$, printr-o suprafață de arie S, a cărei normală $\bar{n}_S$ formează cu direcția inducției magnetice $\bar{B}$ unghiul α $(=\widehat{\bar{n}_S, \bar{B}})$.

c) $u - L\dfrac{\Delta i}{\Delta t} = \dfrac{q}{C} + Ri$ sau

$$U\sin\omega t = \omega L\,I\sin\left(\omega t - \varphi + \frac{\pi}{2}\right) - \frac{I}{\omega C}\sin\left(\omega t - \varphi + \frac{\pi}{2}\right) + RI\sin(\omega t - \varphi),$$

respectiv (în mărimi efective), $U = I\sqrt{R^2 + \left(L\omega - \dfrac{1}{C\omega}\right)^2} = IZ$, unde u, i și q sînt valorile instantanee (la momentul t) ale tensiunii la bornele circuitului RLC serie, intensității curentului electric în circuit, respectiv sarcinii electrice de pe armăturile condensatorului, L, C și R sînt inductanța bobinei, capacitatea condensatorului și, respectiv, rezistența rezistorului, U și I sînt tensiunea efectivă la bornele circuitului RLC serie, respectiv intensitatea efectivă a curentului prin acest circuit, ω este pulsația tensiunii alternative aplicate la bornele circuitului,

$\varphi = \operatorname{arctg}\dfrac{L\omega - \dfrac{1}{C\omega}}{R}$ este defazajul dintre tensiunea la bornele circuitului RLC serie și intensitatea curentului prin acest circuit, iar Z este impedanța circuitului RLC serie considerat.

XII. 1°. a) Fie M locul în care se întîlnesc cele două mașini. Deoarece $\dfrac{AM}{MB} = \dfrac{5}{8}$, reiese că $\dfrac{AM}{AM + MB} = \dfrac{5}{13}$, deci $AM = \dfrac{5}{13}\cdot d = 10$ km, iar $MB = d - AM = 16$ km. Valoarea în unități SI a vitezei v_0 este $v_0 = \dfrac{14{,}4\cdot 10^3}{3\,600} = 4\,\dfrac{\text{m}}{\text{s}}$. Notăm cu t_i durata mișcării mașinilor pînă la întîlnirea lor în punctul M. Conform enunțului, în momentul întîlnirii $v_1(t_i) = v_0 + at_i = v_2$. Deoarece mișcarea mașinii 1 este uniform-accelerată, viteza sa medie pe distanța AM este

$v_{m1} = \dfrac{v_0 + v_1(t_i)}{2} = v_0 + \dfrac{at_i}{2}$, deci $\dfrac{AM}{MB} = \dfrac{v_{m1}}{v_2} = \dfrac{v_0 + \dfrac{at}{2}}{v_0 + at} = \dfrac{5}{8}$. Rezultă că $3v_0 = at$, de unde $v_2 = v_0 + at = 4v_0 = 16\,\dfrac{\text{m}}{\text{s}}\left(= 57{,}6\,\dfrac{\text{km}}{\text{h}}\right)$. În final, obținem $t_i = \dfrac{BM}{v_2} = 10^3$ s și $a = \dfrac{3v_0}{t_i} = 1{,}2\cdot 10^{-2}\,\dfrac{\text{m}}{\text{s}^2}$.

b) Distanța d' dintre mașini după $t = 10$ s de la întîlnire se determină în baza relației $d' = v_1(t_i)t + \dfrac{at^2}{2} + v_2 t = 2\,v_2 t + \dfrac{at^2}{2} = 320{,}6$ m.

c) Deoarece mișcarea mașinii 2 decurge rectiliniu și uniform, asupra pendulului gravitațional aflat în această mașină acționează numai forța greutății sale, $\bar{F}_2 = \bar{G}_2 = m_2\bar{g}$, deci accelerația imprimată pendulului este g, iar perioada de oscilație a respectivului pendul este dată de expresia uzuală, $T_2 = 2\pi\sqrt{\dfrac{l}{g}}$, unde l este lungimea pendulului.

În cazul pendulului gravitațional 1, asupra acestuia acționează, pe lîngă forța corespunzătoare de greutate $\bar{G}_1 = m_1\bar{g}$ (avînd direcția verticalei), și forța de inerție $\bar{F}_{i1} = -m_1\bar{a}$, avînd direcția orizontală a accelerației $\bar{a}$, însă sensul opus (v. și

fig. F.B.58). Se constată că rezultanta forțelor care acționează asupra pendulului gravitațional aflat în mașina 1, $\bar{R}_1 = m_1\bar{g} - m_1\bar{a}$, are modulul $|\bar{R}_1| = m_1\sqrt{g^2 + a^2}$, cu alte cuvinte că lucrurile se petrec ca și cînd pendulul 1 s-ar găsi într-un cîmp gravitațional de accelerație (intensitate) efectivă $\bar{g}_1 = \bar{g} - \bar{a}$, avînd modulul $|\bar{g}_1| = \sqrt{g^2 + a^2}$. Rezultă că expresia perioadei de oscilație a pendulului gravitațional aflat în mașina 1 este $T_1 = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g_1}} = 2\pi\sqrt[4]{\frac{l^2}{g^2 + a^2}}$.

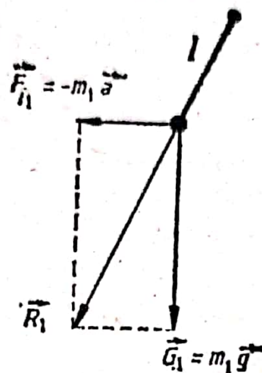


Fig. F.B.58

2°. a) Căderea de tensiune pe sursă $u = E - RI$ are valoarea $u = 24 - 4 \cdot 5 = 4$V.

b) Puterea dezvoltată de sursă este $P = EI = 120$ W, iar puterea disipată sub formă de căldură în rezistor este $P_d = RI^2 = 100$ W.

c) Inducția cîmpului magnetic produs de curentul electric de intensitate I care străbate un conductor practic infinit lung, la distanța r de conductor este

$$B = \mu \cdot \frac{I}{2\pi r} = 10^{-4} \text{ T}.$$

3°. a) Condiția necesară și suficientă ca un punct material supus la legături să fie în echilibru este ca rezultanta forțelor efectiv aplicate asupra punctului material și a forțelor de legătură să fie egale cu zero (prin forțe de legătură se înțeleg reacțiunile suprafețelor sau curbelor prin care se realizează legăturile).

b) Abaterea unei unde de la direcția inițială de propagare la trecerea pe lîngă obstacole și la traversarea fantelor se numește difracție. Suprapunerea (compunerea) neperturbată în același loc, dintr-un mediu, a două sau mai multe unde de aceeași lungime de undă (sau aceeași pulsație) se numește interferență.

c) Un amper este intensitatea unui curent electric constant, care fiind stabilit prin două conductoare rectilinii, paralele, foarte lungi, așezate în vid la distanța de 1 m unul de altul, determină exercitarea unei forțe de $2 \cdot 10^{-7}$ N pe fiecare metru de lungime.

4°. a) Fie h și $x(<h)$ înălțimile deasupra Pămîntului ale punctului A din care se lasă să cadă un corp de masă m, respectiv a punctului B prin care trece corpul considerat în căderea sa liberă. Deoarece energia cinetică a corpului în punctul A este nulă, $E_{cA} = 0$, energia totală a corpului în A este $E_{tA} = E_{cA} + E_{pA} = E_{pA} = mgh$. Deoarece distanța coborîtă de corp între punctele A și B este $AB = h - x$, viteza atinsă de corp în punctul B este $v_B = \sqrt{2gAB} = \sqrt{2g(h-x)}$, iar energia cinetică a corpului în B este $E_{cB} = \frac{m}{2}v_B^2 = mg(h - x)$; reiese că energia totală a corpului (sistemului fizic Pămînt-corp) în punctul B este $E_{tB} = E_{cB} + E_{pB} = mg(h - x) + mgx = mgh$. Întrucît poziția punctului B (în interiorul segmentului parcurs de corp în cursul căderii sale libere, pornind din A) este arbitrară (cu alte

cuvinte, x poate lua orice valoare între 0 și h), faptul că energia totală în punctul B (de „cotă" x) nu depinde de înălțimea x a acestui punct deasupra Pămîntului arată că energia mecanică (totală) a sistemului fizic Pămînt-corp (punct material) considerat se conservă în timpul căderii libere (fără frecare).

b) Pornind de la expresia $B=\mu\frac{NI}{l}$ a inducției magnetice în interiorul unei bobine cu N spire, avînd aria secțiunii egală cu S (l este lungimea înfășurării bobinei, iar μ este permeabilitatea miezului bobinei), se determină fluxul magnetic Φ_1 printr-o spiră a bobinei, $\Phi_1=BS$, respectiv fluxul magnetic total prin (toate) cele N spire, $\Phi=N\Phi_1=NBS=\mu\frac{N^2S}{l}I$. Deoarece inductanța unui circuit electric este definită prin relația $L=\frac{\Phi}{I}$, găsim că inductanța bobinei avînd mărimile caracteristice indicate mai sus este dată de expresia $L=\mu\frac{N^2S}{l}$.

c) Variația în durata Δt a fluxului magnetic printr-un circuit delimitat de un conductor rectiliniu, de lungime l, deplasat cu viteza constantă $\bar{v}$, perpendiculară pe liniile de cîmp magnetic este dată de expresia (v. și fig. F.B.59) $\Delta\Phi=B\Delta S=-Blv\Delta t$, unde B este inducția cîmpului magnetic uniform în care se produce deplasarea conductorului. Înlocuind expresia obținută a lui $\Delta\Phi$ în legea Faraday a inducției electromagnetice, $e=-\frac{\Delta\Phi}{\Delta t}$, găsim tensiunea electromotoare e indusă în conductorul mobil, $e=Blv$.

Sensul t.e.m. este dat de regula mîinii drepte (v. fig.F.B.59).

XIII. 1°. a) Componentele paralele cu planul înclinat („tangențiale") ale forței F, respectiv greutății G, sînt date de expresiile: $F_t=F\cos\alpha$, $G_t=G\sin\alpha=mg\sin\alpha$, iar componentele perpendiculare (normale) pe planul înclinat ale acelorași forțe sînt (v. fig. F.B.60): $F_n=F\sin\alpha$, $G_n=G\cos\alpha=mg\cos\alpha$.

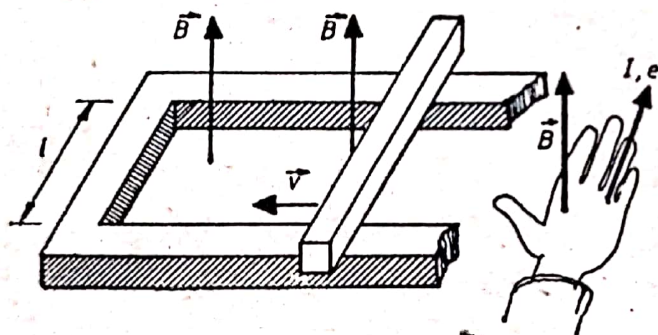


Fig. F.B.59

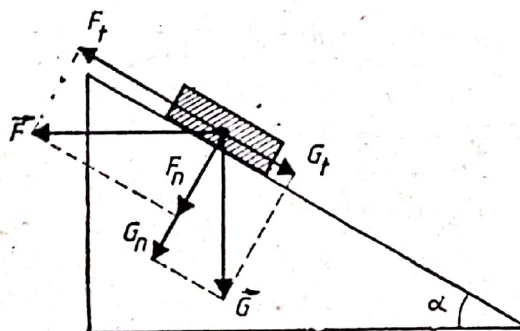


Fig. F.B.60

Pentru ca, în absența frecărilor, corpul să fie menținut în repaus pe planul înclinat, este necesar ca $F_t=G_t$, de unde rezultă că $F\cos\alpha=mg\sin\alpha$ și $m=\frac{F}{g}\cdot\operatorname{ctg}\alpha=\frac{10}{\sqrt{3}}\approx 5{,}77$ kg.

Reacțiunea N a planului înclinat este dată de expresia

$$N=F_n+G_n=F\sin\alpha+mg\cos\alpha=\frac{200}{\sqrt{3}}\approx 115{,}5\ \text{N}.$$

b) Forța de frecare a corpului cu planul orizontal este dată de expresia $F_{fr}=\mu F_n=\mu G=\mu mg$. Lucrul mecanic efectuat pînă la oprirea corpului, pentru învingerea forței de frecare, $L_{fr}=F_{fr}l=\mu mgl$, este egal cu variația energiei potențiale a corpului, luată cu semnul schimbat, $L=-\Delta E_p$, deci $\mu mgl=mgh$, de unde $\mu=\frac{h}{l}=0{,}5$.

c) Energia cinetică E_{c2} a corpului atunci cînd acesta a parcurs jumătate din distanța l, pe planul orizontal, se determină din legea conservării energiei,

$$E_{t1} = E_{p1} = mgh = E_{c2} + E_{p2} + L_{fr2} = E_{c2} + \mu mg \cdot \frac{l}{2},$$

de unde

$$E_{c2} = mg\left(h - \mu \cdot \frac{l}{2}\right) = \frac{1\,000}{\sqrt{3}} \approx 577{,}3 \text{ J}.$$

2°. a) În conformitate cu prima lege a lui Kirchhoff, scrisă pentru circuitul serie considerat, $E_1 + E_2 = (r_1 + r_2 + R_1)I$, de unde $I = \dfrac{E_1 + E_2}{r_1 + r_2 + R_1} = 0{,}6$ A. Căderea de tensiune în circuitul exterior este $U = R_1 I = 6$ V, iar tensiunile la bornele celor două generatoare sînt $U_{b1} = E_1 - r_1 I = 3{,}7$ V, respectiv $U_{b2} = E_2 - r_2 I = 2{,}3$ V.

b) Numărul de electroni care trec printr-o secțiune a circuitului în durata $t = 10$ s este $N = \dfrac{Q}{e} = \dfrac{It}{e} = 3{,}75 \cdot 10^{19}$ electroni.

c) Rezistența echivalentă grupării derivație formată din rezistorii cu rezistențele electrice R_1 și R_2 este $R_p = \dfrac{R_1 R_2}{R_1 + R_2} = \dfrac{10}{3}\ \Omega$. Intensitatea I' a curentului electric care străbate generatoarele în cazul în care în paralel cu rezistorul A (de rezistență R_1) se leagă rezistorul B (de rezistență R_2) este $I' = \dfrac{E_1 + E_2}{r_1 + r_2 + R_p} = 1{,}35$ A. Ținînd seamă că tensiunea la bornele grupării derivație formate din cei 2 rezistori va fi $U_p' = R_p I'$, intensitățile I_1', I_2' ale curenților electrici care vor străbate rezistorul A, respectiv rezistorul B, vor fi $I_1' = \dfrac{U_p'}{R_1} = \dfrac{R_p}{R_1} \cdot I' = \dfrac{R_2}{R_1 + R_2} \cdot I' = 0{,}45$ A, $I_2' = \dfrac{U_p'}{R_2} = \dfrac{R_p}{R_2} \cdot I' = \dfrac{R_1}{R_1 + R_2} \cdot I' = 0{,}9$ A.

3°. a) Variația energiei cinetice a unui punct material, care se deplasează în raport cu un sistem de referință inerțial, este egală cu lucrul mecanic efectuat de forța rezultantă care acționează asupra punctului material în timpul acestei variații,

$$\Delta E_c = E_{c2} - E_{c1} = L,$$

unde ΔE_c este variația energiei cinetice a punctului material, E_{c2} și E_{c1} sînt energia cinetică în starea finală, respectiv energia cinetică în starea inițială de mișcare, iar L este lucrul mecanic al forței rezultante.

b) Un corp cufundat într-un fluid în repaus este împins cu o forță verticală de jos în sus, egală cu greutatea volumului de fluid dezlocuit de corp, $F_A = G_f\ (= \rho h S g)$, unde F_A este forța arhimedică, G_f este greutatea fluidului dezlocuit de corp, ρ este densitatea fluidului, h și S sînt înălțimea, respectiv aria secțiunii corpului de formă cilindrică, g este accelerația gravitațională (expresia din paranteză dă greutatea fluidului dezlocuit numai în cazul corpurilor de formă cilindrică).

c) Inducția unui cîmp magnetic uniform este o mărime fizică vectorială, al cărei modul este egal cu raportul dintre forța cu care acel cîmp magnetic acționează asupra unui conductor rectiliniu, perpendicular pe liniile cîmpului magnetic, și produsul dintre intensitatea curentului din conductor și lungimea conductorului aflat în cîmp magnetic, $B = \dfrac{F}{Il}$. O definiție mai generală (incluzînd direcția și sensul inducției magnetice, valabilă și pentru cîmpuri magnetice neuniforme) a

inducției magnetice poate fi dată în baza expresiei contribuției $d\vec{F}$ a unui element foarte scurt (diferențial) de conductor, de lungime dl, străbătut de un curent electric de intensitate I, la forța cu care cîmpul magnetic studiat acționează asupra conductorului, $d\vec{F} = I\, d\vec{l} \times \vec{B}$ (v. și fig. F.B.61).

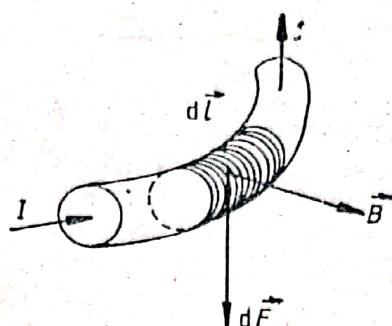


Fig. F.B.61

4°. a) Acest subiect a fost tratat la II.4°.a.

b) Fie O punctul în care se găsește sarcina punctiformă Q al cărei potențial electric în punctul M din spațiu urmează să-l determinăm, iar N un punct pe semidreapta OM, îndeplinind condiția $r_N = ON > OM = r_M$. Vom împărți segmentul MN în n părți de aceeași lungime, prin punctele (situate pe MN) $P_1, P_2, \ldots, P_{n-1}$: $MP_1 = P_1P_2 = \ldots = P_{n-1}N = \Delta r = \frac{MN}{n} = \frac{r_N - r_M}{n}$, unde n este un întreg mult mai mare decît raportul $\frac{r_N - r_M}{r_M}$, $n \gg \frac{r_N - r_M}{r_M}$, deci $\Delta r = \frac{r_N - r_M}{n} \ll r_M$. Fie k un întreg cuprins între O și $n-1$. În condițiile în care $P_0 = M$, iar $P_n = N$, avem $r_k = OP_k = OM + MP_k = r_M + k\Delta r$, respectiv $r_{k+1} = r_M + (k+1)\Delta r$. Deoarece $r_{k+1} - r_k = \Delta r \ll r_k, r_{k+1}$, distanțele r_k și r_{k+1} sînt aproximativ egale; se știe că in aceste condiții ($r_k \approx r_{k+1}$) diferitele tipuri de medii (aritmetică, geometrică, armonică etc.) ale r_k și r_{k+1} sînt practic egale, ceea ce permite evaluarea forței medii cu care sarcina Q acționează asupra unei sarcini punctiforme q, aflată în interiorul segmentului P_kP_{k+1} prin expresia $F_{\text{mediu},\, P_kP_{k+1}} = \sqrt{F_{P_k} \cdot F_{P_{k+1}}} = \frac{Qq}{4\pi\varepsilon r_k r_{k+1}}$. Lucrul mecanic efectuat asupra sarcinii q, în cursul deplasării acestei sarcini din P_k în P_{k+1} este $L_{P_kP_{k+1}} = F_{\text{mediu},\, P_kP_{k+1}}(r_{k+1} - r_k) = \frac{Qq}{4\pi\varepsilon}\left(\frac{1}{r_k} - \frac{1}{r_{k+1}}\right)$. Rezultă că lucrul mecanic efectuat pentru deplasarea sarcinii q între punctele M și N este

$$L_{MN} = \sum_{k=0}^{n-1} L_{P_kP_{k+1}} = \frac{Qq}{4\pi\varepsilon}\left(\frac{1}{r_0} - \frac{1}{r_n}\right) = \frac{Qq}{4\pi\varepsilon}\left(\frac{1}{OP_0} - \frac{1}{OP_n}\right) = \frac{Qq}{4\pi\varepsilon}\left(\frac{1}{r_M} - \frac{1}{r_N}\right).$$

Pornind de la definiția potențialului electric într-un punct ca mărimea fizică egală cu raportul dintre lucrul mecanic efectuat de cîmpul electric la deplasarea unui corp de probă încărcat, din acel punct M în punctul de referință N arbitrar ales, și sarcina acelui corp $V_M = \frac{L_{MN}}{q}$ și, alegînd punctul N de referință la infinit $r_N \to \infty$, obținem pentru potențialul electric creat de o sarcină punctiformă Q expresia

$$V_M = \frac{L_{q,\, M\to\infty}}{q} = \frac{Q}{4\pi\varepsilon r_M}.$$

c) Din condiția de egalitate a forței Lorentz $f = qvB$, care acționează asupra unei particule încărcate electric într-un cîmp magnetic uniform, îndeplinind rolul

de forță centripetă, cu forța centrifugă, $F_{cf} = \frac{mv^2}{r}$, obținem: $qvB = \frac{mv^2}{r}$, de unde reiese că expresia vitezei unghiulare a mișcării circulare uniforme, efectuată (pe circumferința de rază r) de particula încărcată, în condițiile indicate, este

$$\omega = \frac{v}{r} = \frac{qB}{m}.$$

XIV. 1°. a) Pornind de la expresia forței de frecare dintre un corp și o suprafață orizontală, $F_{fr} = \mu G = \mu mg$, se determină forțele de frecare între planul orizontal și corpul 1, $F_{f1} = \mu m_1 g = 20$ N, respectiv corpul 2, $F_{f2} = \mu m_2 g = 5$ N. Rezultanta forțelor care acționează asupra sistemului format de cele două corpuri este $R = F - F_{f1} - F_{f2} = 75$ N, iar accelerația imprimată sistemului este $a = \frac{R}{m_1 + m_2} = 3\ \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$.

Asupra corpului A (de masă m_1) acționează forța „activă“ F, iar în sensul opus forței F, forța de frecare F_{f1}, forța de frecare F_{f2} (deoarece corpul A trebuie să „împingă“ corpul B) și forța de inerție $F_{i2} = m_2 a = 15$ N, datorată mișcării accelerate a corpului B. Reiese că rezultanta R_1 a forțelor care acționează asupra corpului A este $R_1 = F - F_{f1} - F_{f2} - F_{i2} = 60$ N, ceea ce corespunde și valorii obținute pentru accelerația sistemului (deci și a corpului A), $R_1 = m_1 a$.

Forța „activă“ F_2 care acționează — prin corpul A — asupra corpului B este egală cu diferența dintre forța F și forțele de frecare F_{f1}, respectiv de inerție $F_{i1} = m_1 a = 60$ N, care acționează asupra corpului A, $F_2 = F - F_{f1} - F_{i1} = 20$ N. Asupra corpului B acționează deci forța „activă“ F_2 și — în sensul opus — forța de frecare F_{f2}. Rezultanta R_2 a forțelor care acționează asupra corpului B este $R = F_2 - F_{f2} = 15$ N, ceea ce corespunde și valorii obținute pentru accelerația sistemului (deci și a corpului B), $R_2 = m_2 a$.

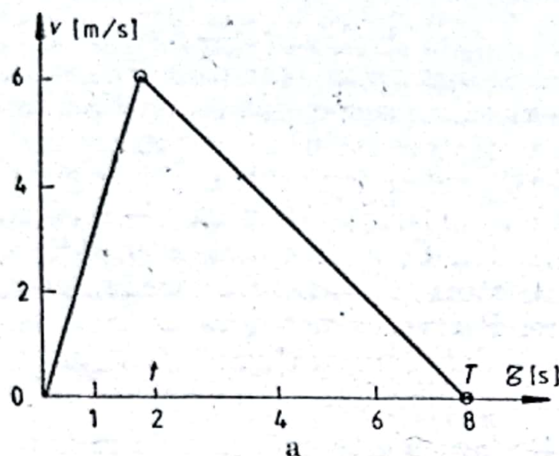
b) Viteza maximă v_{max} este atinsă de sistem în momentul t al încetării acțiunii forței „active“, $v_{max} = at = 6\ \frac{\text{m}}{\text{s}}$. După încetarea acțiunii forței „active“ F, asupra sistemului mai acționează numai forțele de frecare F_{f1} și F_{f2}, deci corpurile vor avea o mișcare uniform-încetinită, cu accelerația $a' = -\frac{F_{f1} + F_{f2}}{m_1 + m_2} = -\mu g = -1\ \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$.

Spațiul s_F parcurs în durata t a acțiunii forței F este $s_F = \frac{a}{2} t^2 = 6$ m. Transcriind formula lui Galilei, $v^2 - v_0^2 = 2a(x - x_0)$ pentru mișcarea sistemului format de cele două corpuri de la încetarea acțiunii forței F și pînă la oprire, găsim că $-v_{max}^2 = 2a's'$, unde s' este spațiul parcurs în acest timp. Rezultă că $s' = -\frac{v_{max}^2}{2a'} = 18$ m, deci spațiul total parcurs de corpuri pînă la oprire este $s = s_F + s' = 24$ m.

c) Durata t' a mișcării uniform-încetinite (sub acțiunea exclusivă a forțelor de frecare) a sistemului este $t' = -\frac{v_{max}}{a'} = 6$ s, deci durata totală a mișcării sistemului este $T = t + t' = 8$ s. Rezultă că dependența $v(\tau)$ a vitezei sistemului de durata τ de la aplicarea forței F este $v(\tau) = a\tau$, pentru $\tau \in [0, t]$, $v(\tau) = v_{max} + a'(\tau - t)$, pentru $\tau \in [t, T]$, iar dependența $x(\tau)$ a spațiului parcurs pentru aceeași durată (moment) τ este $x(\tau) = \frac{a\tau^2}{2}$, pentru $\tau \in [0, t]$, respectiv

$x(\tau) = s_F + v_{\max}(\tau - t) + \frac{a'}{2}\tau^2$, pentru $\tau \in [t,\ T]$. Reprezentările grafice solicitate ale dependenţelor $v(\tau)$, $x(\tau)$ sînt date în figurile F.B.62, a şi b.

2°. a) Pe baza formulei lui Thomson, obţinem $\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}} = 10^4\ \frac{\text{rad}}{\text{s}}$.



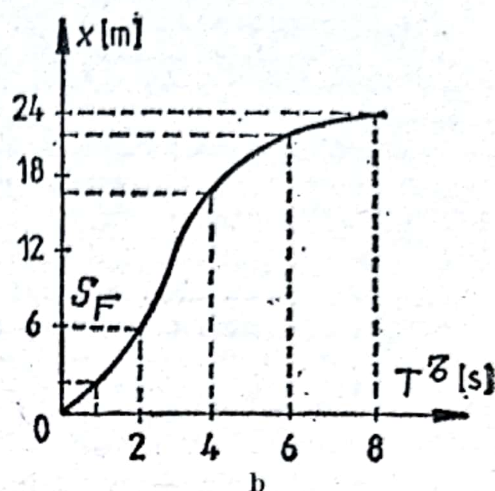


Fig. F.B.62

b) Pulsaţia curentului alternativ este $\omega = 2\pi\nu = 2 \cdot 10^3\ \frac{\text{rad}}{\text{s}}$. Reactanţele inductivă, respectiv capacitivă, sînt $X_L = L\omega = 20\ \Omega$, $X_C = \frac{1}{C\omega} = 500\ \Omega$, iar impedanţa circuitului este

$$Z = \sqrt{R^2 + (X_L - X_C)^2} \approx 503\ \Omega.$$

c) Pornind de la expresia $\operatorname{tg} \varphi_{U/I} = \frac{L\omega - \frac{1}{C\omega}}{R}$, unde $\varphi_{U/I}$ este defazajul între tensiunea la bornele circuitului RLC serie şi intensitatea curentului care îl străbate, reiese că pentru defazajul φ dintre curent şi tensiunea la bornele circuitului (invers) avem

$$\frac{\frac{1}{C\omega} - L\omega}{R} = \operatorname{tg}\varphi = 1 \ \left(\text{pentru } \varphi = \frac{\pi}{4}\right),$$

deci pulsaţia ω a curentului alternativ pentru care $\varphi = \frac{\pi}{4}$ îndeplineşte condiţia $LC\omega^2 + RC\omega - 1 = 0$. Singura soluţie pozitivă a ecuaţiei de mai sus este $\omega = \frac{\sqrt{R^2C^2 + 4LC} - RC}{2LC} = 5 \cdot 10^3 \frac{\text{rad}}{\text{s}}$. Rezultă că frecvenţa curentului pentru care defazajul dintre curent şi tensiunea la bornele circuitului este $\varphi = \frac{\pi}{4}$, este

$$\nu = \frac{\omega}{2\pi} = \frac{\sqrt{R^2C^2 + 4LC} - RC}{4\pi LC} \approx 795\ \text{Hz}.$$

3°. a) Solidul rigid liber (care nu este supus la legături: nu este suspendat, nu are o bază de sprijin ş.a.m.d.) este în echilibru de translaţie, cînd rezultanta sistemului de forţe care acţionează asupra lui este zero, $\bar{R} = \bar{F}_1 + \bar{F}_2 + \dots + \bar{F}_n = 0$.

Solidul rigid liber este în echilibru de rotaţie cînd se află în repaus sau cînd se roteşte uniform în jurul unei axe. Pentru a fi îndeplinite aceste condiţii este necesar şi suficient ca momentul rezultant al forţelor aplicate solidului să fie nul, $\bar{M} = \bar{M}_1 + \bar{M}_2 + \dots + \bar{M}_n = 0$.

b) Presiunea exercitată pe o suprafață oarecare a unui lichid aflat în repaus se transmite în toate direcțiile și cu aceeași intensitate în tot lichidul, cît și la pereții vasului care îl conține.

c) Potențialul electric într-un punct M este o mărime fizică egală cu raportul dintre lucrul mecanic efectuat de cîmp la deplasarea unui corp de probă încărcat, din acel punct în punctul de referință arbitrar ales, și sarcina acelui corp, $V_M = \frac{L}{q}$. De regulă, punctul de referință — pînă la care se face deplasarea — este ales la distanță infinită de zona spațială pentru care se definește potențialul electric.

4°. a) Mișcarea oscilatorie a unui corp de masă m, suspendat de un fir inextensibil de lungime l (pendul gravitațional) poate fi descrisă prin lungimea orientată ($x > 0$ pentru deplasări la dreapta, iar $x < 0$ pentru deplasări la stînga poziției O, de echilibru) x a deplasării — în lungul circumferinței de rază l — față de poziția O de echilibru a pendulului (v. fig. F.B.63). Componenta tangențială la circumferința descrisă de corp a greutății G a acestuia $G_t = G \sin\theta$ joacă rolul de forță în lungul direcției (curbilinii) x de mișcare. Pentru ca noțiunea de perioadă proprie de oscilație să-și aibă sens (oscilațiile pendulului gravitațional să fie armonice) este necesar ca forța $F_x = -G \sin\theta$ să fie proporțională cu deplasarea x, ceea ce se întîmplă — avînd în vedere că $\theta = \frac{x}{l}$ (dacă θ este măsurat în radiani) — doar dacă $\sin\theta \approx \theta\left(= \frac{x}{l}\right)$, aproximație valabilă pentru $\theta \ll 1$ radian, deci în cazul micilor oscilații. Constatăm că, în cazul micilor oscilații ale pendulului gravitațional, forța care acționează în lungul direcției x a circumferinței de rază l,

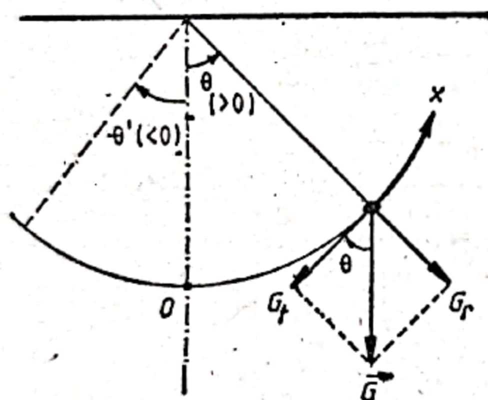


Fig. F.B.63

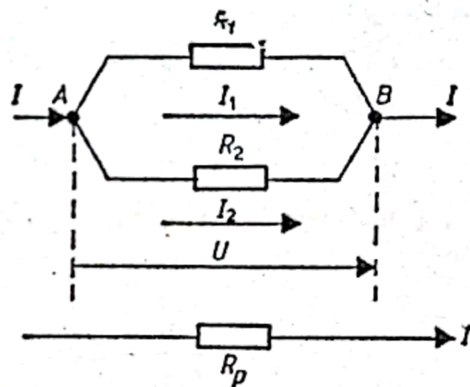


Fig. F.B.64

$F_x = -G \sin\theta \approx -\frac{mg}{l}x$ este echivalentă cu cea exercitată de un resort de constantă elastică $k = \frac{mg}{l}$. Rezultă că perioada proprie a micilor oscilații ale pendulului gravitațional poate fi dedusă din expresia perioadei proprii a oscilatorului armonic elastic $T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}$, dacă pentru constanta k se ia $k = \frac{mg}{l}$; se obține astfel

$$T_{\text{mici osc. pendul gravitațional}} = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}.$$

b) Intensitățile I_1, I_2 ale curenților electrici prin fiecare dintre rezistorii de rezistențe R_1, respectiv R_2, legați în paralel (v. fig. F.B.64), se exprimă în funcție de tensiunea U la bornele grupării, pe baza legii lui Ohm, $I_1 = \frac{U}{R_1}$, $I_2 = \frac{U}{R_2}$. Conform primei legi a lui Kirchhoff, între intensitățile I_1, I_2 și intensitatea I a curen-

tului în circuit, există relaţia $I = I_1 + I_2$, deci rezistenţa R_p a rezistorului care — înlocuind gruparea derivaţie a celor doi rezistori consideraţi — ar determina aceleaşi valori ale intensităţii I a curentului în circuit şi tensiunii U la bornele sale satisface relaţia

$$I = \frac{U}{R_p} = I_1 + I_2 = \frac{U}{R_1} + \frac{U}{R_2}, \quad \text{de unde} \; \frac{1}{R_p} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}.$$

Rezultă că rezistenţa echivalentă a doi rezistori legaţi în paralel este dată de expresia $R_p = \dfrac{R_1 R_2}{R_1 + R_2}$.

c) Alegem axa Ox după direcţia şi în sensul vitezei iniţiale $\bar{v}_0$ a electronului iar axa Oy — în planul care delimitează zona (acţiunii) cîmpului electric uniform (presupunem această zonă cuprinsă între valorile O şi X ale coordonatei x) — după direcţia, dar în sens opus celui al intensităţii cîmpului electric uniform (v. fig F.B.65). Deoarece sarcina electrică a electronului este negativă $(-e)$, forţa care acţionează asupra lui în cîmpul electric considerat are direcţia şi sensul axei Oy,

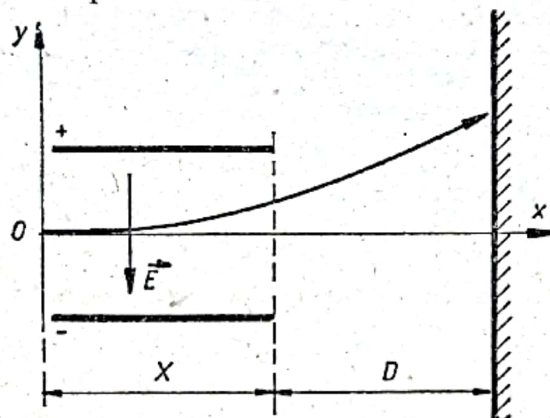


Fig. F.B.65

şi valoarea $F = eE$, unde e este sarcina electrică elementară. Rezultă că, în zona cîmpului electric uniform, electronului îi va fi imprimată o acceleraţie avînd direcţia şi sensul axei Oy şi valoarea $a_y = \dfrac{eE}{m}$, unde m este masa electronului. Întrucît pe direcţia Ox asupra electronului nu acţionează nici o forţă, componenta x a vitezei sale rămîne constantă şi egală cu viteza iniţială, $v_x = v_0$; în consecinţă, durata în care electronul traversează zona cîmpului electric uniform este $t = \dfrac{X}{v_0}$, iar deviaţia transversală (pe direcţia Oy) a electronului în zona cîmpului electric uniform este $y_E = a_y \cdot \dfrac{t^2}{2} = \dfrac{eE}{2m} \cdot \dfrac{X^2}{v_0^2}$. În cazul în care electronul îşi continuă mişcarea, ieşind din zona cîmpului electric, pe distanţa D pînă la un ecran (v. fig. F.B.65), ţinînd seamă că la ieşirea din zona cîmpului uniform componenta y a vitezei electronului este $v_{yE} = a_y t = \dfrac{qE}{m} \cdot \dfrac{X}{v_0}$, iar timpul în care electronul străbate distanţa D este $t_D = \dfrac{D}{v_0}$, deviaţiei y_E i se adaugă deviaţia suplimentară $v_{yE} t_D = \dfrac{qE}{mv_0^2} \cdot XD$, deci deviaţia transversală totală constatată pe ecranul de observaţie va fi

$$y_{\text{ecran}} = y_E + v_{yE} t_D = \frac{qE}{2mv_0^2} X(X + 2D).$$

În fine, dacă pentru obţinerea cîmpului electric uniform se utilizează un condensator plan, între armăturile căruia — aflate la distanţa d — se aplică tensiunea

U, atunci expresia deviației (transversale față de direcția vitezei inițiale $\bar{v}_0$) electronului capătă forma:

$$y = \frac{qU}{2mv_0^2 d} X(X + 2D).$$

XV. 1°. a) Pornind de la expresiile căldurii primite de calorimetru și apa din vas în cursul încălzirii de la temperatura t_a la temperatura finală θ, $Q_p = (C + m_a c_a)(\theta - t_a)$, respectiv căldurii cedate de bila de fier în cursul răcirii de la temperatura sa inițială t_1 la cea finală θ, $Q_{ced} = m_1 c_{Fe}(t_1 - \theta)$, obținem ecuația calorimetrică a sistemului în forma

$$(C + m_a c_a)(\theta - t_a) = m_1 c_{Fe}(t_1 - \theta).$$

Rezultă că temperatura finală a ansamblului este

$$\theta = \frac{m_1 c_{Fe} t_1 + (C + m_a c_a) t_a}{m_1 c_{Fe} + C + m_a c_a} \approx 12{,}02°C.$$

b) Între temperatura inițială t_1 și cea finală θ, volumul bilei de fier se modifică (scade) cu $\Delta V = V_0(1 + \gamma\theta) - V_0(1 + \gamma t_1) = V_0\gamma(\theta - t_1) \approx 317{,}95 \cdot 10^{-9}$ m^3 ($\approx 0{,}318$ cm^3).

c) În conformitate cu legea lui Jurin, denivelarea care apare în tubul capilar care are raza $r = \frac{d}{2} = 0{,}4$ mm este

$$h = \frac{2\sigma}{\rho g r} = 0{,}0365 \text{ m } (=3{,}65 \text{ cm}).$$

2°. a) Deoarece imaginea este reală, avem $x_2 > 0$. Întrucît în enunț nu se precizează natura obiectului, se subînțelege că și acesta este real, $x_1 < 0$, deci mărirea liniară $\beta = \frac{x_2}{x_1} < 0$. Cum în enunț se arată că $|y_2| = 3|y_1|$, rezultă că $\beta = \frac{y_2}{y_1} = \frac{x_2}{x_1} = -3$. Conform enunțului, distanța dintre obiect și imagine este $d = x_2 - x_1 = 0{,}8$ m. Rezolvînd sistemul format de cele două ecuații de mai sus în x_1 și x_2, se obțin pozițiile obiectului, $x_1 = -0{,}2$ m, respectiv imaginii, $x_2 = 0{,}6$ m, față de lentilă.

b) Din formula fundamentală a lentilelor ~~subțiri~~ și definiția convergenței, găsim că $C = \frac{1}{x_2} - \frac{1}{x_1} = \frac{20}{3}$ dioptrii, iar distanța focală f este $f = \frac{1}{C} = 0{,}15$ m.

c) Din expresia convergenței în funcție de mărimile fizice caracteristice unei lentile subțiri, $C = (n - 1)\left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}\right)$, găsim indicele de refracție al lentilei,

$$n = 1 + \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2} C = \frac{5}{3} \quad (\approx 1{,}667).$$

3°. a) $n = \dfrac{\sin\dfrac{A + \delta_{min}}{2}}{\sin\dfrac{A}{2}}$, unde n este indicele de refracție (relativ) al prismei, A este unghiul (refringent al) prismei, iar δ_{min} este unghiul de deviație minimă a unei raze de lumină monocromatică care traversează prisma.

b) Ecuația (lui Poisson a) transformării adiabatice este dată de una dintre expresiile echivalente, $pV^\gamma = \text{const}$, $TV^{\gamma-1} = \text{const}$, unde p, V și T sînt respectiv presiunea, volumul și temperatura absolută (termodinamică) a gazului perfect, iar $\gamma = \frac{C_p}{C_V}$ este exponentul adiabatic al gazului (C_p și C_V sînt căldurile molare la presiune, respectiv volum constant, ale gazului).

c) $i > l = \arcsin \frac{n_2}{n_1}$, unde i este unghiul de incidență, l este unghiul limită $\left(\text{pentru care unghiul de refracție } r = \frac{\pi}{2}\right)$, n_2 este indicele de refracție al mediului pe suprafața căruia se produce reflexia totală, iar n_1 este indicele de refracție al mediului de incidență (în interiorul căruia are loc reflexia totală). Pentru a se putea produce reflexia totală este necesar ca $n_1 > n_2$.

4°. a) Condiția necesară și suficientă pentru ca două unde electromagnetice (în particular, luminoase) să interfere este ca media în timp a produsului scalar al intensităților cîmpurilor electrice ale celor două unde să fie diferită de zero (nenulă), $<\bar{E}_1\bar{E}_2> \neq 0$.

b) Numărul de molecule dintr-un mol de substanță se numește numărul lui Avogadro. Deoarece molul este cantitatea de substanță a cărei masă, exprimată în grame (aceasta nu este unitate SI), este numeric egală cu masa moleculară relativă a substanței, în SI numărul lui Avogadro se dă pentru un kilomol, $N_A \approx 6{,}023 \cdot 10^{26} \frac{\text{molecule}}{\text{kmol}}$.

c) Ecuația termică de stare a unui gaz perfect este dată de formula fundamentală a teoriei cinetico-moleculare a gazelor (dedusă exclusiv teoretic, pornind de la ipotezele de bază ale teoriei cinetico-moleculare), $p = \frac{2}{3} n \cdot \frac{m\overline{v^2}}{2}$, precum și de ecuația Clapeyron-Mendeleev (obținută pornind de la rezultatele experimentale), $p = \frac{\nu RT}{V}$.

Pentru ca rezultatul obținut în baza teoriei cinetico-moleculare să fie compatibil cu cel experimental, este necesar ca $\frac{2}{3} n \cdot \frac{m\overline{v^2}}{2} = \frac{\nu RT}{V}$, adică energia cinetică medie de translație a unei molecule să fie dată de expresia $\frac{m\overline{v^2}}{2} = \frac{3}{2} \cdot \frac{\nu RT}{nV}$. Întrucît produsul concentrației n a numărului de molecule în unitatea de volum cu volumul V al gazului ne dă numărul total N al moleculelor de gaz, $N = nV$, iar raportul dintre acesta și numărul ν de (kilo)moli ne dă numărul lui Avogadro, $\frac{nV}{\nu} = \frac{N}{\nu} = N_A$, expresia energiei cinetice medii de translație a unei molecule capătă forma $\frac{m\overline{v^2}}{2} = \frac{3}{2} \frac{RT}{N_A} = \frac{3}{2} kT$, unde $k = \frac{R}{N_A}$ este constanta lui Boltzmann.

Prin definiție, viteza termică a unei molecule de gaz coincide cu viteza medie pătratică a moleculelor, $v_T = \sqrt{\overline{v^2}}$. Din expresia dedusă mai sus a energiei cinetice medii de translație a unei molecule, reiese că

$$v_T = \sqrt{\overline{v^2}} = \sqrt{\frac{3RT}{\mu}} = \sqrt{\frac{3kT}{m}},$$

în care m este masa unei molecule a gazului, iar $\mu = mN_A$ este masa molară a gazului.

XVI. 1°. a) Alunecarea laterală a automobilului se va produce dacă forța centrifugă depășește forța de frecare la alunecare dintre roți și drum, $F_{cf} = \frac{mv^2}{R} \geqslant F_{fr} = \mu F_n = \mu G = \mu mg$. Reiese că viteza minimă a automobilului pe drumul circular de rază R la care se produce alunecarea laterală a automobilului este

$$v_{min} = \sqrt{\mu Rg} = 20 \frac{\text{m}}{\text{s}}.$$

b) Unghiul θ format de verticală cu raza vectoare (față de centrul C de greutate al automobilului) a punctului în care o roată atinge solul este dat de relația (v. și fig. F.B.66): $\operatorname{tg}\theta = \frac{d/2}{h} = 2$. Răsturnarea automobilului se produce dacă rezultanta $\bar{R} = \bar{F}_c + \bar{G}$ a forței centrifuge cu greutatea automobilului iese din baza de sprijin (spațiul dintre roți) a acestuia, ceea ce se întîmplă dacă $\frac{F_c}{G} = \frac{mv^2}{R} \cdot \frac{1}{mg} = \frac{v^2}{Rg} \geqslant \operatorname{tg}\theta = \frac{d}{2h}$. Rezultă că viteza minimă v'_{min} a automobilului pe drumul circular de rază R la care se poate produce răsturnarea vehiculului este

$$v'_{min} = \sqrt{\frac{d}{2h} \cdot Rg} \approx 44{,}7\ \frac{\text{m}}{\text{s}}.$$

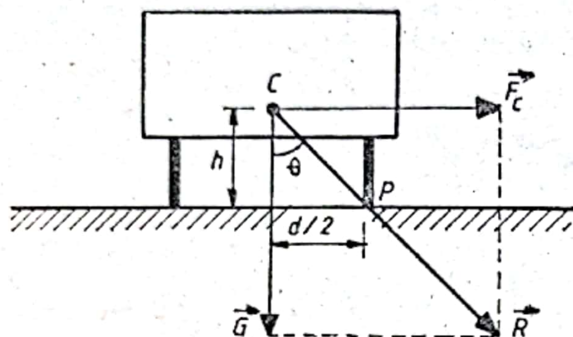


Fig. F.B.66

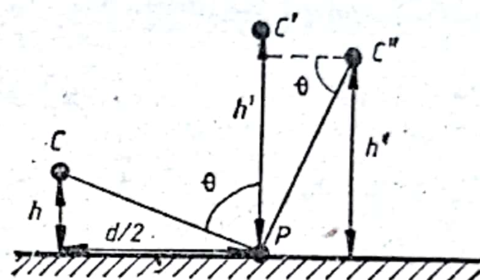


Fig. F.B.67

c) Notăm cu P punctul de contact cu drumul al roții în jurul căreia se produce răsturnarea automobilului, iar cu C' și cu C'' — cea mai înaltă poziție atinsă de centrul de greutate C al automobilului în cursul răsturnării acestuia, respectiv poziția corespunzătoare răsturnării cu un unghi de 90° (v. și fig. F.B. 67), iar h' și h'' — înălțimile punctelor C' și C'' deasupra drumului. Din geometria problemei (v. fig. F.B.67), reiese că $h' = C'P = C''P = CP = \sqrt{h^2 + d^2/4} \approx 0{,}8944$ m, iar $h'' = C''P \cdot \sin\theta = CP \cdot \sin\theta = \frac{d}{2} = 0{,}8$ m.

Rezultă că lucrul mecanic (maxim) consumat de automobil pentru a se răsturna este $L = mg(h' - h) \approx 10^3 \cdot 10 \cdot 0{,}4944 = 4\,944$ J, iar lucrul mecanic consumat pentru a se răsturna cu 90° este de numai (datorită reprimirii unei părți din energia consumată, în timpul coborîrii centrului de greutate din C' în C''): $L'' = mg(h'' - h) = 4\,000$ J.

d) Deoarece alunecarea pornește din repaus față de direcția radială (oricum, viteza de alunecare are direcția razei vectoare față de centrul drumului circular deci contribuția impulsului de alunecare la momentul cinetic față de centrul cercului, $\bar{R} \times m\bar{v}_{alun}$ este nulă), momentul cinetic al automobilului față de centrul cercului, în momentul alunecării, este $\bar{L} = \bar{R} \times m\bar{v}_{min}$. Deoarece viteza $\bar{v}_{min}$ a automobilului în momentul alunecării este perpendiculară pe raza vectoare $\bar{R}$, momentul cinetic în momentul alunecării are direcția verticalei, sensul dat de regula burghiului drept (v. și fig. F.B.68) și modulul egal cu $|\bar{L}| = Rmv_{min} = 2 \cdot 10^6$ J.s. În mod asemănător, momentul cinetic $\bar{L}'$ al automobilului, considerat punct material, față de centrul O al drumului circular, în momentul răsturnării automobilului, are aceeași direcție și sens ca și momentul cinetic $\bar{L}$ din momentul alunecării, avînd însă valoarea: $|\bar{L}'| = Rmv'_{min} \approx 4{,}47 \cdot 10^6$ J.s.

2°. Fie $H = l(1 - \cos\alpha)$ și $h = l(1 - \cos\theta)$ înălțimea sferei, deasupra poziției de echilibru, la momentul inițial, respectiv înălțimea maximă atinsă după ciocnirea

plastică (v. și fig. F.B.69). Viteza v_0 atinsă de sferă (imediat) înaintea ciocnirii plastice poate fi determinată pornind de la legea conservării energiei mecanice, $\frac{M}{2}v_0^2 = MgH$, de unde $v_0 = \sqrt{2gH} = \sqrt{2gl(1 - \cos\alpha)} = 7\ \frac{m}{s}$.

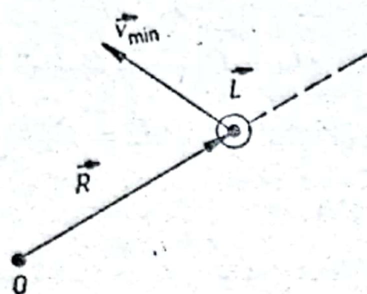


Fig. F.B.68

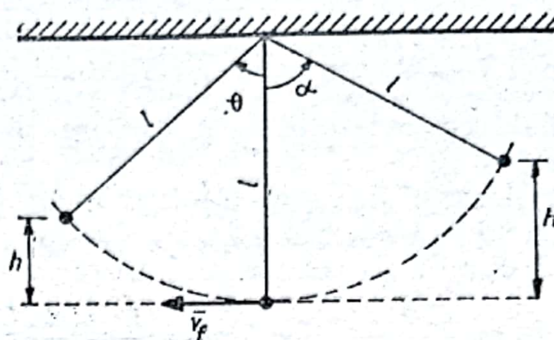


Fig. F.B.69

În mod asemănător, viteza v_f a ansamblului sferă + bilă imediat după ciocnirea plastică poate fi dedusă din condiția de conservare a energiei mecanice,

$$\frac{(M+m)v_f^2}{2} = (M+m)\,gh,\ \text{obținînd}\ v_f = \sqrt{2gh} = \sqrt{2\,gl(1-\cos\theta)} \approx 3{,}62\ \frac{m}{s}.$$

Condiția de conservare a impulsului ansamblului sferă și bilă după ciocnirea plastică a acestora are forma $Mv_0 - mv = \pm(M+m)v_f$, unde v este viteza bilei înainte de ciocnire; semnul „+" corespunde cazului în care — după ciocnirea plastică — sensul mișcării sferei se păstrează (situația din figura F.B.69), iar semnul „—" corespunde cazului în care — după ciocnirea plastică — sensul mișcării sferei se inversează. În primul caz (cel din figura F.B.69), se obține următoarea expresie și valoare a vitezei v a bilei înaintea ciocnirii, $v = \frac{Mv_0 - (M+m)v_f}{m} \approx 80{,}88\ \frac{m}{s}$.

În cazul în care, după ciocnirea plastică, sensul mișcării sferei se inversează, se obține pentru viteza v a bilei înaintea ciocnirii următoarea expresie și valoare:

$$v = \frac{Mv_0 + (M+m)v_f}{m} \approx 269{,}12\ \frac{m}{s}.$$

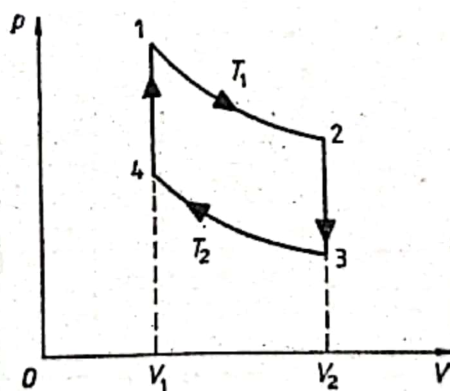


Fig. F.B.70

3°. a) Căldura primită de gaz în cursul încălzirii izocore 4 → 1 (fig. F.B.70) este $Q_{41} = \nu C_V(T_1 - T_2) = \frac{5\nu R}{2}(T_1 - T_2) = 2{,}0775 \cdot 10^6$ J, iar căldura primită în cursul destinderii izoterme 1 → 2 este

$$Q_{12} = \nu RT_1 \ln\frac{V_2}{V_1} = 3{,}324 \cdot 10^6\ \text{J}\ (=3{,}324\ \text{MJ}).$$

Căldura absorbită de gaz într-un ciclu reiese ca fiind

$$Q_1 = Q_{abs} = Q_{41} + Q_{12} = 5{,}4015 \cdot 10^6 \text{ J } (= 5{,}4015 \text{ MJ}).$$

b) Căldura cedată de gaz în cursul răcirii izoterme $2 \rightarrow 3$ este $Q_{23} = \nu C_V (T_2 - T_1) = -2{,}0775 \cdot 10^6$ J, iar căldura cedată în cursul comprimării izoterme $3 \rightarrow 4$ este $Q_{34} = \nu R T_2 \ln \frac{V_1}{V_2} = -2{,}493 \cdot 10^6$ J.

Căldura cedată de gaz într-un ciclu va fi deci $Q_2 = Q_{ced} = Q_{23} + Q_{34} = -4{,}5705 \cdot 10^6$ J.

c) Lucrul mecanic efectuat de mașină într-un ciclu este $L = Q_1 + Q_2 = 0{,}831 \cdot 10^6$ J $(= 831$ kJ).

d) Randamentul mașinii termice considerate este

$$\eta = \frac{L}{Q_1} = \frac{2}{13} \approx 0{,}154 \quad (15{,}4\%).$$

e) În cazul în care mașina termică ar lucra după un ciclu Carnot între temperaturile T_1 și T_2, randamentul său ar fi

$$\eta_C = 1 - \frac{T_2}{T_1} = \frac{1}{4} = 0{,}25 \ (25\%).$$

4°. a) Acest subiect a fost tratat la II.5°. a.

b) Acest subiect a fost tratat la XIII.4°. b.

c) Acest subiect a fost tratat la II.5°. b.

5°. a) Acest subiect a fost tratat la XI.3°. b.

b) După cum interacțiunea lichidului dintr-un tub capilar, cu peretele tubului, caracterizată de forța de adeziune F_a, este mai intensă $(F_a > F_c)$, respectiv mai slabă $(F_a < F_c)$, decît interacțiunea lichid-lichid (caracterizată de forța de coeziune F_c), lichidul din capilar urcă deasupra nivelului lichidului din vasul exterior, respectiv coboară față de acest nivel (fig. F.B.71.a și b). În conformitate cu definiția tensiunii superficiale σ a unui lichid, forța F care acționează asupra acestuia — de-a lungul circumferinței de rază r egală cu cea a tubului capilar, care constituie conturul meniscului lichidului, la contactul cu pereții tubului — are valoarea $F = l\sigma = 2\pi r\sigma$, direcția verticală și sensul în sus (dacă lichidul „udă" peretele tubului, adică $F_a > F_c$), respectiv în jos, dacă lichidul nu „udă" peretele tubului $(F_a < F_c)$.

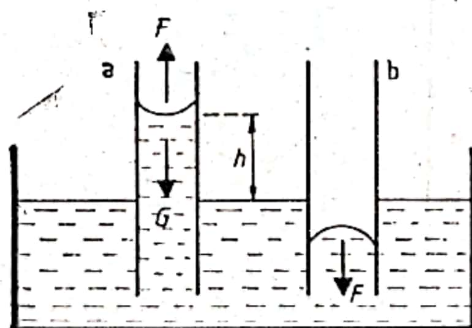


Fig. F.B.71

La echilibru, greutatea G a lichidului aflat în tubul capilar deasupra nivelului exterior (cazul $F_a > F_c$), respectiv a lichidului dezlocuit sub nivelul exterior (cazul $F_a < F_c$) este egală cu forța F de tensiune superficială, $G = \pi r^2 h \rho g = F = 2\pi r \sigma$, de unde reiese că înălțimea h cu care urcă lichidul în capilar deasupra nivelului exterior (cazul $F_a > F_c$), respectiv cu care coboară lichidul în capilar sub nivelul exterior (cazul $F_a < F_c$) este $h = \frac{2\sigma}{\rho g r}$ (legea lui Jurin).

c) Acest subiect a fost tratat la I.4°.b.

XVII.1°. a) Intensitățile I_1, I_2 ale curenților din circuit în cele două cazuri sînt: $I_1 = \frac{E}{R_1 + r}$, $I_2 = \frac{E}{R_2 + r}$. Deoarece, conform enunțului, puterea disipată în circuitul exterior este aceeași în ambele cazuri, $P = R_1 I_1^2 = \frac{E^2 R_1}{(R_1 + r)^2} = R_2 I_2^2 = \frac{E^2 R_2}{(R_2 + r)^2}$, găsim că $R_1(R_2 + r)^2 = R_2(R_1 + r)^2$, de unde: $r = \sqrt{R_1 R_2} = 6\,\Omega$.

b) Din expresia de mai sus a puterii P disipate în circuitul exterior, reiese că $E = (R_1 + r)\sqrt{\frac{P}{R_1}} = 50$ V.

c) Deoarece puterile totale debitate de sursă în cele două cazuri sînt $P_{t1} = \frac{E^2}{R_1 + r}$, $P_{t2} = \frac{E^2}{R_2 + r}$, randamentele η_1, η_2 ale transferului de putere în circuitul exterior, definite în enunț, sînt $\eta_1 = \frac{P}{P_{t1}}$, $\eta_2 = \frac{P}{P_{t2}}$, deci $\frac{\eta_1}{\eta_2} = \frac{P_{t2}}{P_{t1}} = \frac{R_1 + r}{R_2 + r} = \frac{2}{3}$, rezultînd că randamentul transferului de putere de la sursă la circuitul exterior este mai mare în cazul conectării rezistorului cu rezistența electrică mai mare (R_2). Randamentele η_1, η_2 ale transferului de putere în circuitul exterior, în cele două cazuri, sînt $\eta_1 = \frac{P}{P_{t1}} = \frac{P(R_1 + r)}{E^2} = 0{,}4$ (40%), respectiv $\eta_2 = \frac{P(R_2 + r)}{E^2} = 0{,}6$.

2°. a) Din condiția de conservare a impulsului (inițial neglijabil, al nucleului excitat ${}^8_4\text{Be}^*$), $0 = \bar{p}({}^8_4\text{He}) + \bar{p}_\gamma$, reiese că $p({}^8_4\text{Be}) = p_\gamma = \frac{1}{c} \cdot E_\gamma$, unde E_γ (=17,6 MeV) este energia fotonului γ rezultat în urma dezexcitării. Deoarece $p({}^8_4\text{Be}) \cdot c = E_\gamma \approx 17{,}6 \text{ MeV} \lll m_0({}^8_4\text{Be}) \cdot c^2 = 7\,452$ MeV, reiese că mișcarea de recul a nucleului ${}^8_4\text{Be}$ este relativ lentă ($v \ll c$), deci energia cinetică de recul a nucleului ${}^8_4\text{Be}$ poate fi exprimată nerelativist $E_c = \frac{p^2}{2m_0} = \frac{p_\gamma^2}{2m_0} = \frac{E_\gamma^2}{2m_0 c^2} \approx 0{,}166$ MeV.

b) Condiția de conservare a energiei în dezintegrarea ${}^8_4\text{Be}^* \rightarrow {}^8_4\text{Be} + \gamma$, are forma $W_0({}^8_4\text{Be}^*) = W_0({}^8_4\text{Be}) + E_c + h\nu_\gamma$, unde $W_0({}^8_4\text{Be}^*)$, $W_0({}^8_4\text{Be})$ sînt energiile de repaus ale nucleului excitat, de beriliu, respectiv a nucleului ${}^8_4\text{Be}$ în starea fundamentală. Rezultă că energia totală de dezexcitare este $E_{dez} = W_0({}^8_4\text{Be}^*) - W_0({}^8_4\text{Be}) = E_c + h\nu_\gamma \approx 17{,}766$ MeV.

3°. a) Pornind de la expresia $i = \frac{\lambda D}{2l}$ a interfranjei observate în figura de interferență obținută cu un dispozitiv Young, rezultă că lungimea de undă a radiației folosite este

$$\lambda = \frac{2li}{D} = 0{,}75 \cdot 10^{-6} \text{ m } (= 750 \text{ nm}).$$

b) Deoarece lungimea de undă λ' a radiației considerate într-un mediu de indice de refracție n este $\lambda' = \frac{\lambda}{n}$, expresia interfranjei i' care este observată pe ecran devine $i' = \frac{\lambda' D}{2l} = \frac{\lambda D}{n 2l} = \frac{i}{n}$, unde i este interfranja observată în absența lichidului. Rezultă că $n = \frac{i}{i'} \approx \frac{4}{3}$.

4°. a) $Q = \left(\frac{U_L}{U}\right)_{\omega=\omega_0} = \left(\frac{U_C}{U}\right)_{\omega=\omega_0} = \frac{\omega_0 L}{R} = \frac{1}{\omega_0 RC}$, unde U_L și U_C sînt tensiunile la bornele bobinei, respectiv, condensatorului (la rezonanță), U este tensiunea (efectivă) la bornele circuitului, ω este pulsația tensiunii aplicate la bornele

circuitului, ω_0 este pulsaţia la rezonanţă („proprie" a circuitului), iar L, R şi C sînt respectiv inductanţa bobinei, rezistenţa rezistorului şi capacitatea condensatorului din circuit.

b) $\Phi_e = \frac{W}{t}$, unde Φ_e este fluxul de energie radiantă, iar W este energia care trece prin această suprafaţă în unitatea de timp. Conform definiţiei de mai sus a fluxului de energie radiantă, unitatea sa de măsură este wattul.

$I_e = \frac{\Delta\Phi_e}{\Delta\Omega}$, unde I_e este intensitatea energetică a unei surse punctiforme, iar $\Delta\Phi_e$ este fluxul de energie radiantă emis de această sursă în unghiul solid $\Delta\Omega$. În conformitate cu definiţia dată, unitatea de intensitate energetică este wattul pe steradian (W/sr).

$E_e = \frac{\Delta\Phi_e}{\Delta A}$, unde E_e este iluminarea energetică (iradierea) a unei suprafeţe elementare de arie ΔA, iar $\Delta\Phi_e$ este fluxul de energie radiantă incident pe suprafaţa elementară considerată. Pornind de la definiţia de mai sus, reiese că unitatea de iluminare energetică este wattul pe metru pătrat (W/m²).

$E_e = \frac{I_e}{r^2} \cdot \cos\theta$, unde E_e este iluminarea energetică a unui element de suprafaţă avînd normala $\bar{n}$, I_e este intensitatea energetică a sursei punctiforme care produce iluminarea elementului de suprafaţă considerat, r este distanţa de la sursa punctiformă la elementul de suprafaţă, iar θ este unghiul ascuţit format de normala $\bar{n}$ cu raza vectoare $\bar{r}$ a elementului de suprafaţă în raport cu sursa punctiformă (v. şi figura F.B.72).

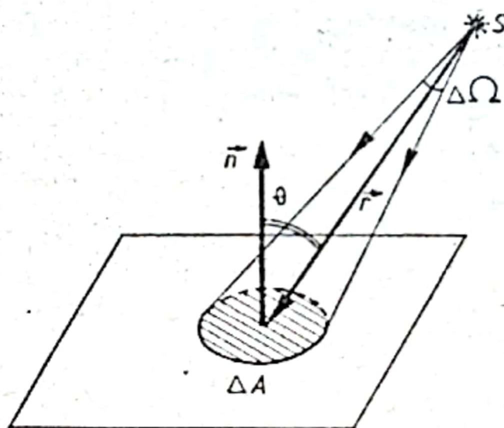


Fig. F.B.72

$V = \frac{\Phi_{e0}}{\Phi_e}$, unde V este sensibilitatea spectrală relativă a ochiului, Φ_{e0} este fluxul constant de energie al radiaţiei cu lungimea de undă $\lambda_0 = 550$ nm (lungime de undă la care apare cea mai puternică senzaţie vizuală), iar Φ_e este fluxul de energie a radiaţiei cu lungimea de undă λ, care produce aceeaşi senzaţie vizuală ca şi Φ_{e0}.

$\Phi = KV\Phi_e$, unde Φ este fluxul luminos, K este echivalentul fotometric al radiaţiei $\left(\text{constantă egală cu } 675 \frac{\text{lm}}{\text{W}}\right)$, V este sensibilitatea spectrală relativă a ochiului, iar Φ_e este fluxul de energie radiantă.

$I = \frac{\Delta\Phi}{\Delta\Omega}$, unde I este intensitatea luminoasă a unei surse punctiforme, iar $\Delta\Phi$ este fluxul luminos emis de sursă în unghiul solid $\Delta\Omega$. Intensitatea luminoasă este mărimea fundamentală a fotometriei, iar unitatea sa de măsură (candela,

simbol cd) este unitate fundamentală în sistemul internaţional (SI). Candela este intensitatea luminoasă, în direcţia normalei, a unei suprafeţe cu aria $\frac{1}{600\,000}$ metri pătraţi, a unui corp negru, la temperatura de solidificare a platinei la presiunea de $101\,325\ \frac{N}{m^2}$. În conformitate cu definiţia de mai sus a intensităţii luminoase, unitatea de măsură a fluxului luminos — lumenul — este fluxul luminos emis într-un unghi solid egal cu un steradian de către un izvor luminos punctiform avînd intensitatea de 1 candelă (1 lm = 1 cd · 1 sr).

$\Phi = 4\pi I$, unde Φ este fluxul luminos emis de o sursă de intensitate I în toate direcţiile.

$E = \frac{\Delta\Phi}{\Delta A}$, unde E este iluminarea unui element de suprafaţă cu aria ΔA, iar $\Delta\Phi$ este fluxul luminos incident pe elementul de suprafaţă considerat. În conformitate cu definiţia de mai sus, unitatea de măsură a iluminării — luxul (simbol lx) — reprezintă iluminarea unei suprafeţe cu aria de 1 m², care primeşte un flux luminos de 1 lm, uniform repartizat pe această suprafaţă (1 lx = 1 lm/m²).

$E = \frac{I}{r^2} \cos\theta$, unde E este iluminarea unui element de suprafaţă avînd normala $\bar{n}$, I este intensitatea luminoasă a sursei punctiforme care produce iluminarea elementului de suprafaţă considerat, r este distanţa de la sursă la elementul de suprafaţă, iar θ este unghiul ascuţit format de normala $\bar{n}$ cu direcţia de observare a sursei, din elementul de suprafaţă considerat (v. şi figura F.B.72).

5°. a) Potenţialul electric într-un punct M este o mărime fizică egală cu raportul dintre lucrul mecanic efectuat de cîmp la deplasarea unui corp de probă încărcat, din acel punct în punctul de referinţă arbitrar ales, şi sarcina acelui corp, $V_M = \frac{L}{q}$. De regulă, se alege punctul de referinţă (pînă la care se face deplasarea) la infinit.

Diferenţa de potenţial electric $V_M - V_N$ dintre două puncte M şi N sau tensiunea electrică U dintre aceste puncte este o mărime fizică egală cu cîtul dintre lucrul mecanic efectuat de cîmp la deplasarea unui corp încărcat între cele două puncte şi sarcina electrică a cîmpului, $U = V_M - V_N = \frac{L}{q}$.

b) Energia de ionizare a atomului de hidrogen în stare fundamentală este energia minimă care trebuie transmisă acestui atom, aflat în starea fundamentală, pentru a-l ioniza. Reiese că energia de ionizare a atomului de hidrogen în stare fundamentală este egală cu energia de legătură a acestui atom în starea fundamentală şi cu valoarea absolută (modulul) energiei totale în starea fundamentală,

$$W_{\text{ion. }1} = W_{\text{leg. }1} = -E_1.$$

XVIII.1°. a) Intensitatea curentului fotoelectric la saturaţie este direct proporţională cu fluxul radiaţiilor electromagnetice incidente, cînd frecvenţa este constantă (prima lege a efectului fotoelectric extern).

Energia cinetică a fotoelectronilor emişi creşte liniar cu frecvenţa radiaţiilor electromagnetice şi nu depinde de fluxul acestora (legea a doua).

Efectul fotoelectric extern se poate produce numai dacă frecvenţa radiaţiei incidente este mai mare sau cel puţin egală cu o valoare minimă, specifică fiecărei substanţe (legea a treia).

Efectul fotoelectric extern se produce practic instantaneu (legea a patra).

b) Acest subiect a fost tratat la XV.3°. c.

c) Definiţia randamentului unei maşini termice este $\eta = \frac{L}{Q_1}$, unde L este lucrul mecanic efectuat de maşina termică într-un ciclu, iar Q_1 este căldura primită de maşina termică într-un ciclu. Expresia randamentului unei maşini termice care funcţionează după un ciclu Carnot (reversibil) este $\eta = \frac{T_1 - T_2}{T_1}$, unde T_1 este temperatura termodinamică (absolută) a sursei calde, iar T_2 este temperatura termodinamică a sursei reci a maşinii.

2°. a) Formula oglinzilor sferice este $\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} = \frac{1}{f} = \frac{2}{R}$, unde x_1 şi x_2 sînt distanţele de la obiect, respectiv de la imagine, la vîrful oglinzii sferice (v. şi fig. F.B.73), R este raza de curbură a oglinzii sferice ($R < 0$ pentru oglinzi concave, cum este cea din figura F.B.73, $R > 0$ pentru oglinzi convexe), iar $f = \frac{R}{2}$ este distanţa focală a oglinzii sferice.

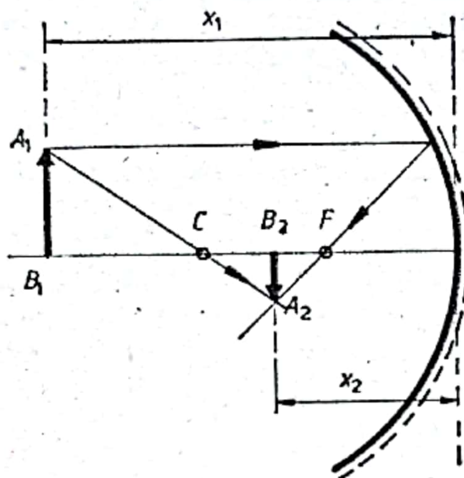


Fig. F.B.73

b) Energia cinetică maximă pe care o poate atinge o particulă accelerată într-un ciclotron este dată de expresia

$$E_{\max} = \frac{m}{2} v_{\max}^2 = \frac{1}{2m} R_{\max}^2 q^2 B^2,$$

unde m şi q sînt masa, respectiv sarcina electrică a particulei accelerate, $v_{\max}$ şi $R_{\max}$ sînt valorile maxime atinse de viteza, respectiv raza traiectoriei circulare a particulelor accelerate ($R_{\max}$ este practic egală cu raza duanţilor), iar B este inducţia cîmpului magnetic uniform aplicat în zona duanţilor.

c) $v_T = \sqrt{\overline{v^2}} = \sqrt{\frac{3kT}{m}} = \sqrt{\frac{3RT}{\mu}}$, unde $\overline{v^2}$ este valoarea medie a pătratului vitezei moleculelor gazului, m şi μ sînt masa unei molecule, respectiv masa molară a gazului, T este temperatura termodinamică (absolută) a gazului, k este constanta lui Boltzmann, iar R este constanta universală a gazelor.

3°. Modelul atomic planetar presupune că întreaga sarcină pozitivă (şi aproape toată masa) atomului este concentrată într-un nucleu, în jurul căruia se rotesc electronii. Neglijînd spaţiile „libere" existente între atomi în fază condensată (solide, lichide), reiese că raza atomilor unei substanţe de densitate ρ şi masă (kilo)molară M este de ordinul $r_a = \sqrt[3]{\frac{3M}{4\pi\rho N_A}} \sim 10^{-10}$ m, deci şi faptul că razele orbitelor electronice dintr-un atom sînt de acest ordin de mărime (10^{-10} m). Experienţele efectuate de Ernest Rutherford cu privire la absorbţia particulelor α au dovedit

că aproape întreaga masă a atomului este concentrată într-un nucleu de dimensiuni considerabil mai mici decît cele ale atomului, iar experienţele efectuate cu privire la împrăştierea particulelor au arătat că întreaga sarcină pozitivă a atomului este concentrată în nucleu, precum şi faptul că raza nucleului este de ordinul a 10^{-14} m. Deoarece masa nucleului este mult mai mare decît cea a electronilor (de cel puţin 1 837 ori, în cazul atomului primului izotop al hidrogenului), de regulă (într-o primă aproximaţie), în cadrul modelului planetar al atomului, nucleul este considerat fix.

După cum este cunoscut, energia potenţială a unui corp într-un cîmp de forţe este egală cu lucrul mecanic efectuat de cîmp pentru deplasarea corpului din punctul considerat într-un punct de referinţă arbitrar ales. Deoarece în cazul cîmpurilor de forţe coulombiene, punctul de referinţă este ales la infinit, energia potenţială a sistemului nucleu (al atomului de hidrogen)—electron se poate deduce pornind de la expresia potenţialului electric V (produs de nucleu) pe baza relaţiei $U(r) = q_{\text{electron}} V = (-e) \cdot \frac{e}{4\pi\varepsilon_0 r} = -\frac{e^2}{4\pi\varepsilon_0 r}$, unde r este distanţa dintre electron şi nucleu.

După cum energia totală a sistemului format de nucleul atomului de hidrogen şi un electron,

$$E_{\text{tot}} = U(r) + E_{\text{cin}} = -\frac{e^2}{4\pi\varepsilon_0 r} + \frac{m_0 v^2}{2},$$

este pozitivă, respectiv negativă, traiectoria electronului este o curbă deschisă (hiperbolă), respectiv are forma unei elipse, avînd nucleul într-unul din focare (în ultimul caz, spunem că sistemul nucleu-electron se găseşte într-o stare legată; v. şi fig. F.B.74).

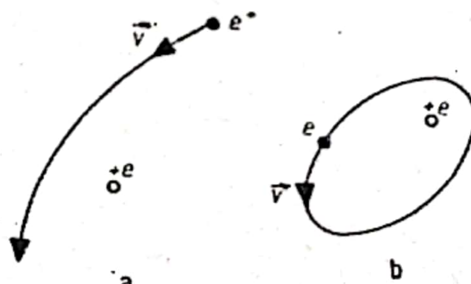


Fig. F.B.74

Prin definiţie, energia de legătură a unui sistem este egală cu lucrul mecanic efectuat pentru a desface sistemul în componentele sale izolate, aflate în stare de repaus. Deoarece energia totală finală a componentelor izolate ale sistemului, aflate în repaus, este nulă, avem $W_{\text{leg}} = E_f - E_i = -E_{\text{tot}}$. Spunem că sistemul este legat dacă energia sa totală este negativă, deci dacă energia de legătură a sistemului este pozitivă.

Pentru ca o orbită circulară a electronului în jurul nucleului atomului de hidrogen să fie stabilă, este necesar ca forţa centrifugă să fie egală cu cea coulombiană, care îndeplineşte în acest caz rolul de forţă centripetă $\frac{m_0}{r} v^2 = \frac{e^2}{4\pi\varepsilon_0 r^2}$. Reiese că, în cazul unei orbite circulare stabile a electronului în jurul nucleului, energia totală a atomului de hidrogen este dată de expresia $E_{\text{tot}} = \frac{m_0 v^2}{2} - \frac{e^2}{4\pi\varepsilon_0 r} = \frac{r}{2} \cdot \frac{m_0 v^2}{r} - \frac{e^2}{4\pi\varepsilon_0 r} = -\frac{e^2}{8\pi\varepsilon_0 r} = -\frac{m_0}{2} v^2$.

În mişcarea sa în jurul nucleului, electronul este o particulă încărcată electric, aflată într-o mişcare accelerată. Or, conform electromagnetismului clasic, o sarcină

accelerată emite energie sub formă de radiații (unde) electromagnetice. În consecință, energia totală a electronului ar trebui să scadă continuu, fapt care ar determina „căderea“ lui pe nucleu și dispariția sistemului nucleu-electron, deci a atomului; calculele efectuate pe baza electromagnetismului clasic arată că durata acestei „căderi“ a electronului de la orbita sa normală (cu dimensiuni de ordinul a 10^{-10} m) pînă la nucleu ar trebui să fie foarte scurtă (de ordinul a 10^{-11} s). Faptul că această prevedere teoretică privind modelul planetar al atomului nu este confirmată experimental (în realitate, atomii sînt stabili) constituie una dintre principalele deficiențe ale acestui model atomic. O altă deficiență importantă a modelului planetar al atomului o constituie faptul că acesta nu poate explica seriile spectrale, în particular ale atomului de hidrogen. Un progres important în direcția eliminării unora dintre deficiențele modelului planetar al atomului a fost înregistrat prin formularea de către Niels Bohr a modelului „cuantificat“ (cuantificarea veche, premergătoare fizicii cuantice propriu-zise) al atomului.

4°. Din ecuația de conservare a energiei, $2\,M(^2_1\mathrm{H})\cdot c^2 = M(^4_2\mathrm{He})\cdot c^2 + Q$, reiese valoarea căldurii Q_g degajate la formarea unui gram de $^4_2\mathrm{He}$,

$$Q_g = \frac{10^{-3}\ \mathrm{kg}}{M\,(^4_2\mathrm{He})}\cdot Q = \frac{10^{-3}\ \mathrm{kg}}{M\,(^4_2\mathrm{He})}[2\,M(^2_1\mathrm{H}) - M(^4_2\mathrm{He})]\cdot c^2.$$

Pentru a deduce valoarea c^2 din datele enunțului, se utilizează relația dintre unitatea atomică de masă u și numărul lui Avogadro $u = \frac{1\ \mathrm{kg}}{N_A}$, obținînd

$$c^2 = \frac{u\cdot c^2}{1\ \mathrm{kg}}\cdot N_A = \frac{0{,}9315\cdot 10^9\cdot 1{,}6\cdot 10^{-19}}{1}\cdot 6{,}023\cdot 10^{26} \approx 9\cdot 10^{16}\ \mathrm{m^2/s^2}\ \text{și}$$

$$Q_g = \frac{10^{-3}}{4{,}0026}\cdot 2{,}56\cdot 10^{-2}\cdot 9\cdot 10^{16} \approx 5{,}76\cdot 10^{11}\ \mathrm{J}\ (= 576\ \mathrm{GJ}).$$

5°. a) În conformitate cu notațiile din enunț și din figura F.B.75, avem

$$\eta_c = 1 - \frac{T_D}{T_B} = 1 - \frac{p_1V_1}{p_2V_2} = 0{,}75.$$

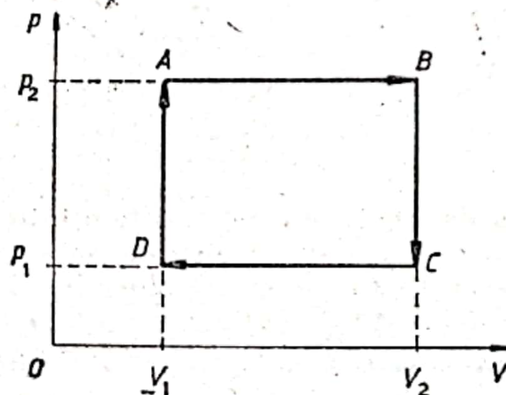


Fig. F.B.75

b) Gazul primește căldură de la sursa cu temperatura mai ridicată în cursul încălzirilor izobară DA și izocoră AB. Deoarece $C_p = C_V + R = \frac{5R}{2}$, căldura Q_1 primită de gaz într-un ciclu este

$$Q_1 = \nu C_V(T_A - T_D) + \nu C_p(T_B - T_A) = \nu\cdot\frac{3R}{2}(T_A - T_D) + \nu\cdot\frac{5R}{2}(T_B - T_A) =$$

$$= \frac{1}{2}(3p_2V_1 - 3p_1V_1 + 5p_2V_2 - 5p_2V_1) = 1{,}625\cdot 10^7\ \mathrm{J}\ \ (= 16{,}25\ \mathrm{MJ}).$$

c) Deoarece lucrul mecanic efectuat într-un proces ciclic este egal (numeric) cu aria suprafeței interioare ciclului în diagrama presiune-volum, avem

$$L = (p_2 - p_1)(V_2 - V_1) = 2{,}5 \cdot 10^6 \text{ J } (= 2{,}5 \text{ MJ}).$$

Pe de altă parte, lucrul mecanic efectuat într-un proces ciclic Carnot este $L_C = Q_1 \cdot \eta_c$, deci

$$\frac{L_C}{L} = \frac{Q_1 \cdot \eta_C}{L} = 4{,}875,$$

raport care corespunde valorii (de 4,125 ori mai mare, a) randamentului ciclului Carnot, față de randamentul celuilalt ciclu considerat.

XIX.1°. a) Unda incidentă (raza incidentă), normala la suprafață în punctul de incidență și unda reflectată (raza reflectată) se găsesc în același plan.

Unghiul de reflexie r este — numeric — egal cu unghiul de incidență i.

b) Lungimea de undă Compton este egală cu diferența lungimilor de undă corespunzînd unui foton împrăștiat (prin efect Compton) sub unghiul $\theta = 90°$ față de direcția de incidență, respectiv fotonului incident, $\Lambda = \lambda\left(\frac{\pi}{2}\right) - \lambda_0 = \frac{h}{m_0 c}$, unde h este constanta lui Planck, m_0 este masa de repaus a electronului, iar c este viteza luminii în vid.

c) Exponentul volumului în ecuația lui Poisson (exprimată prin presiune și volum) a transformării adiabatice a unui gaz perfect, $pV^\gamma = \text{const}$, se numește exponent adiabatic. Exponentul adiabatic are expresia $\gamma = \frac{C_p}{C_V}$, unde C_p și C_V sînt căldurile molare la presiune constantă, respectiv la volum constant, ale gazului.

2°. a) Acest subiect a fost tratat la VI.4°.a.

b) $\Delta\lambda = 2\Lambda \sin^2\frac{\theta}{2}$, unde $\Delta\lambda = \lambda(\theta) - \lambda_0$ este variația lungimii de undă a unui foton în urma efectului Compton, $\Lambda = \frac{h}{m_0 c}$ este lungimea de undă Compton (v. și mai sus), iar θ este unghiul de împrăștiere format de direcția după care este „împrăștiat" fotonul cu direcția de incidență (v. fig. F.B.76).

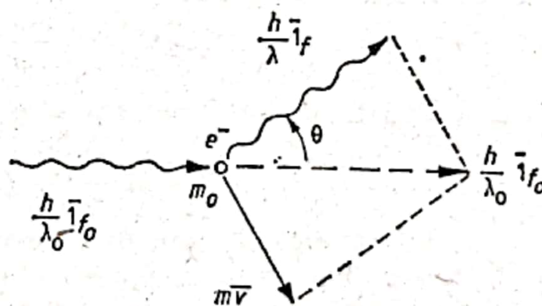


Fig. F.B.76

c) $I(x) = I(0) \cdot \exp(-\mu x)$, unde $I(0)$ este intensitatea fasciculului de fotoni γ la intrarea într-un strat de substanță, $I(x)$ este intensitatea fasciculului la ieșirea din strat, x este grosimea stratului, iar μ este coeficientul de atenuare liniară.

3°. Dispozitivul experimental constă dintr-un banc optic pe care sînt aliniate suporturile sursei luminoase S, filtrului de culoare (spectral) FC, fantei simple F, lentilei L_1 cu ajutorul căreia se obține un fascicul paralel incident pe rețea (în acest scop, fanta F este așezată față de lentila L_1 la o distanță egală cu distanța focală f_1 a acestei lentile), rețelei plane de difracție R, celei de a doua lentile convergente L_2 și panoului P cu diviziuni (așezat față de L_2 la o distanță egală cu distanța focală f_2 a acestei lentile).

Schema de principiu a instalației experimentale este prezentată în fig. F.B.77. Deoarece în acest caz incidența fasciculului luminos pe rețeaua de difracție este normală, relația care ne dă unghiurile α pentru care se obțin maximele de difracție capătă forma $l \sin \alpha = k\lambda$, unde k este ordinul maximului de difracție, iar l este perioada („constanta") rețelei de difracție În cazul unghiurilor de difracție α mici (pentru maxime de difracție situate la distanțe x (față de centrul panoului P) mici față de distanța focală f_2 a lentilei L_2); avem $\sin \alpha \approx \operatorname{tg} \alpha = \frac{x}{f_2}$, reieșind că lungimea de undă a radiației care trece prin filtrul FC este

$$\lambda = \frac{l \sin \alpha}{k} = \frac{x}{k f_2 n},$$

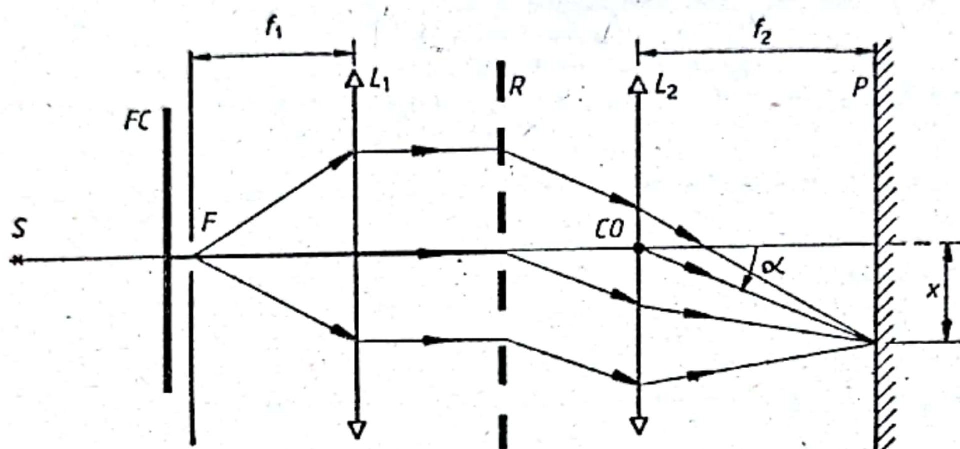


Fig. F.B.77

unde $n = \frac{1}{l}$ este numărul de trăsături pe unitatea de lungime a rețelei. Determinînd experimental distanța x pînă la centrul ecranului divizat P care corespunde maximului de difracție de ordinul k și cunoscînd distanța focală f_2 a lentilei L_2, precum și numărul n de trăsături pe unitatea de lungime a rețelei, se calculează (determină) lungimea de undă a radiației studiate.

4°. Energia cinetică a fotoelectronilor extrași $\frac{m_0 v^2}{2}$ poate fi determinată pornind de la energia $h\nu = h\frac{c}{\lambda}$ a fotonilor incidenți și energia de extracție L a unui electron din catod, pe baza relației $\frac{m_0 v^2}{2} = \frac{hc}{\lambda} - L$. Deoarece energia de extracție L a unui electron din catod poate fi exprimată prin frecvența de prag ν_0, respectiv lungimea de undă λ_0 corespunzînd pragului efectului fotoelectric, prin relația $L = h\nu_0 = h\frac{c}{\lambda_0}$, obținem

$$\frac{m_0 v^2}{2} = \frac{hc}{\lambda} - \frac{hc}{\lambda_0} \approx 2{,}537 \cdot 10^{-19}\ \text{J}.$$

5°. a) Întrucît starea de volum minim atinsă de un gaz în cursul unui proces ciclic Carnot corespunde temperaturii T_1 a sursei calde, avem $T_1 = \frac{pV_m}{\nu R} = 700$ K. Rezultă că randamentul mașinii termice care efectuează ciclul Carnot descris în enunțul problemei este

$$\eta_c = 1 - \frac{T_2}{T^1} = 0{,}6.$$

b) Din definiţia randamentului unei maşini termice: $\eta = \frac{L}{Q_1}$, reiese că $\frac{\eta}{1-\eta} = \frac{L}{Q_1 - L} = \frac{L}{|Q_2|}$. În cazul problemei de faţă, căldura Q_2 cedată sursei reci în fiecare ciclu va fi

$$|Q_2| = \frac{1-\eta_c}{\eta_c} \cdot L = 8 \cdot 10^4 \text{ J } (= 80 \text{ kJ}).$$

c) Numărul moleculelor de gaz din unitatea de volum îşi va atinge valoarea maximă pentru starea în care volumul gazului este minim

$$n_{\max} = \frac{N}{V_m} = \frac{\nu N_A}{V_m} \approx 4{,}28 \cdot 10^{25} \frac{\text{molecule}}{\text{m}^3}.$$

XX.1°. a) Situaţia în momentul ciocnirii celor două corpuri este arătată în figura F.B.78. Fiecare corp va parcurge pe orizontală distanţa $\frac{d}{2}$ pînă în momentul ciocnirii, deci

$$t = \frac{d}{2v_{01}} = \frac{8}{20} = 0{,}4 \text{ s.}$$

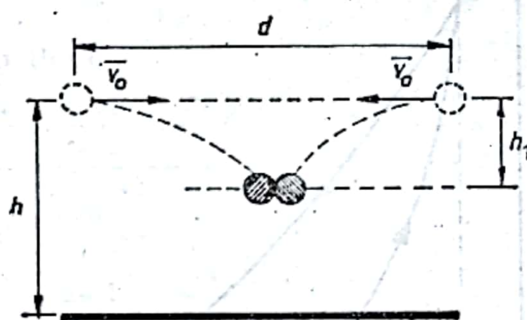


Fig. F.B.78

Distanţa pe care cad corpurile în acest timp este

$$h_1 = \frac{gt^2}{2} = \frac{10}{2} \cdot 0{,}4^2 = 0{,}8 \text{ m.}$$

Înălţimea la care se produce ciocnirea este

$$h' = h - h_1 = 5 - 0{,}8 = 4{,}2 \text{ m.}$$

b) Ciocnirea este simetrică. Conservarea impulsului se scrie

$$\vec{p} = \vec{p}_1 + \vec{p}_2.$$

Pentru proiecţia pe orizontală,

$$p_x = p_{1x} + p_{2x} = 0, \text{ deoarece } p_{1x} = -p_{2x}.$$

Pe verticală $p_y = p_{1y} + p_{2y} = 2p_{1y} = 2mv_y = 2m\sqrt{2gh_1}$.

Componentele vitezei corpului format prin ciocnire vor fi

$$v_x = 0 \text{ şi } v_y = \sqrt{2gh_1},$$

deci

$$v = v_y = \sqrt{2gh_1} = \sqrt{2 \cdot 10 \cdot 0{,}8} = 4 \text{ m/s.}$$

c) Conservarea energiei în procesul de ciocnire se scrie:

$$\frac{m_1 v_1^2}{2} + \frac{m_2 v_2^2}{2} = \frac{(m_1 + m_2) v^2}{2} + Q.$$

Întrucît

$$m_1 = m_2 = m,$$

$$Q = \frac{m}{2}(v_1^2 + v_2^2 - 2v^2) = \frac{m}{2}(v_0^2 + v_y^2 + v_0^2 + v_y^2 - 2v_y^2) = m v_0^2.$$

Această cantitate de căldură duce la creşterea temperaturii corpurilor cu ΔT, dat de $Q = 2mc\Delta T$, deci

$$\Delta T = \frac{v_0^2}{2c} = \frac{100}{2 \cdot 10^3} = 0{,}05 \text{ grade}.$$

2°. a) Transformările descrise în text sînt arătate în figura F.B.79.

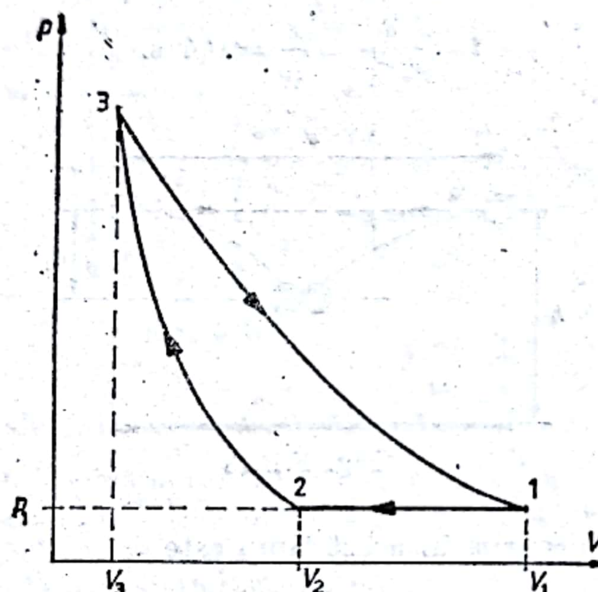


Fig. F.B.79

Transformarea $1 \rightarrow 2$ se face la presiunea p_1 (izobară) deci

$$L_{12} = p\Delta V = p_1(V_2 - V_1). \qquad (1)$$

Pentru a afla V_2 scriem ecuaţiile celor 2 transformări,

$$T_1 V_3^{\gamma-1} = T_2 V_2^{\gamma-1},$$

$$\frac{V_1}{T_1} = \frac{V_2}{T_2}.$$

Înmulţindu-le membru cu membru, rezultă

$$V_1 V_3^{\gamma-1} = V_2^{\gamma},$$

de unde

$$V_2 = V_1^{\frac{1}{\gamma}} \cdot V_3^{\frac{\gamma-1}{\gamma}} = V_1^{\frac{1}{\gamma}} \cdot \frac{V_1^{\frac{\gamma-1}{\gamma}}}{8^{\frac{\gamma-1}{\gamma}}} = \frac{V_1}{\sqrt[3]{8}}.$$

Ecuaţia (1) devine

$$L_{12} = p_1\left(\frac{V_1}{2} - V_1\right) = -\frac{p_1V_1}{2} = -\frac{10^5\cdot 0,5}{2} = -25\cdot 10^3\ \text{J}.$$

Sistemul primeşte lucru mecanic ($L_{12} < 0$).

b) $\eta = \frac{L}{Q_1}$.

Sistemul primeşte căldură în transformarea $3 \to 1$, deci

$$Q_1 = Q_{31} = \nu RT_1 \ln\frac{V_1}{V_3}.$$

Lucrul mecanic este primit de sistem în transformările $1 \to 2$ şi $2 \to 3$ şi efectuat în transformarea $3 \to 1$, astfel încît

$$L = L_{31} + L_{12} + L_{23} = \nu RT_1 \ln\frac{V_1}{V_3} - \frac{p_1V_1}{2} - \nu C_v(T_3 - T_2).$$

Din ecuaţia transformării izocore $\frac{V_1}{T_1} = \frac{V_2}{T_2}$ rezultă

$$T_2 = \frac{V_2}{V_1}T_1 = \frac{V_1}{2V_1}T_1 = \frac{T_1}{2}.$$

Expresia randamentului devine

$$\eta = 1 - \frac{\frac{\nu RT_1}{2} + \frac{\nu R}{\gamma - 1}\cdot\frac{T_1}{2}}{\nu RT_1 \ln\frac{V_1}{V_3}} = 1 - \frac{1 + \frac{1}{\gamma - 1}}{2\ln\frac{V_1}{V_3}} = 1 - \frac{1 + \frac{1}{0,5}}{2\ln 8} =$$

$$= 1 - \frac{1}{2\ln 2} = 0,28 = 28\%.$$

În obţinerea acestui rezultat am utilizat ecuaţia termică de stare a gazului ideal, $pV = \nu RT$ şi ecuaţiile $\gamma = C_p/C_v$ şi $C_p = C_v + R$, de unde se obţine $C_v = R/(\gamma - 1)$.

c) $v_T = \sqrt{\frac{3RT}{\mu}} = \sqrt{\frac{3RT_2}{\mu}} = \sqrt{\frac{3RT_1}{2\mu}} = \sqrt{\frac{3p_1V_1}{2\mu\nu}} = \sqrt{\frac{3\cdot 10^5\cdot 0,5}{2\cdot 29\cdot 12\cdot 10^{-3}}} = 464$ m/s.

3°. a) Notăm cu I intensitatea curentului cînd comutatorul K din figura F.B.7 este deschis şi cu I_1 şi I_2 intensităţile corespunzătoare poziţiilor 1 şi, respectiv, 2 ale comutatorului. Condiţiile din textul problemei sînt: $I_1 = 2I$ şi $I_2 = \frac{4}{9}I$.

Conform figurii F.B.7, I_1 este intensitatea curentului prin circuitul paralel format din inductanţă şi rezistenţă, iar I_2 intensitatea în circuitul paralel format din capacitate şi inductanţă, deci

$$I = \sqrt{\left(\frac{U}{R}\right)^2 + \left(\frac{U}{L\omega}\right)^2} = U\sqrt{\frac{1}{R^2} + \frac{1}{L^2\omega^2}}, \qquad (1)$$

$$I_2 = \left|\frac{U}{L\omega} - UC\omega\right| = U\left|\frac{1}{L\omega} - C\omega\right|. \qquad (2)$$

În sfîrşit, $I = \frac{U}{L\omega}$. Utilizînd aceste expresii, relaţia $I_1 = 2I$ devine

$$\sqrt{\frac{1}{R^2} + \frac{1}{L^2\omega^2}} = 2\frac{1}{L\omega} \text{ sau } \frac{1}{R^2} + \frac{1}{R^2\omega^2} = \frac{4}{L^2\omega^2},$$

de unde

$$R = \frac{L\omega}{\sqrt{3}} = \frac{X_L}{\sqrt{3}} = \frac{30}{\sqrt{3}} = 17{,}32\ \Omega.$$

Pentru ecuația (2) există 2 posibilități

$$\frac{1}{L\omega} - C\omega = \frac{4}{9L\omega}, \text{ dacă } \frac{1}{L\omega} > C\omega; \qquad (3)$$

$$C\omega - \frac{1}{L\omega} = \frac{4}{9L\omega}, \text{ dacă } \frac{1}{L\omega} < C\omega. \qquad (4)$$

În primul caz,

$$C'\omega = \frac{5}{9L\omega} \Rightarrow C' = \frac{5}{9\omega X_L} = \frac{5}{9 \cdot 2\pi\nu \cdot X_L} = \frac{5}{9 \cdot 2 \cdot \pi \cdot 50 \cdot 30} = 58{,}9\ \mu\text{F}.$$

În cazul al doilea,

$$C''\omega = \frac{13}{9L\omega} \Rightarrow C'' = \frac{13}{5} C' = 153{,}14\ \mu\text{F}.$$

b) Evident acest punct se referă la situația în care comutatorul K este în poziția 1,

$$I_R = \frac{U}{R} = \frac{220}{17{,}32} = 12{,}7\ \text{A},$$

$$\cos\varphi = \frac{I_R}{\sqrt{I_R^2 + I_L^2}} = \frac{R}{\sqrt{R^2 + L^2\omega^2}} = \frac{17{,}32}{34{,}64} = \frac{1}{2}, \quad \varphi = 60°.$$

c) La rezonanță $L\omega_0 = \dfrac{1}{C\omega_0} \Rightarrow \nu_0 = \dfrac{1}{2\pi\sqrt{LC}} = \dfrac{1}{2\pi\sqrt{\dfrac{X_L}{\omega}C}} = \dfrac{1}{2\pi\sqrt{\dfrac{X_L}{2\pi\nu}C}}$;

cazul (3): $\nu_0 = \dfrac{1}{2\pi\sqrt{\dfrac{30}{2\pi \cdot 50} \cdot 58{,}9 \cdot 10^{-6}}} = 67{,}1$ Hz;

cazul (4): $\nu_0 = \dfrac{1}{2\pi\sqrt{\dfrac{30}{2\pi \cdot 50} \cdot 153{,}14 \cdot 10^{-6}}} = 41{,}6$ Hz.

4°. a) Formula lui Galilei se obține eliminînd timpul din ecuația coordonatei $x = x_0 + v_0 t + \frac{1}{2} at^2$ cu ajutorul ecuației vitezei $v = v_0 + at$. Introducînd $t = (v - v_0)/a$, ecuația coordonatei devine

$$x = x_0 + v_0 \frac{v - v_0}{a} + \frac{1}{2} a \frac{(v - v_0)^2}{a^2}.$$

Aducînd la același numitor,

$$2a(x - x_0) = 2v_0 v - 2v_0^2 + v^2 - 2vv_0 + v_0^2, \text{ sau}$$

$$v^2 = v_0^2 + 2a(x - x_0).$$

Aceasta este ecuația Galilei.

b) Ciclul Carnot format din două transformări izoterme, la temperaturile T_1 şi $T_2\,(T_1 > T_2)$, şi două transformări adiabatice este arătat în figura F.B.80. Între parametrii stărilor 1, 2, 3 şi 4 există următoarele relaţii:

$$p_1V_1 = p_2V_2, \qquad p_4V_4 = p_3V_3, \tag{1}$$

$$p_1V_1^\gamma = p_4V_4^\gamma, \qquad p_2V_2^\gamma = p_3V_3^\gamma. \tag{2}$$

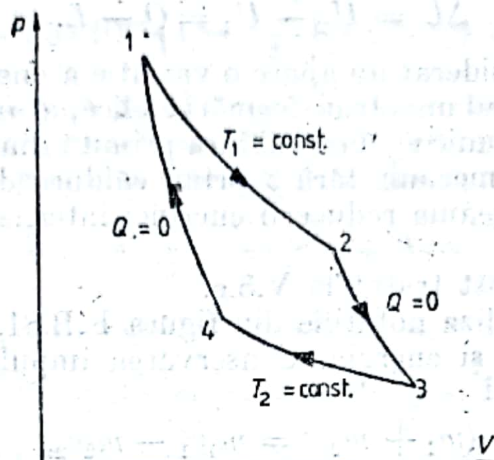


Fig. F.B.80

Din ecuaţiile (1) şi, respectiv, (2) rezultă

$$\frac{p_1p_3}{p_2p_4} = \frac{V_2V_4}{V_1V_3}, \qquad \frac{p_1p_3}{p_2p_4} = \left(\frac{V_2V_4}{V_1V_3}\right)^\gamma. \tag{3}$$

Ţinînd seama că $\gamma \neq 1$, cele două ecuaţii (3) pot fi satisfăcute numai dacă

$$\frac{V_2V_4}{V_1V_3} = 1, \text{ adică dacă } \frac{V_2}{V_1} = \frac{V_3}{V_4}. \tag{4}$$

Randamentul ciclului este dat de

$$\eta = \frac{L}{Q_1} = \frac{Q_1 - |Q_2|}{Q_1} = 1 - \frac{|Q_2|}{Q_1}, \tag{5}$$

unde căldura primită Q_1 şi căldura cedată Q_2 sînt date de

$$Q_1 = Q_{12} = 2{,}3\nu RT_1 \log\frac{V_2}{V_1},\ Q_2 = Q_{34} = 2{,}3\nu RT_2 \log\frac{V_4}{V_3}\ (< 0).$$

Ţinînd seama de ecuaţia (4), rezultă

$$\frac{Q_2}{Q_1} = -\frac{T_2}{T_1}, \text{ deci } \nu = 1 - \frac{T_2}{T_1}. \tag{6}$$

Remarcăm că, în timp ce ecuaţia (5) este generală, expresia (6) este aplicabilă numai ciclului Carnot.

c) Acest subiect a fost tratat la XIII.4°b.

5°. a) Legea lui Bernoulli se referă la curgerea staţionară a unui lichid ideal şi poate fi formulată astfel: într-un lichid ideal în curgere staţionară presiunea totală, compusă din presiunea statică, presiunea dinamică şi presiunea de poziţie este constantă, adică

$$p + \rho\frac{v^2}{2} + \rho gz = \text{const},$$

unde ρ este densitatea lichidului, v este viteza de curgere în secţiunea considerată a conductei, iar z este poziţia pe verticală.

b) Considerăm un proces, în contact cu exteriorul, care duce un sistem termodinamic dintr-o stare iniţială 1, caracterizată de energia internă U_1, într-o stare finală 2, caracterizată de energia internă U_2. Legea conservării şi transformării energiei în procese mecanice şi termice (principiul întîi al termodinamicii) afirmă că: variaţia energiei interne este egală cu suma algebrică dintre căldura Q şi lucrul mecanic L, schimbate de sistem cu exteriorul în cursul procesului, adică

$$\Delta U = U_2 - U_1 = Q - L.$$

Dacă în procesul considerat nu apare o variaţie a energiei interne a sistemului ($U_2 = U_1$), cum ar fi în cazul unei transformări ciclice, atunci $Q = L$, adică sistemul poate efectua un lucru mecanic egal cu căldura primită din exterior şi invers. Dacă sistemul efectuează lucru mecanic fără a primi căldură din exterior, atunci lucrul mecanic este efectuat pe seama reducerii energiei interne a sistemului (destindere adiabatică).

c) Acest subiect a fost tratat la V.5.c.

XXI. 1°. a) Vom utiliza notaţiile din figura F.B.81. În cursul ciocnirii plastice se conservă impulsul şi energia. Conservarea impulsului se scrie în modul următor:

$$(m_1 + m_2)v = m_1v_1 - m_2v_2,$$

de unde

$$v = \frac{m_1v_1 - m_2v_2}{m_1 + m_2}. \tag{1}$$

Vitezele celor două corpuri în momentul ciocnirii sînt date (fig. F.B.81) de

$$v_1 = \sqrt{2gh_1} = \sqrt{2gl(1 - \cos\alpha_1)}, \quad v_2 = \sqrt{2gh_2} = \sqrt{2gl(1 - \cos\alpha_2)}.$$

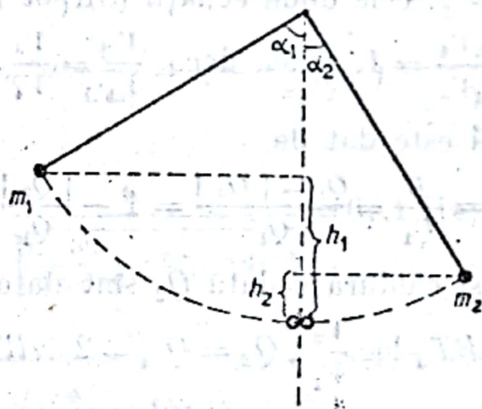


Fig. F.B.81

Ecuaţia (1) devine

$$v = \frac{\sqrt{2gl}\,(m_1\sqrt{1 - \cos\alpha_1} - m_2\sqrt{1 - \cos\alpha_2})}{m_1 + m_2} =$$

$$= \frac{\sqrt{2 \cdot 10 \cdot 1}\left(10^{-2} \cdot \sqrt{1 - \frac{1}{2}} - 2{,}5 \cdot 10^{-2} \cdot \sqrt{1 - \frac{3}{2}}\right)}{3{,}5 \cdot 10^{-2}} = -0{,}265 \text{ m/s}.$$

Semnul negativ arată că v este orientată în sensul vitezei v_2.

b) Conservarea energiei în procesul de ciocnire plastică se scrie

$$\frac{m_1v_1^2}{2} + \frac{m_2v_2^2}{2} = \frac{(m_1 + m_2)v^2}{2} + Q,$$

de unde

$$Q = \frac{1}{2}[m_1v_1^2 + m_2v_2^2 - (m_1 + m_2)v^2] =$$

$$= \frac{1}{2} 2\, gl[m_1(1 - \cos\alpha_1) + m_2(1 - \cos\alpha_2) - (m_1 + m_2)v^2] =$$

$$= 10 \cdot 1\left[10^{-2}\left(1 - \frac{1}{2}\right) + 2{,}5 \cdot 10^{-2}\left(1 - \frac{\sqrt{3}}{2}\right) - (10^{-2} + 2{,}5 \cdot 10^{-2})0{,}265^2\right] = 0{,}0589 \text{ J}.$$

c) Deviația maximă a corpului format în urma ciocnirii se obține din condiția ca energia potențială corespunzătoare deviației maxime (înălțimea h) să fie egală cu energia cinetică a corpului în momentul formării,

$$mgh = \frac{mv^2}{a}, \text{ de unde } h = \frac{v^2}{2g}.$$

Notînd cu α deviația firului față de verticală, ecuația înălțimii devine

$$l(1 - \cos\alpha) = \frac{v^2}{2g}, \text{ de unde } \cos\alpha = 1 - \frac{v^2}{2gl} = 1 - \frac{0{,}265^2}{2 \cdot 10 \cdot 1} = 0{,}996,$$

deci α este inferior lui 5°. În aceste condiții perioada oscilației este dată de

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}} = 2\pi\sqrt{\frac{1}{10}} \approx 2 \text{ s}.$$

2°. a) Randamentul ciclului Carnot

$$\eta = 1 - \frac{T_2}{T_1} = 1 - \frac{300}{1\,200} = \frac{3}{4} = 0{,}75.$$

b) Căldura este preluată de gaz de la sursa caldă în cursul destinderii izoterme (fig. F.B.82) este

$$Q_1 = \nu R T_1 \ln\frac{V_2}{V_1}. \quad (1)$$

Calculăm raportul V_2/V_1.

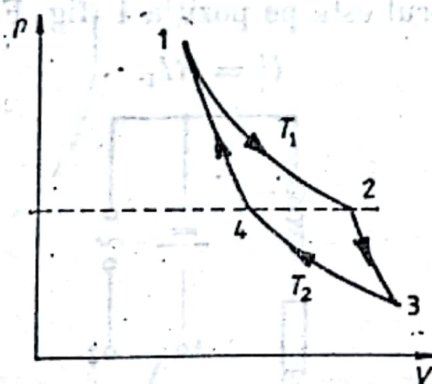


Fig. F.B.82

Conform textului, $p_4 = p_2$. Pentru transformările izoterme, $p_1V_1 = p_2V_2$, $p_3V_3 = p_4V_4$, de unde

$$\frac{p_1}{p_3} = \frac{V_2V_3}{V_1V_4}. \quad (2)$$

Pe de altă parte, conform ecuației termice de stare a gazului ideal,

$$\frac{p_1V_1}{T_1} = \frac{p_3V_3}{T_2} \text{ sau } \frac{p_1}{p_3} = \frac{V_3T_1}{V_1T_2}. \quad (3)$$

Din ecuațiile (2) și (3) rezultă

$$\frac{V_2}{V_4} = \frac{T_1}{T_2}. \tag{4}$$

Vom utiliza ecuația transformării adiabatice $1 \rightarrow 4$,

$$T_1 V_1^{\gamma-1} = T_2 V_4^{\gamma-1}, \text{ de unde}$$

$$\frac{V_1}{V_4} = \left(\frac{T_2}{T_1}\right)^{\frac{1}{\gamma-1}}. \tag{5}$$

Eliminînd V_4 între ecuațiile (4) și (5), rezultă

$$\frac{V_2}{V_1} = \left(\frac{T_1}{T_2}\right)^{\frac{\gamma}{\gamma-1}}.$$

Coeficientul adiabatic se obține ținînd seama de ecuația de definiție $\gamma = \frac{C_p}{C_V}$ și de relația Robert-Meier $C_p - C_V = R$. Rezultă $\gamma = \frac{C_V + R}{C_V}$. Ecuația (1) devine

$$Q_1 = \nu R T_1 \frac{\gamma}{\gamma - 1} \ln \frac{T_1}{T_2} = \nu R T_1 \frac{C_V + R}{R} \ln \frac{T_1}{T_2} =$$

$$= 5 \cdot 10^{-3} \cdot 8\,310 \cdot 1\,200 \left(\frac{3}{2} + 1\right) \ln \frac{1\,200}{300} = 172{,}7 \text{ kJ}.$$

c) $P = \frac{L}{t} = \frac{Q_1 - |Q_2|}{t} = \frac{\nu R}{t}\left(T_1 \ln \frac{V_2}{V_1} - T_2 \ln \frac{V_2}{V_1}\right) =$

$$= \frac{\nu R}{t}(T_1 - T_2) \frac{C_V + R}{R} \ln \frac{T_1}{T_2} = \frac{5 \cdot 10^{-3} \cdot 8\,310}{\frac{1}{10}} (1\,200 - 300) \frac{5}{2} \cdot 2 \ln 2 = 1{,}295 \text{ MW}.$$

3°. a) Cînd comutatorul este pe poziția 1 (fig. F.B.83),

$$U = RI_1. \tag{1}$$

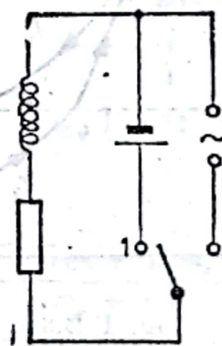


Fig. F.B.83

Cînd comutatorul este pe poziția 2,

$$U = I_2 Z = I_2 \sqrt{R^2 + L^2\omega^2}. \tag{2}$$

Din (1), rezultă

$$R = \frac{U}{I_1} = \frac{6}{2} = 3\ \Omega.$$

Din ecuația (2) $L = \frac{1}{2\pi\nu}\sqrt{\frac{U^2}{I_2^2} - R^2} = \frac{1}{2\pi \cdot 10^3}\sqrt{\frac{36}{3} - 9} = 2{,}75 \cdot 10^{-4}$ H.

b) $\operatorname{tg}\varphi = \frac{L\omega}{R} = \frac{2\pi\nu L}{R} = \frac{2\pi \cdot 10^3 \cdot 2{,}75 \cdot 10^{-4}}{3} = 0{,}576$; $\varphi = \operatorname{arc\,tg} 0{,}576 \approx 30°$;

$$P_a = UI_2 \cos\varphi,$$

dar $\cos\varphi = \frac{U_R}{U}$, deci $P_a = U_R I_2 = RI_2^2 = 3 \cdot 3 = 9$ W.

c) $C = \frac{Q}{U} = \frac{18 \cdot 10^{-6}}{6} = 3 \cdot 10^{-6}$ F.

4°. a) Variația $\Delta\vec{v}$ a vitezei unui corp aflat într-o mișcare circulară uniformă, într-un interval de timp Δt, mult mai mic decît perioada T a mișcării, poate fi calculată, ținînd seama că ea reprezintă baza unui triunghi isoscel avînd laturile egale cu v (fig. F.B.84) și unghiul de la vîrf $\Delta\alpha = \omega\Delta t$. Dacă Δt este foarte mic, atunci baza triunghiului poate fi aproximată cu un arc de cerc și deci $|\Delta\vec{v}| \cong v\Delta\alpha$ sau $\Delta v = v\omega\Delta t$. Întrucît $\Delta\vec{v}$ este orientat spre centrul traiectoriei (la limita $\Delta t \to 0$), accelerația centripetă va avea direcția radială, sensul spre centrul mișcării de rotație și valoarea

$$a_n = \frac{\Delta v}{\Delta t} = v\omega = \frac{v^2}{R} = \omega^2 R,$$

unde R este raza traiectoriei circulare.

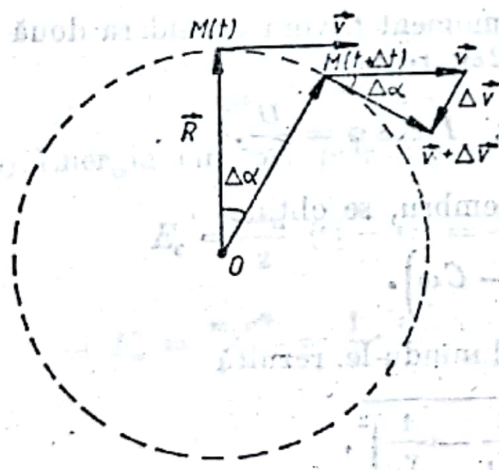


Fig. F.B.84

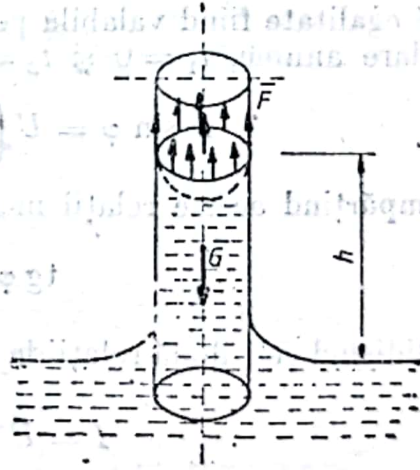


Fig. F.B.85

b) Legea lui Jurin se referă la înălțimea la care se ridică un lichid într-un tub capilar, cînd lichidul udă pereții tubului. Considerăm un capilar introdus într-un lichid de densitate ρ, coeficientul de tensiune superficială σ și care udă peretele tubului. Lichidul urcă în tubul capilar pînă cînd greutatea $\vec{G}$ a coloanei de lichid din capilar este echilibrată de rezultanta $\vec{F}$ a forțelor de tensiune superficială care acționează pe conturul circular al meniscului (figura F.B.85), adică $G = F$. Întrucît $G = mg = \pi r^2 h\rho g$ și $F = \sigma l = 2\pi r\sigma$, rezultă $\pi r^2 h\rho g = 2\pi r\sigma$, de unde $h = \frac{2\sigma}{r\rho g}$. Aceasta reprezintă formula lui Jurin.

Pentru lichide care nu udă peretele vasului, meniscul va fi convex, forțele de tensiune superficială sînt orientate în jos și lichidul din vasul capilar coboară sub nivelul lichidului din exterior. Denivelarea h este dată de aceeași formulă — formula lui Jurin.

c) Circuitul RLC paralel de curent alternativ este arătat în figura F.B.86, iar diagrama fazorială corespunzătoare în figura F.B.87. Prin ramurile circuitului, intensitățile instantanee sînt date de

$$i_R = \frac{\sqrt{2}\,U}{R}\sin\omega t,\ i_L = \frac{\sqrt{2}\,U}{X_L}\sin\left(\omega t - \frac{\pi}{2}\right),\ i_C = \frac{\sqrt{2}\,U}{X_C}\sin\left(\omega t + \frac{\pi}{2}\right).$$

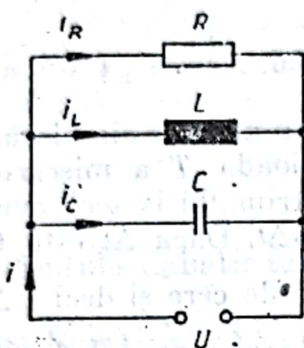


Fig. F.B.86

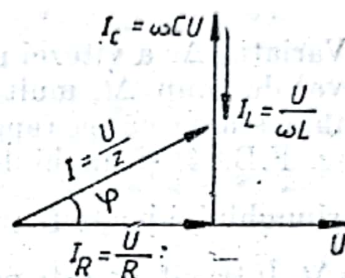


Fig. F.B.87

Conform legii I a lui Kirchhoff, intensitatea totală $i = \sqrt{2}\,I\,\sin(\omega t - \varphi)$ este suma intensităților curenților din ramificații, adică

$$I\sin(\omega t - \varphi) = \frac{U}{R}\sin\omega t + \frac{U}{X_L}\sin\left(\omega t - \frac{\pi}{2}\right) + \frac{U}{X_C}\sin\left(\omega t + \frac{\pi}{2}\right).$$

Această egalitate fiind valabilă pentru orice moment t, vom considera două valori particulare anume, $t_1 = 0$ și $t_2 = T/4 = \pi/2\omega$; rezultă

$$I\sin\varphi = U\left(\frac{1}{X_L} - \frac{1}{X_C}\right);\quad I\cos\varphi = \frac{U}{R}.$$

Împărțind aceste relații membru cu membru, se obține

$$\operatorname{tg}\varphi = R\left(\frac{1}{L\omega} - C\omega\right).$$

Ridicînd cele două relații la pătrat și adunîndu-le, rezultă

$$I = U\sqrt{\frac{1}{R^2} + \left(\frac{1}{X_L} - \frac{1}{X_C}\right)^2}.$$

Dar, conform legii lui Ohm, $I = U/Z$, deci expresia impedanței va fi

$$Z = \frac{1}{\sqrt{\frac{1}{R^2} + \left(\frac{1}{X_L} - \frac{1}{X_C}\right)^2}}.$$

5°. a) Coeficientul de dilatare termică liniară se notează cu α și se exprimă prin relația

$$\alpha = \frac{\Delta l}{l_0 \Delta T},$$

în care $\Delta l = l - l_0$, l fiind lungimea barei corespunzătoare temperaturii t °C, l_0 lungimea barei la temperatura de 0 °C, iar ΔT variația de temperatură.

b) Oscilaţia într-un punct P care se află la distanţa x de sursa de oscilaţii este descrisă de ecuaţia

$$y_P = A \sin 2\pi\left(\frac{t}{T} - \frac{x}{\lambda}\right),$$

unde y_P reprezintă elongaţia la momentul t, A este valoarea maximă a elongaţiei (amplitudinea), T este perioada, iar λ lungimea de undă.

c) Ecuaţia internă a unui tub electronic este o relaţie între rezistenţa internă R_i a tubului, panta S a porţiunii rectilinii a caracteristicii $I_A = f(U_G)$ pentru $U_A = \text{const}$ şi coeficientul de amplificare μ: anume

$$SR_i = \mu.$$

XXII. 1°. a) Întrucît deplasarea blocului este neglijabilă în timpul ciocnirii, este ca şi cum aceasta s-ar petrece instantaneu (fig. F.B.88). Conservarea energiei şi conservarea impulsului se vor scrie

$$\frac{m_p v_1^2}{2} - \frac{m_p v_2^2}{2} = Q + \frac{m_b v'^2}{2},$$

$$m_p v_1 = m_p v_2 + m_b v' \Rightarrow v' = \frac{m_p(v_1 - v_2)}{m_b},$$

unde v' este viteza blocului imediat după interacţiunea cu proiectilul.

Blocul se va deplasa pînă la oprire sub acţiunea forţei de frecare $F_f = \mu m_b g$, deci va efectua o mişcare încetinită cu acceleraţia $a = -\mu g$. Conform ecuaţiei Galilei, $v^2 = v_0^2 + 2aS$, la oprire $v = 0$, deci punînd $v_0 = v'$, $S = d$ şi $a = -\mu g$, rezultă

$$\mu = \frac{v'^2}{2gd} = \frac{m_p^2(v_1 - v_2)^2}{2m_b^2 gd} = \frac{4\cdot 10^{-6}(500 - 100)^2}{2\cdot 1^2\cdot 10\cdot 0{,}2} = 0{,}16.$$

b) Energia cinetică pierdută de proiectil este

$$E_c = \frac{m_p}{2}(v_1^2 - v_2^2) = \frac{2\cdot 10^{-3}}{2}(500^2 - 100^2) = 15 \text{ J}.$$

c) $$E_c' = \frac{m_b v'^2}{2} = \frac{1}{2}\cdot\frac{m_p^2(v_1 - v_2)^2}{m_b} = \frac{4\cdot 10^{-6}(500 - 100)^2}{2\cdot 1} = 0{,}32 \text{ J}.$$

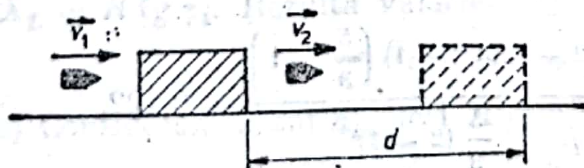


Fig. F.B.88

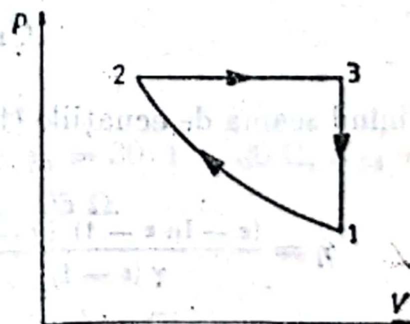


Fig. F.B.89

Observaţie: energia consumată pentru străbaterea blocului datorită frecării este $Q = 15 - 0{,}32 = 14{,}68$ J.

2°. a) Transformarea ciclică descrisă în textul problemei este arătată în figura F.B.89.

Lucrul efectuat într-un ciclu este egal cu suma lucrurilor efectuate în diferitele transformări, $L = L_{12} + L_{23} + L_{31}$. Întrucît transformarea $3 \to 1$ se face la volum constant,

$$L_{31} = 0; L_{12} = \nu R T_1 \ln \frac{V_2}{V_1}; \ L_{23} = p_2(V_3 - V_2) = p_2 V_2 \left(\frac{V_1}{V_2} - 1\right) = \nu R T_1 \left(\frac{V_1}{V_2} - 1\right).$$

Rezultă

$$L = \nu R T_1 \left(\ln \frac{V_2}{V_1} + \frac{V_1}{V_2} - 1\right) = \nu R T_1 \left(\ln \frac{1}{\varepsilon} + \varepsilon - 1\right) = \tag{1}$$

$$= 4 \cdot 8\,310 \left(\ln \frac{1}{2} + 2 - 1\right) = 10\,204{,}7 \text{ J}.$$

b) Randamentul ciclului este dat de $\eta = \frac{L}{Q_1}$, unde Q_1 este căldura primită într-un ciclu.

În transformarea izotermă $1 \to 2$, căldura $Q_{12} = L_{12} < 0$, deci este cedată de sistem.

Pentru transformarea izobară $2 \to 3$, $Q_{23} = \nu C_p(T_3 - T_2) = \nu C_p(T_3 - T_1)$. Din ecuația transformării,

$$\frac{V_2}{T_2} = \frac{V_3}{T_3} \Rightarrow T_3 = \frac{V_3}{V_2} T_2 = \varepsilon T_1 = 2 \cdot 400 = 800 \text{ K}.$$

Rezultă $Q_{23} = \nu C_p T_1(\varepsilon - 1) > 0$, deci este primită de sistem.

În transformarea izocoră $Q_{31} = \nu C_v(T_1 - T_3) = \nu C_v T_1(1 - \varepsilon) < 0$, deci Q_{31} este cedată de gaz. În consecință,

$$Q_1 = Q_{23} = \nu C_p T_1(\varepsilon - 1).$$

Utilizînd relațiile

$$\frac{C_p}{C_v} = \gamma \text{ și } C_p - C_v = R,$$

avem

$$Q_1 = \frac{\nu \gamma R T_1}{\gamma - 1}(\varepsilon - 1). \tag{2}$$

Ținînd seama de ecuațiile (1) și (2), randamentul devine

$$\eta = \frac{(\varepsilon - \ln \varepsilon - 1)\ (\gamma - 1)}{\gamma\,(\varepsilon - 1)} = \frac{(2 - 0{,}693 - 1)\left(\frac{5}{3} - 1\right)}{\frac{5}{3}\,(2 - 1)} = 0{,}122.$$

c) Temperaturile extreme atinse în cursul ciclului sînt $T_1' = \varepsilon T_1$ și $T_2' = T_1$. Randamentul ciclului Carnot este

$$\eta_c = 1 - \frac{T_2'}{T_1'} = 1 - \frac{T_1}{\varepsilon T_1} = \frac{\varepsilon - 1}{\varepsilon} = \frac{2 - 1}{2} = \frac{1}{2} = 0{,}5.$$

3°. a) Cele două variante ale circuitului sînt arătate în figura F.B.90.

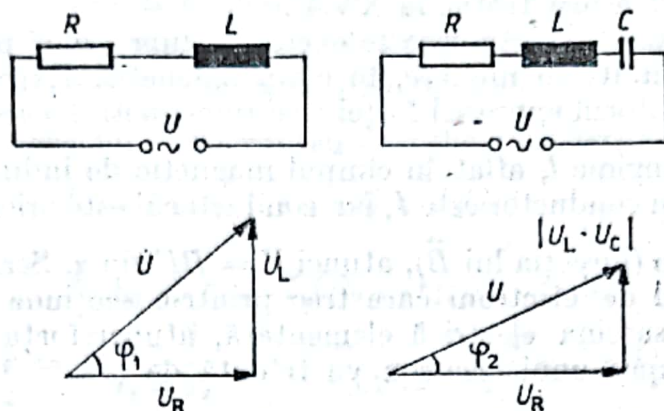


Fig. F.B 90

În primul caz defazajul este dat de

$$\operatorname{tg} \varphi_1 = \frac{U_L}{U_R} = \frac{X_L}{R}, \tag{1}$$

iar în al doilea de

$$\operatorname{tg} \varphi_2 = \frac{|X_L - X_C|}{R}.$$

Există două posibilități:

$$\text{a}_1)\ X_L > X_C \Rightarrow \operatorname{tg} \varphi_2 = \frac{X_L - X_C}{R}; \tag{2'}$$

$$\text{a}_2)\ X_L < X_C \Rightarrow \operatorname{tg} \varphi_2 = \frac{X_C - X_C}{R}. \tag{2''}$$

Din ecuațiile (1) și (2′), prin scădere, avem

$$R_1 = \frac{X_C}{\operatorname{tg} \varphi_1 - \operatorname{tg} \varphi_2} = \frac{12{,}7}{\operatorname{tg} \frac{\pi}{4} - \operatorname{tg} \frac{\pi}{6}} = \frac{12{,}7}{1 - \frac{\sqrt{3}}{3}} = 30\ \Omega.$$

Din ecuațiile (1) și (2″), prin adunare, avem

$$R_2 = \frac{X_C}{\operatorname{tg} \varphi_1 + \operatorname{tg} \varphi_2} = \frac{12{,}7}{1 + \frac{\sqrt{3}}{3}} = 8{,}05\ \Omega.$$

b) Reactanța bobinei se obține din (1),

$X_L = R \operatorname{tg} \varphi_1$. Rezultă valorile $X_{L1} = R_1 \operatorname{tg} \varphi_1 = 30 \cdot 1 = 30\ \Omega$, $X_{L2} =$
$= R_2 \operatorname{tg} \varphi_2 = 8{,}05 \cdot 1 = 8{,}05\ \Omega$.

c) Considerăm cazul a_1, deci $R = 30\ \Omega$.

Puterea activă $P = UI \cos \varphi_2 = \frac{U^2}{R} \cos \varphi_2 = \frac{100^2}{90} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = 288{,}6$ W.

Puterea reactivă $P = UI \sin \varphi_2 = \frac{U^2}{R} \sin \varphi_2 = \frac{100^2}{30} \cdot \frac{1}{2} = 166{,}6$ VAR.

Puterea aparentă $P = UI = \frac{U^2}{R} = \frac{100^2}{30} = 333{,}3$ VA.

4°. a) Acest subiect a fost tratat la II.4°.a.

b) Acest subiect a fost tratat la XV.4°.c.

c) Forța Lorentz este forța care se exercită asupra unei particule purtătoare de sarcină electrică aflată în mișcare, în cîmp magnetic. Expresia forței Lorentz se poate obține cu ajutorul expresiei forței electromagnetice care se exercită asupra unui conductor de lungime l, aflat în cîmpul magnetic de inducție $\vec{B}$. Dacă intensitatea curentului prin conductor este I, iar conductorul este orientat sub un unghi α față de liniile de cîmp (direcția lui $\vec{B}$), atunci $F = BIl \sin \alpha$. Scriind $I = Q/t = ne/t$, unde n este numărul de electroni care trec printr-o secțiune a conductorului în timpul t, iar e este sarcina electrică elementară, atunci forța pe care o exercită cîmpul magnetic asupra unui electron va fi dată de

$$f_e = \frac{F}{n} = \frac{BI\, l \sin \alpha}{n} = \frac{Bne\, l \sin \alpha}{nt} = eBv \sin \alpha,$$

unde $v = l/t$ este viteza medie cu care se mișcă electronii. Pentru o particulă cu sarcina q, care se mișcă cu viteza v în cîmpul de inducție B, forța Lorentz va fi $f_e = qvB \sin \alpha$.

5°. a) Teorema momentului cinetic pentru punctul material se enunță astfel: momentul forței care acționează asupra punctului material în raport cu un pol este egal cu variația în unitatea de timp a momentului cinetic al punctului în raport cu acel pol.

Ecuația este

$$\vec{M} = \frac{d\vec{L}}{dt},$$

unde $\vec{M} = \vec{r} \times \vec{F}$ și $\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p}$, $\vec{r}$ fiind vectorul de poziție.

b) Acest subiect a fost tratat la II.5°.b.

c) Acest subiect a fost tratat la XII.3°.c.

XXIII. 1°. a) Situația din enunțul problemei este prezentată în fig. F.B.91. Deformarea elastică este direct proporțională cu forța deformatoare, $F = kx$, deci $k = \frac{F}{x} = \frac{100}{10^{-2}} = 10^4$ N/m.

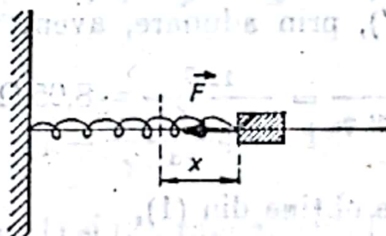


Fig. F.B.91

b) Oscilațiile sînt armonice și sînt caracterizate de pulsația $\omega = \sqrt{k/m}$, deci $\nu = \frac{\omega}{2\pi} = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{k}{m}} = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{10^4}{0,25}} = 31,83$ Hz.

c) Corpul atinge viteza maximă cînd trece prin poziția de echilibru. Viteza are valoarea maximă

$$v_{\max} = \omega \cdot x_{\max} = \sqrt{\frac{k}{m}} \cdot x = \sqrt{\frac{10^4}{0,25}} \cdot 10^{-2} = 2 \text{ m/s}.$$

d) Dacă inițial corpul este în poziția de echilibru, înseamnă că $x(0) = 0$. Scriind ecuația de mișcare sub forma generală, $x = x_{max} \sin(\omega t + \varphi)$ condiția de mai sus implică $\sin \varphi = 0$, deci $\varphi = 0$. Ecuația de mișcare se va scrie

$$x = x_{max} \sin \omega t.$$

2°. a) Scriind legea lui Ohm pentru cele două situații,

$$E = I_1(R_1 + r), \quad E = I_2(R_2 + r), \tag{1}$$

rezultă

$$I_1(R_1 + r) = I_2(R_2 + r), \text{ de unde}$$

$$r = \frac{I_2 R_2 - I_1 R_1}{I_1 - I_2} = \frac{0,24 \cdot 6 - 0,64 \cdot 2}{0,64 - 0,24} = 0,4 \ \Omega.$$

Din prima ecuație (1),

$$E = 0,64(2 + 0,4) = 1,536 \ \text{V}.$$

b) Rezistența circuitului exterior va fi $R_e = \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2} = \frac{6 \cdot 2}{6 + 2} = 1,5 \ \Omega$.

Din legea lui Ohm pentru întreg circuitul,

$$I = \frac{E}{R_e + r} = \frac{1,536}{1,5 + 0,4} = 0,808 \ \text{A}.$$

c) Energia consumată în rezistor este $W = RI^2 t$, deci

$$W_1 = R_1 I_1'^2 t, \quad W_2 = R_2 I_2'^2 t,$$

unde I_1' și I_2' sînt intensitățile curenților prin cei doi rezistori legați în paralel. Conform legilor lui Kirchhoff, $I = I_1' + I_2'$, $I_1' R_1 = I_2' R_2$, de unde

$$I_1' = \frac{I}{1 + \frac{R_1}{R_2}} = \frac{0,808}{1 + \frac{2}{6}} = 0,606 \ \text{A};$$

$$I_2' = I - I_1' = 0,808 - 0,606 = 0,202 \ \text{A};$$

$$W_1 = R_1 I_1'^2 t = 2 \cdot 0,606^2 \cdot 10 \cdot 3\,600 = 2,64 \cdot 10^4 \ \text{J} = \frac{2,64 \cdot 10^4}{3,6 \cdot 10^6} = 7,33 \cdot 10^{-3} \ \text{kWh};$$

$$W_2 = R_2 I_2'^2 t = 6 \cdot 0,202^2 \cdot 10 \cdot 3\,600 = 8,8 \cdot 10^3 \ \text{J} = 2,44 \cdot 10^{-3} \ \text{kWh}.$$

3°. a) Principiul acțiunilor reciproce se formulează astfel: dacă un corp acționează asupra altuia cu o forță, numită acțiune, atunci cel de al doilea corp acționează asupra primului cu o forță egală în modul și opusă ca sens, numită reacțiune, adică $\vec{F}_{12} = -\vec{F}_{21}$.

b) Formula lui Galilei se scrie

$$v^2 = v_0^2 + 2a(x - x_0),$$

unde v_0 este valoarea vitezei la coordonata x_0, v este viteza punctului material la coordonata x, iar a este accelerația (constantă) a mișcării. Formula Galilei este valabilă numai în cazul mișcării uniform variate.

c) Acest subiect a fost tratat în cadrul problemei X.3°.c.

4°. a) Corpurile în mișcare posedă energie, deoarece acționînd asupra altor corpuri pot produce un lucru mecanic (le pot pune în mișcare, le pot deforma etc.).

Energia pe care o are un corp în mișcare (în raport cu un anumit sistem de referință) reprezintă energia cinetică a corpului. Lucrul mecanic pe care îl poate efectua un corp pe seama energiei sale cinetice este egal cu lucrul mecanic efectuat

de forța care a adus corpul din repaus în starea de mişcare considerată (cu viteza v). Acesta este $L = Fd$, dacă forța este constantă pe distanța d și deplasarea se face pe direcția forței. Întrucît $F = ma$ și conform ecuației Galilei $v^2 = 2\,ad$ (deoarece am luat $v_0 = 0$) rezultă $L = \frac{mv^2}{2}$. Deci energia cinetică a corpului care are o mişcare de translație cu viteza v este

$$E_c = \frac{mv^2}{2}.$$

Evident, dacă $v_0 \neq 0$, atunci ecuația lucrului mecanic devine

$$L = \frac{mv^2}{2} - \frac{mv_0^2}{2}$$

și reprezintă forma uzuală a teoremei variației energiei cinetice.

b) Compunerea condensatorilor în paralel se face aşa cum arată figura F.B.92. Toți condensatorii vor avea aceeași diferență de potențial între armături, anume $V_A - V_B$. Capacitatea echivalentă a sistemului va fi, prin definiție, raportul dintre cantitatea de electricitate Q înmagazinată în sistemul de condensatori și diferența de potențial la bornele sistemului,

$C = \frac{Q}{V_A - V_B}$. Dar $Q = Q_1 + Q_2 + \ldots + Q_n = (V_A - V_B)(C_1 + C_2 + \ldots + C_n)$.

Astfel

$$C = \frac{(V_A - V_B)\ (C_1 + C_2 + \ldots + C_n)}{V_A - V_B} = \sum_{i=1}^{n} C_i.$$

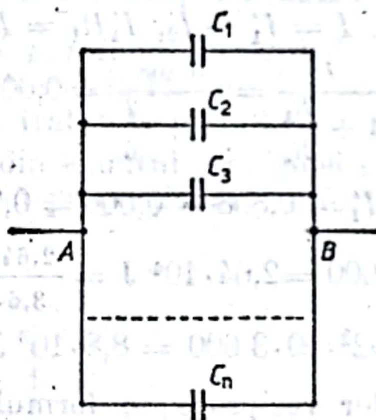


Fig. F.B.92

c) Forța de interacțiune care apare între doi conductori parcurși de curent electric reprezintă forța electromagnetică cu care fiecare conductor interacționează cu cîmpul magnetic generat de celălalt conductor; astfel, $F_1 = I_1 l B_2$ va reprezenta forța care se exercită pe o lungime l a conductorului 1 parcurs de curentul de intensitate I_1, datorită cîmpului generat de conductorul 2, în zona spațială în care se găsește conductorul 1. Considerînd conductorii foarte lungi, cîmpul magnetic generat de conductorul prin care circulă curentul de intensitate I_2, la distanța r (distanța dintre conductori) este caracterizat de inducția $B_2 = \frac{\mu_0 \mu_r I_2}{2\pi r}$, unde μ_0 este permeabilitatea vidului, iar μ_r permeabilitatea relativă a substanței în care se află conductorii. Introducînd în expresia forței, rezultă

$$F_1 = \frac{\mu_0 \mu_r I_1 I_2}{2\pi r}.$$

Forța F_2 care acționează asupra conductorului parcurs de curentul I_2 va avea aceeași expresie, dar va fi de sens opus (este satisfăcută legea acțiunii și reacțiunii).

XXIV. 1°. a) Conform formulei Galilei, $v = \sqrt{2gh} = \sqrt{2 \cdot 10 \cdot 0{,}8} = 4$ m/s.

b) În mișcarea prin apă asupra corpului va acționa și forța arhimedică F_A. Întrucît corpul ajunge pe fundul lacului cu viteză nulă, înseamnă că $F_A > G$. Accelerația corpului în apă va fi dată de

$$ma = G - F_A, \text{ de unde } a = \frac{G - F_A}{m} = \frac{\rho_c V g - \rho_a V g}{\rho_c V} = g\left(1 - \frac{\rho_a}{\rho_c}\right).$$

Viteza la fundul lacului se va obține tot cu ajutorul ecuației Galilei, v de la punctul a fiind viteza inițială, $v' = \sqrt{v^2 + 2aS}$. Cum $v' = 0$, rezultă adîncimea lacului,

$$S = -\frac{v^2}{2a} = \frac{v^2}{g\left(\frac{\rho_a}{\rho_c} - 1\right)} = \frac{2h\rho_c}{\rho_a - \rho_c} \quad \frac{2 \cdot 0{,}8 \cdot 800}{1\,000 - 800} = 6{,}4 \text{ m}.$$

c) Considerăm intervalul de timp măsurat din momentul în care începe căderea corpului, deci

$$t = t_1 + t_2 + t_3,$$

unde t_1 este timpul de cădere pînă la suprafața apei, t_2, timpul cît durează scufundarea și t_3 este timpul de urcare pînă la suprafață. Utilizînd ecuația vitezei, $v = v_0 + at$, avem

$$t_1 = \frac{v}{g} = \frac{4}{10} = 0{,}4 \text{ s},$$

$$t_2 = -\frac{v}{a} = \frac{v}{g\left(\frac{\rho_a}{\rho_c} - 1\right)} = \frac{4}{10\left(\frac{1\,000}{800} - 1\right)} = 1{,}6 \text{ s},$$

$$t_3 = t_2 = 1{,}6 \text{ s},$$

deci $t = 0{,}4 + 1{,}6 + 1{,}6 = 3{,}6$ s.

d) În general, $p = mv = m(v_0 + at)$, deci impulsul este funcție liniară de timp, panta dreptei fiind proporțională cu accelerația. Impulsul crește în intervalul de timp t_1, scade în t_2 și crește din nou în t_3.

Graficul va fi cel din figura F.B.93.

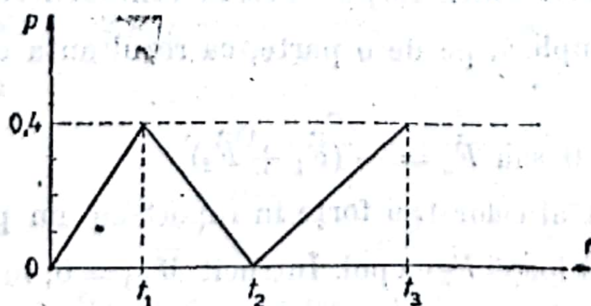


Fig. F.B.93

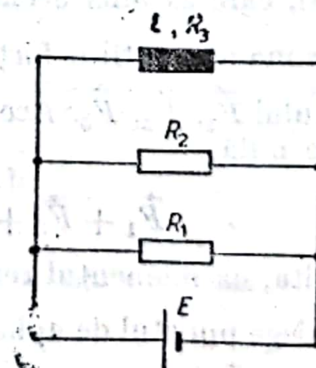


Fig. F.B.94

Valoarea maximă este $p_{max} = mv = 0{,}1 \cdot 4 = 0{,}4$ kgm/s și este atinsă cînd corpul se află la suprafața apei.

2°. Circuitul descris în text este arătat în figura F.B.94.

a) Rezistența totală a circuitului este rezistența circuitului exterior (sursei),

$$R_e = \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3}\right)^{-1} + \left(\frac{R_2R_3 + R_1R_2 + R_1R_3}{R_1R_2R_3}\right)^{-1} = \frac{R_1R_2R_3}{R_2R_3 + R_1R_2 + R_1R_3} =$$

$$= \frac{10\cdot4\cdot5}{4\cdot5 + 10\cdot4 + 5\cdot10} = 1,82\ \Omega.$$

b) Conform legii electrolizei,

$$m = KIt = K\frac{E}{R_2}t = 0,33\frac{20}{4}\cdot3\,600 = 5\,940\ \text{mg} = 5,94\ \text{g}.$$

c) $\Phi = BNS = \mu HNS = \mu\dfrac{N^2S}{l}I = \mu\dfrac{N^2S}{l}\dfrac{E}{R_3} =$

$$= \frac{4\cdot\pi\cdot10^{-7}\,(10^3)^2\cdot10^{-3}}{0,4}\cdot\frac{20}{5} = 1,256\cdot10^{-2}\ \text{Wb};$$

$$L = \frac{\Phi}{I} = \mu\frac{N^2S}{l} = \frac{4\cdot\pi\cdot10^{-7}\,(10^3)^2\cdot10^{-3}}{0,4} = 3,14\cdot10^{-3}\ \text{H}.$$

3°. a) Un sistem de două forțe paralele, de sens opus, care acționează asupra unui corp, arată ca în figura F.B. 95.

În particular, unghiul α dintre direcția forțelor și segmentul care unește punctele lor de aplicație poate fi $\frac{\pi}{2}$.

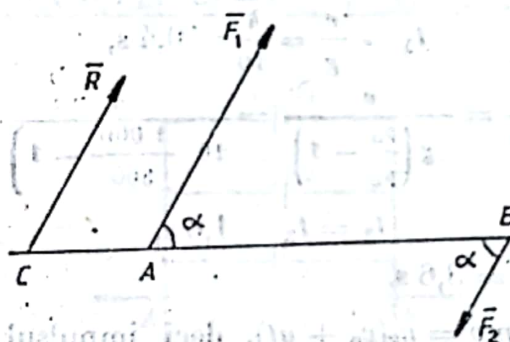


Fig. F.B.95

Se pune problema înlocuirii acestui sistem de forțe printr-o singură forță (rezultantă), care să aibă același efect de mișcare asupra corpului. Pentru aceasta vom determina mai întîi o forță $\vec{F}_3$, astfel încît corpul să fie în echilibru sub acțiunea sistemului $\vec{F}_1$, $\vec{F}_2$, $\vec{F}_3$. Aceasta implică, pe de o parte, ca rezultanta celor trei forțe să fie nulă,

$$\vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \vec{F}_3 = 0 \text{ sau } \vec{F}_3 = -(\vec{F}_1 + \vec{F}_2) \quad (1)$$

și, pe de alta, ca momentul rezultant al celor trei forțe în raport cu un pol să fie nul. Vom alege punctul de aplicație al forței $\vec{F}_3$ ca pol. Întrucît $\vec{M}_{F3} = 0$, momentele forțelor $\vec{F}_1$ și $\vec{F}_2$ trebuie să aibă sensuri opuse. Aceasta este posibil numai dacă polul se află în stînga punctului A (fig. F.B.95). În acest caz, modulul momentului rezultant va fi $CAF_1 \sin\alpha - CBF_2 \sin\alpha$. Condiția de echilibru conduce la relația

$$\frac{CB}{CA} = \frac{F_1}{F_2}. \quad (2)$$

Întrucît $\vec{F}_3$ echilibrează sistemul $\vec{F}_1$, $\vec{F}_2$, înseamnă că rezultanta forțelor este $\vec{R} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 = -\vec{F}_3$. Conform ecuației (1), modulul lui $\vec{R}$ este dat de diferența modulelor celor două forțe, $R = F_1 - F_2$, direcția este aceeași cu a forțelor, orientarea este în sensul forței mai mari, iar punctul ei de aplicație este dat de ecuația (2).

b) Acest subiect este tratat în X 3°. b.

c) Capacitatea unui condensator se definește prin cîtul dintre sarcina electrică Q de pe o armătură și diferența de potențial dintre cele două armături $(V_1 - V_2)$, $C = Q/(V_1 - V_2)$. Un condensator plan este format din două plăci plane, paralele, așezate față în față la o distanță d una de alta. Măsurînd diferența de potențial dintre plăci (armături) cu ajutorul unui electroscop, se constată că o creștere a distanței dintre plăci de k ori, de la d la kd, are ca efect o creștere tot de k ori a diferenței de potențial dintre cele două plăci, de la $V_1 - V_2$ la $k(V_1 - V_2)$. Întrucît depărtarea plăcilor, în absența contactului cu alte corpuri, nu modifică sarcina electrică de pe plăci Q, înseamnă că o creștere a diferenței de potențial implică o reducere în același raport a capacității. Această observație conduce la concluzia că, pentru un condesator plan, capacitatea este invers proporțională cu distanța dintre plăci, d, adică $C \sim 1/d$. Păstrînd constantă distanța dintre plăci și variind suprafața plăcilor aflate față în față, se constată prin experiențe similare că $C \sim S$. În sfîrșit, dacă, fără a modifica geometria condensatorului plan (d și S menținuți constanți), se introduce între armături o placă dintr-un material dielectric cu grosimea egală cu distanța d dintre acestea, se constată o creștere a capacității. Dacă experimentul se repetă cu plăci făcute din materiale dielectrice, caracterizate de permitivități diferite, se constată că există o relație de proporționalitate directă între capacitatea și permitivitatea mediului dintre armături. Punînd la un loc aceste constatări experimentale, se poate scrie

$$C = \frac{\varepsilon S}{d},$$

constanta de proporționalitate fiind egală cu unitatea atunci cînd se utilizează unitățile din SI.

4°. a) Nenumărate experimente efectuate cu tot felul de corpuri, aflate în cele mai variate stări de mișcare, cărora li s-au aplicat diferite forțe, au condus la formularea de către Newton a următorului principiu: vectorul forță $\vec{F}$ este proporțional cu produsul dintre masa corpului m și vectorul accelerație $\vec{a}$, adică $\vec{F} = m\vec{a}$.

b) Acest subiect a fost tratat în cadrul problemei II. 5°. a.

c) Acest subiect a fost tratat în III. 4°. c.

XXV. 1°. a) $\eta = \frac{Q_u}{Q_c}$, deci căldura necesară pentru funcționarea instalației este

$$Q_c = \frac{Q_u}{\eta} = \frac{m_1[c_a(T_f - T_0) + \lambda_c]t}{\eta} =$$

$$= \frac{100[4\,180(373 - 273) + 2{,}257 \cdot 10^6]2 \cdot 3\,600}{0{,}6} = 3{,}2 \cdot 10^9 \text{ kJ}.$$

b) $\eta_1 = \frac{Q_u}{Q_1}$ și $Q_1 = RI^2t_1$, deci $I = \sqrt{\frac{Q_1}{Rt_1}}$,

$$I = \sqrt{\frac{Q_u}{\eta_1 R t_1}} = \sqrt{\frac{100[4\,180(373 - 273) + 2{,}257 \cdot 10^6]2 \cdot 3\,600}{0{,}9 \cdot 200 \cdot 3\,600}} = 1\,724 \text{ A},$$

unde am considerat aceleași condiții inițiale ca la punctul a.

c) Cantitatea de căldură necesară pentru topirea gheţii şi încălzirea apei pînă la $T_f = 373$ K este obţinută prin condensarea unei cantităţi de vapori m_v, adică

$$m_2\lambda_t + m_2 c_a(T_f - T_0) = m_v\lambda_v.$$

Rezultă

$$m_v = \frac{m_2[\lambda_t + c_a(T_f - T_0)]}{\lambda_v} = \frac{1\cdot[3{,}35\cdot 10^5 + 4\,180\,(373 - 273)]}{2{,}257\cdot 10^6} = 0{,}333 \text{ kg}.$$

2°. a) Conform ecuaţiei termice de stare a gazului ideal, $pV = \frac{m}{\mu}RT$, deci

$$m = m_1 + m_2 = \frac{\mu}{RT}(p_1V_1 + p_2V_2) =$$

$$= \frac{28}{8\,310\cdot 300}(3\cdot 10^5\cdot 4\cdot 10^{-3} + 2\cdot 10^5\cdot 8\cdot 10^{-3}) = 0{,}0625 \text{ kg}.$$

După deschiderea robinetului, presiunea în cele 2 incinte este aceeaşi, p. Masa totală rămîne aceeaşi,

$$m_1' = \frac{\mu p V_1}{RT},\quad m_2' = \frac{\mu p V_2}{RT},\quad \text{deci } m = \frac{\mu P}{RT}(V_1 + V_2);$$

egalind cele două expresii, pentru m rezultă

$$\frac{\mu}{RT}(p_1V_1 + p_2V_2) = \frac{\mu p}{RT}(V_1 + V_2),\ \text{de unde } p = \frac{p_1V_1 + p_2V_2}{V_1 + V_2}.$$

Cele două mase devin

$$m_1' = \frac{\mu V_1}{RT}\,\frac{p_1V_1 + p_2V_2}{V_1 + V_2} = m\frac{V_1}{V_1 + V_2} = 0{,}0625\,\frac{4\cdot 10^{-3}}{4\cdot 10^{-3} + 8\cdot 10^{-3}} = 0{,}0208 \text{ kg},$$

$$m_2' = \frac{\mu V_2}{RT}\,\frac{p_1V_1 + p_2V_2}{V_1 + V_2} = m\frac{V_2}{V_1 + V_2} = 0{,}0625\,\frac{8\cdot 10^{-3}}{4\cdot 10^{-3} + 8\cdot 10^{-3}} = 0{,}0417 \text{ kg}$$

sau $m_2' = m - m_1' = 0{,}0625 - 0{,}0208 = 0{,}0417$ kg.

b) În incinta 2 presiunea este aceeaşi ca înainte de închiderea din nou a robinetului, anume

$$p_2' = p = \frac{p_1V_1 + p_2V_2}{V_1 + V_2} = \frac{3\cdot 10^5\cdot 4\cdot 10^{-3} + 2\cdot 10^5\cdot 8\cdot 10^{-3}}{4\cdot 10^{-3} + 8\cdot 10^{-3}} = 2{,}33\cdot 10^5 \text{ N/m}^2.$$

În incinta 1 încălzirea se face la volum constant deci $\frac{p_1'}{p} = \frac{T_1}{T}$ de unde

$$p_1' = \frac{T_1 p}{T} = \frac{400}{300}\cdot 2{,}33\cdot 10^5 = 3{,}10\cdot 10^5 \text{ N/m}^2.$$

c) $$v_t = \sqrt{\frac{3RT}{\mu}} = \sqrt{\frac{3\cdot 8\,310\cdot 300}{28}} = 516 \text{ m/s}.$$

Concentraţia de molecule (numărul de molecule din unitatea de volum) n se poate obţine cunoscînd masa de gaz din vas $m_2' = 0{,}0417$ kg. Într-un kmol există N_A molecule, deci în $\nu = \frac{m_2'}{\mu}$ kmoli vor exista $N = N_A\frac{m_2'}{\mu}$ molecule. Rezultă

$$n = \frac{N}{V_2} = \frac{N_A m_2'}{\mu V_2} = \frac{6{,}02\cdot 10^{26}\cdot 0{,}0417}{28\cdot 8\cdot 10^{-3}} = 1{,}12\cdot 10^{26}\,\frac{\text{molecule}}{\text{m}^3}.$$

3°. a) Ecuaţiile Kirchhoff pentru circuitul din figura F.B.96 vor avea forma

$$n_1E = I_1n_1r + IR, \quad (1)$$

$$n_2E = I_2n_2r + IR, \quad (2)$$

$$I = I_1 + I_2. \quad (3)$$

Înlocuind ultima ecuaţie în primele două, acestea devin

$$n_1E = I_1n_1r + R(I_1 + I_2) \Rightarrow I_2 = \frac{n_1(E - I_1r) - I_1R}{R}, \quad (4)$$

$$n_2E = I_2n_2r + R(I_1 + I_2) \Rightarrow I_2 = \frac{n_2E - RI_1}{R + n_2r}. \quad (5)$$

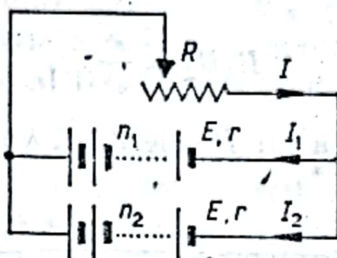


Fig. F.B.96

Egalînd cele două expresii ale lui I_2, rezultă

$$[n_1E - I_1(n_1r + R)](R + n_2r) = (n_2E - I_1R)R,$$

$$n_1ER + n_1n_2Er - I_1n_1rR - I_1n_1n_2r^2 - I_1R^2 - I_1Rn_2r = n_2ER - I_1R^2,$$

$$I_1r(n_1R + n_1n_2r + Rn_2) = E(n_1R - n_2R + n_1n_2r),$$

de unde

$$I_1 = \frac{E[n_1n_2r + (n_1 - n_2)R]}{r[n_1n_2r + (n_1 + n_2)R]} = \frac{2[8 \cdot 5 \cdot 0,2 + (8 - 5) \cdot 4]}{0,2[8 \cdot 5 \cdot 0,2 + (8+5) \cdot 4]} = 3,333 \text{ A},$$

$$I_2 = \frac{n_2E - RI_1}{n_2r + R} = \frac{5 \cdot 2 - 4 \cdot 3,33}{5 \cdot 0,2 + 4} = -0,664 \text{ A}.$$

Semnul minus arată că curentul I_2 are sensul opus celui considerat în figura F.B.96;

$$I = I_1 + I_2 = 3,333 - 0,664 = 2,669 \text{ A}.$$

b) Punînd condiţia $I_2 = 0$, ecuaţiile (4) şi (5) devin

$$n_1(E - I_1r) - I_1R = 0, \quad n_2E - RI_1 = 0.$$

Eliminînd I_1 între aceste ecuaţii, se obţine

$$n_1 = n_2\frac{n_1r + R}{R} \quad \text{sau} \quad R = \frac{n_1n_2r}{n_1 - n_2} = \frac{8 \cdot 5 \cdot 0,2}{8 - 5} = \frac{8}{3}\ \Omega.$$

c) Puterea disipată de rezistenţa R va fi

$$P = RI^2 = R(I_1 + I_2)^2 = R\left(I_1 + \frac{n_2E - RI_1}{n_2r + R}\right)^2 = R\frac{n_2}{n_2r + R}(I_1r + E)^2 =$$

$$= R\left[\left(\frac{E[n_1n_2r + (n_1 - n_2)R]}{r[n_1n_2r + (n_1 + n_2)R]}r + E\right)\frac{n_2}{n_2r + R}\right]^2 =$$

$$= R\left(\frac{2En_1n_2}{n_1n_2r + (n_1 + n_2)R}\right)^2 = R\left(\frac{2E}{r + \alpha R}\right)^2,$$

unde am introdus notaţia $\frac{1}{n_2} + \frac{1}{n_1} = \alpha$.

Dacă $P(R)$ este o funcţie cu un maxim, atunci înseamnă că fiecare valoare a lui P va fi obţinută pentru două valori ale lui R, deci

$$R_1\left(\frac{2E}{r+\alpha R_1}\right)^2 = R_2\left(\frac{2E}{r+\alpha R_2}\right)^2.$$

Efectuînd simplificările evidente, ecuaţia devine

$$R_1(r+\alpha R_2)^2 = R_2(r+\alpha R_1)^2$$

sau

$$(R_1-R_2)r^2 = R_1R_2\,\alpha^2(R_1-R_2),$$

adică

$$R_1R_2 = \frac{r^2}{\alpha^2};$$

Pentru valoarea maximă a lui P cele două valori ale lui R sînt confundate. Punînd $R_1 = R_2 = R$, rezultă

$$R = \frac{r}{\alpha} = \frac{rn_1n_2}{n_1+n_2} = \frac{0{,}2\cdot 8\cdot 5}{8+5} = 0{,}615\ \Omega.$$

Puterea corespunzătoare acestei valori a rezistenţei este

$$P_{\max} = R\left(\frac{2E}{r+\left(\frac{1}{n_2}+\frac{1}{n_1}\right)R}\right)^2 = 0{,}615\left(\frac{2\cdot 2}{0{,}2+\left(\frac{1}{5}+\frac{1}{8}\right)0{,}615}\right)^2 = 61{,}5\ \mathrm{W}.$$

4°. a) Coeficientul de dilatare în volum a unui lichid se notează cu γ şi este dat de expresia $\gamma = \Delta V/V_0\Delta t$, unde $\Delta V = V - V_0$ fiind volumul lichidului la temperatura iniţială $t_0 = 0\ °C$, V volumul corespunzător temperaturii finale t, iar $\Delta t = t - t_0$. Astfel, γ reprezintă variaţia relativă a volumului lichidului pentru o variaţie a temperaturii egală cu un grad.

Cînd se măsoară variaţia volumului unui lichid cu temperatura, trebuie să se ţină seama şi de dilatarea vasului care conţine lichidul. Variaţia de volum măsurată este o variaţie aparentă care include dilatarea atît a lichidului, cît şi a vasului. Coeficientul de dilatare calculat cu această variaţie va reprezenta coeficientul de dilatare aparentă, $\gamma_a = \Delta V_a/V_0\,\Delta t$. Notînd cu γ_s coeficientul de dilatare în volum al vasului, va exista relaţia $\gamma = \gamma_a + \gamma_s$.

b) Inducţia unui cîmp magnetic uniform este o mărime fizică vectorială, al cărei modul este egal cu raportul dintre forţa cu care acel cîmp magnetic acţionează asupra unui conductor rectiliniu, perpendicular pe liniile cîmpului magnetic, şi produsul dintre intensitatea curentului din conductor şi lungimea conductorului aflată în cîmp.

Unitatea de măsură a inducţiei magnetice în SI se numeşte tesla,

$$[B]_{SI} = \frac{[F]_{SI}}{[I]_{SI}\,[l]_{SI}} = \frac{N}{A\cdot m} = \mathrm{T}.$$

Un cîmp magnetic uniform are inducţia de 1 T, dacă exercită o forţă de 1 N asupra fiecărui metru din lungimea unui conductor, perpendicular pe liniile de cîmp, parcurs de un curent cu intensitatea de 1 A.

c) Parametrii unui tub electronic sînt mărimi care îi determină calităţile şi funcţiile. Parametrii fundamentali ai unui tub sînt: panta caracteristicii $I_A = f(U_G)$ în zona de liniaritate, factorul de amplificare şi rezistenţa internă.

Panta: pentru zona rectilinie panta caracteristicii, $I_A = f(U_G)$ pentru U_A = const, va fi

$$S = \operatorname{tg} \alpha = \left.\frac{\Delta I_A}{\Delta U_G}\right|_{U_A = \text{const}}.$$

Acest parametru arată cît de fin poate fi controlat curentul anodic prin variațiile tensiunii de grilă.

Factorul de amplificare: am prezentat anterior variația ΔI_A a curentului anodic produsă de o variație ΔU_G a tensiunii de grilă, atunci cînd tensiunea anodică este constantă. Evident este posibil să se obțină aceeași variație de curent anodic menținînd constantă tensiunea de grilă și variind tensiunea anodică cu ΔU_A. Raportul dintre variația tensiunii anodice ΔU_A și variația tensiunii de grilă ΔU_G, care au ca efect aceeași variație ΔI_A a intensității curentului anodic, poartă numele de factor de amplificare al triodei și se notează cu μ, adică

$$\mu = \left.\frac{\Delta U_A}{\Delta U_G}\right|_{\Delta I_A = \text{const}}.$$

Rezistența internă a unei triode este măsurată prin raportul dintre variația tensiunii anodice ΔU_A și variația corespunzătoare a intensității curentului anodic, atunci cînd tensiunea de grilă este menținută constantă,

$$R_i = \left.\frac{\Delta U_A}{\Delta I_A}\right|_{U_G = \text{const}}.$$

Rezistența internă exprimă măsura în care variațiile tensiunii anodice controlează intensitatea curentului anodic.

5°. a) Acest subiect a fost tratat în VI. 4°. a.

b) Două corpuri punctiforme, încărcate cu sarcinile electrice q_1 și q_2, interacționează reciproc (se atrag sau se resping) cu o forță $\vec{F}$ a cărei valoare absolută este proporțională cu produsul sarcinilor electrice și invers proporțională cu pătratul distanței dintre ele,

$$F = k\frac{q_1 q_2}{r^2},$$

unde $k = \frac{1}{4\pi\varepsilon}$, ε fiind permitivitatea electrică a mediului în care se află sarcinile. Direcția forței se află pe linia care unește cele două corpuri,

$$\vec{F} = \frac{q_1 \cdot q_2}{4\pi\varepsilon} \frac{\vec{r}}{r^3},$$

unde $\vec{r}$ este vectorul de poziție al uneia dintre sarcini față de cealaltă.

c) Impedanța Z a unui circuit de curent alternativ care conține o rezistență R, o inductanță L și o capacitate C legate în paralel (la aceeași tensiune) este dată de expresia

$$Z = \frac{1}{\sqrt{\frac{1}{R^2} + \left(\frac{1}{X_L} - \frac{1}{X_c}\right)^2}},$$

unde $X_L = L\omega$ și $X_c = 1/C\omega$, ω fiind pulsația tensiunii alternative.

XXVI. 1°. a) Randamentul ciclului Carnot este

$$\eta = 1 - \frac{T_2}{T_1} = 1 - \frac{T_0 + t_2}{T_0 + t_1} = 1 - \frac{273 + 27}{273 + 327} = 0{,}5.$$

Randamentul se mai exprimă sub forma

$$\eta = \frac{L}{Q_1}, \text{ de unde } Q_1 = \frac{L}{\eta} = \frac{4 \cdot 10^3}{0{,}5} = 8 \cdot 10^3 \text{ J}.$$

Pe de altă parte, $L = Q_1 - |Q_2|$, de unde

$$|Q_2| = Q_1 - L = 8 \cdot 10^3 - 4 \cdot 10^3 \text{ J},$$

deci

$$Q_2 = -4 \cdot 10^3 \text{ J}.$$

b) Pentru gazul ideal, energia internă depinde numai de temperatură, deci $\Delta U_{23} = \nu C_V(T_3 - T_2)$. Din ecuațiile $C_p - C_V = R$ și $\frac{C_p}{C_V} = \gamma$, rezultă $C_V = \frac{R}{\gamma - 1}$. Variația energiei interne devine

$$\Delta U_{23} = \frac{\nu R}{\gamma - 1}(T_3 - T_2) = \frac{\nu R}{\gamma - 1}(t_2 - t_1) = \frac{5 \cdot 10^{-3} \cdot 8{,}31 \cdot 10^3}{1{,}4 - 1}(27 - 327) =$$

$$= -3{,}12 \cdot 10^4 \text{ J}.$$

c) Din ecuația transformării adiabatice $T_1V_1^{\gamma-1} = T_4V_4^{\gamma-1}$, se obține

$$\varepsilon = \frac{V_4}{V_1} = \left(\frac{T_1}{T_4}\right)^{\frac{1}{\gamma-1}} = \left(\frac{T_0 + t_1}{T_0 + t_2}\right)^{\frac{1}{\gamma-1}} = \left(\frac{273 + 327}{273 + 27}\right)^{\frac{1}{1{,}4-1}} = 2^{\frac{5}{2}} = \sqrt{32} = 5{,}65.$$

2°. a) Legile lui Kirchhoff pentru sensurile curenților determinate de cele două surse din figura F.B.10 se vor scrie

$$I = I_1 + I_2, \tag{1}$$

$$I_1r_1 + IR = E_1, \tag{2}$$

$$I_2r_2 + IR = E_2. \tag{3}$$

Eliminîndu-l pe I, ecuațiile (2) și (3) devin

$$I_1(r_1 + R) = E_1 - I_2R, \tag{4}$$

$$I_2r_2 + I_1R + I_2R = E_2. \tag{5}$$

Scoțîndu-l pe I_1 din ecuația (4), avem

$$I_1 = \frac{E_1 - I_2R}{r_1 + R}. \tag{6}$$

Introducînd în (5), rezultă

$$I_2(r_2 + R) + \frac{R(E_1 - I_2R)}{r_1 + R} = E_2, \tag{7}$$

de unde

$$I_2 = \frac{E_2r_1 - R(E_1 - E_2)}{r_1r_2 + R(r_1 + r_2)} = \frac{125 \cdot 0{,}5 - 2(130 - 125)}{0{,}5 \cdot 0{,}2 + 2(0{,}5 + 0{,}2)} = 35 \text{ A}.$$

Din ecuaţia (6),

$$I_1 = \frac{E_1 - I_2R}{r_1 + R} = \frac{130 - 35 \cdot 2}{0,5 + 2} = 24 \text{ A}.$$

b) Căderea de tensiune pe rezistorul R este

$$U = IR = (I_1 + I_2)R = (24 + 35) \cdot 2 = 118 \text{ V}.$$

Energia disipată în timpul t este

$$W = UIt = \frac{U^2}{R}t = \frac{118^2}{2} \cdot 120 = 835,4 \text{ kJ}.$$

c) Cînd $I_1 = 0$, ecuaţiile (1), (2), (3) devin

$$I_2 = I, \; I_2R = E_1 \text{ şi } I_2r_2 + I_2R = E_2.$$

Eliminîndu-l pe I_2, rezultă

$$(R + r_2)E_1 = E_2R, \text{ de unde } E_1 = \frac{E_2R}{R + r_2} = \frac{125 \cdot 2}{2 + 0,2} = 113,6 \text{ V}.$$

Analog, cînd $I_1 = I_2 = \frac{I}{2}$, ecuaţiile (2) şi (3) devin

$$I\left(R + \frac{r_1}{2}\right) = E_1 \text{ şi } I\left(R + \frac{r_2}{2}\right) = E_2.$$

Împărţind aceste relaţii membru cu membru, rezultă

$$E_1 = \frac{2R + r_1}{2R + r_2}E_2 = \frac{2 \cdot 2 + 0,5}{2 \cdot 2 + 0,2}125 = 133,9 \text{ V}.$$

3°. a) Experienţa arată că pentru încălzirea unui corp de la temperatura T_1 la temperatura T_2 este necesară o căldură proporţională cu diferenţa de temperatură $\Delta T = T_2 - T_1$. Constanta de proporţionalitate k poartă numele de capacitate calorică a corpului, $k = \frac{Q}{\Delta T}$. Astfel, capacitatea calorică a unui corp este numeric egală cu căldura care trebuie furnizată corpului pentru ca temperatura lui să crească cu 1 grad. Capacitatea calorică a unei unităţi de masă (1 kg) a corpului reprezintă căldura specifică $c = k/m$, adică $c = Q/m\Delta T$. Cînd cantitatea de substanţă se măsoară în moli (kmoli), atunci capacitatea calorică corespunzătoare unui mol (kmol) de substanţă reprezintă căldura molară (kilomolară), $C = Q/\nu\Delta T$. Căldurile specifică şi molară depind numai de natura substanţei.

b) Acest subiect a fost tratat în VI.4°.a

c) Acest subiect a fost tratat în XVI.5°.6

4°. a) Intensitatea cîmpului electric într-un punct se notează $\vec{E}$ şi este egală cu raportul dintre forţa $\vec{F}$ cu care cîmpul acţionează asupra unui corp de probă aflat în punctul respectiv şi sarcina electrică q a corpului de probă, $\vec{E} = \vec{F}/q$. Unitatea de măsură pentru intensitatea cîmpului electric se defineşte ţinînd seama că în cazul unui condensator plan $E = U/d$, unde U este diferenţa de potenţial dintre plăci, iar d distanţa care le separă. Rezultă

$$[E]_{SI} = [U]_{SI}/[d]_{SI} = \text{V/m}.$$

b) Inductanţa L a unei bobine a cărei lungime l este mare în comparaţie cu diametrul ei este

$$L = \mu_0\mu_r\frac{N^2S}{l},$$

unde μ_0 este permeabilitatea vidului, μ_r permeabilitatea materialului din care este făcut miezul bobinei, N este numărul de spire al bobinei, iar S este secţiunea unei spire.

c) Acest subiect a fost tratat la II. 4°. c.

XXVII. 1°. Conform figurii F.B.97, tensiunea în fir este maximă în poziţia de echilibru, cînd atît greutatea G, cît şi forţa centrifugă F_c sînt orientate de-a lungul firului şi, în plus, F_c este maximă,

$$T_{max} = G + F_c.$$

Tensiunea în fir este minimă în poziţia de deviaţie maximă. Aici forţa centrifugă este nulă, deci

$$T_{min} = G \cos \alpha.$$

Raportul cerut este

$$\frac{T_{max}}{T_{min}} = \frac{G + F_c}{G \cos \alpha}. \tag{1}$$

Viteza corpului în momentul trecerii prin poziţia de echilibru se obţine cu ajutorul legii conservării energiei,

$$\frac{mv^2}{2} = mgh = mgl\,(1 - \cos \alpha). \tag{2}$$

Din ecuaţia (2) rezultă forţa centrifugă în poziţia de echilibru,

$$F_c = \frac{mv^2}{l} = 2\,mg\,(1 - \cos \alpha).$$

Introducînd în (1), rezultă

$$\frac{T_{max}}{T_{min}} = \frac{mg + 2mg\,(1 - \cos \alpha)}{mg \cos \alpha} = \frac{3 - 2 \cos \alpha}{\cos \alpha} = 4.$$

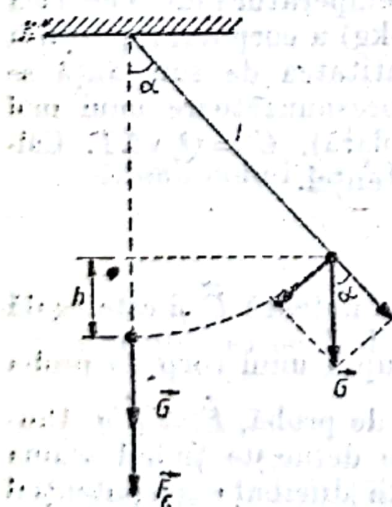


Fig. F.B.97

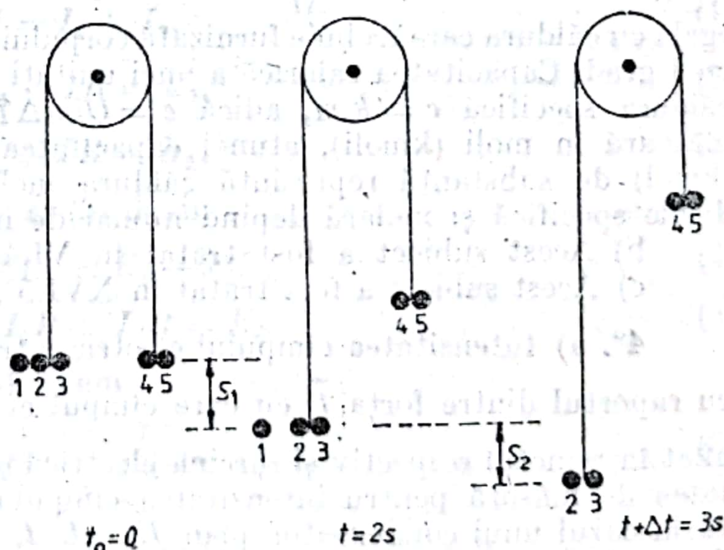


Fig. F.B.98

2°. a) Pentru rezolvarea problemei vom utiliza notaţiile din figura F.B.98. În intervalul între $t = 0$ şi $t = 2\ s$ mişcarea este accelerată, acceleraţia fiind dată de

$$a_1 = \frac{F}{M} = \frac{mg}{5m} = \frac{g}{5} = 2\ \text{m/s}^2.$$

Spaţiul parcurs de bile în acest interval este

$$S_1 = \frac{at^2}{2} = 4 \text{ m}.$$

În continuare, bila 1 se va mişca în cădere liberă cu viteza iniţială căpătată în timpul t. Spaţiul rămas, $h_1 = h - S_1 = 9$ m, va fi parcurs într-un timp t_1, dat de $h_1 = v_0 t_1 + \frac{g t_1^2}{2}$, unde $v_0 = a_1 t = 2 \cdot 2 = 4$ m/s. Înlocuind valorile numerice, ecuaţia pentru t_1 devine $5 t_1^2 + 4 t_1 - 9 = 0$, ale cărei soluţii sînt date de

$$t_1 = \frac{-2 \pm \sqrt{4 + 45}}{5}.$$

Evident, numai soluţia pozitivă este acceptabilă, deci $t_1 = 1$ s. Timpul cît durează căderea bilei 1 este $t_{1\,tot} = t + t_1 = 2 + 1 = 3$ s.

b) În intervalul dintre $t = 2$ s şi $t = 3$ s sistemul cu bile se mişcă uniform cu viteza v_0, deci spaţiul parcurs în intervalul $\Delta t = 1$ s este $s_2 = v_0 \Delta t = 4 \cdot 1 = 4$ m. Restul distanţei $h_2 = h_1 - s_2 = 5$ m va fi parcurs de bila 2 în cădere liberă cu viteza iniţială v_0 în timpul t_2, dat de $h_2 = v_0 t_2 + \frac{g}{2} t_2^2$ sau $5 t_2^2 + 4 t_2 - 5 = 0$. Soluţia pozitivă este

$$t_2 = \frac{-2 + \sqrt{4 + 25}}{5} = 0{,}67 \text{ s}.$$

Timpul de cădere al celei de a doua bile este

$$t_{2\,tot} = t + \Delta t + t_2 = 2 + 1 + 0{,}67 = 3{,}67 \text{ s}.$$

c) Din momentul desprinderii celei de a doua bile, sistemul format din bilele 3, 4 şi 5 capătă o acceleraţie în sens invers dată de $a_2 = \frac{mg}{3m} = \frac{g}{3} = 3{,}33$ m/s². Pînă în acest moment bilele s-au deplasat pe o distanţă $S = S_1 + S_2 = 8$ m, deci bila 3 va trebui să parcurgă înapoi o distanţă $x = 8$ m. Ecuaţia de mişcare considerînd originea în poziţia corespunzătoare momentului $t + \Delta t$ $(x_0 = 0)$, va fi $x = -v_0 t_3 + a_2 \frac{t_3^2}{2}$.

Înlocuind valorile numerice, rezultă următoarea ecuaţie pentru t_3

$$3{,}33\, t_3^2 - 8\, t_3 - 16 = 0,$$

$$t_3 = \frac{4 \pm \sqrt{16 + 53{,}33}}{3{,}33} = \begin{cases} 3{,}7 \text{ s}, \\ 1{,}3 \text{ s}. \end{cases}$$

Va fi corectă prima valoare, deoarece valoarea 1,3 s este mai mică decît timpul în care ar fi parcurs spaţiul x cu acceleraţia a_2, fără viteză iniţială. Întrucît aceasta este de sens contrar lui a_2, timpul va fi mai lung. De la începutul mişcării pînă în acest moment a trecut timpul $t_{3\,tot} = t + \Delta t + t_3 = 3 + 3{,}7 = 6{,}7$ s.

3°. a) Viteza termică este dată de

$$v_t = \sqrt{\frac{3RT}{\mu}} = \sqrt{\frac{3 \cdot 8\,310 \cdot 300}{29}} = 507{,}8 \text{ m/s}.$$

b) Picătura de mercur este în echilibru cînd presiunea pe cele două feţe ale sale în contact cu gazul din vase este aceeaşi $P_1 = P_2$. Dar

$$P_1 V_1 = \nu R T_1; \quad P_2 V_2 = \nu R T_2. \qquad (4)$$



Întrucît $T_1 = T + \Delta T$, $T_2 = T - \Delta T$, $V_1 = V + \Delta V$ și $V_2 = V - \Delta V$ (ΔV este același pentru că vasele nu își modifică volumul), ecuația $P_1 = P_2$ devine

$$\frac{T + \Delta T}{V + \Delta V} = \frac{T - \Delta T}{V - \Delta V}. \qquad (2)$$

Prelucrînd această relație, se obține forma mai simplă

$$T\Delta V = V\Delta T \text{ sau } \Delta V = \frac{V\Delta T}{T}. \qquad (3)$$

Conform figurii F.B.99, $\Delta V = S\Delta x$, unde $S = \frac{\pi d^2}{4}$ este secțiunea tubului. Ecuația (3) conduce la

$$\Delta x = \frac{V\Delta T}{ST} = \frac{314 \cdot 10^{-6} \cdot 3}{\frac{3{,}14 \cdot 0{,}4^2 \cdot 10^{-4}}{4} 300} = 0{,}25 \text{ m}.$$

c) Variația energiei interne a sistemului va fi egală cu suma variațiilor de energie internă ale gazelor din cele două părți ale sistemului (vase),

$$\Delta U_1 = Q_1 - L_1, \ \Delta U_2 = Q_2 - L_2,$$
$$\Delta U = \Delta U_1 + \Delta U_2 = Q_1 + Q_2 - (L_1 + L_2).$$

Lucrul mecanic efectuat la deplasarea picăturii de mercur este efectuat de gazul din vasul $V_1 (L_1 > 0)$ și primit de gazul din celălalt vas $(L_2 < 0)$, deci $L_2 = -L_1$. Pe de altă parte, se observă că presiunea rămîne constantă în timpul transformării. Într-adevăr, presiunea finală în vase va fi

$$P_2 = P_1 = \frac{\nu R(T + \Delta T)}{V + \Delta V} = \frac{\nu R(T + \Delta T)}{V + \frac{V\Delta T}{T}} = \frac{\nu RT}{V} = P_0,$$

deci este aceeași cu presiunea inițială. Înseamnă că $Q_1 = \nu C_p \Delta T_1$ și $Q_2 = \nu C_p \Delta T_2$. Întrucît $\Delta T_1 = -\Delta T_2 = \Delta T$, rezultă $Q_2 = -Q_1$, deci $\Delta U = 0$.

4°. a) Cuplul de forțe este un sistem de două forțe egale în mărime, care acționează pe direcții paralele, în sensuri opuse (fig. F.B.100).

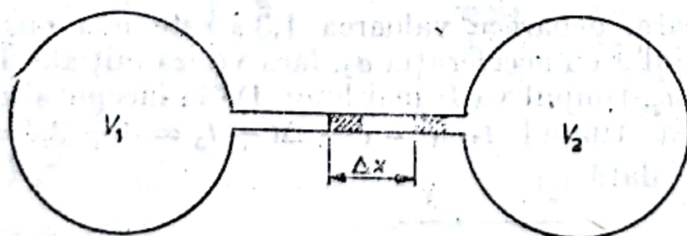


Fig. F.B.99

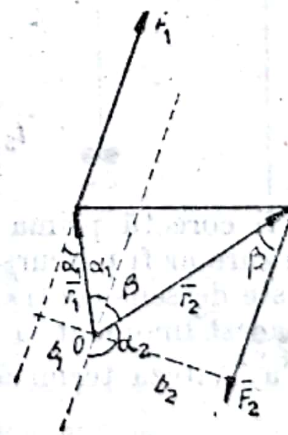


Fig. F.B.100

Momentul cuplului este rezultanta momentelor celor două forțe în raport cu un pol oarecare 0, $\vec{M} = \vec{r}_1 \times \vec{F}_1 + \vec{r}_2 \times \vec{F}_2$. Direcția vectorului $\vec{M}$ este perpendiculară pe planul determinat de suporturile forțelor, iar sensul este dat de regula

burghiului — sensul în care avansează un burghiu cînd este rotit în sensul în care sistemul de forțe rotește corpul. Mărimea (modulul) va fi

$$M = r_1F_1 \sin \alpha_1 + r_2F_2 \sin \alpha_2 = F_1(r_1 \sin \alpha_1 + r_2 \sin \alpha_2),$$

$$F_1(r_1 \sin \alpha_1 + r_2 \sin \beta) = F_1(b_1 + b_2) = F_1b,$$

unde b este distanța dintre suporturile celor două forțe (brațul cuplului). Se observă că $\vec{M}$ este independent de polul 0.

b) Legea lui Charles se referă la o transformare izocoră a unei cantități de gaz ideal și are forma

$$\frac{p_1}{T_1} = \frac{p_2}{T_2},$$

unde p_1 și p_2 sînt presiunile gazului la temperaturile T_1 și, respectiv, T_2, volumul rămînînd nemodificat în cursul procesului.

c) Acest subiect a fost tratat în VI. 4°. a.

5°. a) Considerăm un punct material supus simultan la două mișcări oscilatorii armonice, de aceeași pulsație (frecvență) pe aceeași direcție considerată ca axă y. Ele sînt descrise de ecuațiile $y_1 = a_1 \sin (\omega t + \varphi_1)$ și $y_2 = a_2 \sin (\omega t + \varphi_2)$. Compunerea celor două mișcări se face fazorial, adică utilizînd faptul că o mișcare oscilatorie armonică este echivalentă cu proiecția pe un diametru a mișcării circulare uniforme. Vom considera deci două segmente de lungimi a_1 și a_2, care se rotesc cu viteza unghiulară ω în același sens defazat cu $\Delta\varphi = \varphi_1 - \varphi_2$, așa cum se vede în figura F.B.101.

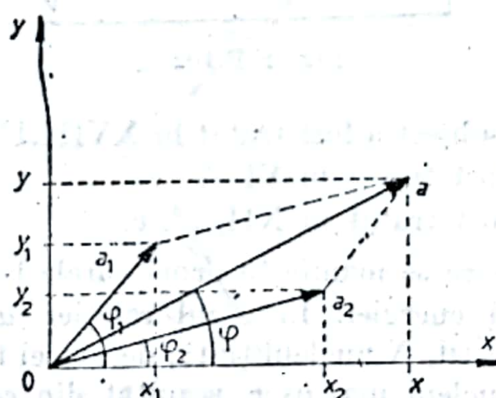


Fig. F.B.101

Deoarece suma proiecțiilor a doi vectori pe o axă este egală cu proiecția pe aceeași axă a vectorului rezultant, înseamnă că oscilația rezultantă se va obține prin proiecția pe axa y a mișcării circulare uniforme, descrise de vîrful vectorului a de mărime

$$a = a_1^2 + a_2^2 + 2\, a_1a_2 \cos (\varphi_1 - \varphi_2),$$

adică

$$y = y_1 + y_2 = a \sin (\omega t + \varphi)$$

unde φ este dat de (fig. F.B.101)

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{x}{y} = \frac{a_1 \sin \varphi_1 + a_2 \sin \varphi_2}{a_1 \cos \varphi_1 + a_2 \cos \varphi_2}.$$

b) Procesul adiabatic este o transformare în care sistemul nu schimbă căldură cu exteriorul, $Q = 0$. Această condiție face foarte simplu calculul lucrului mecanic. Principiul întîi al termodinamicii devine $\Delta U = - L$. În cazul unui gaz

deal energia internă depinde numai de temperatură, deci $\Delta U = \nu C_v(T_2 - T_1)$, unde ν este numărul de moli de gaz, C_V căldura molară, T_2 temperatura finală, iar T_1 temperatura inițială. Între parametrii stării finale p_2, V_2 și T_2 și parametrii stării inițiale p_1, V_1, T_1 există următoarele relații echivalente:

$$p_1V_1^{\gamma} = p_2V_2^{\gamma},\ T_1V_1^{\gamma-1} = T_2V_2^{\gamma-1},\ p_1^{1-\gamma}T_1^{\gamma} = p_2^{1-\gamma}T_2^{\gamma},$$

unde $\gamma = C_p/C_v$ poartă numele de coeficient adiabatic al gazului.

În diagrama p, V procesul adiabatic al gazului ideal se reprezintă printr-o curbă a cărei pantă este mai mare (în valoare absolută) decît pentru un proces izoterm, suferit de aceeași cantitate de gaz, ambele procese avînd aceeași stare inițială (figura F.B. 102).

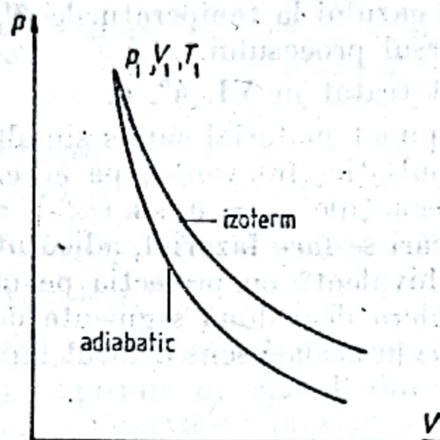


Fig. F.B.102

XXVIII.1°. a) Acest subiect a fost tratat în XVIII.1°. a.

b) Acest subiect a fost tratat în VI. 4°. c.

c) Acest subiect a fost tratat în XII. 3°. c.

2°. În reacțiile nucleare se manifestă următoarele legi de conservare:

— Legea conservării energiei. În cazul relației $a + X \rightarrow Y + b$ (a fiind particula sau nucleul proiectil, X nucleul țintă, de obicei în repaus, Y nucleul rezidual și b particula sau nucleul mai ușor, rezultat din reacție), legea conservării energiei totale este $W_a + W_X = W_Y + W_b$, sau $m_{a_0}c^2 + E_c^a + m_{X_0}c^2 + E_c^X = m_{Y_0}c^2 + E_c^Y + m_{b_0}c^2 + E_c^b$, E_c fiind energiile cinetice.

Diferența dintre energiile de repaus ale particulelor în stările inițială și, respectiv, finală poartă numele de energie de reacție și se notează cu Q,

$$Q = E_c^b + E_c^Y - E_c^a - E_c^X.$$

Pentru $Q > 0$ reacția se numește exoenergetică, iar pentru $Q < 0$ reacția se numește endoenergetică.

De obicei o reacție nucleară se realizează experimental trimițînd particule sau nuclee a, accelerate, pe o țintă fixă care conține nuclee X în repaus (acest sistem de referință legat de ținta fixă poartă numele de sistemul laboratorului, SL). Energia cinetică minimă a particulei proiectil a în SL, suficientă pentru a produce o reacție nucleară la prag, este

$$E_a^L = \frac{m_{a_0} + m_{X_0}}{m_{X_0}} \cdot |Q|.$$

— Legea conservării impulsului (figurile F.B. 103 şi F.B. 104),

$$p_Y^2 = p_a^2 + p_b^2 - 2p_a p_b \cos \theta.$$

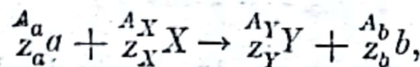
Energiile cinetice au expresiile $E_c^Y = \frac{p_Y^2}{2m_{Y_0}}$, $E_c^a = \frac{p_a^2}{2m_{a_0}}$ şi $E_c^b = \frac{p_b^2}{2m_{b_0}}$, deoarece sînt mici în raport cu energiile de repaus. Introducînd aceste relaţii în relaţia care exprimă legea conservării impulsului, rezultă

$$2m_{Y_0}E_c^Y = 2m_{a_0}E_c^a + 2m_{b_0}E_c^b - 4\sqrt{m_{a_0}m_{b_0}E_c^aE_c^b} \cdot \cos \theta.$$

Ţinînd seamă de această relaţie şi de faptul că în sistemul laboratorului $E_c^X = 0$, se obţine relaţia care dă o altă metodă de măsură a energiei de reacţie,

$$Q = \left(1 + \frac{m_{b_0}}{m_{Y_0}}\right)E_c^b - \left(1 - \frac{m_{a_0}}{m_{Y_0}}\right)E_c^b - \frac{2\sqrt{m_{a_0}m_{b_0}E_c^aE_c^b}}{m_{Y_0}} \cdot \cos \theta.$$

— Legea conservării sarcinii electrice. În cazul reacţiei



$${}^{A_a}_{Z_a}a + {}^{A_X}_{Z_X}X \rightarrow {}^{A_Y}_{Z_Y}Y + {}^{A_b}_{Z_b}b,$$

legea conservării sarcinii electrice se exprimă prin $Z_a + Z_X = Z_Y + Z_b$.

— Legea conservării numărului de nucleoni, pentru aceeaşi reacţie, se va scrie sub forma $A_a + A_X = A_Y + A_b$.

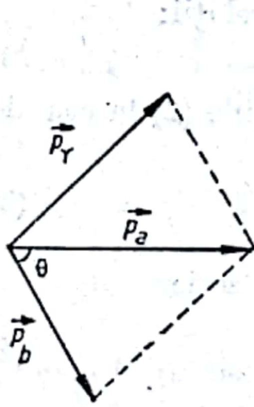


Fig. F.B.103

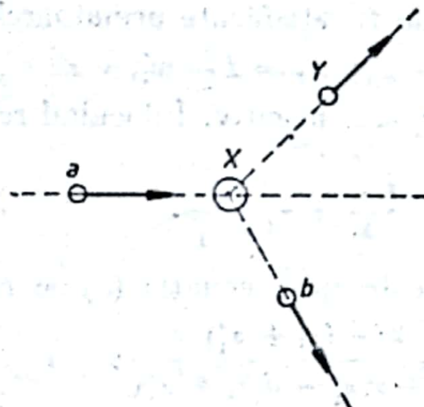


Fig. F.B.104

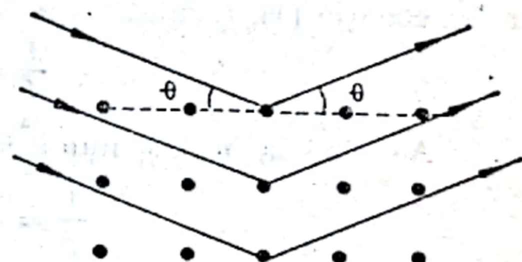


Fig. F.B.105

3°. Dacă un fascicul de electroni este incident pe un cristal, astfel încît el face un unghi θ cu direcţia planelor cristaline, atunci se va observa un fascicul difractat sub un unghi egal cu θ (figura F.B. 105), dacă este satisfăcută condiţia

$$2d \sin \theta = n\lambda,$$

unde $n = 1, 2, 3, \ldots$, iar $\lambda = \frac{h}{p}$ este lungimea de undă de Broglie asociată electronilor al căror impuls este $p = mv$. Considerînd mişcarea nerelativistă, impulsul va fi obţinut din conservarea energiei, $\frac{mv^2}{2} = e\,U$, unde U este tensiunea de accelerare. Rezultă

$$p = \sqrt{2eUm}, \quad \text{deci} \quad \lambda = h/\sqrt{2eUm}.$$

Introducînd în (1), se obţine

$$U_n = \frac{n^2}{\sin^2 \theta}\,\frac{h^2}{8emd^2} = \frac{n^2}{\sin^2 \theta}\,\frac{(6{,}626 \cdot 10^{-34})^2}{8 \cdot 1{,}6 \cdot 10^{-19} \cdot 9{,}1 \cdot 10^{-31} \cdot 9 \cdot 10^{-20}} = 4{,}2\,\frac{n^2}{\sin^2 \theta}\ \text{V}.$$

Dacă se consideră incidență normală, $\theta = \frac{\pi}{2}$, atunci valorile tensiunii de accelerare vor fi: 4,2; 16,8; 37,8... V.

4°. Vom rezolva întîi punctul b, construind imaginea punctului sursă în cele două oglinzi, așa cum arată figura F.B. 106.

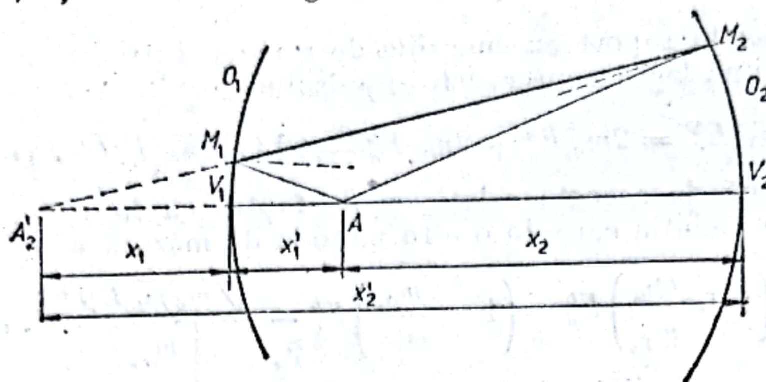


Fig. F.B.106

a) Notînd oglinda din stînga cu „1" și oglinda din dreapta cu „2", ecuațiile care descriu formarea imaginilor vor fi:

$$\frac{1}{f} = \frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_1'}; \quad \frac{1}{f} = \frac{1}{x_2} + \frac{1}{x_2'}. \tag{1}$$

Conform figurii FB.106, vor mai fi satisfăcute următoarele relații:

$$x_2' = d - x_1; \; x_2 = d - x_1', \tag{2}$$

unde am ținut seama de faptul că x_1 este negativ. Înlocuind relațiile (2) în cea de a 2-a ecuație (1), rezultă

$$\frac{1}{f} = \frac{1}{d - x_1} + \frac{1}{d - x_1'}. \tag{3}$$

Aducînd la același numitor în dreapta, ecuația (3) se mai scrie

$$\frac{1}{f} = \frac{2d - (x_1 + x_1')}{d^2 + x_1x_1' - d(x_1 + x_1')}. \tag{4}$$

Grupînd în mod convenabil termenii, ecuația (4) devine

$$2fd - d^2 = x_1x_1' - (x_1 + x_1')(d - f). \tag{5}$$

Din prima ecuație (1), $x_1 + x_1' = \frac{x_1x_1'}{f}$, astfel încît ecuația (5) se scrie

$$2fd - d^2 = x_1x_1'\left(2 - \frac{d}{f}\right)$$

sau

$$\left(2 - \frac{d}{f}\right)(fd - x_1x_1') = 0. \tag{6}$$

Distanța x_1' este arbitrară, putînd lua orice valoare între 0 și d, deoarece punctul A este un punct oarecare al axei optice, între cele două oglinzi, deci soluția $fd - x_1x_1' = 0$ trebuie eliminată. Ecuația (6) va fi satisfăcută dacă

$$d = 2f$$

Deci vîrful fiecărei oglinzi se află în centrul celeilalte, adică cele două normale la oglindă în punctele M_1 și M_2 vor trece prin vîrfurile V_2 și, respectiv, V_1.

5°. Așa cum arată figura F.B.107, asupra fiecărei bile acționează greutatea $\vec{G}$ și forța arhimedică $\vec{F}_A$ pe verticală, iar pe orizontală forța electrică, $\vec{F}$.

În situația de echilibru, rezultanta $\vec{R}$ a acestor forțe va fi orientată de-a lungul firului. În cazul în care bilele se află în aer, $F_A = 0$, deci

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{F'}{G}, \tag{1}$$

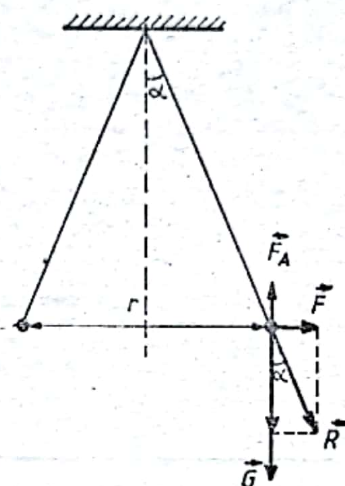


Fig. F.B.107

unde $F' = \frac{q^2}{4\pi\varepsilon_0 r^2}$ este forța electrică în aer. Cînd bilele sînt în ulei,

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{F}{G - F_A}, \tag{2}$$

unde

$$F = \frac{q^2}{4\pi\varepsilon_0\varepsilon_r r^2}$$

este forța electrică în ulei. Egalînd (1) și (2), rezultă

$$(G - F_A)\varepsilon_r = G. \tag{3}$$

Ținînd seama că $G = \rho_c Vg$ și $F_A = \rho_u Vg$, unde ρ_c și ρ_u sînt densitățile corpului și, respectiv, uleiului, iar V volumul corpului, ecuația (3) devine $\rho_c = \varepsilon_r(\rho_c - \rho_u)$, de unde

$$\rho_c = \frac{\varepsilon_r}{\varepsilon_r - 1}\rho_u = \frac{2,2}{2,2 - 1} \cdot 900 = 1\ 650\ \text{kg/m}^3.$$

XXIX. 1°. a) Întrucît bobina are și rezistență, circuitul va arăta ca în figura F.B.108.

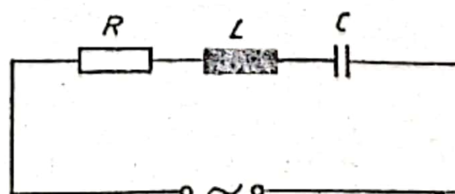


Fig. F.B.108

Frecvenţa de rezonanţă este dată de relaţia $\nu_0 = \frac{1}{2\pi\sqrt{LC}}$, de unde

$$C = \frac{1}{4\pi^2 \nu_0^2 L}. \tag{1}$$

Impedanţa circuitului pentru o frecvenţă $\nu = \frac{\omega}{2\pi}$ este

$$Z = \sqrt{R^2 + \left(L\omega - \frac{1}{C\omega}\right)^2}, \text{ de unde } \sqrt{Z^2 - R^2} = \left|L\omega - \frac{1}{C\omega}\right|. \tag{2}$$

Vor exista două posibilităţi:

$L\omega > \frac{1}{C\omega}$, care implică $\omega^2 > \frac{1}{LC}$, adică $\omega^2 > \omega_0^2$, relaţie incompatibilă cu datele problemei, şi

$L\omega < \frac{1}{C\omega}$, care implică $\omega^2 < \omega_0^2$, în concordanţă cu datele problemei. Considerînd satisfăcută această condiţie, ecuaţia (2) devine

$$L = \frac{1}{\omega}\left(\frac{1}{C\omega} - \sqrt{Z^2 - R^2}\right). \tag{3}$$

Înlocuind în ecuaţia (1), rezultă

$$C = \frac{1}{\frac{2\pi\nu_0^2}{\nu}\left(\frac{1}{2\pi\nu C} - \sqrt{Z^2 - R^2}\right)}$$

sau

$$\frac{1}{2\pi\nu} - C\sqrt{Z^2 - R^2} = \frac{\nu}{2\pi\nu_0^2}, \text{ de unde}$$

$$C = \frac{1}{2\pi\nu\sqrt{Z^2 - R^2}}\left[1 - \left(\frac{\nu}{\nu_0}\right)^2\right] = \frac{1}{2\pi 10^3\sqrt{10^6 - 10^2}}\left[1 - \left(\frac{10^3}{2\cdot 10^3}\right)^2\right] = 0{,}12\ \mu\text{F}.$$

b) Din ecuaţia (2), $L = \frac{1}{2\pi\nu}\left(\frac{1}{2\pi\nu C} - \sqrt{Z^2 - R^2}\right) =$

$$= \frac{1}{2\pi\cdot 10^3}\left(\frac{1}{2\pi\cdot 10^3\cdot 1{,}2\cdot 10^{-7}} - \sqrt{10^6 - 10^2}\right) = 52\ \text{mH}.$$

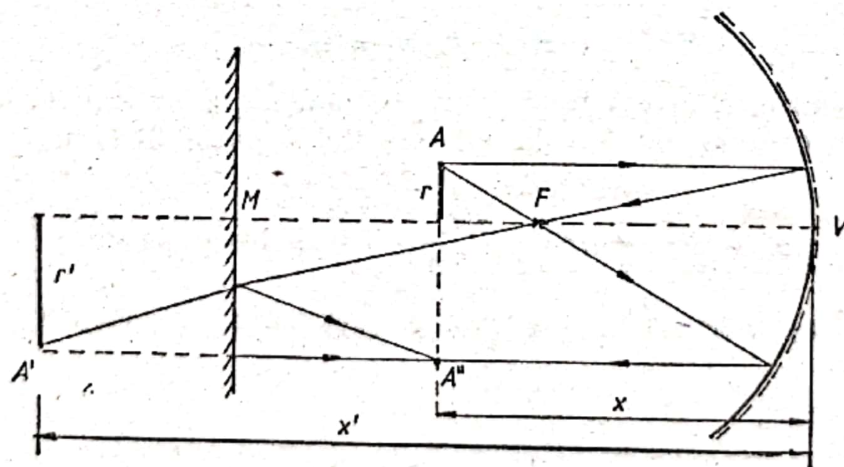


Fig. F.B.109

2°. a) Evident, cercul luminos va trebui să se afle între cele două oglinzi, aşa cum se vede din figura F.B.109. Întrucît situaţia este caracterizată de simetrie în raport cu axa optică, vom considera numai un punct A al cercului. Imaginea A',

dată de oglinda sferică, va juca rolul de obiect virtual pentru oglinda plană. Imaginea finală este A''. Mersul razelor este cel arătat în figura F.B.109.

Oglinda plană va trebui să intersecteze axa optică în punctul M, aflat la mijlocul distanței dintre obiect și imaginea acestuia, dată de oglinda concavă. Distanța la care se află punctul M de vîrful oglinzii concave va fi dată de

$$VM = x + \frac{x' - x}{2} = \frac{x' + x}{2}. \tag{1}$$

Din formula oglinzii sferice, $\frac{1}{x} + \frac{1}{x'} = \frac{1}{f}$, se obține

$$x' = \frac{fx}{x - f} = \frac{Rx}{2\left(x - \frac{R}{2}\right)} = \frac{Rx}{2x - R} = \frac{2 \cdot 1{,}4}{2 \cdot 1{,}4 - 2} = 3{,}5 \text{ m} \tag{2}$$

($R = 2$ m este raza oglinzii sferice). Introducînd în (1), rezultă

$$VM = \frac{\frac{Rx}{2x - R} + x}{2} = \frac{x^2}{2x - R} = \frac{3{,}5^2}{2 \cdot 3{,}5 - 2} = 2{,}45 \text{ m}.$$

Vom nota cu r raza cercului obiect și cu r' raza cercului imagine în oglinda concavă.

Din formula măririi rezultă $r'/r = x'/x$ (s-a omis semnul minus, deoarece faptul că imaginea este răsturnată nu joacă nici un rol în problema de față). Diametrul cercului imagine va fi

$$d' = 2r' = 2r\frac{x'}{x} = 2r\frac{R}{2x - R} = 2 \cdot 10^{-2}\frac{2}{2 \cdot 1{,}4 - 2} = 5 \cdot 10^{-2} \text{ m} = 5 \text{ cm}.$$

Diametrul imaginii date de oglinda plană este același.

3°. Ecuația pentru reacția nucleară descrisă se poate scrie



$${}^2_1\text{H} + {}^2_1d \rightarrow {}^3_1\text{H} + {}^1_1p.$$

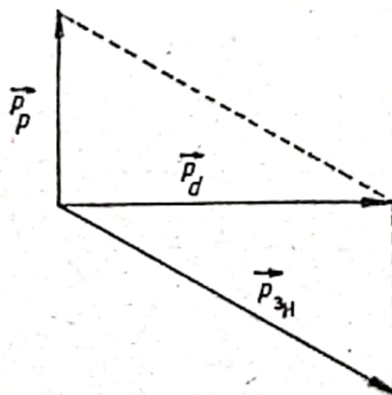


Fig. F.B.110

Întrucît se presupune că nucleul țintă ${}^2_1$H este în repaus, conservarea impulsului în procesul de ciocnire va arăta ca în figura F.B.110. Conform ecuației $E_c = p^2/2$ m, impulsurile vor fi date de

$$p_p = \sqrt{2m_pE_{cp}},\ p_d = \sqrt{2m_dE_{cd}},\ p_{^3\text{H}} = \sqrt{2m_{^3\text{H}}E_{c_{^3\text{H}}}}. \tag{1}$$

Din figura F.B. 110 se vede că impulsul tritiului se mai poate scrie

$$p_{^3\text{H}} = \sqrt{p_p^2 + p_d^2}.$$

Utilizînd ecuațiile (1), aceasta devine

$$m_{3H}E_{c_{3H}} = m_pE_{cp} + m_dE_{cd},$$

de unde se obține

$$E_{c_{3H}} = \frac{m_pE_{cp} + m_dE_{cd}}{m_{3H}}.$$

Energia de reacție este egală cu variația energiei cinetice, adică

$$Q = E_{c_{3H}} + E_{cp} - E_{cd} = E_{cp}\left(\frac{m_p}{m_{3H}} + 1\right) + E_{cd}\left(\frac{m_d}{m_{3H}} - 1\right). \qquad (3)$$

O valoare aproximativă pentru energia de reacție vom obține dacă înlocuim masele atomice cu masele particulelor, adică

$$Q = E_{cp}\left(\frac{A_p}{A_{3H}} + 1\right) + E_{cd}\left(\frac{A_d}{A_{3H}} - 1\right) = 3{,}3\left(\frac{1}{3} + 1\right) + 1{,}2\left(\frac{2}{3} - 1\right) = 4\ \text{MeV}.$$

Întrucît $Q > 0$, reacția este exoenergetică. Aceasta se vede și direct din ecuația (3). Pentru că $E_{cp} > E_d$, indiferent care ar fi valoarea lui $E_{c_{3H}}$ (> 0), energia de reacție este pozitivă.

4°. Un fascicul de radiații X, cu lungimea de undă dată, care cade pe o bucată de grafit este împrăștiat în toate direcțiile. Experimental se constată că, pe lîngă lungimea de undă incidentă, radiația împrăștiată conține și alte lungimi de undă și că acestea depind de unghiul de împrăștiere. Efectul acesta, numit efect Compton, poate fi explicat considerînd că are loc o interacțiune între fotonii radiației incidente și electronii substanței. În procesul de interacțiune vor fi satisfăcute legile de conservare a energiei și impulsului. Considerînd electronul în repaus înainte de interacțiune, energia lui este m_0c^2, unde m_0 este masa de repaus a electronului, iar energia lui după interacțiune este mc^2, unde $m = m_0/\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}$ este masa electronului în mișcare cu viteza v. Energia fotonului incident este $h\nu_0$, iar energia fotonului împrăștiat după interacțiunea cu electronul este $h\nu$. Neglijînd energia de extracție a

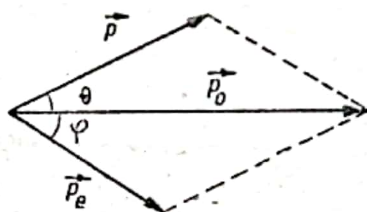


Fig. F.B.111

electronului din substanță, conservarea energiei se va scrie $h\nu_0 - h\nu = mc^2 - m_0c^2$ sau

$$mc^2 = h(\nu_0 - \nu) + m_0c^2. \qquad (1)$$

Teorema conservării impulsului se obține cu ajutorul figurii F.B.111, unde $\vec{p}_0$ este impulsul fotonului incident, $p_0 = h\nu_0/c$, $\vec{p}$ este impulsul fotonului împrăștiat, $p = h\nu/c$, iar $\vec{p}_e$ este impulsul electronului de recul $p_e = mv$. Conform teoremei cosinusului,

$$m^2v^2 = \frac{h^2\nu_0^2}{c^2} + \frac{h^2\nu^2}{c^2} - \frac{2h^2\nu_0\nu}{c^2}\cos\theta$$

sau

$$m^2v^2c^2 = h^2\nu_0^2 + h^2\nu^2 - 2h^2\nu_0\nu\cos\theta. \tag{2}$$

Ridicînd la pătrat ecuaţia (1), se obţine

$$m^2c^4 = h^2\nu_0^2 + h^2\nu^2 - 2h^2\nu_0\nu + 2h(\nu_0 - \nu)m_0c^2 + m_0^2c^4. \tag{3}$$

Scăzînd ecuaţia (2) din (3) membru cu membru şi reducînd termenii asemenea, rezultă

$$m^2c^4\left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right) = -2h^2\nu_0\nu(1 - \cos\theta) + 2h(\nu_0 - \nu)m_0c^2 + m_0^2c^4. \tag{4}$$

Utilizînd ecuaţia variaţiei masei cu viteza, ecuaţia (4) devine

$$m_0^2c^4 = -2h^2\nu_0\nu(1 - \cos\theta) + 2h(\nu_0 - \nu)m_0c^2 + m_0^2c^4. \tag{5}$$

Reducînd termenii asemenea, ecuaţia (5) capătă forma

$$(\nu_0 - \nu)m_0c^2 = h\nu_0\nu(1 - \cos\theta). \tag{6}$$

Împărţind în ambii membri cu $2h\nu_0\nu m_0c$, rezultă

$$\frac{c(\nu_0 - \nu)}{\nu_0\nu} = \frac{h}{m_0c}(1 - \cos\theta)$$

sau

$$\frac{c}{\nu} - \frac{c}{\nu_0} = \frac{h}{m_0c}\cdot 2\sin^2\frac{\theta}{2}.$$

Ţinînd seama de relaţia $\lambda = c/\nu$, ecuaţia devine

$$\lambda - \lambda_0 = 2\frac{h}{m_0c}\sin^2\frac{\theta}{2}.$$

În sfîrşit, introducînd notaţia $\Delta\lambda = \lambda - \lambda_0$, obţinem

$$\Delta\lambda = 2\Lambda\sin^2\frac{\theta}{2},$$

unde $\Lambda = h/m_0c$ poartă numele de lungime de undă Compton.

5°. a) Experimental se constată că rezistenţa unui conductor cilindric de secţiune S şi lungime l este direct proporţională cu lungimea conductorului şi invers proporţională cu secţiunea acestuia. Constanta de proporţionalitate ρ din relaţia $R = \rho\frac{l}{S}$ este independentă de dimensiunile conductorului şi depinde numai de substanţa din care acesta este confecţionat. Mărimea ρ poartă numele de rezistivitate şi deci este numeric egală cu rezistenţa unui conductor cu lungimea egală cu unitatea (1 m) şi secţiunea unitatea (1 m^2) din materialul considerat.

b) Reţeaua de difracţie constă dintr-o succesiune de fante înguste, rectilinii, egale, paralele şi echidistante, separate prin spaţii opace, de asemenea foarte înguste. Dacă numărul fantelor este N, iar lungimea zonei cu fante este L, atunci reţeaua va avea un număr $n = \frac{N}{L}$ de fante pe unitatea de lungime. Distanţa dintre două fante succesive, $l = \frac{L}{N} = \frac{1}{n}$, poartă numele de constantă a reţelei de difracţie.

c) Timpul de înjumătăţire al unui ansamblu de nuclee radioactive se defineşte cu ajutorul legii dezintegrării radioactive, care are expresia $N = N_0e^{-t/\tau}$, unde N este numărul de nuclee nedezintegrate la momentul t, N_0 este numărul de nuclee la momentul iniţial ($t_0 = 0$), iar τ este intervalul de timp după care rămîn

nedezintegrate N_0/e nuclee, numit timp de viaţă medie a nucleului considerat. Intervalul de timp $T_{1/2}$ după care numărul de nuclee nedezintegrate este jumătate din numărul iniţial, adică $N = N_0/2$, poartă numele de timp de înjumătăţire. Înlocuind în legea dezintegrării, aceasta devine $\frac{N_0}{2} = N_0 e^{-\frac{T_{1/2}}{\tau}}$, de unde, prin logaritmare, rezultă $T_{1/2} = \tau \ln 2$.

XXX. 1°. a) Prin convergenţă a unei lentile se înţelege inversul distanţei focale a acesteia, $C = 1/f$. Unitatea SI de convergenţă poartă numele de dioptrie şi reprezintă convergenţa unei lentile a cărei distanţă focală este de 1 m.

b) Transformarea izobară este un proces la presiune constantă. Legea transformării izobare spune: într-un proces izobar volumul unei cantităţi date de gaz ideal variază direct proporţional cu temperatura absolută a acestuia, adică $\frac{V}{T} = \text{const}$ sau $\frac{V_1}{T_1} = \frac{V_2}{T_2}$.

c) Regula lui Lentz se referă la semnificaţia semnului minus din ecuaţia tensiunii electromotoare induse (Faraday) $e = -\mathrm{d}\Phi/\mathrm{d}t$: tensiunea electromotoare indusă are un astfel de sens, încît curentul produs de ea să genereze un cîmp magnetic care să se opună variaţiei cîmpului magnetic inductor, adică să aibă acelaşi sens cu cîmpul inductor, cînd acesta din urmă scade, sau sens opus sensului cîmpului inductor, cînd acesta creşte.

2°. a) Acest subiect a fost tratat în III.4°.b.

b) Distanţele focale ale unei lentile subţiri reprezintă locul în care este situat un izvor punctiform pentru ca razele, după trecerea prin lentilă, să fie paralele cu axa optică, respectiv locul în care se întîlnesc razele dintr-un fascicul incident paralel cu axa optică. Ele au expresiile

$$f_2 = \frac{1}{(n-1)\left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2}\right)}, \quad f_1 = -\frac{1}{(n-1)\left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2}\right)},$$

n fiind indicele de refracţie al materialului din care este confecţionată lentila, R_1 şi R_2 razele suprafeţelor sferice care delimitează lentila.

c) Intensitatea $\vec{E}$ a cîmpului electric generat de un corp punctiform, purtător al unei sarcini Q, într-un punct situat la distanţa $\vec{r}$ de acesta este

$$\vec{E} = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0\varepsilon_r r^2}\frac{\vec{r}}{r},$$

unde ε_0 este permitivitatea vidului, iar ε_r este permitivitatea relativă a mediului în care se află sarcina Q şi deci în care este generat cîmpul electric.

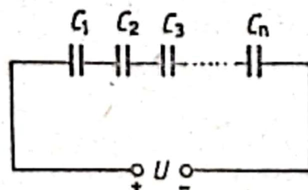


Fig. F.B.112

3°. Gruparea condensatorilor poate fi făcută prin legare în serie sau prin legare în paralel. Vom considera mai întîi legarea în serie, prezentată în figura F.B.112. Întrucît o armătură a fiecărui condensator este legată cu o armătură a condensatorului vecin, înseamnă că pe acestea trebuie să existe sarcini egale şi de

semn opus, adică toţi condensatorii vor fi încărcaţi cu aceeaşi sarcină Q. Aceasta va fi şi sarcina conţinută de întregul sistem. Capacitatea sistemului de condensatori este, prin definiţie, $C = Q/U$. Evident, U se va diviza pe toţi condensatorii: $U = U_1 + U_2 + U_3 + \dots + U_n$, unde $U_i = Q/C_i$ $(i = 1, 2, \dots n)$. Înlocuind în funcţie de capacităţi, ecuaţia tensiunii devine

$$\frac{Q}{C} = \frac{Q}{C_1} + \frac{Q}{C_2} + \frac{Q}{C_3} + \dots + \frac{Q}{C_n},$$

de unde

$$\frac{1}{C} = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{C_i}.$$

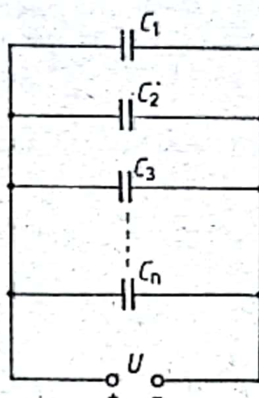


Fig. F.B.113

În cazul legării în paralel, prezentată în figura F.B.113, tensiunea este aceeaşi U la bornele tuturor condensatorilor, dar sarcinile lor sînt diferite: $Q_i = C_i U$. Sarcina totală a sistemului de condensatori Q este egală cu suma sarcinilor diferiţilor condensatori, $Q = \sum_{i=1}^{n} Q_i$. Capacitatea sistemului $C = Q/U$, după înlocuirea expresiei ui Q, devine $CU = C_1 U + C_2 U + C_3 U + \dots + C_n U$, de unde

$$C = \sum_{i=1}^{n} C_i.$$

4°. a) Din ecuaţia termică de stare pentru gazul ideal, $PV = \nu RT$, rezultă

$$\nu_1 = \frac{P_1 V_1}{RT_1} = \frac{2 \cdot 10^5 \cdot 5 \cdot 10^{-3}}{8\,310 \cdot 300} = 4{,}01 \cdot 10^{-4} \text{ kmol},$$

$$\nu_2 = \frac{P_2 V_2}{RT_2} = \frac{3 \cdot 10^5 \cdot 10^{-2}}{8\,310 \cdot 300} = 12{,}03 \cdot 10^{-4} \text{ kmol}.$$

b) După deschiderea robinetului se egalează presiunile; presiunile rămîn egale şi în timpul răcirii incintei 2. Aceeaşi cantitate totală de gaz se găseşte în incinte şi în starea finală, deci

$$\nu_1 + \nu_2 = \nu_1' + \nu_2', \text{ unde } \nu_1' = \frac{pV_1}{RT_1}\ \nu_2' = \frac{pV_2}{RT_2}.$$

Aceste ecuaţii constituie un sistem de 3 ecuaţii pentru necunoscutele ν_1', ν_2' şi p (presiunea finală).

Împărţind membru cu membru, ultimele 2 ecuaţii, rezultă

$$\frac{\nu_1'}{\nu_2'} = \frac{V_1 T_2}{V_2 T_1}.$$

Prima ecuaţie devine

$$\nu_1 + \nu_2 = \nu_1' + \nu_1' \frac{V_2 T_1}{V_1 T_2},$$

de unde

$$\nu_1' = \frac{\nu_1 + \nu_2}{1 + \frac{V_2 T_1}{V_1 T_2}} = \frac{4{,}01 \cdot 10^{-4} + 12{,}03 \cdot 10^{-4}}{1 + \frac{10^{-2} \cdot 300}{5 \cdot 10^{-3} \cdot 250}} = 4{,}71 \cdot 10^{-4} \text{ kmol},$$

$$\nu_2' = \nu_1 + \nu_2 - \nu_1' = 12{,}03 \cdot 10^{-4} + 4{,}01 \cdot 10^{-4} - 4{,}71 \cdot 10^{-4} = 11{,}33 \cdot 10^{-4} \text{ kmol}.$$

c) Variaţia de energie din cele 2 incinte se datorește, pe de o parte, variaţiei cantităţii de gaz şi pe de alta, variaţiei de temperatură.

În incinta 1 temperatura este nemodificată, deci

$$\Delta U_1 = U_1' - U_1 = \frac{3}{2}(\nu_1' - \nu_1) R T_1 = \frac{3}{2}(4{,}71 - 4{,}01)\, 10^{-4} \cdot 8\,310 \cdot 300 = 261{,}7 \text{ J}.$$

În incinta 2 se modifică şi numărul de kmoli şi temperatura, deci

$$\Delta U_2 = U_2' - U_2 = \frac{3}{2}\nu_2' R T_2 - \frac{3}{2}\nu_2 R T_1 = \frac{3}{2} R(\nu_2' T_2 - \nu_2 T_1) =$$

$$= \frac{3}{2}\, 8\,310(11{,}33 \cdot 10^{-4} \cdot 250 - 12{,}03 \cdot 10^{-4} \cdot 300) = -967{,}9 \text{ J}.$$

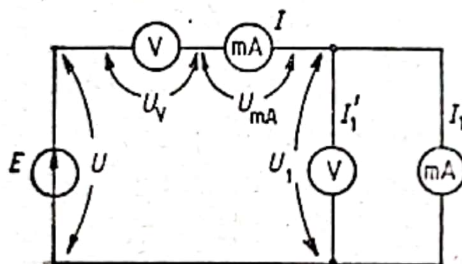


Fig. F.B.114

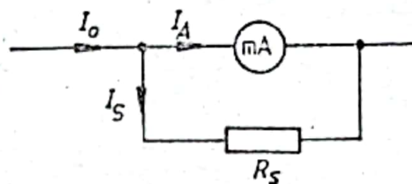


Fig. F.B.115

5°. a) Legile lui Kirchhoff pentru circuitul din figura F.B.114 se scriu

$$U = U_V + U_{mA} + U_1; \quad I = I_1 + I_1'. \tag{1}$$

Ţinînd seama că $R_V = \frac{U_1}{I_1'} = \frac{U_1}{I - I_1}$ şi $R_A = \frac{U_1}{I_1}$, prima ecuaţie (1) devine

$$U = I(R_V + R_A) + U_1 = I\left(\frac{U_1}{I - I_1} + \frac{U_1}{I_1}\right) + U_1 = U_1\left(1 + \frac{I^2}{I_1(I - I_1)}\right) =$$

$$= 0{,}25\left(1 + \frac{10^{-6}}{0{,}75 \cdot 10^{-3}(10^{-3} - 0{,}75 \cdot 10^{-3})}\right) = 1{,}58 \text{ V}.$$

b) $E = U + Ir = 1{,}58 + 10^{-3} \cdot 100 = 1{,}68$ V.

c) Conform figurii F.B.115, prin R_s trebuie să treacă un curent $I_s = (n - 1)I_A$, unde $n = I_0/I_A$, I_0 fiind intensitatea curentului care trebuie măsurat cu aparatul. Din relaţia $R_s I_s = R_A I_A$, rezultă

$$R_s = \frac{R_A I_A}{I_s} = \frac{R_A}{n - 1} = \frac{U_1}{I_1(n - 1)} = \frac{U_1 I_A}{I_1(I_0 - I_A)} = \frac{0{,}25 \cdot 10^{-3}}{0{,}75 \cdot 10^{-3}(10 - 10^{-3})} = 0{,}033\ \Omega.$$

XXXI. 1°. a) Acest subiect a fost tratat în V.4°.b.
b) Acest subiect a fost tratat în XIX. 1°.a.
c) Acest subiect a fost tratat în XII. 3°.c.

2°. a) Acest subiect a fost tratat în cadrul problemei VI. 5°. 2.
b) Acest subiect a fost tratat în XVIII. 2°.c.
c) Acest subiect a fost tratat în XXIV. 4°.b.

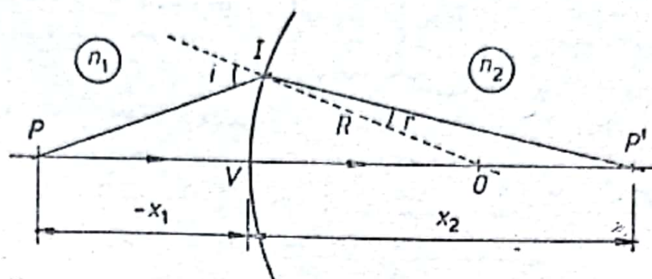


Fig. F.B.116

3°. Considerăm două medii transparente, de indice de refracție n_1 și n_2, separate de o suprafață sferică (dioptru sferic), așa cum arată figura F.B.116. Presupunem $n_1 < n_2$. Studiem mersul razelor paraxiale provenite de la un obiect luminos punctiform, P, așezat pe axa optică principală, în mediul de indice de refracție n_1. Imaginea P' se va forma la intersecția a două raze oarecare, pornite din P. Raza PV este normală la suprafața dioptrului, deci va trece în mediul de indice n_2 păstrîndu-și direcția. O altă rază, PI, se va refracta la suprafața de separare, apropiindu-se de normală în punctul de incidență I (figurată punctat pe figura F.B.116). Din triunghiurile PIO și $P'IO$, aplicînd teorema sinusurilor, se obțin relațiile

$$\frac{PI}{\sin\alpha} = \frac{PO}{\sin(\pi - i)}, \quad \frac{P'I}{\sin(\pi - \alpha)} = \frac{P'O}{\sin r}.$$

Întrucît $\sin(\pi - i) = \sin i$ și $\sin(\pi - \alpha) = \sin\alpha$, ecuațiile de mai sus devin

$$\frac{PO}{PI} = \frac{\sin i}{\sin\alpha}, \quad \text{respectiv} \quad \frac{P'I}{P'O} = \frac{\sin\alpha}{\sin r}.$$

Prin înmulțirea acestor relații membru cu membru, rezultă

$$\frac{PO}{PI}\cdot\frac{P'I}{P'O} = \frac{\sin i}{\sin r} = \frac{n_2}{n_1}. \tag{1}$$

Se consideră următoarele convenții de semne: segmentele luate de-a lungul axei principale, măsurate de la vîrful V al dioptrului, vor fi considerate pozitive, dacă se află în dreapta lui V (în sensul propagării luminii), și negative, dacă se află în stînga lui V. Segmentele perpendiculare pe axa optică vor fi pozitive cînd se află deasupra și negative cînd se află sub axă.

Unghiul pe care o rază îl face cu o axă optică este considerat pozitiv atunci cînd rotirea razei de lumină către axa optică este în sensul trigonometric și negativ dacă această rotire se face în sens invers.

Ținînd seama de aceste convenții și de faptul că razele sînt paraxiale (aproximația gaussiană) vom nota:

$PI \approx VP = -x_1$; $P'I \approx VP' = x_2$; $IO = VO = R$ (raza dioptrului), astfel încît $PO = -x_1 + R$; $P'O = x_2 - R$. Înlocuind în ecuația (1), rezultă

$$\frac{-x_1 + R}{-x_1}\cdot\frac{x_2}{x_2 - R} = \frac{n_2}{n_1}.$$

Efectuînd înmulţirile şi împărţind cu produsul x_1x_2R, relaţia se poate scrie sub forma

$$\frac{n_2}{x_2} - \frac{n_1}{x_1} = \frac{n_2 - n_1}{R}.$$

Relaţia aceasta constituie prima relaţie fundamentală a dioptrului sferic.

Cea de a doua relaţie fundamentală a dioptrului sferic leagă dimensiunea obiectului y_1 de cea a imaginii, y_2, prin introducerea mărimii $\beta = y_2/y_1$, numită mărire liniară transversală. Formarea imaginii unui obiect liniar PB_1, aşezat perpendicular pe axa principală, este arătată în figura F.B.117. Folosind triunghiurile PB_1V şi $P'B_2V$ putem exprima mărirea liniară transversală ca funcţie de

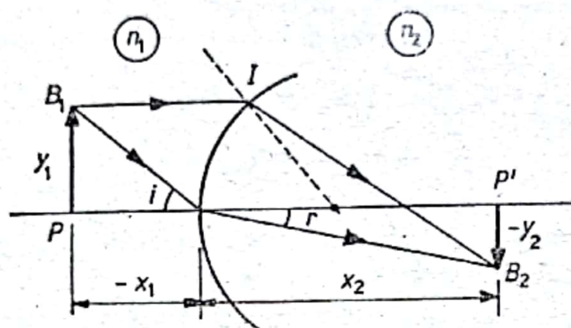


Fig. F.B.117

distanţele pînă la obiect, x_1, şi pînă la imagine, x_2, observînd că $y_2 = x_2 \operatorname{tg} r$ şi $y_1 = -x_1 \operatorname{tg} i$. În virtutea aproximaţiei gaussiene, $\operatorname{tg} r \approx \sin r$, $\operatorname{tg} i \approx \sin i$. Pentru situaţia din figura F.B.117,

$$\beta = \frac{-y_2}{y_1} = \frac{-x_2 \sin r}{-x_1 \sin i} = \frac{x_2}{x_1}\,\frac{n_1}{n_2},$$

unde am utilizat legea refracţiei. Aceasta este cea de a doua relaţie fundamentală a dioptrului sferic.

4°. a) $Q_{ced} = Q_{abs}$. Mercurul cedează căldură, iar apa şi calorimetrul absorb, deci

$$m_1c_1(t - \theta) = (m_3c_3 + m_2c_2)(\theta - t_0).$$

De aici

$$c_1 = \frac{(m_3c_3 + m_2c_2)(\theta - t_0)}{m_1(t - \theta)} = \frac{(0{,}2 \cdot 386 + 0{,}48 \cdot 4\,180)(17{,}7 - 15)}{0{,}5(100 - 17{,}7)} = 136{,}7\ \text{J/kg} \cdot \text{K}.$$

b) Vom considera că este vorba de mercurul în starea iniţială ($t = 100$ °C); acesta ar putea fi amestecat cu gheaţa.

Pentru a vedea dacă se topeşte întreaga cantitate de gheaţă, comparăm căldura pe care o poate ceda mercurul, răcindu-se pînă la 0 °C cu căldura necesară topirii gheţii,

$Q_{ced} = m_1c_1t = 0{,}5 \cdot 136{,}7 \cdot 100 = 6\,835$ J,
$Q_t = m\lambda_t = 10^{-2} \cdot 335\,000 = 3\,350$ J.

Se observă că $Q_{ced} > Q_t$, deci temperatura finală a amestecului va fi mai mare decît 0 °C. Ecuaţia calorimetrică va avea forma

$$m_1c_1(t - \theta_1) = m\lambda + mc_2\theta_1,$$

de unde

$$\theta_1 = \frac{m_1c_1t - m\lambda}{m_1c_1 + mc_2} = \frac{6\,835 - 335\,000 \cdot 10^{-2}}{0{,}5 \cdot 136{,}7 + 10^{-2} \cdot 4\,180} = 31{,}6\ ^\circ\text{C}.$$

5°. a) Întrucît $U < E$ și rezistența internă este neglijabilă, înseamnă că trebuie legat un rezistor în serie cu becul, ca în figura F.B.118.

În condiții de funcționare normală, intensitatea curentului prin bec trebuie să fie $I = \frac{P}{U}$. Conform legii lui Kirchhoff, $E = U + IR$, rezultă

$$R = \frac{E-U}{I} = \frac{E-U}{P}U = \frac{12,6-6,3}{2} \cdot 6,3 = 19,22\ \Omega.$$

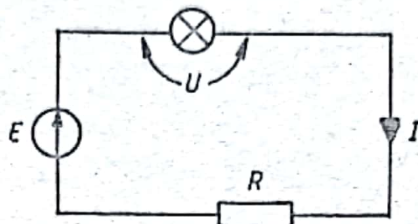


Fig. F.B.118

b) Intensitatea maximă pe care o poate măsura miliampermetrul este $I_A = 100$ mA. Totuși este necesar să se măsoare cu el o intensitate de $n = \frac{I}{I_A} = \frac{500}{100} = 5$ ori mai mare. Aceasta este posibil numai dacă se leagă în paralel cu miliampermetrul un rezistor (șunt) (v. fig. F.B.115), astfel încît prin miliampermetru să treacă numai curentul admisibil, I_A, iar restul, $I_s = (n-1)I_A$ să treacă prin rezistor.

Întrucît la bornele miliampermetrului și la bornele rezistorului există aceeași tensiune, $I_A R_A = I_s R_s$, deci

$$R_s = \frac{I_A R_A}{I_s} = \frac{R_A}{n-1} = \frac{1}{5-1} = 0,25\ \Omega.$$

XXXII.1°. a) Se scrie ecuația mișcării oscilatorii $y = A \sin(\omega t + \varphi)$ care prin dezvoltare dă $y = A \sin \omega t \cos \varphi + A \cos \omega t \sin \varphi$.

În continuare se obține $y = 0,2\sqrt{3} \cos 2t + 0,2 \sin 2t = 0,4 \sin\left(2t + \frac{\pi}{3}\right)$ [m].

Prin identificare, între cele două forme ale ecuației de mișcare se obține $\omega = 2$ rad/s; $T = \frac{2\pi}{\omega} = 3,14$ s; $\nu = \frac{1}{T} = \frac{1}{\pi}\ s^{-1} = 0,318\ s^{-1}$.

b) Pentru $y(t) = \frac{A}{2}$ rezultă condiția $\sin\left(\omega t + \frac{\pi}{3}\right) = \frac{1}{2}$ deci $\omega t + \frac{\pi}{3} = (-1)^n \frac{\pi}{6} + n\pi$; Se obțin pentru momentele de timp cerute expresiile:

$$t_n = \frac{1}{\omega}\left[(-1)^n \frac{\pi}{6} - \frac{\pi}{3} + n\pi\right] = \left[\frac{1}{2}(-1)^n \frac{\pi}{6} - \frac{\pi}{3} + n\pi\right].$$

Din ecuația elongației, rezultă pentru $t = 0$:

$$y(0) = 0,4 \sin\left(0 + \frac{\pi}{3}\right) = A \sin \varphi_0 \text{ astfel încît } \varphi_0 = \frac{\pi}{3}.$$

c) *Varianta I.* Se aplică teorema conservării energiei pentru procesele de frecare:

$$\frac{mv_0^2}{2} + \frac{ky_0^2}{2} = \frac{ky_f^2}{2} + \mu mg(y_f - y_0).$$

Înlocuind valorile numerice se obține ecuația de gradul al doilea în y:

$$y_f^2 + 0,5\,y_f - 0,336 = 0.$$

Soluția acestei ecuații este: $y_f = 0,378$ m. Trebuie îndeplinită condiția $y_f < A$ mișcarea fiind amortizată datorită frecării.

Din calculul energiei potențiale se obține

$$E_{p\,\text{elastic}} = \frac{ky_f^2}{2} = 2,85 \cdot 10^{-3}\ \text{J}.$$

2°. a) Ecuația Mandeleev-Clapeyron $pV = \nu RT$ fiind satisfăcută pentru fiecare stare a gazului se poate scrie pentru starea A: $T_A = \frac{p_A V_A}{R} = 240,67$ K.

Pentru starea B (unde $p_B = 2p_A$ și $V_B = V_A$) se obține: $T_B = T_A \frac{p_B}{p_A}$ sau $T_B = \frac{p_B V_B}{R} = 2T_A$

În mod asemănător, pentru starea C (unde $p_C = 2p_A$ și $V_C = 2V_A$) se scrie:

$$T_C = T_B \frac{V_C}{V_A} \text{ sau } T_C = \frac{p_C V_C}{R} = 8T_A = 4T_B.$$

În starea D $p_D = p_A$ și $V_D = 4V_A$, astfel încît:

$$T_D = T_D \frac{V_D}{V_A} \text{ sau } T_D = \frac{p_D V_D}{R} = 4T_A.$$

Efectuînd calculele se obține:

$$T_B = 481,34\ \text{K};\ T_C = 1925,36\ \text{K};\ T_D = 962,68\ \text{K}.$$

b) Lucrul mecanic poate fi calculat ca suma lucrurilor mecanice pentru fiecare proces sau ca aria ciclului:

$$L_{ABCD} = L_{AB} + L_{AC} + L_{CD} + L_{DA} = L_{BC} + L_{DA},$$

$$L_{BC} = p_B(V_C - V_B),\ L_{DA} = p_A(V_A - V_D),$$

$$L_{ABCD} = (p_B - p_A)(V_C - V_A) = 3p_A V_A = 3 \cdot 10^4\ \text{J}.$$

c) Randamentul ciclului are expresia $\eta = \frac{L}{Q_1}$, unde L este lucrul mecanic efectuat, iar Q_1 căldura primită:

$$Q_1 = Q_{AB} + Q_{BC},\ Q_{AB} = C_V(T_B - T_A),$$

$$Q_{BC} = C_p(T_C - T_B) = (C_V + R)(T_C - T_B).$$

Se obține $\eta = 0,18$

3°. a) Se utilizează relația de calcul a inductanței bobinei, $L = \frac{\mu N^2 S}{l_b}$, iar din calcul rezultă:

$$L = \frac{4\pi \cdot 10^{-5} \cdot 25 \cdot 10^4 \frac{\pi}{4} \cdot 10^{-4}}{4 \cdot 10^{-2}} \simeq \frac{25 \cdot 10^{-2}}{4} = 6,25 \cdot 10^{-2}\ \text{H}.$$

b) Rezistența bobinei are expresia:

$$R = \rho\,\frac{l_{fir}}{S_{fir}} = \rho\,\frac{N\pi D}{\pi\frac{d^2}{4}}.$$

Înlocuind datele numerice se obține:

$$R = 4{,}5\cdot10^{-7}\cdot4\,\frac{500\cdot10^{-2}}{0{,}25\cdot10^{-6}} = \frac{9}{0{,}25} = 36\ \Omega.$$

Se calculează în continuare reactanța inductivă X_L și impedanța Z:

$$X_L = \omega L = 100\pi\cdot6{,}25\cdot10^{-2} = 6{,}25\pi\ \Omega,$$

$$Z = \sqrt{R^2+X_L^2} = \sqrt{1\,296+385{,}15} \simeq 41\ \Omega.$$

Pentru calculul intensității efective se utilizează formula:

$$I = \frac{U_{ef}}{Z} = \frac{U_m}{\sqrt{2}Z} \Rightarrow I = \frac{144{,}96}{41} = 3{,}53\ \text{A}.$$

c) Calculul puterilor se face cu ajutorul expresiei:

$P = UI\cos\varphi = 449{,}31$ W (puterea activă),

$P_r = UI\sin\varphi = 244{,}99$ VAR (puterea reactivă), $P_a = UI = 511{,}72$ VA (puterea aparentă).

4°. a) Referirile se fac la figura F.B.119. În mișcarea circulară uniformă $|\vec{v}| = \text{const}$ sau $\Delta v = 0$; însă $\Delta\vec{v} \to 0$, deci vectorul viteză variază ca direcție. Ca urmare, există o accelerație $\vec{a} = \frac{\Delta\vec{v}}{\Delta t}$. Fie Δt intervalul în care mobilul parcurge arcul Δs. Se poate scrie $\Delta s = R\Delta\theta$, unde $\Delta\theta$ reprezintă unghiul la centru cuprins

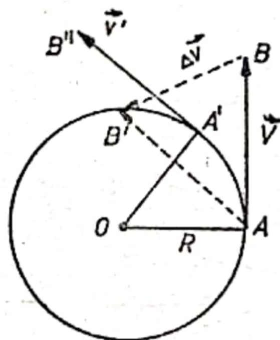


Fig. F.B.119

între razele vectoare corespunzătoare momentelor t_0 și t, astfel încît $\Delta t = t - t_0$. Viteza unghiulară este definită prin relația $\omega = \frac{\Delta\theta}{\Delta t}$. Expresia vitezei liniare în mișcare circulară uniformă se deduce pornind de la definiția:

$$v = \frac{\Delta s}{\Delta t} = R\,\frac{\Delta\theta}{\Delta t}\,R\omega.$$

Pentru a se stabili expresia accelerației centripete se calculează diferența $\Delta\vec{v} = \vec{v}' - \vec{v}$, unde vitezele $\vec{v}'$ și $\vec{v}$ corespund momentelor t și $t' = t + \Delta t$, momente

la care mobilul se află în punctele A, respectiv A'. Din asemănarea triunghiurilor ABB' și CAA' se poate scrie $\frac{|\Delta\vec{v}|}{AA'} = \frac{v}{R}$ și pentru intervale de timp $(\Delta t \to 0)$ foarte mici $\frac{|\Delta\vec{v}|}{\Delta s} = \frac{v}{r}$, $|\Delta\vec{v}| = \frac{v}{R}\Delta s$. Prin urmare $|\vec{a}| = \frac{|\Delta\vec{v}|}{\Delta t} = \frac{v}{R}\cdot\frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{v^2}{R} = \omega^2 R$. Accelerația obținută este radială și orientată spre centrul cercului, astfel că se numește accelerație centripetă sau normală (este perpendiculară permanent pe traiectorie). Vectorul $\vec{a}_n = -\omega^2\vec{r}$.

b) Cu ajutorul ecuației de stare $pV = \frac{m}{\mu}RT = \nu RT$, se poate exprima densitatea unui gaz aflat în condiții fizice date: $\rho = \frac{m}{V} = \frac{p\mu}{RT}$.

În condiții normale de temperatură și presiune, se poate scrie $\rho_0 = \frac{p_0\mu}{RT_0}$, astfel încît, la temperatura T și presiunea p, ρ se exprimă funcție de ρ_0 astfel: $\rho = \rho_0\frac{pT}{p_0T_0}$.

c) Pentru calculul perioadei de rotație a unei particule încărcate într-un cîmp magnetic uniform, se calculează mai întîi raza traiectoriei, egalînd expresia forței Lorentz $f = qvB$ cu expresia forței centripete $F_c = mv^2/r$: $qvB = mv^2/r$. Se obține $r = \frac{mv}{qB}$. Se poate calcula viteza unghiulară a particulei $\omega = \frac{v}{r} = \frac{qB}{m}$ astfel încît $T = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{2\pi m}{qB}$.

5°. a) Acest subiect a fost tratat la VII.3°.b.

b) Acest subiect a fost tratat la XIII. 4°.a și XIX.2°.a.

c) Acest subiect a fost tratat la XVII.4°.a.

XXXIII.1°. a) Pentru a scoate corpul din repaus este necesar ca forța elastică să fie egalată de forța de frînare (fig. F.B.120):

$$kx_m = \mu mg,\ \mu = \frac{kx_m}{mg} = \frac{40\cdot 5\cdot 10^{-2}}{2\cdot 9,8} = 0,102.$$

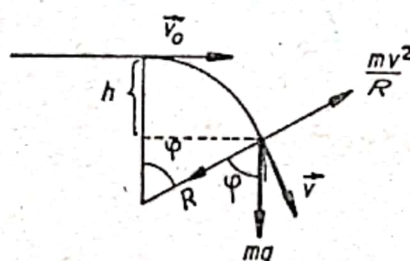


Fig. F.B.120

b) În cazul în care corpul are o mișcare uniform accelerată: $ma = F - \mu mg$, $F = kx$:

$$a = \frac{kx - \mu mg}{m} = \frac{40\cdot 0,1 - 0,102\cdot 2\cdot 9,8}{2} = 1\ \text{m/s}^2.$$

Viteza corpului rezultă din ecuația lui Galilei:

$$v_0 = \sqrt{2aD} = \sqrt{2\cdot 1\cdot 50} = 10\ \text{m/s}.$$

c) Condiţia de desprindere a corpului se scrie la limită sub forma:

$$\frac{mv^2}{R} = mg\cos\varphi.$$

Pentru a obţine pe $\cos\varphi$ se scrie legea conservării energiei: $\frac{mv_0^2}{2} - \frac{mv^2}{2} = mgR(1-\cos\varphi)$. Se obţine $\cos\varphi = \frac{v_0^2 + 2Rg}{3Rg} = 0{,}707$ deci $\varphi = \arccos 0{,}707 = \arccos\frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\pi}{4}$.

Lungimea parcursă pe trambulină se calculează astfel:

$$l = R\frac{\pi}{4} \Rightarrow l = 84{,}12 \cdot \frac{3{,}14}{4} = 66{,}0342 \text{ m}.$$

2°. a) Din ecuaţia Clapeyron-Mendeleev scrisă pentru starea A rezultă:

$$T_A = T_B = \frac{p_A V_A}{\nu R} = \frac{4{,}155 \cdot 10^5 \cdot 2 \cdot 10^{-2}}{10^{-3} \cdot 8\,310} = 1\,000 \text{ K}.$$

Din legea transformării izoterme se obţine:

$$p_C = p_B = \frac{p_A V_A}{V_B} = 2{,}077 \cdot 10^5 \text{ N/m}^2.$$

Din legea transformării izobare sau din ecuaţia Clapeyron-Mendeleev se calculează T_C:

$$T_C = \frac{p_C V_C}{\nu R} = \frac{2{,}077 \cdot 10^5 \cdot 2 \cdot 10^{-2}}{10^{-3} \cdot 8\,310} = 500 \text{ K}.$$

b) Se calculează lucrul mecanic în transformarea BC:

$$L_{BC} = p_B(V_C - V_B) = 2{,}077 \cdot 10^5(-2 \cdot 10^{-2}) = -4{,}155 \text{ kJ}.$$

Cantitatea de căldură schimbată în transformarea BC are expresia:

$$Q_{BC} = \nu C_p(T_C - T_B) = 10^{-3}\frac{7}{2} \cdot 8\,320(-500) = -14{,}5425 \text{ kJ}.$$

c) Pentru calculul randamentului se utilizează definiţia $\eta = \frac{L}{Q_1}$, unde L este lucrul mecanic efectuat pe ciclu, iar Q_1 căldura. Se calculează succesiv:

$$L_{CA} = 0,\ Q_{CA} = \nu(C_p - R)(T_A - T_C) = 10{,}3875 \text{ kJ},$$

$$L_{AB} = Q_{AB} = RT_A \ln\frac{V_B}{V_A} = p_A V_A \cdot 0{,}693 = 8{,}31 \cdot 10^3 \cdot 0{,}693 = 5{,}7588 \text{ kJ}.$$

Înlocuind mărimile calculate în expresia randamentului se obţine:

$$\eta = \frac{L_{AB} + L_{BC}}{Q_{CA} + Q_{AB}} = \frac{5{,}7588 - 4{,}155}{10{,}3875 + 5{,}7588} = 0{,}099.$$

Varianta 2

$$\eta = \frac{L}{Q_1} = \frac{\nu RT_A - \nu R(T_B - T_C)}{\nu\frac{5}{2}R(T_A - T_C) + \nu RT_A \ln 2} \Rightarrow \eta = 10\%.$$

3°. a) Valoarea tensiunii electromotoare induse este (fig. F.B.121):

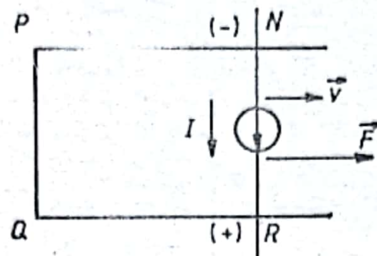


Fig. F.B.121

$e = Blv = 10 \cdot 10^{-3} \cdot 2 \cdot 1 = 2 \cdot 10^{-2}$ V (s-a notat cu l lungimea $\overline{PQ} = \overline{NP}$). Sensul tensiunii electromotoare induse, determinabil cu regula mîinii drepte, este de la N la R.

b) Se calculează rezistența circuitului:

$$R = \rho \frac{l}{S} = 1{,}7 \cdot 10^{-8} \frac{5}{10^{-4}} = 8{,}5 \cdot 10^{-4}\ \Omega.$$

Intensitatea curentului prin conductor este:

$$I = \frac{e}{R} = \frac{e}{2R_{PN} + 2R_{NR}} = \frac{2 \cdot 10^{-2}}{8{,}5 \cdot 10^{-4}} = \frac{200}{8{,}5} = 23{,}5 \text{ A}.$$

c) Se determină masa conductorului (NR):

$$m = \rho_m(\overline{NR})S = 8\,900 \cdot 1 \cdot 10^{-4} = 0{,}89 \text{ kg}.$$

Se scrie condiția de echilibru $F - BI(\overline{NR}) - \mu mg = 0$, din care se obține:

$$\mu = \frac{F - BI(NR)}{mg} = \frac{1{,}4 - 10 \cdot 10^{-3} \cdot 23{,}5 \cdot 3}{0{,}89 \cdot 9{,}8} = \frac{1{,}165}{8{,}722} = 0{,}133.$$

4°. a) Legea se aplică curgerii staționare a unui fluid ideal. Se consideră un tub de curent cu secțiune variabilă și se studiază curgerea fluidului cuprins între

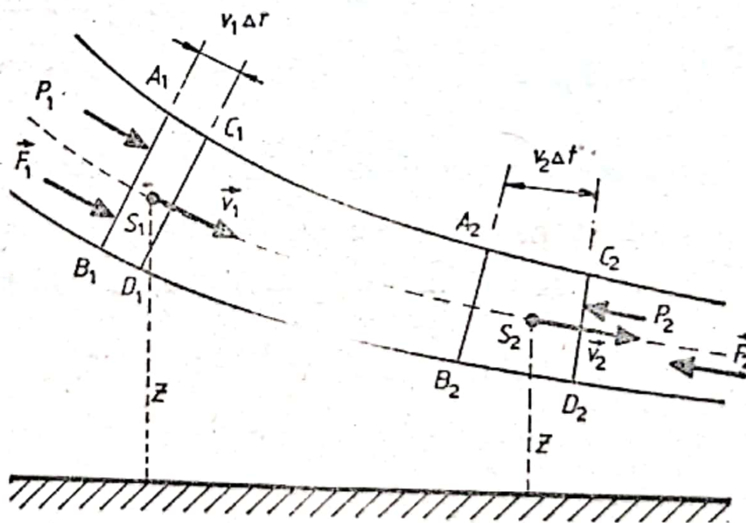


Fig. F.B.122

secțiunile S_1 și S_2 din tubul de curent (fig. F.B.122). Ca urmare a incompresibilității fluidului, volumul V_1 de fluid care traversează secțiunea S_1 în intervalul de timp Δt este egal cu volumul V_2 de fluid care traversează secțiunea S_2 în același interval de timp, deci $S_1V_1\Delta t = S_2V_2\Delta t$, de unde rezultă $V_1 = V_2 = V$.

Variația energiei cinetice a masei m, în intervalul de timp în care a fost transferată din poziția $A_1B_1C_1D_1$ în poziția $A_2B_2C_2D_2$ este $\Delta E_c = \frac{1}{2} m(v_2^2 - v_1^2)$. Trebuie ca ΔE_c să fie egală cu lucrul mecanic al forțelor care se exercită asupra sistemului în intervalul de timp Δt. Acest lucru mecanic are următoarele componente:

— lucrul mecanic motor efectuat sub acțiunea forței de presiune F_1:

$$L_1 = F_1\overline{A_1C_1} = p_1S_1 \cdot \overline{A_1C_1} = p_1V = p_1\frac{m}{\rho},$$

— lucrul mecanic rezistent efectuat sub acțiunea forței F_2:

$$L_2 = -F_2\overline{C_2A_2} = -p_2V_2 = -p_2\frac{m}{\rho},$$

— lucrul mecanic al greutății masei de lichid transferat:

$$L_2 = mg(z_2 - z_1).$$

Din egalitatea variației energiei cinetice cu lucrul mecanic rezultat se obține:

$$(p_1 - p_2)\frac{m}{\rho} + mg(z_1 - z_2) = \frac{1}{2} m(v_2^2 - v_1^2)$$

sau

$$p_1 + \rho g z_1 + \frac{1}{2}\rho v_1^2 = p_2 + \rho g z_2 + \frac{1}{2}\rho v_2^2,$$

deci $p + \frac{1}{2}\rho v^2 + \rho g z =$ constant, adică ecuația lui Bernoulli, unde p se numește presiune statică, $\frac{1}{2}\rho v^2$ presiune dinamică, iar $\rho g z$ presiune de poziție.

b) Acest subiect a fost tratat la XV.4°. b.

c) Referirile se vor face la figura F.B.123. În cazul circuitului serie se pleacă de la ecuația tensiunilor instantanee pentru circuitul serie RLC dată de legea lui Ohm, $u + \left(-L\frac{\Delta i}{\Delta t}\right) = \frac{q}{C} + Ri$, unde $i = \sqrt{2}I \sin(\omega t - \varphi)$, care se scrie sub forma:

$$U \sin \omega t = \omega LI \sin(\omega t - \varphi + \pi/2) - \frac{I}{\omega C}\sin(\omega t - \varphi + \pi/2) + RI \sin(\omega t - \varphi).$$

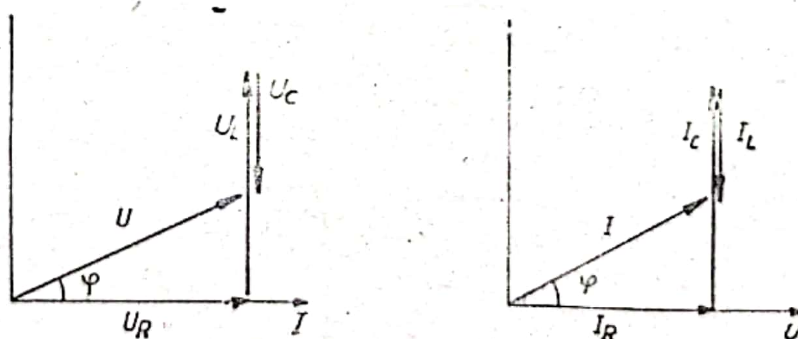


Fig. F.B.123

Utilizînd construcția lui Fresnel se obține triunghiul tensiunilor, unde $U_R = IR$, $U_L = \omega LI$, $U_C = \frac{I}{\omega C}$, tensiunea la borne fiind U. Se observă că:

$$U = I\sqrt{R^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)^2} \text{ și } \operatorname{tg}\varphi = \frac{\omega L - \frac{1}{\omega C}}{R}.$$

Se obţine pentru impedanţă expresia:

$$Z = \frac{U}{I} = \sqrt{R^2 + (X_L - X_C)^2}, \text{ unde } X_L = \omega L \text{ şi } X_C = \frac{1}{\omega C}.$$

În cazul circuitului paralel, se aplică teorema I a lui Kirchhoff, $i = i_R + i_L + i_C$; rezultă:

$$I \sin(\omega t + \varphi) = \frac{U}{R} \sin \omega t + \frac{U}{X_L} \sin\left(\omega t - \frac{\pi}{2}\right) + \frac{U}{X_C} \sin\left(\omega t + \frac{\pi}{2}\right),$$

de unde prin transformări succesive se obţine

$$I = U \sqrt{\frac{1}{R^2} + \left(\frac{1}{X_C} - \frac{1}{X_L}\right)^2} \text{ astfel încît } Z = \frac{U}{I} = \frac{1}{\sqrt{\frac{1}{R^2} + \left(\frac{1}{X_C} - \frac{1}{X_L}\right)^2}}.$$

5°. a) Acest subiect a fost tratat la VII.3°.a.

b) Transformarea izotermă: presiunea unui gaz aflat la temperatură constantă variază invers proporţional cu volumul gazului,

$$pV = \text{const.}$$

Transformarea izobară: variaţia relativă a volumului unui gaz, aflat la presiune constantă este direct proporţională cu temperatura,

$$\frac{V - V_0}{V_0} = \frac{\Delta V}{V_0} = \alpha t.$$

Transformarea izocoră: variaţia relativă a presiunii unui gaz menţinut la volum constant este direct proporţional cu temperatura,

$$\frac{p - p_0}{p_0} = \frac{\Delta p}{p_0} = \beta t.$$

c) Acest subiect a fost tratat la VIII.3°.c.

XXXIV.1°. a) Pentru ca unghiul să rămînă constant în tot timpul mişcării, trebuie îndeplinită condiţia:

$$\operatorname{tg} \theta = \frac{F_{cf}}{G} = \frac{\frac{mv^2}{r}}{mg} = \frac{v^2}{Lg \sin \theta} \quad \text{(fig. F.B.124)},$$

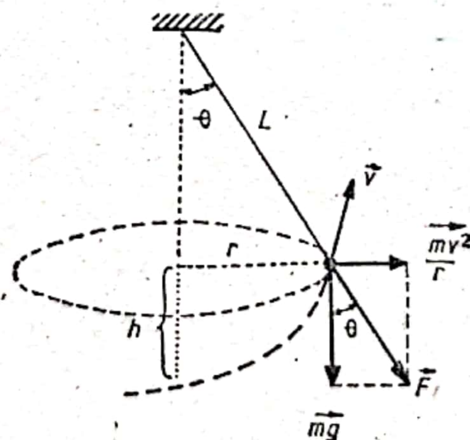


Fig. F.B.124

de unde rezultă expresia vitezei $v^2 = gL \frac{\sin^2 \theta}{\cos \theta}$. Din calcul se obţine:

$$v = \sqrt{9{,}8 \cdot 1 \cdot \frac{1/4}{\sqrt{3}/2}} = 1{,}68 \text{ m/s}.$$

b) Se însumează energia cinetică și potențială în starea dată a corpului, $E = mgL(1 - \cos\theta) + \frac{mv^2}{2}$. Înlocuind valorile numerice rezultă:

$$E = 0{,}1 \cdot 9{,}8 \cdot 1\left(1 - \frac{\sqrt{3}}{2}\right) + \frac{0{,}1 \cdot 1{,}68^2}{2} = 0{,}272 \text{ J}.$$

c) Prin ruperea firului corpul se mișcă accelerat cu accelerația g, deci $N - L\cos\theta = \frac{gt^2}{2}$, astfel că

$$t = \sqrt{\frac{2(N - L\cos\theta)}{g}} = \sqrt{\frac{2\left(2{,}5 - 1 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}\right)}{9{,}8}} = 0{,}58 \text{ s}.$$

Viteza cu care corpul atinge solul se obține din legea conservării energiei:

$$\frac{mv_{sol}^2}{2} = \frac{mv^2}{2} + mg(H - L\cos\theta) \text{ sau } v_{sol} = \sqrt{v^2 + 2g(H - L\cos\theta)};$$

$$v_{sol} = \sqrt{2{,}8 + 2 \cdot 9{,}8\left(2{,}5 - 1 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}\right)} = 5{,}9 \text{ m/s}.$$

2°. a) Se exprimă temperaturile în kelvini, $T_1 = 800$ K, $T_2 = 400$ K, și se aplică formula randamentului ciclului Carnot:

$$\eta = \frac{T_1 - T_2}{T_1} = 0{,}5.$$

b) Se calculează lucrul mecanic util al motorului în timp de o oră:

$$L_{1\text{ oră}} = Pt = 75 \cdot 3600 \cdot 10^3 \text{ J} = 270 \cdot 10^6 \text{ J}.$$

Căldura de la sursa caldă se obține din expresia randamentului:

$$\eta = \frac{L}{Q_1} \Rightarrow Q_1 = \frac{L}{\eta} = 540 \cdot 10^6 \text{ J}.$$

Căldura cedată sursei reci Q_2 se calculează astfel:

$$L = Q_1 - |Q_2|, \quad |Q_2| = Q_1 - L = \frac{1 - \eta}{\eta} L, \quad |Q_2| = 270 \cdot 10^6 \text{ J}.$$

c) Se utilizează expresia căldurii echivalente în comprimarea izotermă:

$$|Q_2| = \nu R T_2 \ln \frac{V_3}{V_4} \cdot n \cdot 60,$$

$$\ln \frac{V_3}{V_4} = \frac{|Q_2|}{60 n \nu R T_2} = \frac{270 \cdot 10^6}{60 \cdot 120 \cdot 16{,}28 \cdot 8{,}31 \cdot 400} = 0{,}693 = \ln 2.$$

Se obține

$$\frac{V_3}{V_4} = 2.$$

Se utilizează ecuația lui Poisson a transformării adiabatice, scrisă sub forma:

$$T_1 V_1^{\gamma - 1} = T_2 V_4^{\gamma - 1}, \Rightarrow \frac{V_4}{V_1} = \left(\frac{T_1}{T_2}\right)^{\frac{1}{\gamma - 1}} = \left(\frac{T_1}{T_2}\right)^{\frac{1}{\frac{4}{3} - 1}} = \left(\frac{T_1}{T_2}\right)^3 = 2^3 = 8.$$

3°. a) Referirile se fac la figura F.B.125. Potențialul electric produs de sarcina electrică din punctul A în vîrful piramidei are expresia:

$$V_A = \frac{q/2}{4\pi\varepsilon_0(VA)} = \frac{q}{8\pi\varepsilon_0\sqrt{h^2 + \frac{a^2}{2}}}.$$

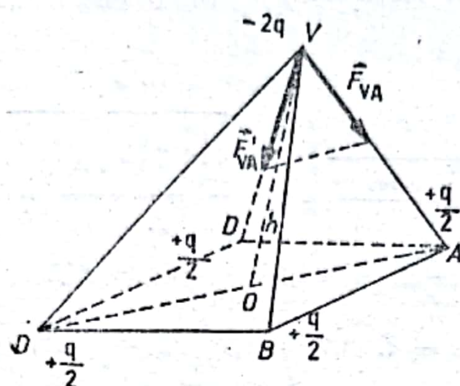


Fig. F.B.125

Însumînd potențialele produse de sistemul celor patru sarcini $+\frac{q}{2}$, se obține

$$V_{\text{total}} = 4V_A \frac{q}{2\pi\varepsilon_0\sqrt{h^2 + \frac{a^2}{2}}}.$$

b) Se calculează mai întîi forța coulombiană dintre sarcina $(-2q)$, din vîrful piramidei și sarcina $\frac{q}{2}$ din punctul A:

$$\vec{F}_{VA} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \cdot \frac{Q_V Q_A}{VA^2} \cdot \frac{\overrightarrow{VA}}{\overline{VA}} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \cdot \frac{q^2}{h^2 + \frac{a^2}{2}} \cdot \frac{\overrightarrow{VA}}{\overline{VA}}.$$

Asupra sarcinii din vîrful piramidei va acționa numai proiecția verticală a forței $\vec{F}_{VA}$ (componentele orizontale ale forțelor din cele patru vîrfuri dau o rezultantă nulă):

$$|\vec{F}'_{VA}| = |\vec{F}_{VA}| \cos\theta, \quad \cos\theta = \frac{h}{\sqrt{h^2 + \frac{a^2}{2}}},$$

$$|\vec{F}'_{VA}| = \frac{q^2}{4\pi\varepsilon_0} \cdot \frac{1}{h^2 + \frac{a^2}{2}} \cdot \frac{h}{\sqrt{h^2 + \frac{a^2}{2}}}.$$

Forța rezultantă are mărimea și sensul conform expresiei:

$$\vec{F}_{rez} = 4\vec{F}'_{VA} = \frac{q^2 h}{\pi\varepsilon_0} \cdot \frac{1}{\left(h^2 + \frac{a^2}{2}\right)^{3/2}} \cdot \frac{\overrightarrow{VO}}{\overline{VO}}.$$

c) Referirile se fac la figura F.B.126. Se folosește expresia capacității unui condensator plan, $C = \varepsilon_0 \frac{A}{h} = \frac{Q}{V}$, și se obține pentru diferența de potențial cerută expresia:

$$V = \frac{Qh}{\varepsilon_0 A} = \frac{2\,qh}{\varepsilon_0 A}.$$

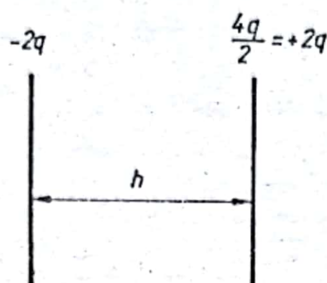


Fig. F.B.126

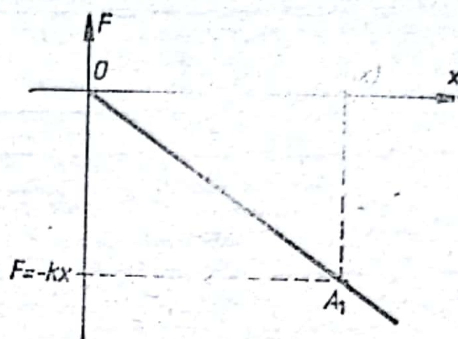


Fig. F.B.127

4°. a) Se calculează lucrul mecanic al forței elastice $F = -kx$ folosind graficul de variație al acestei forțe în funcție de x, într-un sistem de coordonate FOx (fig. F.B.127). Graficul funcției $F = -kx$ este o dreaptă care trece prin originea axelor de coordonate. Se poate calcula lucrul mecanic al forței elastice ca fiind egal cu aria suprafeței limitată de dreapta $F = -kx$ și segmentele de dreaptă $\overline{OA}$ și $\overline{AA_1}$, deci se poate scrie:

$$L = \frac{\overline{AA_1} \cdot \overline{OA}}{2} = -\frac{kx^2}{2}.$$

Din expresia de mai sus rezultă că forța elastică este o forță conservativă.

b) Acest subiect a fost tratat la XXI.5°.b.

c) Acest subiect a fost tratat la XXX.4°.c.

5°. a) În timpul modificării configurației unui sistem fizic izolat, în care acționează forțe conservative, suma $E = E_p + E_c$, numită energia mecanică a sistemului, are o valoare constantă pentru orice stare (configurație) a sistemului (E_p — energia potențială, E_c — energia cinetică).

b) Acest subiect a fost tratat la XXVI.5°.b și I.5°.c.

c) Acest subiect a fost tratat la XXIX.5°.b.

XXXV.1°. a) Din ecuația de echilibru dinamic a sistemului de corpuri rezultă

$$a = \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2} g \Rightarrow a = \frac{0{,}3 - 0{,}2}{0{,}5} \cdot 9{,}8 = 1{,}96 \text{ m/s}^2.$$

Pentru calculul tensiunii în fir se utilizează una din formulele:

$$T = \frac{2m_1 m_2}{m_1 + m_2} g, \quad T = G_1 - m_1 a \text{ sau } T = m_2 a + G_2.$$

Se obține $T = 2{,}352$ N.

Se scrie legea spațiului pentru mișcarea accelerată a sistemului:

b) $s = \frac{1}{2} at^2$, $s = \frac{H}{2}$, $t = \sqrt{\frac{H}{a}}$, $t = \sqrt{\frac{1}{1{,}96}} = 0{,}71$ s.

c) Dacă cilindrul 1 se introduce în vasul cu lichid pe distanța x, forța arhimedică care acționează asupra lui va fi:

$$F_A = xS\rho g.$$

Rezultanta forțelor care se exercită asupra sistemului este de forma $F = G_1 - G_2 - xS\rho g = -kx + F'$, adică o forță elastică caracterizată de constanta de elasticitate $k = S\rho g$.

Pentru calculul frecvenței oscilațiilor se utilizează formula:

$$\omega^2 = \frac{k}{m} = \frac{k}{m_1 + m_2} = \frac{S\rho g}{m_1 + m_2} = \frac{hS\frac{\rho}{\rho_c}\rho_c g}{h(m_1 + m_2)} = \frac{m_1 \frac{\rho}{\rho_c} g}{h(m_1 + m_2)},$$

de unde

$$\nu = \frac{\omega}{2\pi} = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{m_1}{m_1 + m_2}\cdot\frac{\rho}{\rho_c}\cdot\frac{g}{h}}, \quad \text{deci } \nu = 1{,}41 \text{ Hz}.$$

2°. a) Lucrul mecanic efectuat pe întreg ciclul este determinat de aria ciclului: $L_{ciclu} = 4\,800$ J.

Pentru calculul căldurii primite se utilizează relația $Q_p - Q_r = L_{ciclu}$. Se obține:

$$Q_p = L_{ciclu} + Q_r = 4\,800 + 1\,600 = 6\,400 \text{ J}.$$

Din formula randamentului rezultă $\eta = \dfrac{L_{ciclu}}{Q_p} = \dfrac{4\,800}{6\,400} = 0{,}75.$

b) Căldura vehiculată în transformarea izocoră este dată de relația $Q_r = \nu C_V(T_4 - T_1)$. Produsul νC_V se calculează din expresia căldurii primite:

$$Q_p = Q_r + L_{ciclu} = \nu C_V(T_3 - T_2) \Rightarrow \nu C_V = \frac{Q_p}{T_3 - T_2} = \frac{6\,400}{200} = 32 \text{ J/K}.$$

Se obține pentru diferența de temperatură expresia:

$$T_4 - T_1 = \frac{Q_r}{\nu C_V} = \frac{1\,600}{32} = 50 \text{ K}.$$

c) Se calculează mai întîi exponentul adiabatic utilizînd ecuația transformării adiabatice:

$$T_1 V_1^{\gamma-1} = T_2 V_2^{\gamma-1} \Rightarrow T_2 = T_1\left(\frac{V_1}{V_2}\right)^{\gamma-1} = T_1(32)^{\gamma-1} = T_1 \cdot 2^{5(\gamma-1)},$$

$$T_3 = T_4 \cdot 2^{5(\gamma-1)},\ 2^{5(\gamma-1)} \cdot [T_4 - T_1] = T_3 - T_2 \Rightarrow 2^{5(\gamma-1)} = \frac{T_3 - T_2}{T_4 - T_1} = 4 = 2^2.$$

Se obține pentru exponentul adiabatic valoarea:

$$\gamma = \frac{7}{5} = 1{,}4.$$

Căldura molară la volum constant se calculează astfel:

$$C_V = \frac{R}{\gamma - 1} = \frac{5}{2} R = 20{,}775 \text{ kJ/kmol}\cdot\text{K}$$

3°. a) Se utilizează formula capacității condensatorului plan:

$$C_2 = \frac{\varepsilon_0 S}{d} = \frac{8{,}85 \cdot 10^{-12} \cdot 4 \cdot 10^{-2}}{3{,}54 \cdot 10^{-4}} = 10^{-9} \text{ F}.$$

b) Capacitatea echivalentă se calculează cu formula:

$$C = \frac{C_1 C_2}{C_1 + C_2} = \frac{2 \cdot 10^{-9}}{2 + 1} = \frac{2}{3} \cdot 10^{-9} \text{ F}.$$

Din condiția de rezonanță $\omega_0 L = \frac{1}{\omega_0 C}$ rezultă:

$$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot 10^6 = 7{,}07 \cdot 10^5 \text{ rad/s}, \quad \text{astfel încît:}$$

$$\nu_0 = \frac{\omega_0}{2\pi} = \frac{7{,}07 \cdot 10^5}{2 \cdot 3{,}14} \cdot 1{,}129 \cdot 10^5 \text{ Hz}.$$

c) Pentru calculul fluxului maxim se utilizează formula:
$\Phi_{max} = LI_{max}$, în care se introduce valoarea lui I_{max} calculată din relațiile:

$$Q_{1,\,max} = C_1 U_{1,\,max}, \; U_{1,\,max} = X_0 I_{max} = \frac{1}{C_1 \omega_0} I_{max}.$$

Se obține:

$$\Phi_{max} = LC_1\omega_0 \frac{Q_{1,\,max}}{C_1} = L\omega_0 Q_{1,\,max} = 3 \cdot 10^{-3} \cdot 7{,}07 \cdot 10^5 \cdot 2 \cdot 10^{-6} = 4{,}242 \cdot 10^{-3} \text{ Wb}.$$

4°. a) Acest subiect a fost tratat la VIII.3°.b.
b) Acest subiect a fost tratat la I.4°.b și XV.4°.c.

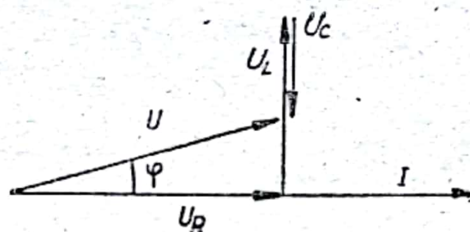


Fig. F.B.128

c) Ne vom referi la figura F.B.128. Sarcina electrică de pe fiecare armătură a condensatoarelor, legate în serie, are aceeași valoare, alternativ pozitivă și negativă, diferența de potențial dintre armăturile fiecărui condensator fiind dată de relațiile:

$$V_A - V_B = \frac{Q}{C_1}, \; V_B - V_C = \frac{Q}{C_2}, \quad V_C - V_D = Q/C_3.$$

Se poate scrie:

$$V_A - V_D = (V_A - V_B) + (V_B - V_C) + (V_C - V_D) = \frac{Q}{C_1} + \frac{Q}{C_2} + \frac{Q}{C_3} =$$

$$= Q\left(\frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} + \frac{1}{C_3}\right) = Q\frac{1}{C},$$

unde s-a notat $\frac{1}{C} = \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} + \frac{1}{C_3}$.

5°. a) Acest subiect a fost tratat la VII.4°.
b) Acest subiect a fost tratat la III.4°.b.
c) În centrul unei spire parcursă de curent electric, vectorul inducție magnetică are modulul $B = \frac{\mu I}{2r}$, unde r este raza spirei, μ permeabilitatea mediului, iar I intensitatea curentului care trece prin spiră.

XXXVI.1°. a) Se scrie legea spațiului pentru fiecare dintre cele două corpuri ținîndu-se seama de retardarea Δt:

$$h_1 = \frac{gt^2}{2}, \quad h_2 = \frac{g(t - \Delta t)^2}{2}.$$

Distanța dintre corpuri este dată de expresia:

$$\Delta h = h_1 - h_2 = \frac{gt^2}{2} - \frac{g(t-\Delta t)^2}{2} = gt\Delta t - \frac{g}{2}(\Delta t)^2.$$

Se observă că Δh e maxim pentru $t = t_{max} = \sqrt{\frac{2h}{g}} = \sqrt{\frac{2 \cdot 240,1}{9,8}} = 7$ s.
Atunci

$$(\Delta h)_{max} = gt_{max}\Delta t - \frac{g(\Delta t)^2}{2} = 117,6 \text{ m}.$$

b) Se scrie ecuația de mișcare a corpurilor în apă luîndu-se în considerare forța arhimedică:

$$ma = F_A - mg,\ F_A = \rho Vg,\ m = V\rho_c.$$

Se obține:

$$a = g\left(\frac{\rho}{\rho_c} - 1\right) = g\left(\frac{\rho V}{m} - 1\right) = 5,88 \text{ m/s}^2.$$

c) Se ia ca origine a timpului t' momentul cînd primul corp atinge suprafața apei și se pune condiția de întîlnire a corpurilor:

$$v_0t' - \frac{at'^2}{2} = v_0(t' - \Delta t) - \frac{a(t' - \Delta t)^2}{2}.$$

Rezultă pentru t' expresia:

$$t' = \frac{v_0\Delta t + \frac{a(\Delta t)^2}{2}}{a\Delta t} = \frac{v_0}{a} + \frac{\Delta t}{2},$$ unde $v_0 = \sqrt{2gh} = 68,6$ m/s; deci $t' = 12,67$ s,
$\tau = t' + t_{max} = 19,67$ s.

Distanța față de suprafața apei, la care are loc întîlnirea, este:

$$h' = v_0t' - \frac{at'^2}{2} = 397,2 \text{ m}.$$

2°. a) Se scrie ecuația de stare a gazului pentru starea inițială $p_1V_1 = \nu RT_1$, de unde

$$T_1 = \frac{p_1V_1}{\nu R} = \frac{2 \cdot 10^5 \cdot 150 \cdot 10^{-3}}{10 \cdot 10^{-3} \cdot 8\,310} \simeq 361 \text{ K}.$$

b) Forța F determină o presiune $p_1' = \frac{F}{S} = 3 \cdot 10^5$ N/m², astfel încît din ecuația de stare a gazului încălzit pînă la limita de deschidere a supapei, $p_1'V_1 = \nu RT_1'$, se obține:

$$T_1' = \frac{p_1'V_1}{\nu R} = \frac{3 \cdot 10^5 \cdot 150 \cdot 10^{-3}}{10 \cdot 10^{-3} \cdot 8\,310} = \frac{3}{2}T_1 \simeq 541,5 \text{ K}.$$

Variantă: Din ecuația transformării izocore, $\frac{p_1}{p_1'} = \frac{T_1}{T_1'}$, se obține

$$T_1' = \frac{p_1'}{p_1}T_1 = 541,5 \text{ K}.$$

c) Scriind ecuaţia de stare a gazului aflat în rezervor şi recipient la echilibru, $p(V_1 + V_2) = \nu RT$, se obţine $T = \frac{p(V_1 + V_2)}{\nu R} = 421$ K.

Din formula vitezei medii pătratice rezultă:

$$v_T = \sqrt{\frac{3RT}{\mu}} = \sqrt{\frac{3 \cdot 8\,310 \cdot 5 \cdot 41{,}5}{4}} = 1\,620 \text{ m/s}.$$

3°. a) Se scrie legea lui Ohm pentru întreg circuitul în cele două cazuri:

$$I_1 = \frac{E_1}{R + nr}, \quad I_2 = \frac{E_2/2}{R + \frac{n}{2}r}.$$

Rezolvînd sistemul se obţine:

$$R = \frac{E_1(I_1 - I_2)}{I_1 I_2} = 20\ \Omega, \ n = \frac{E_1 - I_1 R}{I_1 r} = 40.$$

b) $W = RI_1^2 t = 20 \cdot (1{,}5)^2 \cdot 3 \cdot 600 = 162$ kJ.

c) Se calculează această capacitate în funcţie de permitivitatea relativă a plăcii:

$$C_1 = \frac{\varepsilon_0 \varepsilon_r S'}{d} = \frac{\varepsilon_0 \varepsilon_r S}{2d}, \ C_2 = \frac{\varepsilon_0 S}{2d},$$

$$C = C_1 + C_2 = \frac{\varepsilon_0 S}{2d}(1 + \varepsilon_r),$$

de unde

$$\varepsilon_r = \frac{2d}{\varepsilon_0 S} C - 1 = 4.$$

În cazul în care se consideră $C' = \frac{q}{E_{1/2}} = 6 \cdot 10^{-10}$ F, se obţine $\varepsilon_r = 9$.

4°. a) Acest subiect a fost tratat la XIV.4°.a.

b) Acest subiect a fost tratat la XVI.5°.b.

c) În condiţiile rezonanţei circuitului serie RLC, intensitatea curentului devine maximă, $I_r = \frac{U}{R}$, iar tensiunile efective la bornele bobinei şi condensatorului devin şi ele maxime:

$$U_L = I_r X_L = \left(\frac{U\omega L}{R}\right)_{\omega=\omega_0}, \quad U_C = I_r X_C = \left(\frac{U}{\omega RC}\right)_{\omega=\omega_0}.$$

Raportul notat cu Q:

$$Q = \left(\frac{U_L}{U}\right)_{\omega=\omega_0} = \left(\frac{U_C}{U}\right)_{\omega=\omega_0} = \frac{\omega_0 L}{R} = \frac{1}{\omega_0 RC} = \frac{1}{R}\sqrt{\frac{L}{C}},$$

care arată de cîte ori este mai mare, la rezonanţă tensiunea la bornele bobinei sau condensatorului în raport cu cea a generatorului, se numeşte factor de supratensiune sau de calitate al circuitului.

5°. a) Acest subiect a fost tratat la VIII.3°.a.

b) Legea Boyle-Mariotte: Presiunea unui gaz aflat la temperatură constantă variază invers proporţional cu volumul gazului: pV = constant.

c) Acest subiect a fost tratat la XXXIII.5°.c.

XXXVII.1°. a) Se utilizează formulele vitezei și accelerației mișcării oscilatorii:

$$v_{max} = \omega A = 2\pi \cdot 0,1 = 0,2\pi = 0,628 \text{ m/s},$$

$$a_{max} = \omega^2 A = 0,1 \cdot 4\pi^2 \simeq 4 \text{ m/s}^2.$$

b) Punînd condiția din enunț, $\frac{A}{2} = A \sin\left(2\pi t_1 + \frac{\pi}{4}\right)$, se obține $2\pi t_1 + \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{6}$, respectiv $\frac{\sqrt{3}}{2} A = A \sin\left(2\pi t_2 + \frac{\pi}{4}\right)$, $2\pi t_2 + \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{3}$. Prin urmare:

$$\Delta t = t_2 - t_1 = \frac{1}{24} - \left(-\frac{1}{24}\right) = \frac{1}{12} \text{ s} \simeq 0,08 \text{ s}.$$

c) Se calculează mai întîi constanta elastică a oscilatorului armonic:

$$k = m\omega^2 = 1 \cdot 4\pi^2 = 40 \text{ N/m}.$$

Energia cinetică se obține din legea conservării energiei:

$$E_p = \frac{1}{2} k y_2^2 = \frac{1}{2} \cdot 40 \cdot \frac{3}{4} \cdot 10^{-2} \simeq 0,15 \text{ J}.$$

Energia totală este egală cu energia potențială maximă:

$$E_t = \frac{1}{2} kA^2 = \frac{1}{2} \cdot 40 \cdot 10^{-2} \simeq 0,20 \text{ J},$$

$$E_c = E_t - E_p = 0,20 - 0,15 \simeq 0,05 \text{ J}.$$

2°. a) Se utilizează formula inductanței:

$$L = \frac{\mu_0 \mu_r N^2 S}{l} = \frac{4\pi \cdot 10^{-7} \cdot 300 \cdot 10^6 \cdot 10 \cdot 10^{-4}}{62,8 \cdot 10^{-2} \cdot 10^{-1}} \simeq 0,6 \text{ H}.$$

b) Intensitatea curentului electric prin bobină rezultă din expresia inducției magnetice:

$$B = \frac{\mu_0 \mu_r N I}{l} \Rightarrow I = \frac{8 \cdot 62,8 \cdot 10^{-2}}{4\pi \cdot 10^{-7} \cdot 300 \cdot 1\,000} = \frac{40}{3} \simeq 13,3 \text{ A}.$$

În rezistența bobinei se disipă puterea $P = I^2 R = 13,3^2 \cdot 20 \simeq 3,55 \cdot 10^3$ W.

c) Masa unei molecule este dată de formula $m_{moleculă} = \frac{A}{N_A}$, deci masa de cupru depusă la catod va fi: $M_{depus} = N m_{moleculă} = N \frac{A}{N_A}$; din calcul rezultă:

$$M = 9 \cdot 10^{20} \frac{63,6}{6,023 \cdot 10^{23}} \simeq 9,5 \cdot 10^{-6} \text{ kg}.$$

3°. a) Din definiția accelerației rezultă:

$$a = a_m = \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{v - v_0}{t - t_0} = \text{const.},$$

încît $v = v_0 + a(t - t_0)$. Din expresia vitezei medii: $v_m = \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{x - x_0}{t - t_0}$ rezultă

$$x = x_0 + v_m(t - t_0) = x_0 + \frac{1}{2}(v_0 + v)(t - t_0);$$

dar $v = v_0 + a(t - t_0)$, deci

$$x = x_0 + v_0(t - t_0) + \frac{1}{2} a(t - t_0)^2.$$

b) $U_1 = IR_1$, $U_2 = IR_2$, $U_3 = IR_3$. $U = IR$ și, conform legii lui Kirchhoff (fig. F.B.129, a), $U = U_1 + U_2 + U_3$ sau $IR = IR_1 + IR_2 + IR_3$

$$R = R_1 + R_2 + R_3, \text{ deci, în general, } R = \sum_1^n R_i.$$

Conform legii lui Ohm: $I_1 = \frac{U}{R_1}$, $I_2 = \frac{U}{R_2}$, $I_3 = \frac{U}{R_3}$.

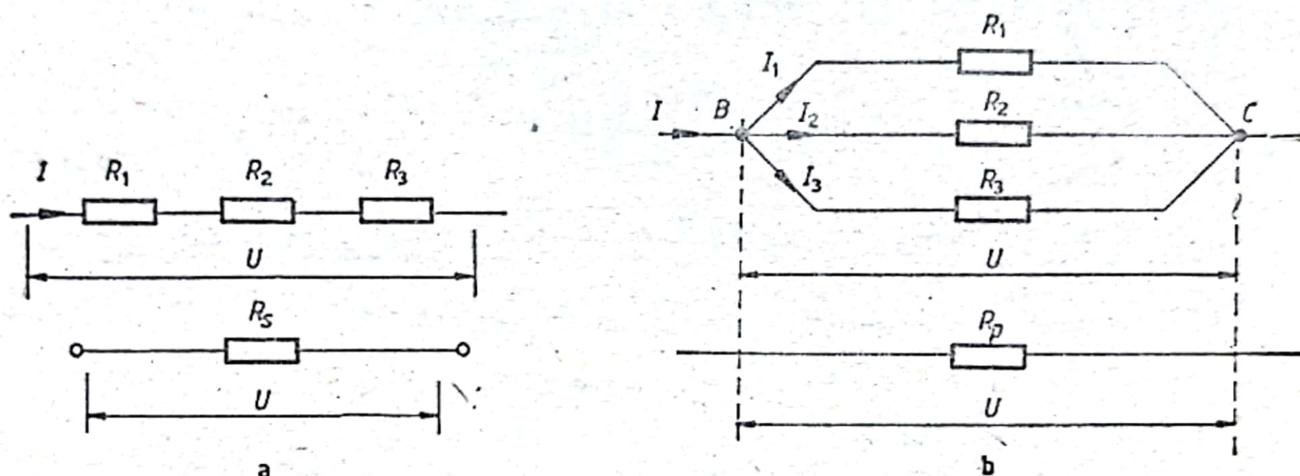


Fig. F.B.129

Conform legii I a lui Kirchhoff pentru nodul B (fig. F.B.129, b)

$$I = I_1 + I_2 + I_3 \text{ sau } \frac{U}{R} = \frac{U}{R_1} + \frac{U}{R_2} + \frac{U}{R_3},$$

deci $\frac{1}{R} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3}$; generalizînd: $\frac{1}{R} = \sum_1^n \frac{1}{R_i}$.

c) Acest subiect a fost tratat la XIII.3°c și XXIII.4°c.

4°. a) $\vec{F}_c = + m\omega^2\vec{r}$ (m este masa corpului aflat în mișcare circulară uniformă, ω viteza unghiulară iar $\vec{r}$ raza vectoare).

b) Acest subiect a fost tratat la I.5°.a.

c) Acest subiect a fost tratat la XIII.4°.c.

XXXVIII. 1°. a) $L_{ciclu} = 1{,}247 \cdot 10^5$ J,

$$L_{ciclu} = \frac{(p_2 - p_1)(V_3 - V_1)}{2} = \frac{p_1V_1}{2}, \quad p_1V_1 = \nu RT_1, \quad \nu = \frac{0{,}4}{4} = 0{,}1 \text{ kmol},$$

$$L_{ciclu} = \frac{\nu RT_1}{2}, \quad T_1 = \frac{2L_{ciclu}}{R} = \frac{2 \cdot 1{,}247 \cdot 10^5}{0{,}1 \cdot 8{,}310 \cdot 10^3} = 300 \text{ K}.$$

b) $\Delta U_{23} = 0$, deoarece stările 2 și 3 sînt pe izotermă, întrucît $p_2V_1 = p_1V_3$ și pe izotermă energia internă nu variază. Se poate arăta și prin calcul: $T_2 = 600$ K, $T_3 = 600$ K și $\Delta U_{12} = \Delta U_{13} = 374$ J.

c) Ecuația de stare a gazului pentru starea 2 are forma:

$$p_2V_2 = \nu RT_2, \Rightarrow p_2 = \frac{\nu RT_2}{V_2} = \frac{\nu RT_2\rho_2}{m}, \quad V_2 = \frac{m}{\rho_2} = 5 \text{ m}^3.$$

Din calcul rezultă $p_2 = 0{,}997 \cdot 10^5$ N/m².

2°. a) Curentul din circuit se determină cu ajutorul legii lui Ohm:

$$I = \frac{E}{R_1 + R_2 + R_3} = \frac{220}{200} = 1{,}1 \text{ A}.$$

Se calculează tensiunea la bornele AB:

$$U_{AB} = E - IR_3 = 220 - 1{,}1 \cdot 20 = 220 - 22 = 198 \text{ V}.$$

Pentru calculul sarcinilor electrice de pe armăturile condensatoarelor C_1 și C_2 se scriu ecuațiile:

$$U_{C_1} + U_{C_2} = U_{AB}, \frac{Q}{C_1} + \frac{Q}{C_2} = U_{AB}, \ Q \cdot \frac{C_1 + C_2}{C_1C_2} = U_{AB},$$

de unde

$$Q = \frac{U_{AB}C_1C_2}{C_1 + C_2} = \frac{198 \cdot 1 \cdot 3 \cdot 10^{-6}}{4} \text{ C} = 148{,}5 \cdot 10^{-6} \text{ C} = 148{,}5 \ \mu\text{C}.$$

Tensiunile de pe cele două condensatoare au valorile:

$$U_{C_1} = Q/C_1 = 148{,}5 \text{ V}, \ U_{C_2} = Q/C_2 = 49{,}5 \text{ V}.$$

b) Se observă că $U_{R_1} = U_{C_1}$ și $U_{R_2} = U_{C_2}$. Din calcul rezultă:

$$U_{R_1} = R_1I = 100 \cdot 1{,}1 = 110 \text{ V}, \ U_{R_2} = R_2I = 80 \cdot 1{,}1 = 88 \text{ V},$$

prin urmare pe armăturile condensatoarelor se află sarcinile:

$$Q_1 = C_1U_{R_1} = 10^{-6} \cdot 110 = 110 \ \mu\text{C}, \ Q_2 = C_2U_{R_2} = 3 \cdot 10^{-6} \cdot 88 = 264 \ \mu\text{C}.$$

c) Aplicînd formula energiei cîmpului electric dintre armăturile condensatorului, se obține $W' = 0{,}011$ J, $W'' = 0{,}0060$ J.

3°. a, b) Impedanța circuitului RLC paralel are expresia:

$$\frac{1}{Z} = \sqrt{\frac{1}{R^2} + \left(\frac{1}{X_C} - \frac{1}{X_L}\right)^2}.$$

Din legea lui Ohm pentru curentul alternativ, $I = U\sqrt{\frac{1}{R^2} + \left(\frac{1}{X_C} - \frac{1}{X_L}\right)^2}$,

unde $X_L = \omega L = \frac{2\pi \cdot 50}{10\pi} = 10 \ \Omega$ și $X_C = \frac{1}{\omega C} = \frac{1}{100\pi \cdot \frac{10^{-3}}{2\pi}} = \frac{10^3}{50} = 40 \ \Omega$, se obține:

$$I = 220\sqrt{\frac{1}{100} + \left(\frac{1}{40} - \frac{1}{10}\right)^2}, \ \frac{1}{Z} = \sqrt{\frac{16 + 9}{1600}} = \frac{5}{40} \Rightarrow Z = 8 \ \Omega.$$

Pentru intensitățile curenților din circuit rezultă valorile

$$I = \frac{220}{8} = 27{,}5 \text{ A}, \ I_R = \frac{U}{R} = \frac{220}{10} = 22 \text{ A}, \ I_L = \frac{U}{X_L} = \frac{220}{10} = 22 \text{ A}, \text{ iar}$$

$$I_C = \frac{U}{X_C} = \frac{220}{40} = 5{,}5 \text{ A}.$$

Diagrama fazorială este prezentată în figura F.B.130.

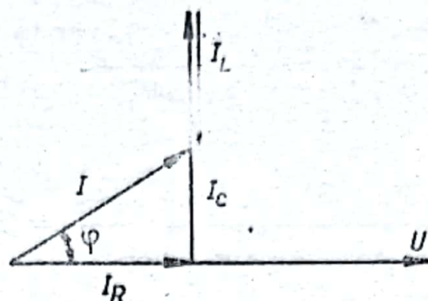


Fig. F.B.130

Pentru calculul defazajului dintre curent și tensiune se folosește formula:

$$\operatorname{tg}\varphi = \frac{I_L - I_C}{I_R} = 0{,}75 = \frac{3}{4}, \quad \varphi = \operatorname{arctg}\frac{3}{4} = 36{,}86°.$$

c) La rezonanță, $I = I_{minim} = I_R = 22$ A. Prin urmare, frecvența ν_1 se calculează astfel:

$$\nu_1 = \frac{1}{2\pi\sqrt{LC}} = \frac{1}{2\pi\sqrt{\frac{1}{10\pi}\cdot\frac{10^{-3}}{2\pi}}} = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{20\pi^2}{10^{-3}}} = \frac{1}{2}\sqrt{2\cdot 10^4} = 50\sqrt{2}\ \text{Hz}.$$

4°. a) Acest subiect a fost tratat la II.5°. b și la XIII.5°. b.

b) α) Cînd un lichid fierbe, la presiune constantă temperatura vaporilor în imediata vecinătate a lichidului rămîne constantă. Această temperatură este cunoscută sub numele de temperatură de fierbere, iar în condiții de presiune constantă depinde numai de natura lichidului.

β) Un lichid intră în fierbere atunci cînd presiunea maximă a vaporilor săi este egală cu presiunea de deasupra lichidului.

c) Acest subiect a fost tratat la XXV.4°. c.

5°. a) Acest subiect a fost tratat la III.4°. b.

b) Acest subiect a fost tratat la V.4°. b.

c) Acest subiect a fost tratat la XXIX. 5°. b.

XXXIX. 1°. a) Presiunea inițială a gazului se calculează astfel: $p_1 = p_0 + \frac{Mg}{S} = 1{,}5\cdot 10^5$ N/m².

Din ecuația de stare, $p_1V_1 = \frac{m}{\mu}RT_1$, se obține volumul inițial $V_1 = \frac{mRT_1}{\mu p_1} = \frac{14\cdot 10^{-3}\cdot 8\,310\cdot 300}{20\cdot 1{,}5\cdot 10^5} = 8{,}31\cdot 10^{-3}$ m³.

Rezultă înălțimea $h = \frac{V_1}{S} = \frac{8{,}31\cdot 10^{-3}}{10^{-2}} = 8{,}31\cdot 10^{-1}$ m.

b) În transformarea izobară lucrul mecanic are expresia $L = p_1(V_2' - V_1)$. Volumul V_2' rezultă din legea transformării izobare:

$$\frac{V_2'}{T_2} = \frac{V_1}{T_1} \Rightarrow V_2' = T_2\frac{V_1}{T_1} = 400\cdot\frac{8{,}31\cdot 10^{-3}}{300} = 11{,}08\cdot 10^{-3}\ \text{m}^3,$$

$$L = 1{,}5\cdot 10^5(11{,}08 - 8{,}31)\cdot 10^{-3} = 4{,}155\cdot 10^2\ \text{J}.$$

Variantă la 1 b)

$$L = \nu R(T_2 - T_1) = \frac{m}{\mu}R(T_2 - T_1) = \frac{14\cdot 10^{-3}}{28}\cdot 8310\,(400 - 300) = 4{,}155\cdot 10^2\ \text{J}.$$

c) Expresia presiunii finale se obține din ecuația conservării numărului de moli:

$$p_f = \frac{p_1V_1 + p_2V_2}{V_2' + V_2}.$$

Din calcul rezultă:

$$p_f = \frac{1,5 \cdot 10^5 \cdot 11,08 \cdot 10^{-3} + 4 \cdot 10^5 \cdot 3 \cdot 10^{-3}}{11,08 \cdot 10^{-3} + 3 \cdot 10^{-3}} = 2,032 \cdot 10^5 \text{ N/m}^2.$$

2°. a) Diagrama transformărilor analizate este prezentată în figura F.B.131:

$$L_{1-4-5} = p_5(V_5 - V_1) = 10^5(3 \cdot 10^{-3} - 2 \cdot 10^{-3}) = 10^2 \text{ J}.$$

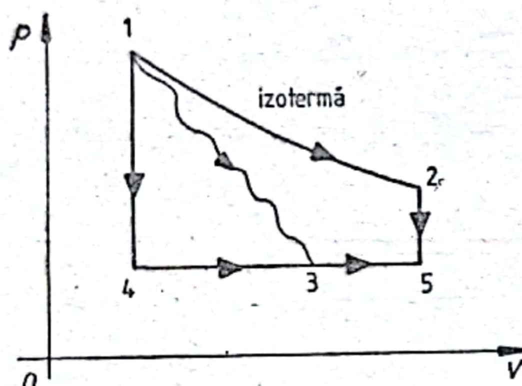


Fig. F.B.131

Pentru calculul cantității de căldură Q_{1-4-5} se calculează mai întîi numărul de moli și temperatura T_4:

$$\nu = \frac{p_1V_1}{RT_1} = \frac{1}{8310} \text{ moli}, \quad T_4 = \frac{p_4}{p_1} T_1 = \frac{10^5}{2 \cdot 10^5} \cdot 400 = 200 \text{ K},$$

obținîndu-se succesiv:

$$Q_{1-4} = \nu C_V(T_4 - T_1) = \frac{1}{8310} \cdot \frac{3}{2} \cdot 8\,310(200 - 400) = -300 \text{ J},$$

$$C_p = C_V + R = \frac{5}{2} R \text{ (relația Robert-Mayer)},$$

$$Q_{4-5} = \nu C_p(T_5 - T_4) = \frac{1}{8310} \cdot \frac{5}{2} \cdot 8\,310(300 - 200) = 250 \text{ J},$$

astfel încît:

$$Q_{1-4-5} = Q_{1-4} + Q_{4-5} = -50 \text{ J}.$$

b) Întrucît în transformarea izocoră 2—5 lucrul mecanic este nul, se poate scrie:

$$L_{1-2-5} = L_{1-2} = \nu RT_1 \ln \frac{V_5}{V_1} = p_1V_1 \ln \frac{V_5}{V_1} = 2 \cdot 10^5 \cdot 2 \cdot 10^{-3} \cdot \ln \frac{3 \cdot 10^{-3}}{2 \cdot 10^{-3}} = 1,6 \cdot 10^2 \text{ J}.$$

În transformarea izobară $1 \to 2$, $\Delta U = 0$, astfel încît:

$$|Q_{1-2}| = L_{1-2} = 1,6 \cdot 10^2 \text{ J}.$$

Pentru căldura schimbată în transformarea izocoră se obține:

$$|Q_{2-5}| = \nu C_V(T_1 - T_5) = \frac{p_1V_1}{RT_1}\,\frac{3}{2}\,R(T_1 - T_5) =$$

$$= \frac{2\cdot 10^5\cdot 2\cdot 10^{-3}}{400}\cdot\frac{3}{2}\cdot(400 - 300) = 150\ \text{J}.$$

Ținînd seama de semnele celor două cantități de căldură calculate mai sus, se obține:

$$Q_{1-2-5} = |Q_{1-2}| - |Q_{2-5}| = 1{,}6\cdot 10^2 - 150 = 10\ \text{J}.$$

c) Întrucît energia internă este funcție de stare, variația sa nu depinde de drum, astfel încît pe calea 1—4—5 se obține:

$$\Delta U = \nu C_V(T_5 - T_1),\quad \Delta U = \frac{p_1V_1}{RT_1}\,\frac{3}{2}\,R(T_5 - T_1) = -150\ \text{J}.$$

3°. a) Se utilizează notațiile din figura F.B.132. Curentul prin diodă are expresia $I_d = \dfrac{U - U_d}{R_1}$; rezultă $R_1 = \dfrac{U - U_d}{I_d}$, $R_1 = \dfrac{20 - 9}{10} = 1100\ \Omega$.

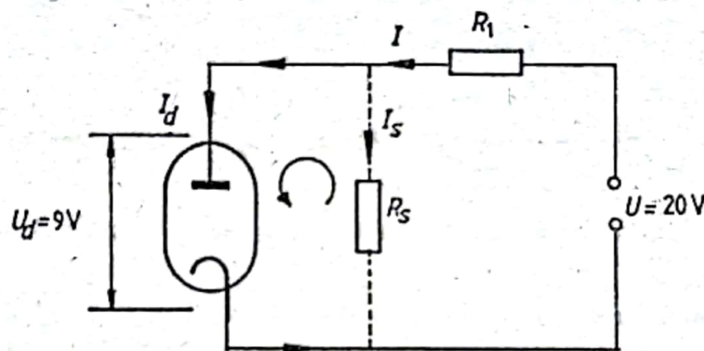


Fig. F.B.132

b) $R_{\text{diodă}} = \dfrac{U_d}{I_d} = \dfrac{9}{10^{-2}} = 900\ \Omega.$

Din ecuațiile $I_dR_d = I_sR_s$ și $I = I_d + I_s$ se obține valoarea curentului total:

$$I = \frac{R_d + R_s}{R_s}\,I_d = \frac{900 + 600}{600}\cdot 10^{-2} = 2{,}5\cdot 10^{-2}\ \text{A}.$$

Se notează valoarea cerută a rezistenței R_1 cu R_1':

$$R_1' = \frac{U - U_d}{I} = \frac{20 - 9}{2{,}5\cdot 10^{-2}} = 440\ \Omega.$$

c) Expresia rezistenței R_s se obține din ecuația $I_1 = \dfrac{U_d}{R_s} = I - I_d$, unde $I_{d,\,\min} < I_d < I_{d,\,\text{maxim}}$. În final rezultă:

$$R_{s,\,\text{maxim}} = \frac{U_d}{I - I_{d,\max}} = 1\,636\ \Omega;\quad R_{s,\,\text{minim}} = \frac{U}{I - I_{d,\,\min}} = 367\ \Omega.$$

4°. a) Conform legii lui Jurin: $h = \dfrac{2\sigma}{r\rho g}$ (h este înălțimea la care se ridică lichidul în vasul capilar, r raza vasului, σ coeficientul de tensiune superficială, ρ densitatea lichidului, iar g accelerația gravitațională).

b) Acest subiect a fost tratat la II.5° c.

c) $m = kQ$ (m este masa de substanță depusă la catod, Q sarcina electrică transportată iar k echivalentul electrochimic).

$$k = \frac{1}{F} \cdot \frac{A}{n}$$

(F este numărul lui Faraday, A masa atomică a substanței, iar n valența substanței).

5°. a) Acest subiect a fost tratat la XIV. 4°. c.

b) Un Wb (weber) este fluxul magnetic al unui cîmp magnetic uniform, de inducție egală cu 1 T, printr-o suprafață de 1 m² așezată normal pe direcția cîmpului magnetic:

$$1\ \text{Wb} = [B]_{SI} \cdot [S]_{SI} = 1\ \text{T} \cdot 1\ \text{m}^2.$$

c) Inductanța unui circuit este o mărime egală cu cîtul dintre fluxul magnetic propriu prin suprafața acelui circuit și intensitatea curentului ce trece prin circuit: $L = \Phi / I$.

XL. 1°. a) $P = I^2R = (20 \cdot 10^{-3})^2 \cdot 10 = 4 \cdot 10^{-3}$ W.

Din condiția de rezonanță se obține:

$$C = \frac{1}{L\omega^2} = \frac{1}{10^{-4} \cdot 4\pi^2 \cdot 10^8} \simeq 2{,}54 \cdot 10^{-6}\ \text{F}.$$

b) Impedanța circuitului paralel are expresia:

$$\frac{1}{Z} = \sqrt{\frac{1}{R^2} + \left(\frac{1}{X_C} - \frac{1}{X_L}\right)^2} \quad \text{sau} \quad Z = \left[\frac{1}{R^2} + \left(\frac{1}{X_C} - \frac{1}{X_L}\right)\right]^{-1/2},$$

unde $X_L = L\omega' = L'2\omega = 4\pi\ \Omega$, iar $X_C = \frac{1}{\omega C'} = \frac{1}{C^2 2\omega} = \pi\ \Omega$. Se obține: $Z = 3{,}89\ \Omega$

c) Din expresia inductanței, $L = \frac{\mu_0 \mu_r N^2 S}{l}$, rezultă $\mu_r = \frac{L}{\mu_0 N^2 S} = 7{,}96$.

2°. a) Se calculează căldurile cedată și absorbită:

$$Q_{ced} = (m_1 c_{Fe} + m_2 c_{Al})(t_1 - \theta_f), \quad Q_{abs} = (m_3 c_{apă} + C)(\theta_f - t_2).$$

Ținînd seama de ecuația calorimetrică, se obține ecuația de echilibru:

$$(m_1 c_{Fe} + m_2 c_{Al})(t_1 - \theta_f) = (m_3 c_{apă} + C)(\theta_f - t_2).$$

Din această ecuație se calculează temperatura finală de echilibru:

$$\theta_f = \frac{(m_1 c_{Fe} + m_2 c_{Al})\, t_1 + (m_3 c_{apă} + C) t_2}{m_1 c_{Fe} + m_2 c_{Al} + m_3 c_{apă} + C} = 28{,}5°\ \text{C}.$$

b) Se folosește metoda de la punctul a): $Q_{ced} = Q_{abs}$;

$$Q_{ced} = (m_1 c_{Fe} + m_2 c_{Al} + m_3 c_{apă} + C)(\theta_f - 0), \quad Q_{abs} = m_4 c_{gheață}(0 - t_4) + m_4 \lambda.$$

Singura necunoscută în această ecuație este masa de gheață, m_4, astfel încît:

$$m_4 = \frac{(m_1 c_{Fe} + m_2 c_{Al} + m_3 c_{apă} + C)\theta_f}{c_{gheață}(-t_4) + \lambda} = 0{,}097\ \text{kg}.$$

c) Din legea dilatării volumice a unui corp, $V_{\theta_f} = V_0(1 + \gamma\theta_f)$, se obține expresia variației volumului în cursul procesului de la punctul b):

$$\Delta V = V_{\theta_f} - V_0 = V_0 \gamma \theta_f = \frac{m_1}{\rho_{Fe}} \gamma \theta_f, \quad \Delta V = 6{,}3 \cdot 10^{-9}\ \text{m}^3.$$

3°. a) Din ecuațiile de stare pentru gazul din cele două compartimente, $pV_1 = \nu_1 RT_1$ și $pV_2 = \nu_2 RT_1$, rezultă $\frac{V_1}{V_2} = \frac{\nu_1}{\nu_2}$, adică raportul numerelor de moli corespunzătoare.

Prin încălzirea unui compartiment și răcirea celuilalt cu același număr de grade, ecuațiile de stare pentru cele două compartimente capătă forma:

$$p'\frac{V}{2} = \nu_1 R(T_1 - \Delta T), \quad p'\frac{V}{2} = \nu_2 R(T_1 + \Delta T).$$

Făcînd raportul celor două ecuații, membru cu membru, rezultă o ecuație pentru ΔT: $\nu_1(T_1 - \Delta T) = \nu_2(T_1 + \Delta T)$. În continuare se exprimă ΔT în funcție de raportul cunoscut $\frac{\nu_1}{\nu_2}$:

$$\Delta T = \frac{\nu_1 T_1 - \nu_2 T_2}{\nu_1 + \nu_2} = \frac{\nu_1 - \nu_2}{\nu_1 + \nu_2} T_1 = \frac{\frac{\nu_1}{\nu_2} - 1}{\frac{\nu_1}{\nu_2} + 1} T_1 = \frac{\frac{V_1}{V_2} - 1}{\frac{V_1}{V_2} + 1} T_1,$$

de unde se obține $\Delta T = 200$ K.

b) Din ecuația de stare pentru gazul din primul compartiment scrisă în cele două situații, $pV_1 = \nu_1 RT_1$ și $p'\left(\frac{V_1 + V_2}{2}\right) = \nu_1 R(T_1 - \Delta T)$, rezultă:

$$\frac{p'}{p} = \frac{T_1 - \Delta T}{T_1} \cdot \frac{2V_1}{V_1 + V_2} = \frac{T_1 - \Delta T}{T_1} \cdot \frac{2}{1 + \frac{V_2}{V_1}} = \frac{5}{9}.$$

c) Se aplică formula vitezei termice a moleculelor, $v_T = \sqrt{\frac{3RT}{\mu}}$, de unde rezultă $v_{T_1 + \Delta T} = 667{,}2$ m/s.

4°. a) Acest subiect a fost tratat la XIV. 4°. a.

b) Acest subiect a fost tratat la XXVI.4°. a.

c) Capacitatea electrică C a unui conductor izolat și depărtat de alte corpuri este o mărime fizică egală cu raportul dintre sarcina Q a conductorului și potențialul său V în aceste condiții: $C = \frac{Q}{V}$.

5°. a) Acest subiect a fost tratat la V.4°. b.

b) Inducția cîmpului magnetic generat de un curent electric rectiliniu are expresia $B = \frac{\mu_0 \mu_r I}{2\pi r}$, unde μ_0 este permeabilitatea vidului, μ_r permeabilitatea relativă a mediului, I intensitatea curentului, iar r distanța de la punctul considerat la conductor.

c) Forța Lorentz are expresia $f = qvB \sin \alpha$; pentru $\alpha = \pi/2$ se obține $f = qvB$.

În această formulă q este sarcina particulei, $\vec{v}$ viteza particulei, $\vec{B}$ inducția cîmpului magnetic, iar α unghiul dintre vectorii $\vec{B}$ și $\vec{v}$.

XLI. 1°. a) Se utilizează ecuația de stare a gazelor perfecte:

$$p_1 V = \nu_1 RT_1; \; N = \nu_1 N_A = \nu_1 \frac{R}{k},$$

$$N = \frac{p_1 V}{RT_1} \cdot \frac{R}{k} = \frac{p_1 V}{kT_1} = \frac{1{,}38 \cdot 10^4 \cdot 2 \cdot 10^{-3}}{1{,}38 \cdot 10^{-23} \cdot 400} = 5 \cdot 10^{21} \text{ molecule}.$$

b) Se utilizează expresia numărului de moli stabilită la punctul a):

$$m_1 = \mu\nu_1 = \mu\frac{p_1V}{RT_1} = 28\,\frac{1{,}38\cdot10^4\cdot2\cdot10^{-3}}{8\,310\cdot400} = 2{,}3\cdot10^{-4}\ \text{kg},$$

$$\varepsilon_t = \frac{3}{2}kT_1 = \frac{3}{2}\cdot1{,}38\cdot10^{-23}\cdot400 = 8{,}28\cdot10^{-21}\ \text{J},$$

$$\text{sau}\ \ U = \frac{3}{2}\,\nu_1RT_1 = \frac{3}{2}p_1V = 41{,}4\ J.$$

c) Se utilizează ecuația de stare a gazelor perfecte: $p_1V = \nu_1RT_1$, respectiv $pV = \nu_2R(T_1 + \Delta T)$: rezultă pentru ν_2 expresia:

$$\nu_2 = \nu_1\frac{T_1}{T_1+\Delta T}\cdot\frac{p}{p_1}.$$

Se exprimă Δm funcție de diferența $\nu_1 - \nu_2$:

$$\Delta m = \mu(\nu_1 - \nu_2) = \mu\nu_1\left(1 - \frac{T_1}{T_1+\Delta T}\cdot\frac{p}{p_1}\right),$$

din calcul rezultînd

$$\Delta m = 0{,}23\cdot10^{-3}\left(1 - \frac{400}{700}\cdot\frac{2\cdot10^4}{1{,}38\cdot10^4}\right) = 3{,}91\cdot10^{-5}\ \text{kg}.$$

2°. a) $X_L = \omega L = 100\,\pi\cdot25{,}48\cdot10^{-3} = 8\ \Omega,$

$$X_C = \frac{1}{\omega C} = \frac{10^6}{100\pi\cdot637} = \frac{10^4}{637\pi} = 5\Omega,$$

$$Z = \sqrt{R^2+(X_L-X_C)^2} = \sqrt{16+(8-5)^2} = 5\ \Omega.$$

$$I = \frac{U}{Z} = \frac{120}{5} = 24\ \text{A},\qquad U_R = IR = 4\cdot24 = 96\ \text{V},$$

$$U_L = IX_L = 8\cdot24 = 192\ \text{V},\ \ U_C = IX_C = 5\cdot24 = 120\ \text{V}.$$

b) Din condiția de rezonanță $\frac{1}{\omega C_1} = \omega L$ rezultă

$$C_1 = \frac{1}{\omega^2L} = \frac{1}{\omega X_L} = \frac{1}{100\pi\cdot8} = \frac{1}{800\pi}\ \text{F} \simeq 4\cdot10^{-4}\ \text{F}.$$

c) $Q = \frac{1}{R}\sqrt{\frac{L}{C}} = \frac{1}{4}\sqrt{\frac{25{,}48\cdot10^{-3}\cdot10^6}{637}} = \frac{1}{2}\sqrt{10} \simeq 1{,}6.$

3°. a) Acest subiect a fost tratat la XX. 5°. b.

b) $L = \nu RT\ln\frac{V_2}{V_1}$ sau $L = \nu RT\,2{,}3\lg\frac{V_2}{V_1}$ (R este constanta universală a gazelor ideale, T temperatura la care are loc transformarea, V_1 volumul inițial, V_2 volumul final, iar ν numărul de moli (kmoli) de gaz).

c) Acest subiect a fost tratat la XXV.4°. a.

4°. a) Acest subiect a fost tratat la II. 5°. c.

b) Acest subiect a fost tratat la XL.5°. c.

c) $W = \frac{1}{2}CU^2$ (U este diferența de potențial dintre armăturile condensatorului, iar C capacitatea condensatorului).

XLII. 1°. a) Greutatea tijei este $G = lS\rho g$, unde cu S s-a notat secțiunea tijei. Forța G se aplică în O (figura F.B.133).

Forța arhimedică a apei este $F = xS\rho_0 g$, unde x este porțiunea cufundată în apă. Forța F se aplică în punctul O'.

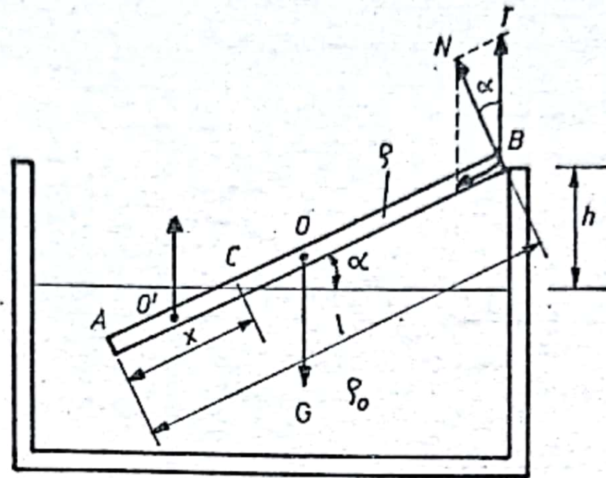


Fig. F.B.133

Reacțiunea peretelui vasului în punctul $\vec{B}$ este $\vec{N}$, de componentă verticală $\vec{T}$. Se pot scrie relațiile $T = G - F = Sg(l\rho - x\rho_0)$ și $\frac{T}{F} = \frac{\overline{OO'}}{\overline{OB}}$, unde

$$\overline{OO'} = \frac{l}{2} - \frac{x}{2} = \frac{l-x}{2}, \text{ iar } \overline{OB} = \frac{l}{2}.$$

Înlocuind în expresia raportului T/F, se obține ecuația $\frac{Sg(l\rho - x\rho_0)}{xS\rho_0 g} = \frac{l-x}{l}$ care se scrie succesiv astfel:

$$l^2\rho - x\rho_0 l = x\rho_0 l - x^2\rho_0, \quad x^2\rho_0 = 2x\rho_0 + l^2\rho = 0,$$

$$1\,000\,x^2 - 2\,000\,x + 910 = 0, \quad x^2 - 2x + 0{,}91 = 0,$$

de unde rezultă soluția $x = 0{,}7$ m.

b) Se exprimă sinusul unghiului α astfel:

$$\sin\alpha = \frac{h}{l-x} = \frac{0{,}15}{0{,}3} = \frac{1}{2} \text{ și rezultă } \alpha = 30°.$$

c) Se calculează forța de frecare dintre tijă și marginea vasului: $N = T\cos\alpha$, $F_f = \mu N = \mu T\cos\alpha$.

Condiția ca tija să nu alunece, $\mu T\cos\alpha > T\sin\alpha$, conduce la valoarea lui μ_{min}: $\mu > \operatorname{tg}\alpha$; $\mu > 0{,}57$ deci $\mu_{min} = 0{,}57$.

2°. a) Referirile se fac la figura F.B.134. Pentru calculul vitezei se utilizează expresia $v_1 = v_0 - a_1 t$.

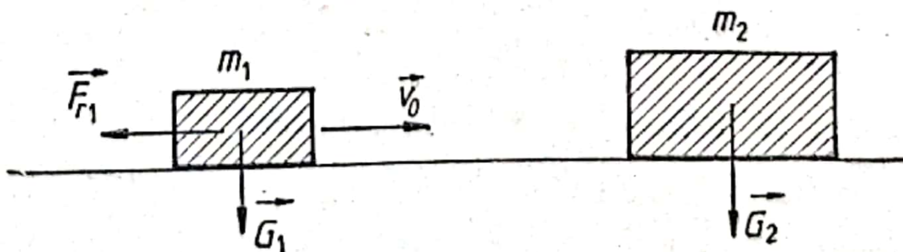


Fig. F.B.134

Accelerația a_1 se obține din ecuația $a_1 = \frac{F_r}{m_1}$, unde $F_r = \frac{m_1 g}{100}$ Rezultă $a_1 = \frac{m_1 g}{100\ m_1} = 0{,}1\ \text{m/s}^2$, astfel încît $v_1 = 10 - 10 \cdot 0{,}1 = 9\ \text{m/s}$.

b) Viteza vagoanelor cuplate, imediat după ciocnire, rezultă din legea conservării impulsului: $v = \frac{m_1 v_1}{m_1 + m_2} = \frac{v_1}{3} = 3\ \text{m/s}$.

Căldura degajată prin ciocnire se obține din legea conservării energiei:

$$\frac{m_1 v_1^2}{2} = \frac{(m_1 + m_2)v^2}{2} + Q,$$

deci

$$Q = \frac{m_1 v_1^2}{2} - \frac{(m_1 + m_2)v^2}{2} = \frac{10 \cdot 10^3 \cdot 81}{2} - \frac{30 \cdot 10^3 \cdot 9}{2} = 2{,}7 \cdot 10^5\ \text{J}.$$

c) Accelerația sistemului se calculează din

$$F_r = F_{r_1} + F_{r_2} = \frac{(m_1 + m_2)g}{100} = (m_1 + m_2)a \Rightarrow a = g/100 = 0{,}1\ \text{m/s}^2,$$

timpul pînă la oprire se calculează din legea vitezei, iar distanța corespunzătoare din legea spațiului:

$$v = at,\ t' = \frac{v}{a} = \frac{3}{0{,}1} = 30\ \text{s},\quad s = vt' - \frac{at'^2}{2} = 45\ \text{m}.$$

3°. a) $Q = \Delta U + L$ (se fac referiri la figura F.B.135).

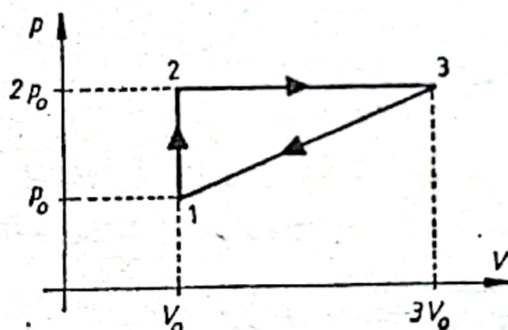


Fig. F.B.135

Transformarea 1—2 este izocoră, deci $L_{12} = 0$, iar $Q_{12} = \nu C_V \Delta T$.

Pentru calculul variației ΔT se aplică ecuația de stare a gazelor perfecte:

$$p_1 V_1 = \nu R T_1,\ p_2 V_2 = \nu R T_2,\ V_0(p_2 - p_1) = \nu R \Delta T,\ \Delta T = \frac{V_0 p_0}{\nu R}.$$

Prin urmare Q_{12} va fi:

$$Q_{12} = \frac{V_0 p_0 C_V}{R} = \frac{5}{2} V_0 p_0 = \frac{5}{2} \cdot 2 \cdot 10^{-3} \cdot 10^5 = 500\ \text{J}.$$

Variația energiei interne rezultă din principiul întîi al termodinamicii,

$$Q = \Delta U + L,\ \text{de unde}\ \Delta U_{12} = Q_{12} = 500\ \text{J}.$$

Transformarea 2—3 este izobară, astfel încît $L_{23} = p\Delta V = 2p_0 \cdot 2V_0 = 4 \cdot 2 \cdot 10^{-3} \cdot 10^5 = 800\ \text{J}$.

Pentru calculul căldurii Q_{23} se utilizează formula $Q_{23} = \nu C_p \Delta T$. Variația ΔT se obține aplicînd ecuația de stare a gazelor perfecte:

$$p_2V_2 = \nu RT_2, \quad p_3V_3 = \nu RT_3, \quad p_2(V_3 - V_2) = \nu R(T_3 - T_2).$$

Rezultă $\Delta T = \frac{2p_0 \cdot 2V_0}{\nu R}$, încit $Q_{23} = \frac{\nu C_p \cdot 4p_0V_0}{\nu R} = \frac{7}{2} \cdot 4p_0V_0 = 14 \cdot 2 \cdot 10^{-3} \cdot 10^5 = 2\,600$ J, iar $\Delta U_{23} = Q_{23} - L_{23} = 2\,000$ J.

În *transformarea 3—1*: $\Delta U_{\text{ciclu}} = \Delta U_{12} + \Delta U_{23} + \Delta U_{31} = 0$, deci $\Delta U_{31} = -\Delta U_{12} - \Delta U_{23} = -2\,500$ J și

$$L_{\text{ciclu}} = \frac{(p_2 - p_1)(V_3 - V_2)}{2} = \frac{p_0 \cdot 2V_0}{2} = p_0V_0 = 200 \text{ J},$$

$$L_{\text{ciclu}} = L_{12} + L_{23} + L_{31},$$

$$L_{31} = L_{\text{ciclu}} - L_{12} - L_{23} = 200 - 800 = -600 \text{ J},$$

$$Q_{31} = U_{31} + L_{31} = -2\,500 \text{ J} - 600 \text{ J} = -3\,100 \text{ J}.$$

b) $\eta = 1 - \frac{Q_{ced}}{Q_{primit}} = 1 - \frac{Q_{31}}{Q_{12} + Q_{23}} = 1 - \frac{3\,100}{500 + 2\,800} = 1 - \frac{31}{33} = 0{,}06$, $\eta \simeq 6\%$.

4°. a) Acest subiect a fost tratat la VII. 3°. b.

b) Acest subiect a fost tratat la I.4°.b.

c) Acest subiect a fost tratat la XVI.5°.b.

5°. a) Acest subiect a fost tratat la II.4°. a.

b) Izotermele lui Andrews, obținute în 1869 pentru bioxid de carbon, pun în evidență particularitățile transformării de fază gaz-lichid.

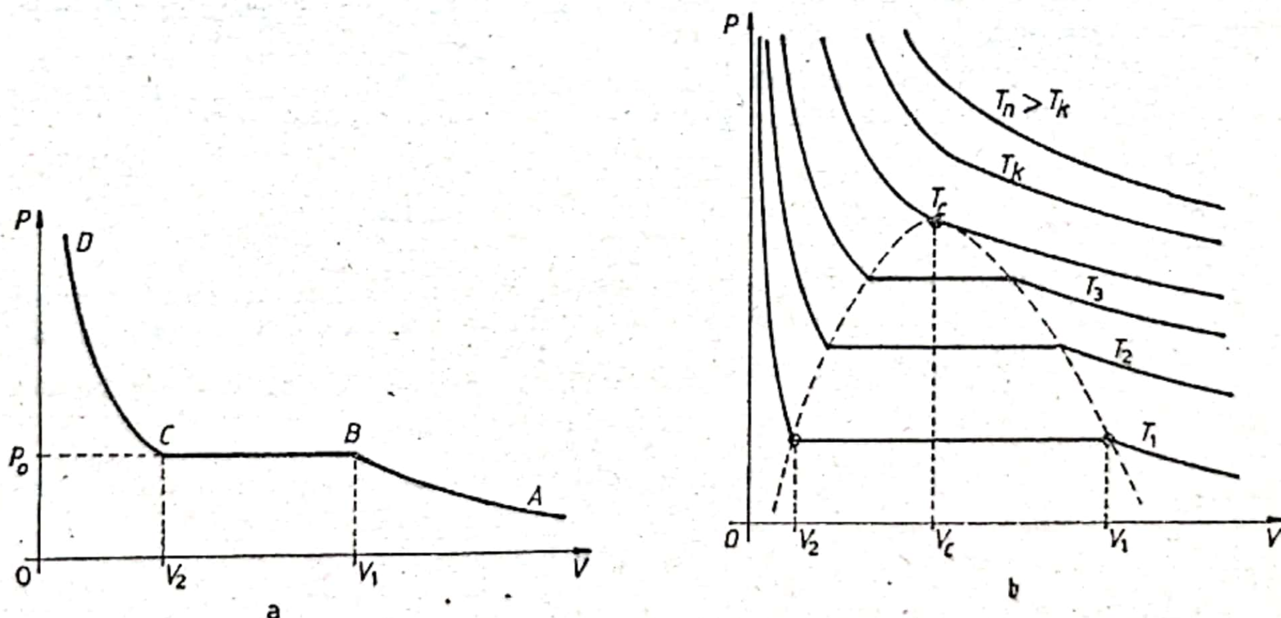


Fig. F.B.136

Din studiul comprimării gazului real, aflat într-un corp de pompă prevăzut cu un manometru, rezultă două forme distincte de izotermă:

— la temperaturi relativ ridicate și presiuni relativ joase se obțin comportările cunoscute ale gazului perfect descrise de ecuația $pV = \text{const}$ (porțiunea AB în figura F.B.136, a);

— la temperaturi obişnuite, prin comprimare se obţin paliere de forma BC, urmate de regiuni unde sistemul este practic incompresibil (porţiunea CD a curbei).

Existenţa polimerului poate fi explicată prin lichefierea treptată a gazului în zona de presiune constantă, fenomen observabil experimental. Zona de incompresibilitate, CD, corespunde unui sistem total lichefiat.

Descrierea lichefierii este posibilă cu ajutorul modelului gazului real care ţine seama de forţele de interacţiune moleculară.

În comprimarea izotermă a gazului real, energia internă se micşorează, ceea ce corespunde eliberării unei cantităţi de căldură:

$$Q = \Delta U + L,$$

lucrul mecanic fiind datorat forţelor de interacţiune moleculară. Această căldură, neevidenţiabilă prin variaţia temperaturii, se poate raporta la masa lichidului şi se obţine o constantă de material,

$$\lambda_t = \frac{Q}{m},$$

numită căldură latentă specifică de lichefiere (se măsoară în J/kg).

Presiunea p_0 pe grafic corespunde vaporilor saturanţi ai lichidului, palierul reprezentînd de fapt o curbă de echilibru pentru care stările gazoasă şi lichidă ale sistemului, numite în general faze, coexzistă. Ca urmare, *lichefierea* ca şi procesul invers, *vaporizarea*, reprezintă transformări de fază.

Din figura F.B. 136, b rezultă că prin creşterea temperaturii palierul se reduce treptat, ajungînd pentru o anumită temperatură, numită temperatură critică, la un singur punct. Presiunea şi volumul corespunzător temperaturii critice se numesc presiune critică, respectiv volum critic (parametri critici).

Pentru temperaturi mai mari decît cea critică, gazul nu se mai poate lichefia, indiferent de presiune. Parametrii critici depind de natura substanţei.

Vaporii se numesc *saturanţi* numai dacă faza de vapori se găseşte în echilibru dinamic cu faza lichidă a sistemului.

c) α) Variaţia relativă a volumului unui gaz, aflat la presiune constantă este direct proporţională cu temperatura

$$\frac{V - V_0}{V_0} = \alpha t,$$

unde V_0 este volumul gazului la temperatura $t_0 = 0$ °C, V este volumul gazului la temperatura t, iar coeficientul de proporţionalitate α se numeşte coeficient de dilatare izobară. Din măsurări rezultă $\alpha = \frac{1}{273,15}$ grd^{-1}, independent de natura gazului.

β) Volumul unui gaz, aflat la presiunea constantă, creşte liniar cu temperatura:

$$V = V_0(1 + \alpha t).$$

c) În raport cu temperatura absolută se poate scrie:

$$V = V_0(1 + \alpha t) = V_0 \alpha T$$

şi, întrucît $\alpha = \frac{1}{T_0}$, se obţine

$$\frac{V}{T} = \frac{V_0}{T_0} \text{ sau } \frac{V}{T} = \text{const.}$$

XLIII. 1°. a) Expresia interfranjei este (fig. F.B.137) $i = \frac{\lambda D}{a}$; rezultă succesiv: $\frac{i}{2} + ki = x$, $\frac{i}{2}(2k+1) = x$, $\frac{\lambda D}{2a}(2k+1) = x$, deci $\lambda = \frac{2ax}{D(2k+1)}$ (această

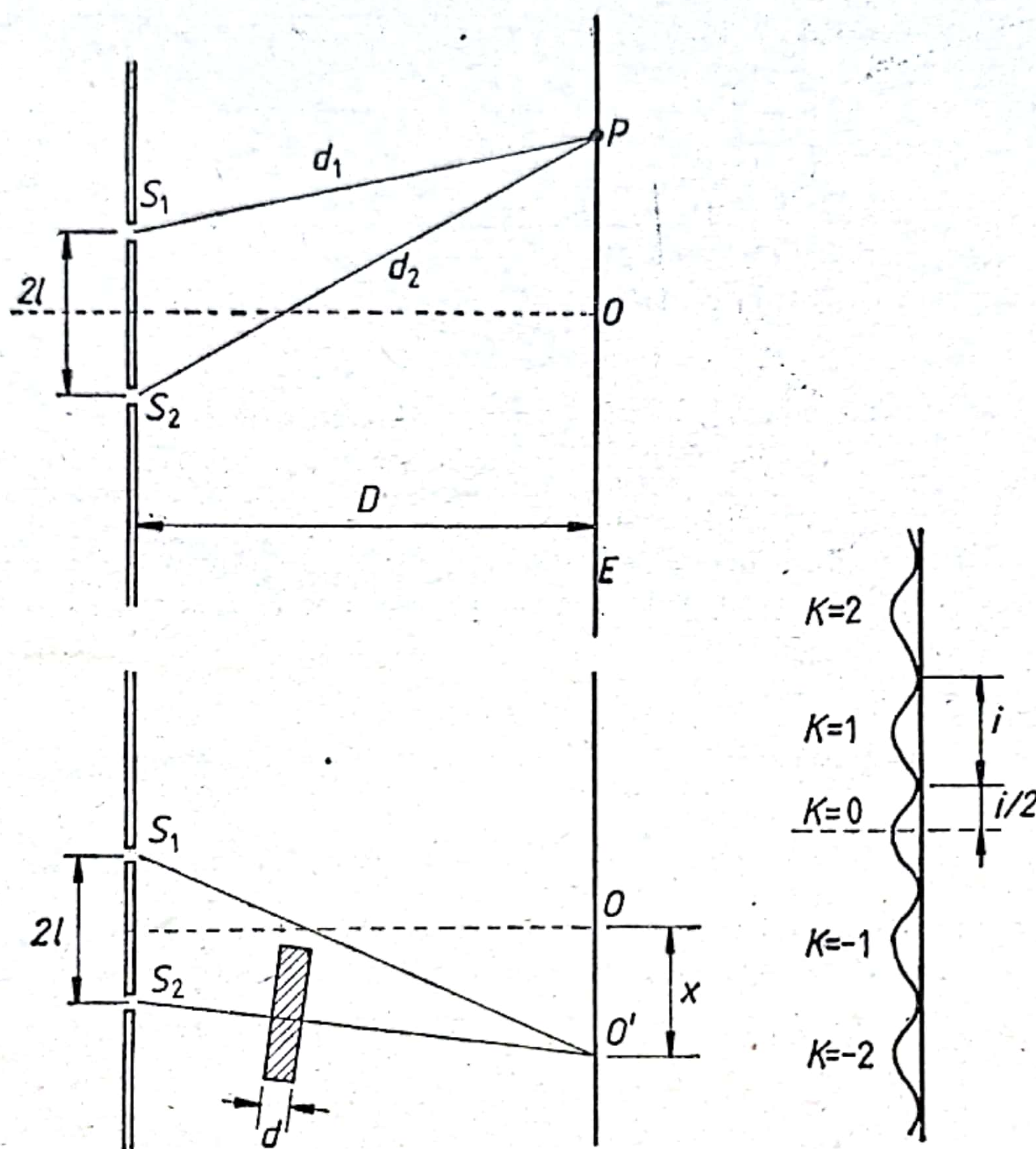


Fig. F.B.137

expresie rezultă şi direct din egalitatea $\delta = \frac{2xl}{D} = (2k+1)\frac{\lambda}{2}$). Ţinînd seama că $a = 2l = 0{,}5$ mm, $D = 1$ m şi $x = 3{,}5$ cm, se obţine:

$$\lambda = \frac{2 \cdot 0{,}5 \cdot 10^{-3} \cdot 3{,}5 \cdot 10^{-2}}{1(2k+1)} = \frac{3{,}5 \cdot 10^{-5}}{2k+1} \text{ m},$$

$$k = \frac{1}{2}\left(\frac{3{,}5 \cdot 10^{-5}}{\lambda} - 1\right) = \frac{1}{2}\left(\frac{3{,}5 \cdot 10^{-5}}{0{,}6 \cdot 10^{-6}} - 1\right) \simeq 29,$$

$$k_{\lambda 1} = \frac{1}{2}\left(\frac{3{,}5 \cdot 10^{-5}}{0{,}4 \cdot 10^{-6}} - 1\right) = 43,\ 25, \quad k_{\lambda 2} = \frac{1}{2}\left(\frac{3{,}5 \cdot 10^{-5}}{0{,}7 \cdot 10^{-6}} - 1\right) = 24{,}5,$$

$$\lambda = \frac{3{,}5 \cdot 10^{-5}}{2k+1} \text{ m, unde } 24 \leqslant k \leqslant 43.$$

b) Se determină parametrii a și b: $n = a + \frac{b}{\lambda^2}$, $n_1 = a + \frac{b}{\lambda_1^2}$, $n_2 = a + \frac{b}{\lambda_2^2}$,

$n_1 - n_2 = b\left(\frac{1}{\lambda_1^2} - \frac{1}{\lambda_2^2}\right)$, $n_1 - n_2 = \frac{\lambda_2^2 - \lambda_1^2}{\lambda_1^2\lambda_2^2} b$, $b = \frac{\lambda_1^2\lambda_2^2(n_1 - n_2)}{\lambda_2^2 - \lambda_1^2}$, $b = (n_1 - a)\lambda_1^2 =$

$= (n_2 - a)\lambda_2^2$, $n_1\lambda_1^2 - n_2\lambda_2^2 = a(\lambda_1^2 - \lambda_2^2) \Rightarrow a = \frac{n_1\lambda_1^2 - n_2\lambda_2^2}{\lambda_1^2 - \lambda_2^2}$, de unde, numeric,

$$b = \frac{(0,4)^2 \cdot (0,7)^2(1,52 - 1,5) \cdot 10^{-24}}{[(0,7)^2 - (0,4)^2] \cdot 10^{-12}} = \frac{0,02 \cdot 7,84 \cdot 10^{-4} \cdot 10^{-12}}{0,33} = 47,51 \cdot 10^{-16},$$

$$a = \frac{1,52 \cdot (0,4)^2 \cdot 10^{-12} - (1,5) \cdot (0,7)^2 \cdot 10^{-12}}{[(0,7)^2 - (0,4)^2] \cdot 10^{-12}} = \frac{0,2432 - 0,735}{-0,33} = 1,490.$$

Presupunem că franja centrală se formează la distanța x în punctul O':

$$\overline{S_1O'} = \overline{S_2O'}.$$

Dacă nu s-ar introduce lama în punctul O', diferența de drum ar fi

$$\overline{S_1O'} - \overline{S_2O'} = \frac{ax}{D}.$$

Lama de sticlă introduce o diferență de drum suplimentară, $\delta = (n - 1)d$, care compensează diferența de drum de mai sus pentru a apărea franja centrală, deci $(n - 1)d = \frac{ax}{D}$.

Se obține:

$$n = 1,490 + \frac{47,51 \cdot 10^{-16}}{0,36 \cdot 10^{-12}} = 0,013197 + 1,490 = 1,5031,$$

$$x = \frac{(n - 1)\,dD}{a} = \frac{(1,5031 - 1) \cdot 13 \cdot 10^{-6} \cdot 1}{0,5 \cdot 10^{-3}} = 13,08 \cdot 10^{-3}\ \text{m} = 13,08\ \text{mm}.$$

2°. a, b) Se scriu ecuațiile lui Kirchhoff pentru rețeaua dată, ținînd seama de sensurile indicate în figura F.B.138 pentru curenți și surse:

$$I = I_1 + I_2,\ I = I_3 + I_4,\ I_3R_3 - I_4R_4 = 0,\ I_3R_3 + I_2R_2 = E_2,$$
$$I_1R_1 - I_2R_2 = E_1,\ R_4I_4^2 = P_4.$$

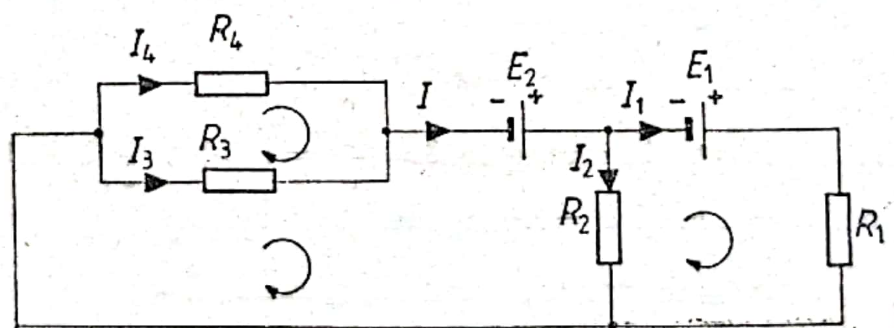


Fig. F.B.138

Din rezolvarea sistemului rezultă:

$$I_1 = \frac{8}{3}\ \text{A},\ I_2 = \frac{1}{3}\ \text{A},\ I_3 = 2\text{A},\ I_4 = 1\ \text{A},\ I = 3\ \text{A},\ E_2 = \frac{8}{3}\ \text{V}.$$

c) $P = E_1I_1 = \frac{16}{3}$ W.

3°. $^{60}_{27}Co \to ^{60}_{28}Ni + h\nu_1 + h\nu_2 + \beta^-$,

$E_{\beta^-} = 0,1$ MeV,

$h\nu_1 = 1,17$ MeV,

$h\nu_2 = 1,33$ MeV.

Numărul de nuclee inițiale de $^{60}_{27}Co$ este ($N_A = 6,023 \cdot 10^{26}$ molecule/kmol):

$$N_0 = \frac{mN_A}{A} = \frac{2 \cdot 10^{-3} \cdot 6,023 \cdot 10^{26}}{60} \simeq 2 \cdot 10^{22} \text{ nuclee.}$$

Numărul de dezintegrări în timpul $t = 10,6$ h va fi

$$\Delta N = N_0 \lambda \Delta t = 2 \cdot 10^{22} \cdot \frac{0,693}{5,3 \cdot 365 \cdot 24} \cdot 10,6 = 3,16 \cdot 10^{18} \text{ nuclee.}$$

Prin dezintegrarea unui nucleu se dezvoltă o energie:

$$E = (0,1 + 1,17 + 1,33)\text{MeV} = 2,6 \text{ MeV} = 2,6 \cdot 1,6 \cdot 10^{-13} \text{ J} = 4,16 \cdot 10^{13} \text{ J},$$

$$Q = E\Delta N = 4,16 \cdot 10^{-13} \cdot 3,16 \cdot 10^{18} = 1,314 \cdot 10^{6} \text{ J.}$$

b) $L_{ex} = 88$ keV $= 0,088$ MeV.

Energia de repaus a unui electron este $m_0c^2 = 0,511$ MeV.
Energia cinetică a fotoelectronilor este:

$$T_1 = 1,17 \text{ MeV} - 0,088 \text{ MeV} = 1,082 \text{ MeV} > m_0c^2$$

sau

$$T_2 = 1,33 \text{ MeV} - 0,088 \text{ MeV} = 1,242 \text{ MeV} > m_0c^2,$$

deci fotoelectronii sînt relativiști.

$$T = (m - m_0)c^2 = m_0c^2\left(\frac{1}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} - 1\right), \quad \frac{v}{c} = \sqrt{1 - \frac{1}{\left(1 + \frac{T}{m_0c^2}\right)^2}},$$

$$\frac{v_1}{c} = \sqrt{1 - \frac{1}{\left(1 + \frac{T_1}{m_0c^2}\right)^2}} = \sqrt{1 - \frac{1}{\left(1 + \frac{1,082}{0,511}\right)^2}} = 0,947,$$

$$v_1 = 0,947c = 2,841 \cdot 10^8 \text{ m/s},$$

$$\frac{v_2}{c} = \sqrt{1 - \frac{1}{\left(1 + \frac{T_2}{m_0c^2}\right)^2}} = \sqrt{1 - \frac{1}{\left(1 + \frac{1,242}{0,511}\right)^2}} = 0,956,$$

$$v_2 = 0,956 = 2,868 \cdot 10^8 \text{ m/s.}$$

4°. a) Acest subiect a fost tratat la XXV. 4°. c.

b) Momentul magnetic orbital al electronului (particulă electrizată, în mișcare pe o traiectorie închisă) se poate calcula cu relația:

$$|\vec{\mu}| = -\frac{e}{2m_e}\vec{L},$$

unde e este sarcina, m_e masa, iar $\vec{L}$ momentul cinetic orbital al electronului. În continuare rezultă

$$\vec{\mu} = -\frac{e}{2m_e}\sqrt{l(l+1)}\hbar,$$

unde l este numărul cuantic orbital, iar $\hbar$ constanta lui Planck.

Analog,

$$\mu_z = -\frac{e}{2m_e} m\hbar = -m\mu_{PB},$$

unde $\mu_{PB} = \frac{e\hbar}{2m_e}$ este magnetonul Procopiu-Bohr, μ_z proiecţia după axa z a momentului magnetic, iar m numărul cuantic magnetic.

c) Acest subiect a fost tratat la VI.3° c şi XXIII.4° c.

5°. a) Efectul Compton reprezintă o confirmare a teoriei corpusculare a luminii. Dacă un fascicul îngust de radiaţii X, cade pe un bloc de grafit care împrăştie radiaţiile în toate direcţiile, se constată că pe lîngă radiaţia cu lungimea de undă egală cu cea a radiaţiilor incidente mai apare şi o altă radiaţie, cu o lungime de undă mai mare, fenomen cunoscut sub numele de efect Compton.

Explicaţia acestui efect a fost dată de Compton pe baza interacţiunii dintre un foton şi un electron al substanţei difuzante.

Scriind legile de conservare pentru impuls şi energie între foton şi electron conform notaţiilor din figura F.B.139, se obţine:

$$h\nu_0 = h\nu + mc^2 - m_0c^2,$$

$$\vec{p}_0 = \vec{p} + \vec{p}_e,$$

$\vec{p}_0$ şi $\vec{p}$ fiind impulsurile fotonului înainte şi după ciocnire, iar $\vec{p}_e$ impulsul electronului de recul.

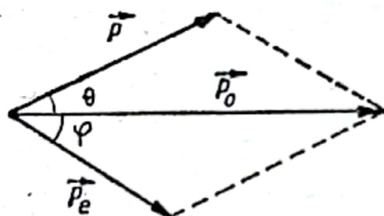


Fig. F.B.139

Întrucît $p_0 = \frac{h\nu_0}{c}$, $p = \frac{h\nu}{c}$, iar $p_e = mv$ şi ţinînd seama de variaţia masei cu viteza

$$m = m_0/\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}},$$

se obţine în final, pentru variaţia $\Delta\lambda$ a lungimii de undă, expresia

$$\Delta\lambda = 2\Lambda \sin^2\frac{\theta}{2},$$

unde, prin definiţie, $\Lambda = \frac{h}{m_0c}$ se numeşte lungimea de undă Compton a electronului.

Deci variaţia lungimii de undă $\Delta\lambda$, este independentă de natura substanţei împrăştietoare şi se schimbă cu unghiul de împrăştiere. Pentru electron $\Lambda = 2{,}426 \cdot 10^{-12}$ m. Prin urmare efectul Compton a contribuit la fundamentarea teoriei fotonice a luminii.

b) Autoinducţia este fenomenul de inducţie electromagnetică produs într-un circuit datorită variaţiei intensităţii curentului din acel circuit.

Experimental, fenomenul de autoinducţie se pune în evidenţă cu ajutorul unor montaje simple. Astfel la închiderea unui circuit format dintr-o bobină cu miez de fier legată în serie cu un ampermetru şi o sursă de tensiune continuă se constată că acul ampermetrului deviază lent către valoarea finală a intensităţii. De asemenea, în cazul unui circuit realizat dintr-un bec legat în paralel cu o bobină şi cu o sursă avînd tensiunea mai mică decît tensiunea nominală a becului se con-

stată că la întreruperea circuitului becul se aprinde pentru un timp scurt. Variaţia curentului la închiderea şi deschiderea circuitelor din experienţele de mai sus determină variaţia fluxului magnetic prin bobină, flux produs chiar de curentul prin circuit. În consecinţă, apare o tensiune electromotoare indusă, numită de autoinducţie, care se opune creşterii curentului în prima experienţă sau se opune scăderii acestuia în a doua experienţă. Întrucît depinde numai de variaţia fluxului magnetic inductor, tensiunea autoindusă poate depăşi pe cea a sursei astfel explicîndu-se aprinderea becului în a doua experienţă. Se numeşte autoinducţie întrucît circuitul inductor este în acelaşi timp şi circuit indus.

Sensul t.e.m. autoinduse este determinat de regula lui Lenz. Relaţia de proporţionalitate dintre fluxul magnetic propriu prin suprafaţa unui circuit şi intensitatea curentului I din acel circuit,

$$\Phi = LI,$$

defineşte o nouă mărime, L, numită inductanţa circuitului:

$$L = \frac{\Phi}{I}.$$

Unitatea de inductanţă în SI rezultă din relaţia

$$[L]_{SI} = \frac{[\Phi]_{SI}}{[I]_{SI}} = \frac{\mathrm{Wb}}{\mathrm{A}} = \mathrm{H}$$

şi se numeşte henry.

Un henry este inductanţa unei spire prin a cărei suprafaţă fluxul magnetic propriu este 1 Wb, cînd spira este parcursă de un curent de 1 A.

Întrucît variaţia fluxului magnetic propriu se poate scrie sub forma $\Delta\Phi = L\Delta I$, rezultă t.e.m. autoindusă

$$e = -\frac{\Delta\Phi}{\Delta t} = -L\frac{\Delta I}{\Delta t}.$$

Prin urmare tensiunea autoindusă într-un circuit este direct proporţională cu viteza de variaţie a intensităţii curentului din acel circuit, factorul de proporţionalitate fiind inductanţa circuitului. Pentru o bobină se obţine

$$e = -NS\frac{\mu N}{l}\cdot\frac{\Delta I}{\Delta t} = -\frac{\mu N^2 S}{l}\cdot\frac{\Delta I}{\Delta t},$$

astfel încît

$$L = \frac{\mu N^2 S}{l}$$

unde L este inductanţa bobinei, μ — permeabilitatea magnetică a miezului său, N — numărul de spire, S — secţiunea iar l lungimea bobinei.

XLIV. 1°. a) Acest subiect a fost tratat la XV. 3°. b.

b) Legea lui Ohm pentru un circuit RLC paralel, în curent alternativ este

$$U = IZ$$

unde U şi I sînt valorile efective ale tensiunii, respectiv curentului din circuit iar Z este impedanţa circuitului. Impedanţa circuitului are expresia:

$$Z = \frac{1}{\sqrt{\frac{1}{R^2} + \left(\frac{1}{X_L} - \frac{1}{X_C}\right)^2}},$$

unde R este rezistenţa, X_L — reactanţa inductivă iar X_C reactanţa capacitivă pentru circuitul considerat.

c) Intensitatea luminoasă a unei surse punctiforme este fluxul luminos emis în unitatea de unghi solid: $I = \frac{\Delta\Phi}{\Delta\Omega}$. Unitatea de măsură a intenităţii luminoase, candela, este unitate fundamentală a SI: „Candela este intensitatea luminoasă în direcţia normalei, a unei suprafeţe cu aria 1/600 000 metri pătraţi a unui corp negru la temperatura de solidificare a platinei la presiunea de 101 325 newtoni pe metru pătrat.

Lumenul este o unitate derivată: 1 lm = 1 cd · 1 sr.

Iluminarea se notează cu E şi se defineşte ca fluxul luminos ce cade pe unitatea de arie. Dacă $\Delta\Phi$ este fluxul ce cade pe suprafaţa cu aria ΔA atunci: $E = \frac{\Delta\Phi}{\Delta A} = \frac{I}{r^2}$. Unitatea de iluminare se numeşte lux (lx). Luxul reprezintă iluminarea unei suprafeţe de 1 m² care primeşte un flux luminos de 1 lm uniform repartizat pe această suprafaţă (1 lx = 1 lm/m²).

2°. a) Acest subiect a fost tratat la II.4°. b.

b) Acest subiect a fost tratat la II.4°. c.

c) Se utilizează relaţia dependenţei masei de viteză: $m = \frac{m_0}{\sqrt{1-\beta^2}}$, unde $\beta = \frac{v}{c}$, m este masa de mişcare a corpului, m_0 masa de repaus, iar v viteza de deplasare a acestuia.

Pentru $v \ll c$, $\frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} \simeq 1 + \frac{v^2}{2c^2}$, deci $m \simeq m_0 + \frac{1}{2}\frac{m_0 v^2}{c^2}$ sau $m - m_0 = \frac{W_c}{c^2}$; Energia de mişcare W_c apare în cazul relativist ca diferenţa a doi termeni $W = mc^2$ (energia corpului în mişcare) şi $W_0 = m_0c^2$ (energia corpului în repaus). Prin generalizare se poate afirma că variaţiei masei Δm îi corespunde totdeauna o variaţie de energie: $\Delta W = \Delta m \cdot c^2$.

3°. Se prezintă mersul razelor prin dioptrul sferic (v. fig. F.B.140) unde V este vîrful dioptrului, O — centrul său de curbură, VO axa principală a acestuia, P un punct luminos, P' imaginea lui P prin dioptru iar I un punct pe suprafaţa dioptrului. Se pot scrie relaţiile:

$$\frac{\overline{PO}}{\overline{PI}} = \frac{\overline{P'I}}{\overline{P'O}} = \frac{\sin(\pi - i)}{\sin\alpha}\ \frac{\sin(\pi - \alpha)}{\sin r} = \frac{\sin i}{\sin r} = \frac{n_2}{n_1}.$$

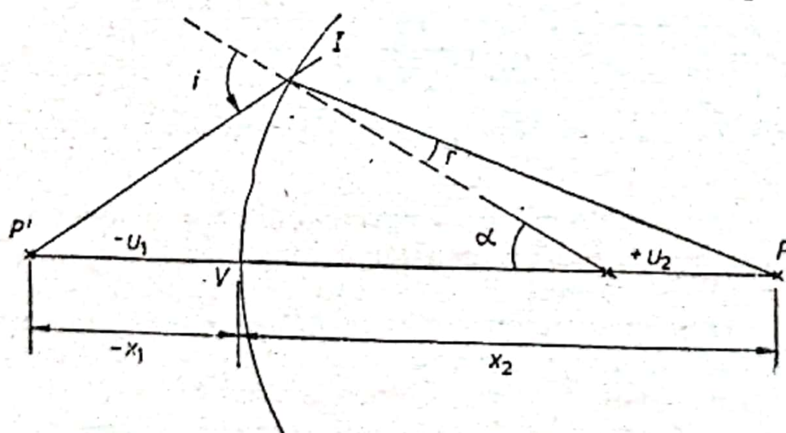


Fig. F.B.140

Toate segmentele din lungul axei principale vor avea originea în V, fiind pozitive cele orientate spre dreapta şi negative celelalte; segmentele perpendiculare pe axa optică sînt pozitive dacă sînt dirijate în sus şi negative celelalte.

Unghiurile formate de raze cu axa optică sînt pozitive dacă: rotirea razei pe axa optică se face în sensul direct trigonometric (ex. $+u_2$) şi negative celelalte (ex. $-u_1$).

Aproximația paraxială (Gauss) implică egalitățile:

$$\overline{PI} = \overline{VP} = -x_1 \text{ și } \overline{P'I} = \overline{VP'} = x_2, \quad \overline{PO} = -x_1 + R, \quad \overline{P'O} = x_2 - R.$$

Ca urmare relația stabilită mai sus devine: $\frac{n_2}{x_2} - \frac{n_1}{x_1} = \frac{n_2 - n_1}{R}$.

S-a obținut prima relație fundamentală a dioptrului sferic sau relația punctelor conjugate.

Se numește distanță focală a dioptrului, valoarea particulară a lui x_1 respectiv x_2, cînd x_2 sau x_1 devin infinite. Focarele dioptrului reprezintă locul unde este situat un izvor punctiform pentru ca razele care pleacă de la el să părăsească dioptrul paralel cu axul optic.

Focarele se numesc reale dacă se obțin prin intersecția razelor reale și virtuale dacă se formează la prelungirea razelor. Conform definiției distanței focale, mărimea $f_2 = \lim\limits_{x_1 \to \infty} x_2 = \frac{n_2 R}{n_2 - n_1}$ se numește distanță focală imagine iar mărimea $f_1 = (\pm) \lim\limits_{x_2 \to \infty} x_1 = \pm \frac{n_1 R}{n_2 - n_1}$ se numește distanță focală obiect.

Ținînd seama de expresiile distanțelor focale relația punctelor conjugate devine

$$\frac{f_2}{x_2} + \frac{f_1}{x_1} = 1.$$

Se definește mărirea transversală a dioptrului β prin raportul $\beta = \frac{y_2}{y_1}$ unde y_2 este mărimea imaginii iar y_1 mărimea obiectului (v. figura F.B.141). Conform

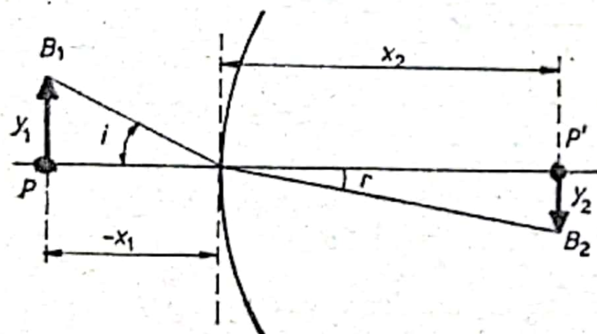


Fig. F.B.141

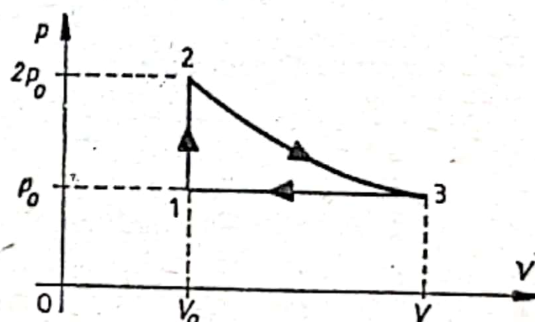


Fig. F.B.142

figurii $y_2 = x_2 \operatorname{tg} r$ și $y_1 = -x_1 \operatorname{tg} i$. În aproximația gaussiană, $\operatorname{tg} r \simeq \sin r$ și $\operatorname{tg} i \simeq \sin i$ încît se obține a doua relație a dioptrului sferic:

$$\beta = \frac{-x_2 \sin r}{-x_1 \sin i} = \frac{x_2}{x_1} \cdot \frac{n_1}{n_2}$$

4°. a) Transformarea 1—2 este izocoră, transformarea 2—3 izotermă, iar transformarea 3—1 izobară (fig. F.B.142). Se calculează mai întîi volumul $V_3 : 2p_0V_0 = p_2V_2 = p_3V_3 = p_0V_3 \Rightarrow V_3 = 2V_0$.

Lucrul mecanic izobar are expresia $L_{3-1} = p_0(V_1 - V_3) = -p_0V_0$; rezultă $L_{3-1} = -10^5 \cdot 2 \cdot 10^{-3} = -200$ J. Întrucît $V_1 = V_2 \Rightarrow L_{1-2} = 0$ (lucrul mecanic izocor este nul).

Căldura schimbată în transformarea izotermă 2—3 are expresia: $Q_{2-3} = L_{2-3} = \nu R T_2 \ln \frac{V_3}{V_2} = p_2 V_2 \ln \frac{2V_0}{V_0} = 2p_0V_0 \ln 2$.

Din calcul rezultă $Q_{2-3} = L_{2-3} = 2 \cdot 10^5 \cdot 2 \cdot 10^{-3} \cdot 0{,}093 = 277{,}2$ J.
Pentru căldura schimbată izobar se obține:

$$Q_{3-1} = \nu C_p(T_1 - T_3) \quad \text{și} \quad C_p = C_V + R = \frac{7R}{2},$$

$$Q_{3-1} = \frac{7}{2}\nu R(T_1 - T_3) = \frac{7}{2}p_0(V_0 - 2V_0) = -\frac{7}{2}p_0V_0 = -700 \text{ J}.$$

Pentru calculul căldurii schimbate în transformarea izocoră se folosește formula $Q_{1-2} = \nu C_V(T_2 - T_1)$, de unde

$$Q_{1-2} = \frac{5}{2}\nu R(T_2 - T_1) = \frac{5}{2}V_0(2p_0 - p_0) = 500 \text{ J}.$$

Întrucît $T_2 = T_3$, rezultă $U_{2-3} = 0$.
Variația energiei interne în transformarea izobară se calculează din principiul întîi al termodinamicii:

$$\Delta U_{3-1} = Q_{3-1} - L_{3-1} = -700 - (-200) = -500 \text{ J}.$$

Pentru transformarea izocoră se obține:

$$\Delta U_{1-2} = Q_{1-2} - L_{1-2} = 500 \text{ J}.$$

b) Lucrul mecanic pe întregul ciclu are expresia:

$$L = L_{1-2} + L_{2-3} + L_{3-1} = 77{,}2 \text{ J}.$$

Se calculează căldura primită pentru ciclul efectuat:

$$Q_p = Q_{1-2} + Q_{2-3} = 777{,}2 \text{ J},$$

din care rezultă randamentul:

$$\eta = \frac{L}{Q_p} = 0{,}0992.$$

c) Din expresia randamentului ciclului Carnot rezultă:

$$\eta_c = 1 - \frac{T_{rece}}{T_{cald}}, \quad \eta_c = 1 - \frac{\nu RT_1}{\nu RT_2} = 1 - \frac{p_0V_0}{2p_0V_0} = 0{,}5.$$

5°. a) Se utilizează formula capacității condensatorului plan $C = \frac{\varepsilon S}{d}$; rezultă pentru C_{st} și C_a expresiile:

$$C_{st} = \varepsilon_0 \frac{\varepsilon_{r2}S}{d/2} = 2\varepsilon_0 \frac{\varepsilon_{r2}S}{d}, \quad C_a = 2\varepsilon_0 \frac{\varepsilon_{r1}S}{d}.$$

Capacitatea serie echivalentă are expresia:

$$C_s = \frac{C_{st} \cdot C_s}{C_{st} + C_a} \text{ (v. figura F.B.143).}$$

Se obține

$$C_1 = C_s = \frac{4\varepsilon_0^2 \dfrac{\varepsilon_{r2}\varepsilon_{r1}S^2}{d}}{2\varepsilon_0 \dfrac{(\varepsilon_{r1} + \varepsilon_{r2})S}{d}} = 2\varepsilon_0 \cdot \frac{4}{5} \cdot \frac{S}{d}.$$

Pentru calculul tensiunii U_1 se utilizează formula

$$Q = C \times U, \text{ de unde rezultă } U_1 = \frac{Q}{C_s} = \frac{Q}{\varepsilon_0 \frac{S}{d}} \cdot \frac{1}{\frac{8}{5}} \cdot U = 12{,}5 \text{ kV}.$$

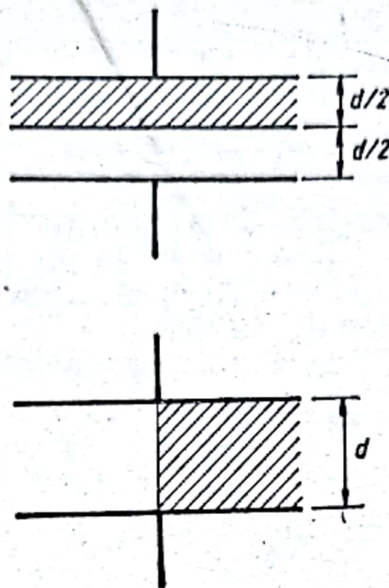


Fig. F.B.143

În mod analog se obține

$$C'_{st} = \varepsilon_0 \frac{\varepsilon_{r2} S/2}{d}, \quad C'_a = \varepsilon_0 \frac{\varepsilon_{r1} S/2}{d}.$$

Capacitatea echivalentă (paralel) are expresia: $C_p = C'_{st} + C'_a$. Se obține:

$$C_p = \frac{\varepsilon_0 S}{2d}(\varepsilon_{r1} + \varepsilon_{r2}) = \frac{5}{2} \cdot \frac{\varepsilon_0 S}{d}.$$

Tensiunea U_2 se calculează astfel:

$$U_2 = \frac{Q}{C_p} = \frac{Q}{\frac{\varepsilon_0 S}{d}} \cdot \frac{1}{\frac{5}{2}} = \frac{2}{3} U = 8 \text{ kV}.$$

b) Se obține expresia și valoarea raportului C_2/C_1:

$$\frac{C_2}{C_1} = \frac{C_p}{C_s} = \frac{(\varepsilon_{r1} + \varepsilon_{r2})^2}{4\varepsilon_{r1}\varepsilon_{r2}} = \frac{25}{16}.$$

Capacitatea grupării derivație este mai mare decît cea a grupării serie de condensatoare; acest lucru rămîne valabil și în cazurile cînd $C'_{st} = \frac{1}{4} C_{st}$ și $C'_a = \frac{1}{4} C_a$, deoarece: $(C_{st} - C_a)^2 \geqslant 0$ implică $(C_{st} + C_a) \geqslant 4C_{st}C_a$ și $C_s = \frac{C_{st} + C_a}{C_{st} + C_a} \leqslant \frac{C_{st}}{4} + \frac{C_a}{4} = C'_{st} + C'_a = C_p$.

c) Din egalitățile succesive $Q = \frac{U_{st}}{1/C_{st}} = \frac{U_a}{1/C_a} = \frac{U_1}{1/C_s}$ rezultă tensiunea $U_{st} = \frac{C_s}{C_{st}} \cdot U_1 = \frac{1}{5} U_1 = 2{,}5$ kV.

Pentru calculul intensităților cîmpului electric se utilizează formula $E = \frac{U}{d}$.

Rezultă $E_{st} = \frac{U_{st}}{d/2} = \frac{2{,}5\ \text{kV}}{10^{-2}\ \text{m}} = 250\ \frac{\text{kV}}{\text{m}}$, $E_a = \frac{U - U_{st}}{d/2} = \frac{10\ \text{kV}}{10^{-2}\ \text{m}} = 1000\ \frac{\text{kV}}{\text{m}}$,

respectiv

$$E'_{st} = E'_s = \frac{U_2}{d} = \frac{8\ \text{kV}}{2 \cdot 10^{-2}\ \text{m}} = 400\ \frac{\text{kV}}{\text{m}}.$$

XLV. 1°. a) Expresia vitezei de evaporare pentru vaporizarea de suprafață este

$$v = K\,\frac{S(p_m - p_t)}{H},$$

unde K este o constantă care depinde de viteza aerului în contact cu lichidul, S suprafața liberă a lichidului, p_m presiunea maximă a vaporilor saturați la temperatura t, p_t presiunea vaporilor (nesaturați $p_t < p_m$) la temperatura t, iar H presiunea atmosferică deasupra lichidului, $H > p_m$.

b) $m = KIt$ (sau $m = KQ$) unde m este masa depusă la catod în intervalul de timp t, I — curentul în circuit iar K echivalentul electrochimic; $K = \frac{1}{F}\cdot\frac{A}{n}$ unde F este numărul lui Faraday, A — masa atomică iar n — valența substanței.

c) $\operatorname{tg} i_B = \frac{n_2}{n_1}$ (sau $\operatorname{tg} i_B = n_{21}$), unde i_B este unghiul de incidență pentru care lumina reflectată este total polarizată, n_1 indicele de refracție al mediului de incidență, iar n_2 indicele de refracție al mediului pe suprafața căruia se produce reflexia.

2°. a) Se face diagrama motorului Otto (figura F.B.144) și se specifică natura proceselor: 1—2, 2—3, 3—4, 4—1.

$$\eta = 1 - \frac{Q_c}{Q_p} = 1 - \frac{|Q_2|}{Q_1},\ Q_1 = \nu C_V(T_3 - T_2),\ |Q_2| = \nu C_V(T_4 - T_1),\ T\cdot V^{\gamma-1} = \text{const.},$$

$$T_2 = T_1\left(\frac{V_1}{V_2}\right)^{\gamma-1} = T_1\varepsilon^{\gamma-1},\quad T_3 = T_4\left(\frac{V_4}{V_3}\right)^{\gamma-1} = T_4\varepsilon^{\gamma-1},$$

$$\eta = 1 - \frac{T_4 - T_1}{T_3 - T_2} = 1 - \frac{1}{\varepsilon^{\gamma-1}}.$$

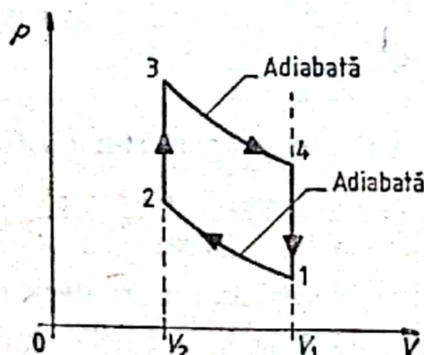


Fig. F.B.144

b) Se scriu expresiile modulelor și defazajelor față de intensitatea curentului electric ale fazorilor:

$$U_R = RI,\quad \varphi_R = 0,$$

$$U_L = \omega LI,\quad \varphi_L = \frac{\pi}{2},$$

$$U_C = \frac{I}{\omega C},\quad \varphi_C = -\frac{\pi}{2}.$$

Se face diagrama fazorială în orice variantă pentru $U_L \neq U_C$. Din triunghiul tensiunilor rezultă: $U = I \cdot Z$ formulă care exprimă legea lui Ohm generalizată.

Mărimea $Z = \sqrt{R^2 + \left(L\omega - \frac{1}{\omega C}\right)^2}$ se numeşte impedanţa circuitului serie *RLC*.

c) Se trasează mersul razelor prin microscop conform figurii F.B.145. Conform definiţiei grosismentului, se poate scrie $G = \frac{\text{tg } \alpha_2}{\text{tg } \alpha_1}$ unde $\text{tg } \alpha_2 \simeq \frac{y_1'}{f_2}$ şi $\text{tg } \alpha_1 = \frac{y_1}{\delta}$; Se obţine $G = \frac{y_1'}{f_2} \cdot \frac{\delta}{y_1} = P \cdot \delta \left(\simeq \frac{P}{4}\right)$. În expresia grosismentului P se numeşte putere optică a microscopului iar δ este distanţa vederii optime; pentru un ochi normal $\delta \simeq 0{,}25$ m.

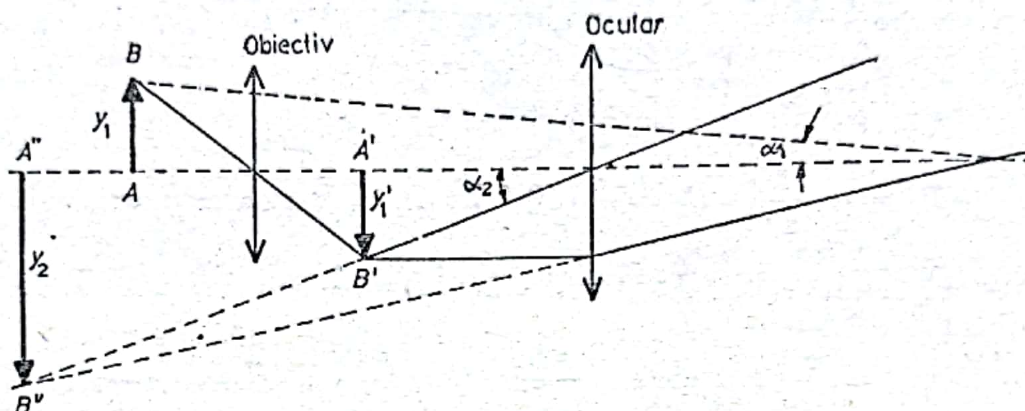


Fig. F.B.145

3°. — Primul principiu al termodinamicii se referă la modul în care variază energia internă a unui sistem ce interacţionează mecanic sau termic cu mediul exterior: $\Delta U = 0$ pentru orice proces intern şi $\Delta U \neq 0$ pentru schimburi de lucru mecanic şi căldură.

Enunţ: În orice transformare, variaţia ΔU a energiei interne depinde doar de starea iniţială şi finală fiind independentă de stările intermediare prin care trece sistemul termodinamic:

$$\Delta U = U_2 - U_1 = Q - L.$$

Prin urmare, căldura primită de la sistem este egală cu variaţia energiei interne a sistemului plus lucrul mecanic efectuat de către sistem. Din primul principiu al termodinamicii rezultă imposibilitatea realizării unui perpetum mobile de speţa I. Primul principiu al termodinamicii exprimă legea conservării şi transformării energiei în procesele mecanice şi termice. În cazul transformărilor adiabatice $\Delta U = -L$, în cazul transformărilor ciclice $L = Q$, etc.

— Transformarea în care sistemul schimbă căldură cu un singur termostat se numeşte transformare monotermă. Într-o transformare bitermă sistemul schimbă căldură cu două termostate.

Formularea lui Thomson a principiului al doilea al termodinamicii: „Într-o transformare ciclică monotermă sistemul nu poate ceda lucru mecanic în exterior. Dacă transformarea ciclică este şi ireversibilă atunci sistemul primeşte lucru mecanic din exterior".

Formularea lui Clausius a principiului al doilea al termodinamicii: „Nu este posibilă o transformare care să aibă ca rezultat trecerea de la sine a căldurii de la un corp cu o temperatură dată la un corp cu temperatura mai ridicată".

Se constată că formularea lui Thomson a principiului al doilea al termodinamicii este o consecință a formulării lui Clausius. Formula randamentului mașinii termice care efectuează o transformare ciclică bitermă este

$$\eta = \frac{L}{Q_1} = 1 - \frac{|Q_2|}{Q_1} \, (< 1)$$

unde L este lucrul mecanic efectuat în cursul transformării ciclice, Q_1 căldura primită de la sursa caldă iar Q_2 căldura cedată sursei reci.

4°. Se vor face referiri la figura F.B.146

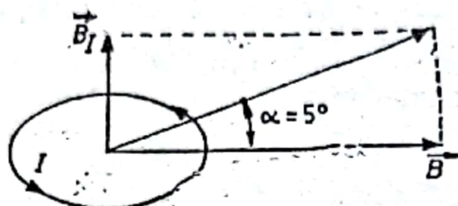


Fig. F.B.146

$$B_I = \mu \cdot \frac{I}{2r}; \quad B_I = \frac{\pi}{3} \cdot 10^{-5}\, T; \quad B_I = B \cdot \mathrm{tg}\, \alpha \simeq B \cdot \alpha;$$

$$B = \frac{B_I}{\pi/36} = 1{,}2 \cdot 10^{-4}\, T; \; Q = I \cdot \Delta t; \; I = \frac{e}{R}, \text{ deci } Q = \frac{e}{R} \cdot \Delta t;$$

$$|e| = \frac{\Delta\Phi}{\Delta t}, \text{ deci } Q = \frac{\Delta\Phi}{R}; \; Q = \frac{B \cdot A}{R}; \; R = \rho \cdot \frac{l}{S};$$

$$Q = \frac{B \cdot \pi r^2}{\rho \cdot \frac{2\pi r}{S}} = \frac{B \cdot r \cdot S}{2\rho}; \; Q = 4{,}24 \cdot 10^{-4}\, \mathrm{C}.$$

5°. Se vor face referiri la figura F.B.147.

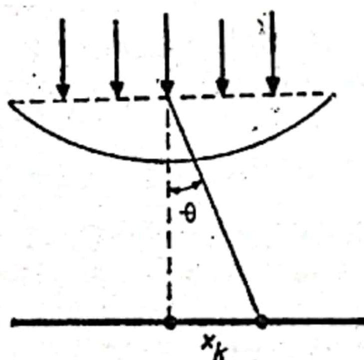


Fig. F.B.147

a) $k\lambda_1 = (k+1)\lambda_2$, deci: $\frac{k+1}{k} = \frac{\lambda_1}{\lambda_2} = \frac{3}{2}$, de unde $k = 2$.

b) $\frac{1}{x_2} - \frac{1}{x_1} = \frac{1}{f}$, $-m = \beta = \frac{x_2}{x_1} = \frac{f}{f + x_1}$, $-10 = \frac{f}{f - 55}$, de unde $f = 50$ cm;

$$\mathrm{tg}\, \theta = \frac{x_k}{f} = \frac{1}{2\sqrt{2}}, \; \sin\theta = \frac{\mathrm{tg}\,\theta}{\sqrt{1 + \mathrm{tg}^2\,\theta}} = \frac{1}{3},$$

$$l \sin\theta = k\lambda_1, \quad l = \frac{2 \cdot 0{,}6 \cdot 10^{-6}}{1/3} = 3{,}6\, \mu\mathrm{m}.$$

c) $k_1\lambda_1 = l \sin\theta \leqslant l$, $k_{1,\max} = \left[\frac{l}{\lambda_1}\right] = 6$, $k_{2,\max} = \left[\frac{l}{\lambda_2}\right] = 9$.

d) $\frac{k_1}{k_2} = \frac{\lambda_2}{\lambda_1} = \frac{2}{3}$.

Coincid maximele de difracţie de ordinele 2, 4 şi 6 ale radiaţiei monocromatice λ_1 cu maximele de difracţie de ordinele 3, 6 şi 9 ale radiaţiei λ_2; ultima coincidenţă se produce în cazul limită $\theta = 90°$.

XLVI. 1°. a) Pentru a calcula variaţia momentului cinetic în unitatea de timp, se porneşte de la expresia momentului cinetic la timpul t şi anume, $\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p}$ şi se scrie expresia momentului cinetic după un timp Δt. La timpul $t' = t + \Delta t$, momentul cinetic este $\vec{L}' = \vec{r}' \times \vec{p}'$, în care vectorul de poziţie $\vec{r}' = \vec{r} + \Delta\vec{r}$, viteza $\vec{v}' = \vec{v} + \Delta\vec{v}$, iar impulsul $\vec{p}' = m\vec{v}' = \vec{p} + \Delta\vec{p} = m\vec{v} + m\Delta\vec{v}$. Expresia momentului cinetic devine $\vec{L}' = \vec{r}' \times \vec{p}' = (\vec{r} + \Delta\vec{r}) \times (\vec{p} + \Delta\vec{p}) = \vec{r} \times \vec{p} + \vec{r} \times \Delta\vec{p} + \Delta\vec{r} \times \vec{p} + \Delta\vec{r} \times \Delta\vec{p}$. Se poate scrie acuma variaţia momentului cinetic în intervalul de timp Δt,

$$\frac{\Delta\vec{L}}{\Delta t} = \frac{\vec{L}' - \vec{L}}{\Delta t} = \vec{r} \times \frac{\Delta\vec{p}}{\Delta t} + \frac{\Delta\vec{r}}{\Delta t} \times m\vec{v} + \Delta\vec{r} \times \frac{\Delta\vec{p}}{\Delta t}.$$

Pentru a calcula variaţia „instantanee" a momentului cinetic în unitatea de timp, se pune condiţia ca Δt să tindă către zero. Cu această condiţie $\frac{\Delta\vec{r}}{\Delta t}$ devine viteza momentană $\vec{v}$, $\frac{\Delta\vec{p}}{\Delta t}$ devine forţa $\vec{F}$, iar $\Delta\vec{r}$ se anulează. Astfel, în expresia de mai sus, $\frac{\Delta\vec{r}}{\Delta t} \times m\vec{v} = \vec{v} \times m\vec{v} = 0$ şi $\Delta\vec{r} \times \frac{\Delta\vec{p}}{\Delta t} = 0$, iar variaţia momentului cinetic în unitatea de timp devine $\frac{\Delta\vec{L}}{\Delta t} = \vec{r} \times \vec{F} = \vec{M}$, expresie ce reprezintă teorema momentului cinetic pentru punctul material, care se enunţă astfel: momentul forţei în raport cu un pol este egal cu variaţia momentului cinetic în unitatea de timp, în raport cu acelaşi pol.

b) Temperatura empirică este un parametru de stare, care, împreună cu parametrii de poziţie, determină complet starea de echilibru termodinamic a sistemului.

c) Semiconductori de tipul n. Presupunem că într-un semiconductor există donori cu concentraţia N_d şi energia de ionizare E_d. Trecerea electronilor, datorită agitaţiei termice, de pe nivelul donor în banda de conducţie, se numeşte excitaţie (sau generare) termică extrinsecă a electronilor. Procesul invers, de trecere a electronilor din banda de conducţie pe nivelul donor, se numeşte recombinare. La echilibru termic se va stabili o concentraţie staţionară a electronilor liberi proveniţi de pe nivele donoare, care se poate calcula cu relaţia

$$n = C_d e^{-\frac{E_d}{2kT}},$$

în care C_d este o constantă care depinde slab de temperatură şi de concentraţia N_d a donorilor, E_d este energia de ionizare a donorilor, k este constanta lui Boltzmann şi T, temperatura absolută. Relaţia este valabilă pentru temperaturi $T < T_e$. La temperatura T_e practic toţi donorii sînt ionizaţi; are loc fenomenul de epuizare.

Dacă temperatura crește în continuare, la o anumită temperatură T_i încep să aibă loc procese de excitare termică directă a electronilor din banda de valență în banda de conducție. La temperaturi T cuprinse între T_e și T_i ($T_e < T < T_i$), concentrația n a electronilor liberi din banda de conducție este practic egală cu concentrația donorilor, deci $n = N_d$. La temperaturi $T > T_i$, concentrația totală a electronilor liberi din banda de conducție va fi $n = N_d + n_i$, în care n_i este concentrația intrinsecă a electronilor liberi, apăruți prin generare termică din banda de valență în banda de conducție. La temperaturi $T \gg T_i$, este satisfăcută inegalitatea $n_i > N_d$, iar semiconductorul cu donori trece în regim de conducție intrinsecă. În figura F.B.148 se prezintă graficul variației cu temperatura a concentrației electronilor liberi din banda de conducție, pentru un semiconductor de tipul n.

Semiconductorii de tipul p se tratează analog.

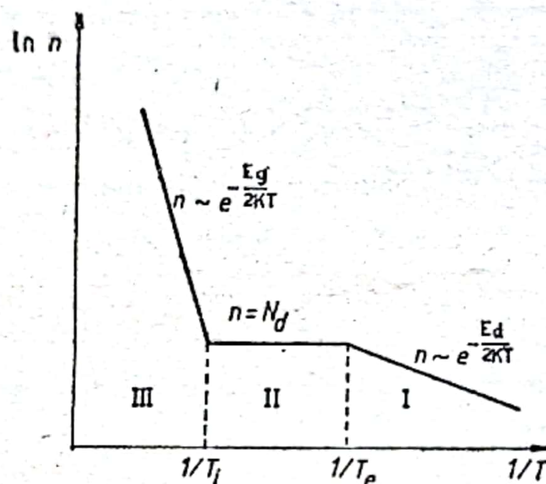


Fig. F.B.148

2°. a) Deformarea unui corp sub acțiunea unei forțe poate fi elastică, în cazurile în care corpul revine la forma și dimensiunile inițiale, dacă forța deformatoare își încetează acțiunea, sau deformare plastică, în cazurile în care corpul nu mai revine la forma și dimensiunile inițiale, dacă încetează acțiunea forței deformatoare. Legea lui Hooke se referă la situațiile în care forțele produc numai deformări elastice asupra corpurilor cu care interacționează.

Legea lui Hooke se deduce experimental. Fie un fir cilindric de metal sau de cauciuc, de lungime inițială l_0 și arie a secțiunii transversale S_0, care este suspendat vertical la capătul superior. Dacă de capătul inferior se suspendă un disc cu greutatea F, se constată că lungimea firului devine l. Diferența $l - l_0 = \Delta l$ se numește alungire absolută. Dacă se dublează greutatea inițială, se constată că și alungirea absolută se dublează. În general, dacă forța crește de un număr de ori, atunci și alungirea absolută crește de același număr de ori. Prin urmare, alungirea absolută este proporțională cu forța deformatoare, $\Delta l \sim F$.

Dacă experiența este efectuată cu un fir din același material și aceeași secțiune transversală, dar de lungime inițială dublă, $2l_0$, cînd de capătul inferior se suspendă același disc cu greutatea F, se constată că alungirea absolută este dublă față de cazul precedent. Prin urmare, alungirea absolută este proporțională cu lungimea inițială, $\Delta l \sim l_0$.

Dacă se înlocuiește firul cu un altul, din același material, cu aceeași lungime inițială l_0, dar cu aria secțiunii transversale egală cu $2S_0$, se constată că alungirea absolută devine $\frac{\Delta l}{2}$, deci scade de 2 ori. Prin urmare, alungirea absolută este invers proporțională cu aria secțiunii transversale, $\Delta l \sim \frac{1}{S_0}$.

Se constată, de asemenea, că dacă lungimea inițială l_0, secțiunea S_0 și forța F care acționează asupra firului rămîn neschimbate, dar experiența se face cu fire din materiale diferite, se vor obține alungiri absolute diferite. Prin urmare, alungirea absolută depinde și de natura materialului supus solicitării.

Concentrînd aceste rezultate, se poate scrie legea lui Hooke: $\Delta l = \frac{1}{E} \cdot \frac{Fl_0}{S_0}$ sau $\frac{F}{S_0} = E\frac{\Delta l}{l_0}$, unde E este un factor de proporționalitate, care este o constantă de material și se numește modul de elasticitate longitudinal sau modulul lui Young. Raportul $\frac{F}{S_0}$ se numește tensiune sau efort unitar, iar raportul $\frac{\Delta l}{l_0}$, alungire relativă sau deformație specifică. Legea lui Hooke se enunță astfel: alungirea absoluta a unui corp sub formă de fir, sub acțiunea unei forțe deformatoare, este proporțională cu forța F deformatoare și cu lungimea l_0 a corpului nedeformat și invers proporțională cu aria S_0 a secțiunii transversale a corpului nedeformat. Legea lui Hooke se mai poate enunța și astfel: pentru un material dat, sub formă de fir, alungirile relative $\frac{\Delta l}{l_0}$ sînt proporționale cu eforturile unitare $\frac{F}{S_0}$.

b) Acest subiect a fost tratat la XLII.5°.b.

c) Valoarea efectivă a intensității curentului alternativ i este egală cu acea valoare a intensității unui curent continuu I, care, străbătînd același rezistor ca și curentul alternativ i, produce aceeași căldură Q, într-un timp egal cu perioada T a curentului alternativ.

Reprezentînd grafic pe i, respectiv Ri^2 în funcție de timpul t, se obțin diagramele din figura F.B.149.

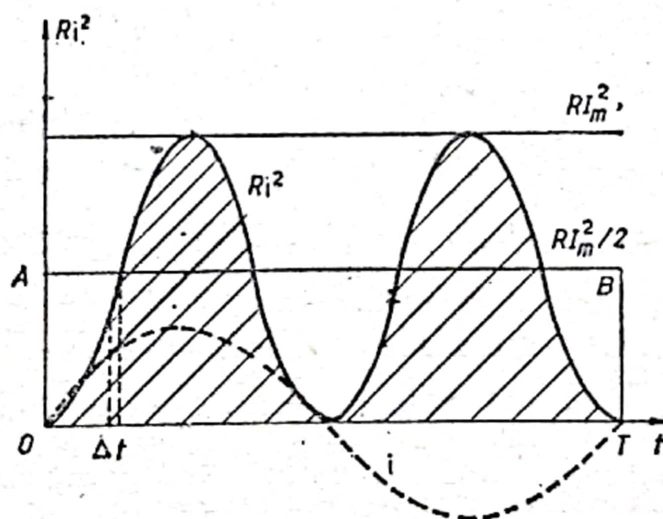


Fig. F.B.149

Cantitatea de căldură ΔQ disipată la trecerea curentului alternativ de intensitate $i = I_m \sin \omega t$ printr-un rezistor de rezistență R într-un interval de timp Δt foarte scurt ($\Delta t \ll T$) va fi egală cu $Ri^2\Delta t$. Căldura Q_a, disipată în același rezistor, la trecerea aceluiași curent alternativ, dar într-un timp egal cu perioada T a curentului alternativ, va fi egală cu aria dreptunghiului $ABTO$ $\left(Q_a = \frac{RI_m^2}{2} T\right)$, întrucît această arie se poate obține umplînd spațiile albe dintre linia AB și axa Ot cu spațiile hașurate de deasupra liniei AB. Într-o reprezentare grafică $I = f(t)$, unde I

este intensitatea curentului continuu, se obține aceeași arie $ABTO$, deci aceeași căldură se disipă, la trecerea unui curent continuu de intensitate I prin același rezistor, într-un timp egal cu perioada curentului alternativ. Această căldură este $Q_c = RI^2T$. Întrucît $Q_a = Q_c$, rezultă $I = \frac{I_m}{\sqrt{2}} = 0,707\ I_m$.

3°. a) Mișcarea particulei reprezintă rezultanta a două mișcări: una rectilinie și uniformă, pe direcție orizontală, cu viteza v_{0x} și o mișcare rectilinie uniform-variată, pe direcție verticală, cu viteza inițială v_{0y} (Fig. F.B.150).

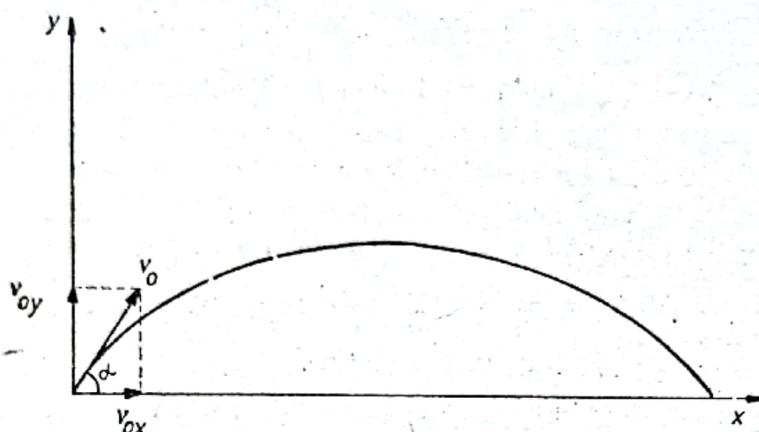


Fig. F.B.150.

Pe direcția orizontală, Ox, ecuația mișcării este $x = v_{0x}t = v_0 t \cos \alpha$, iar pe direcția verticală, Oy, ecuațiile vitezei, respectiv spațiului, sînt:

$$v_y = v_{0y} - gt = v_0 \sin \alpha - gt,$$

$$y = v_{0y}t - \frac{gt^2}{2} = v_0 t \sin \alpha - \frac{gt^2}{2}.$$

Eliminînd timpul între expresiile spațiilor x și y, se obține ecuația traiectoriei particulei, $y = x \operatorname{tg} \alpha - \frac{1}{2} x^2 \frac{g}{v_0^2 \cos^2 \alpha}$, deci traiectoria este o parabolă. Înălțimea maximă la care ajunge particula este $h_{max} = \frac{v_{0y}^2}{2g} = \frac{v_0^2 \sin^2 \alpha}{2g}$, din care, punînd condiția ca $\alpha = 45°$, se deduce $h_{max} = 2{,}5$ m.

b) Se pune condiția ca punctul de coordonate $x = x_1$ și $y = 0$ să verifice ecuația traiectoriei și se obține $\operatorname{tg} \alpha = \frac{1}{2} \frac{x_1 g}{v_0^2 \cos^2 \alpha}$ și deci $\sin 2\alpha = \frac{x_1 g}{v_0^2} = \frac{x_1}{10}$. Discuție: din condiția $|\sin 2\alpha| \leqslant 1$, rezultă $\left|\frac{x_1 g}{v_0^2}\right| \leqslant 1$ și deci $|x_1| \leqslant 10$ m.

c) Scriind că punctul (x_2, y_2) aparține traiectoriei particulei, se obține $y_2 = x_2 \operatorname{tg} \alpha - \frac{1}{2} x_2^2 \frac{g}{v_0^2 \cos^2 \alpha}$, din care, făcînd înlocuirea $\cos^2 \alpha = \frac{1}{1 + \operatorname{tg}^2 \alpha}$, se obține ecuația de gradul al 2-lea în $\operatorname{tg} \alpha$,

$$\frac{x_2^2 g}{2v_0^2} \operatorname{tg}^2 \alpha - x_2 \operatorname{tg} \alpha + \left(\frac{x_2^2 g}{2v_0^2} + y_2\right) = 0.$$

Punînd condiția ca discriminantul Δ al acestei ecuații să fie mai mare sau egal cu zero, rezultă $y_2 \leqslant \frac{v_0^2}{2g} - \frac{x_2^2 g}{2v_0^2}$. Pentru cazul în care $x_2 = 4$ m și $v_0 = 12$ m/s,

rezultă domeniul de valori pentru y_2 şi anume, $y_2 \leqslant \frac{299}{45}$. Deci $y_{2\,max} = \frac{299}{45} = 6{,}64$ m, iar $y_{2\,min} = 0$, la căderea pe sol în punctul x_2.

4°. a) În transformarea izobară lucrul mecanic $L = p\Delta V = p(V_2 - V_1)$. Volumul V_1 se determină din ecuaţia termică de stare, $pV_1 = \nu RT_1$, de unde $V_1 = \frac{m}{\mu}\frac{RT_1}{p} = 1{,}33 \cdot 10^{-3}$ m³. Deci lucrul mecanic $L = pV_2 - \frac{m}{\mu}RT_1 = 134$ J. Pentru determinarea coeficientului adiabatic $\gamma = \frac{C_p}{C_v}$, se utilizează relaţia Robert-Mayer, $C_p = C_v + R$ şi se obţine $\gamma = 1 + \frac{R}{C_v} = \frac{5}{3}$.

b) Căldura absorbită în timpul dilatării izobare este $Q_p = \nu C_p \Delta T = \nu C_p(T_2 - T_1)$. Aplicînd legea transformării izobare, $\frac{V_1}{T_1} = \frac{V_2}{T_2}$, rezultă $T_2 = T_1\frac{V_2}{V_1} = 481{,}2$ K şi deci $Q_p = \nu C_p T_1\left(\frac{V_2}{V_1} - 1\right) = 334{,}89$ J.

Variaţia energiei interne $\Delta U = \nu C_v \Delta T = \frac{m}{\mu}\frac{3}{2}R(T_2 - T_1) = 200{,}89$ J sau $\Delta U = Q_p - L = 200{,}89$ J.

c) În coordonate p, V diagrama destinderii gazului este prezentată în figura F.B.151,

$$p_1 = \alpha V_1 = 10^5 \text{ N/m}^2,$$
$$p_2 = \alpha V_2 = 2 \cdot 10^5 \text{ N/m}^2.$$

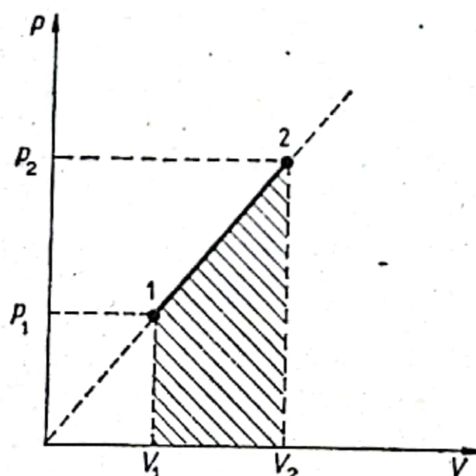


Fig. F.B.151

Lucrul mecanic efectuat de gaz va fi egal cu aria haşurată în figură,

$$L = \frac{(p_1 + p_2)\ (V_2 - V_1)}{2} = 150 \text{ J}.$$

Variaţia energiei interne $\Delta U = \nu C_V \Delta T = \nu\frac{3}{2}R(T_2 - T_1)$.

Aplicînd ecuaţia termică de stare pentru stările 1 şi 2, rezultă T_1 şi T_2, $p_1V_1 = \nu RT_1$, $T_1 = \frac{p_1V_1}{\nu R} = 120{,}3$ K şi, analog, $T_2 = \frac{p_2V_2}{\nu R} = 481{,}3$ K. Prin urmare, $\Delta U = 450$ J.

Capacitatea calorică este $C = \frac{Q}{\Delta T} = \frac{\Delta U + L}{T_2 - T_1} = \frac{600}{361} = 1{,}662$ J/K.

5°. a) Prin umplerea spațiului dintre armăturile condensatorului plan, încărcat, cu două straturi de dielectric (fig. F.B.152), se formează o baterie de două condensatoare $C_1 = \frac{\varepsilon_0 \varepsilon_{r_1} S}{d_1}$ și $C_2 = \frac{\varepsilon_0 \varepsilon_{r_2} S}{d_2}$, legate în serie, a cărei capacitate echivalentă este C. Deci $C = \frac{C_1 C_2}{C_1 + C_2}$, de unde rezultă că $d_2 = \frac{\varepsilon_0 S \varepsilon_{r_2}}{C} - \frac{\varepsilon_{r_2}}{\varepsilon_{r_1}} d_1 = 3{,}8 \cdot 10^{-3}$ m $=$ $= 0{,}38$ cm.

Diferența de potențial dintre armături este $U = \frac{Q}{C} = 10^3$ V.

b) $U_{10} = \frac{Q}{C_1} = \frac{10^{-7}}{191{,}16 \cdot 10^{-12}} = 523$ V,

$$U_{20} = -\frac{Q}{C_2} = -\frac{10^{-7}}{209 \cdot 10^{-12}} = -477 \text{ V},$$

$$U = U_{10} + U_{02} = 10^3 \text{V}.$$

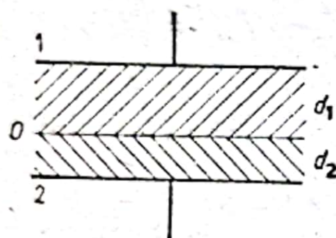
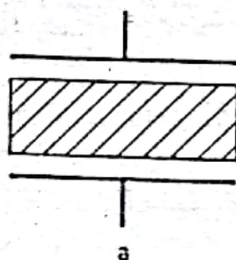


Fig. F.B.152



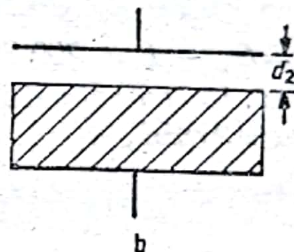


Fig. F.B.153

c) Indiferent de modul în care se așază placa metalică, fie paralel cu armăturile și simetric sau nu cu acestea, fie paralel cu armăturile, dar direct pe una dintre armături (fig. F.B.153 a și b), din punct de vedere electric, situația este aceeași. Deci condensatorul astfel realizat va avea capacitatea

$$C' = \frac{\varepsilon_0 S}{d_2} = 41{,}9 \cdot 10^{-12} \text{ F} = 41{,}9 \text{ pF}.$$

Energia cîmpului electric dintre armături, cînd condensatorul are capacitatea C, va fi $W = \frac{1}{2} \frac{Q^2}{C} = 5 \cdot 10^{-5}$ J, iar în cazul al doilea, cînd capacitatea condensatorului este C', va fi $W' = \frac{1}{2} \frac{Q^2}{C'} = 12 \cdot 10^{-5}$ J. Se constată că energia cîmpului electric variază cu $\Delta W = W' - W = 7 \cdot 10^{-5}$ J.

XLVII. 1°. a) Acest subiect a fost tratat la II.5°.a.

b) Acest subiect a fost tratat la XXXVIII.4°.b.

c) Într-un corp solid ultimele două benzi energetice permise sînt banda de valență (B.V.) și banda de conducție (B.C.). În funcție de gradul de ocupare cu electroni a benzilor de energie, corpurile solide se clasifică în metale, izolatori și semiconductori. Metalele sînt corpurile solide la care banda de conducție este parțial suprapusă peste banda de valență, deci banda de conducție este parțial ocupată.

Izolatorii și semiconductorii sînt materiale la care banda de valență este complet ocupată, iar banda de conducție este complet liberă; între aceste benzi există o bandă interzisă, a cărei lărgime se notează cu E_g. În funcție de lărgimea benzii interzise, se pot diferenția materialele izolatoare de cele semiconductoare. Prin convenție se consideră că dacă $E_g > 3$ eV, materialul este izolator, iar dacă $E_g < 3$ eV atunci materialul este semiconductor.

2°. a) Acest subiect a fost tratat la IV.5°.a.

b) Acest subiect a fost tratat la II.4°.b.

c) Experimental s-a constatat că forța de interacțiune dintre două sarcini electrice punctuale este proporțională cu produsul sarcinilor și invers proporțională cu pătratul distanței dintre ele, $F = k\frac{q_1q_2}{r^2}$. Factorul de proporționalitate k depinde de natura mediului în care are loc interacțiunea și în SI are expresia $k = \frac{1}{4\pi\varepsilon}$, în care ε este o constantă, numită permitivitate electrică, specifică fiecărui mediu. Permitivitatea electrică a vidului ε_0 are valoarea $\varepsilon_0 = 8{,}854 \cdot 10^{-12}$ F/m. Raportul dintre permitivitatea ε a unui mediu și permitivitatea ε_0 a vidului se notează cu ε_r și este o constantă fără dimensiuni, care se numește permitivitate electrică relativă a mediului respectiv față de vid, $\varepsilon_r = \frac{\varepsilon}{\varepsilon_0}$. Permitivitatea electrică relativă a unui mediu față de vid arată de cîte ori forța de interacțiune dintre două corpuri punctuale, încărcate electric este mai mare în vid decît în mediul respectiv, $\varepsilon_r = \frac{F_0}{F}$.

Experimental s-a constatat că inducția cîmpului magnetic creat de curentul electric care străbate un conductor este proporțională cu intensitatea curentului electric și invers proporțională cu distanța de la conductor la punctul în care se calculează inducția, $B = k\frac{I}{r}$. Factorul de proporționalitate k depinde de natura mediului în care se găsește conductorul și în SI are expresia: $k = \frac{\mu}{2\pi}$, în care μ este o constantă, numită permeabilitate magnetică, specifică fiecărui mediu. Permeabilitatea magnetică a vidului μ_0 are valoarea $\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7}$ N/A². Raportul dintre permeabilitatea magnetică μ a unui mediu și permeabilitatea magnetică μ_0 a vidului se notează cu μ_r și este o constantă fără dimensiuni, care se numește permeabilitate magnetică relativă a mediului față de vid, $\mu_r = \mu/\mu_0$.

3°. a) Forța N de apăsare a corpului pe scîndură este egală cu suma dintre greutatea corpului și forța de inerție care acționează asupra corpului, $N = mg + ma$, în care $a = \omega^2 A \sin \omega t$. Dar $\omega = \frac{2\pi}{T} = 4\pi$ rad/s, rezultă $N = 10 + 3{,}2 \sin 4\pi t$. Valoarea maximă a acestei forțe se obține în momentele în care forța de inerție care acționează asupra corpului este maximă, deci cînd accelerația este maximă, adică atunci cînd corpul în mișcarea oscilatorie se află la distanță maximă față de poziția de echilibru, $F_{i\,max} = ma_{max} = m\omega^2 A$. Prin urmare, $N_{max} = mg + m\omega^2 A = 13{,}2$ N.

b) Pentru ca corpul de masă m să nu se desprindă de pe scîndură, trebuie ca forța de inerție să fie egală cu greutatea corpului, $m\omega^2 A' = mg$, de unde rezultă $A' = \frac{g}{\omega^2} = 6{,}25$ cm.

c) Pentru ca corpul de masă m să înceapă să alunece pe scîndură, trebuie ca forța de frecare să fie egală cu forța de inerție, $\mu mg = ma''$, de unde rezultă

$$\mu = \frac{a''}{g} = \frac{A''\omega''^2}{g} = \frac{0{,}6\left(\frac{2\pi}{5}\right)^2}{10} = 0{,}096.$$

4°. a) Se aplică ecuația calorimetrică, $Q_{ced} = Q_{prim}$. Pot ceda căldură unul, doi, trei sau patru dintre cele cinci corpuri și, respectiv, pot primi căldură patru, trei, două sau unul dintre corpuri. În orice situație, dacă se notează cu t, tempe-

ratura de echilibru, ecuaţia calorimetrică devine $\sum_{i=1}^{5} m_i c_i\ (t - t_i) = 0$, de unde se deduce temperatura de echilibru $t = \dfrac{\sum_{i=1}^{5} m_i c_i t_i}{\sum_{i=1}^{5} m_i c_i}$.

b) În cazul particular cele 5 corpuri au mase egale $m_1 = m_2 = \ldots = m_5 = m$ şi fiind din acelaşi lichid, au şi căldurile specifice egale $c_1 = c_2 = \ldots = c_5 = c$. Expresia dedusă pentru temperatura de echilibru devine

$$t = \frac{\sum_{i=1}^{5} m_i c_i t_i}{\sum_{i=1}^{5} m_i c_i} = \frac{mc \sum_{i=1}^{5} t_i}{5\ mc} = \frac{1}{5} \sum_{i=1}^{5} t_i,$$

dar $t_{i+1} = \eta t_i$, deci $t_2 = \eta t_1$, $t_3 = \eta^2 t_1$, $t_4 = \eta^3 t_1$ şi $t_5 = \eta^4 t_1$, prin urmare $t = \frac{t_1}{5}(1 + \eta + \eta^2 + \eta^3 + \eta^4) = \frac{t_1}{5} \cdot \frac{\eta^5 - 1}{\eta - 1} = \frac{30}{5} \cdot \frac{1{,}2^5 - 1}{1{,}2 - 1} = 44{,}65°\text{C}$.

c) Variaţia totală a volumului sistemului este

$\Delta V = \sum_{i=1}^{5} \Delta V_i$, $\Delta V_i = V_i - V_{0i} = V_{0i}\ \gamma_i\ (t - t_i)$ şi $V_{0i} = \frac{m_i}{\rho_{0i}}$, prin urmare, $\Delta V = \sum_{i=1}^{5} \frac{m_i}{\rho_{0i}} \gamma_i\ (t - t_i)$.

d) În condiţiile de la punctul b, variaţia totală a volumului este $\Delta V = \sum_{i=1}^{5} \frac{m_i}{\rho_{0i}} \gamma_i\ (t - t_i) = \frac{m_i}{\rho_{0i}} \gamma_i \sum_{i=1}^{5} (t - t_i) = \frac{m_i}{\rho_{0i}} \gamma_i \left(5t - t_1 \frac{\eta^5 - 1}{\eta - 1}\right) = 0$.

5°. a) $Q_1 = C_1 U_0 = \frac{\varepsilon_0 S}{d} U_0 = 88{,}5 \cdot 10^{-9}$ C,

$$Q_2 = C_2 U_0 = \frac{2\varepsilon_0 S}{d} \cdot U_0 = 2\ C_1 U_0 = 177 \cdot 10^{-9}\ \text{C},$$

$$W_1 = \frac{1}{2} C_1 U_0^2 = 44{,}25 \cdot 10^{-6}\ \text{J},$$

$$W_2 = \frac{1}{2} C_2 U_0^2 = 2\ W_1 = 88{,}5 \cdot 10^{-6}\ \text{J}.$$

b) Dacă distanţa dintre armăturile condensatorului 2 devine egală cu d, atunci capacitatea lui, $C_2' = C_1 = \frac{\varepsilon_0 S}{d} = 88{,}5 \cdot 10^{-12}$ F. Capacităţile condensatorilor fiind egale, atunci sarcinile Q_1 şi Q_2 cu care au fost încărcaţi, se redistribuie uniform între cei doi condensatori, deci aceştia se încarcă cu sarcina $Q_1' = Q_2' = \frac{Q_1 + Q_2}{2} = 132{,}75 \cdot 10^{-9}$ C. Diferenţa de potenţial pentru fiecare dintre cei doi condensatori este $U_1' = U_2' = \frac{Q_1'}{C_1} = 1{,}5\ \ U = 1\,500$ V. Energia înmagazinată de fiecare condensator va fi $W_1' = W_2' = \frac{1}{2}\ C_1 U_1'^2 = 99{,}5 \cdot 10^{-6}$ J.

XLVIII. 1°. a) Acest subiect a fost tratat la I.4°.a.

b) Se ştie că lichidele nu au formă proprie, iau întotdeauna forma vasului în care sînt puse, au însă volum propriu bine determinat, limitat de pereţii vasului

şi de o suprafaţă liberă. Prin urmare, la lichide fenomenul de dilatare va fi cel corespunzător modificării volumului lor. Densitatea unui lichid variază cu temperatura, datorită variaţiei volumului în funcţie de temperatură, după legea $V = V_0(1 + \gamma t)$, unde V este volumul la temperatura t, V_0 este volumul la temperatura $t_0 = 0°$ C, iar γ este coeficientul de dilatare în volum al lichidului. Densitatea fiind $\rho = \frac{m}{V}$, se deduce $\rho = \frac{V_0\rho_0}{V_0(1 + \gamma t)} = \frac{\rho_0}{1 + \gamma t}$, unde ρ_0 este densitatea lichidului la temperatura $t_0 = 0°$ C.

c) Într-un cristal ideal cu proprietăţi semiconductoare, mişcarea purtătorilor de sarcină se supune legilor mecanicii clasice. Sub acţiunea unui cîmp electric exterior $\vec{E}$, purtătorii de sarcină au o mişcare uniform variată cu acceleraţiile $\vec{a}_n = -\frac{e}{m_n}\vec{E}$, $\vec{a}_p = \frac{e}{m_p}\vec{E}$, unde m_n şi m_p sînt masele electronilor, respectiv golurilor. În cristalul real, în mişcarea lor purtătorii de sarcină suferă numeroase ciocniri, întrucît reţeaua cristalină nu este perfect periodică, datorită vibraţiilor termice ale ionilor situaţi în nodurile reţelei cristaline, faţă de poziţiile lor de echilibru, datorită existenţei în reţea a impurităţilor, a atomilor interstiţiali, a unor defecte de structură.

Dacă se notează cu t_c timpul mediu dintre două ciocniri consecutive, atunci componenta vitezei medii căpătată de purtătorul mobil în direcţia cîmpului $\vec{E}$, numită viteză de drift sau viteză de antrenare, va fi $\vec{v} = \frac{1}{2}\vec{a}t_c$. Mişcarea de ansamblu a purtătorilor, care rămîne o mişcare de agitaţie termică, peste care se suprapune o componentă dirijată pe direcţia cîmpului, va fi caracterizată de o viteză medie proporţională cu intensitatea cîmpului. Pentru cele două tipuri de purtători de sarcină aceste viteze medii vor fi

$$\vec{v}_n = -\frac{et_c}{2m_n}\vec{E} = -\mu_n\vec{E};\ \vec{v}_p = \frac{et_c}{2m_p}\vec{E} = \mu_p\vec{E},$$

unde cu μ_n şi μ_p s-au notat mobilitatea electronilor, respectiv a golurilor, mărimi care depind de temperatură, de concentraţia impurităţilor, de tipul de purtători de sarcină. Pentru un timp t_c, independent de $\vec{E}$, valorile mobilităţilor sînt constante.

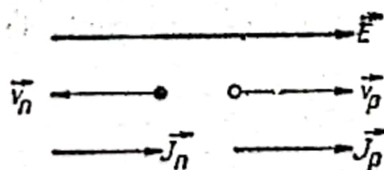


Fig. F.B.154

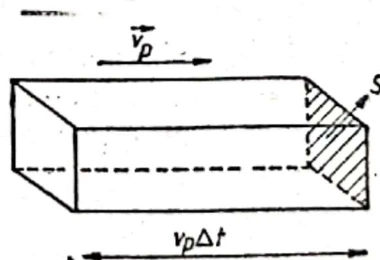


Fig. F.B.155

Deplasarea electronilor, respectiv a golurilor, cu vitezele medii de mai sus corespunde unor curenţi electrici cu densităţile $\vec{J}_n$ şi $\vec{J}_p$, ambele orientate în sensul lui $\vec{E}$ (fig. F.B.154). Dacă p este concentraţia golurilor care se deplasează cu viteza v_p, atunci printr-o secţiune S, perpendiculară pe v_p, în intervalul de timp Δt, vor trece golurile din volumul $v_pS\Delta t$ (fig. F.B.155), adică $pv_pS\Delta t$ goluri, care au sar-

cina electrică $epv_pS\Delta t$. Densitatea de curent pentru goluri $\vec{J}_p$, egală cu sarcina electrică care străbate unitatea de arie în unitatea de timp, va fi

$$\vec{J}_p = \frac{ep\vec{v}_pS\Delta t}{S\Delta t} = ep\vec{v}_p.$$

Analog, densitatea de curent pentru electroni va fi $\vec{J}_n = -en\vec{v}_n$, iar densitatea de curent datorată ambelor tipuri de purtători,

$$\vec{J} = \vec{J}_n + \vec{J}_p = e(n\mu_n + p\mu_p)\ \vec{E}.$$

Mărimea $\sigma = e(n\mu_n + p\mu_p)$ se numește conductivitatea semiconductorului.

2°. a) Legea lui Pascal se enunță astfel: presiunea exercitată pe o suprafață oarecare a unui lichid aflat în repaus se transmite în toate direcțiile și cu aceeași intensitate în tot lichidul precum și la pereții vasului care-l conține.

Legea poate fi ilustrată și printr-o experiență simplă. Un vas prevăzut cu două deschideri tubulare (fig. F.B.156) se umple complet cu apă. Se astupă fiecare

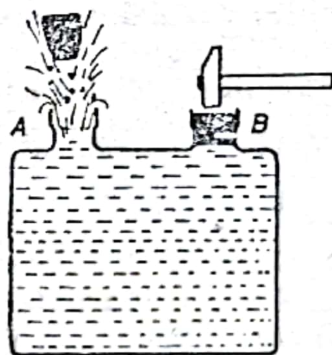


Fig. F.B.156

deschidere cu cîte un dop de cauciuc, uns cu grăsime. Dacă se presează puternic pe unul dintre dopuri, celălalt este aruncat în aer.

Legea lui Pascal este o consecință a legilor staticii fluidelor și se determină din aceste legi. Dacă p_A și p_B sînt presiunile în punctele A și B dintr-un lichid în repaus (fig. F.B.157), conform principiului fundamental al hidrostaticii rezultă

$$p_B - p_A = \rho g h.$$

Întrucît mărimile ρ, g și h sînt constante, rezultă că și diferența de presiune rămîne constantă, deci orice variație de presiune în A provoacă o variație egală de presiune în B, precum și în toate punctele lichidului.

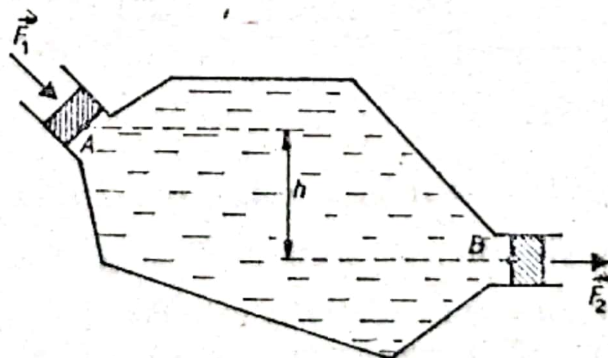


Fig. F.B.157

Legea lui Pascal are importante aplicații practice, dintre care vom prezenta presa hidraulică fig. F.B.158) a cărei funcționare se bazează pe această lege. Dacă pe pistonul P, de secțiune S se exercită o forță normală F, aceasta produce o creștere a presiunii egală cu $p = \frac{F}{S}$. Această presiune se transmite integral pe fața inferioară a pistonului P_1, de secțiune S_1, care este în acest mod acționat de o forță F_1, de mărime $F_1 = pS_1$. Rezultă deci că $F_1 = F\frac{S_1}{S}$, prin urmare intensitatea forței F_1 este cu atît mai mare, cu cît raportul ariilor fețelor pistoanelor este mai mare. Sistemul de frînare al automobilelor este o aplicație a presei hidraulice.

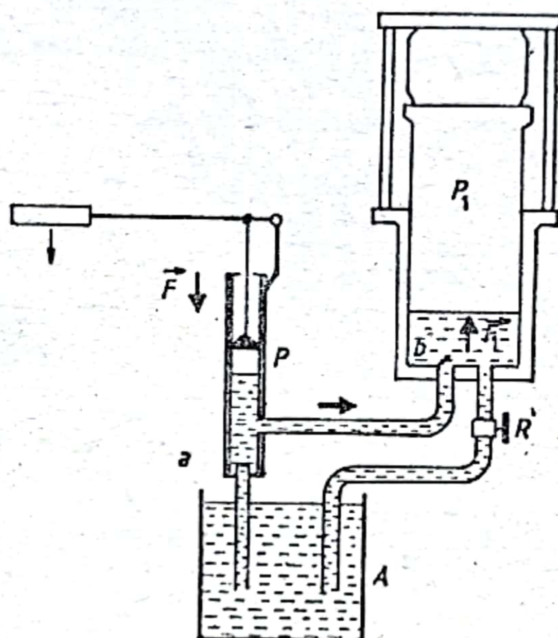


Fig. F.B.158

b) Coeficientul de tensiune superficială σ al unui lichid este numeric egal cu forța de tensiune superficială care acționează pe unitatea de lungime a conturului stratului superficial,

$$\sigma = \frac{F}{l}.$$

c) Un circuit RLC serie, de curent alternativ, se află la rezonanță, dacă reactanța lui totală este egală cu zero. Prin urmare, $X_L = X_C$, sau $\omega_r L = \frac{1}{\omega_r C}$, de unde rezultă $\omega_r = \frac{1}{\sqrt{LC}}$ sau $\nu_r = \frac{1}{2\pi\sqrt{LC}}$ (formula lui Thomson). Întrucît la rezonanță impedanța circuitului $Z_r = R$, rezultă că intensitatea curentului este maximă $I_r = \frac{U}{R}$. Tensiunea la bornele bobinei la rezonanță este $U_{L_r} = I_r X_L = \frac{U}{R}\omega_r L = \frac{U}{R} L \frac{1}{\sqrt{LC}} = \frac{1}{R}\sqrt{\frac{L}{C}} \cdot U = QU$. S-a notat $Q = \frac{1}{R}\sqrt{\frac{L}{C}}$ factorul de calitate al circuitului sau factorul de supratensiune, care arată de cîte ori tensiunea la bornele bobinei la rezonanță este mai mare decît tensiunea generatorului. Tensiunea la bornele condensatorului la rezonanță va fi

$$U_C = I_r X_C = \frac{U}{R} \frac{1}{\omega_r C} = \frac{U}{R\frac{1}{\sqrt{LC}}C} = \frac{1}{R}\sqrt{\frac{L}{C}}U = QU.$$

Rezultă deci că la rezonanță tensiunea la bornele condensatorului este egală în mărime cu tensiunea la bornele bobinei și este de Q ori mai mare decît tensiunea generatorului. Mărimea $Z_0 = \sqrt{\frac{L}{C}}$ se numește impedanța caracteristică a circuitului serie. Se constată că $Q = \frac{1}{R} Z_0$.

Diagrama fazorilor tensiunilor pentru circuitul RLC serie la rezonanță este prezentată în figura F.B.159. Se constată că tensiunea generatorului se regăsește în întregime la bornele rezistenței circuitului, de asemenea că unghiul de defazaj dintre tensiune și curent este $\varphi = 0$.

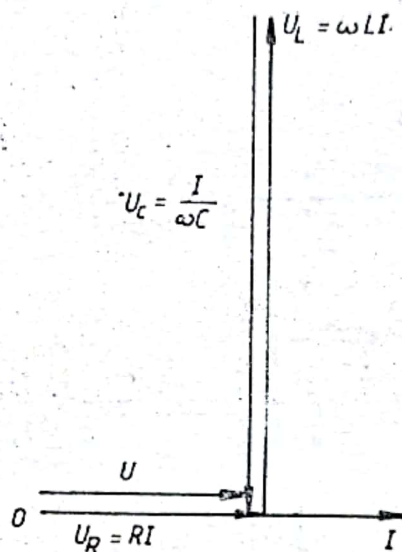


Fig. F.B.159

3°. a) Cînd corpul plutește, avînd scufundat în mercur un sfert din înălțime, greutatea lui este egală cu forța arhimedică, $G = F_A$, deci $V_c \rho_c g = \frac{1}{4} V_c \rho_{Hg} g$, de unde rezultă $\rho_c = \frac{1}{4} \rho_{Hg}$. Cînd în vas se toarnă lichid de densitate ρ_l peste mercur și se realizează condițiile din problemă, în mercur rămîne scufundată o fracțiune $\frac{V_c}{x}$, unde V_c este volumul corpului. Punînd condiția ca greutatea corpului să fie egală cu forța arhimedică rezultantă, se deduce

$$G = F_{A_{Hg}} + F_{A_l}, \text{ deci } V_c \rho_c g = \frac{V_c}{x} \rho_{Hg} g + \left(V_c - \frac{V_c}{x}\right) \rho_l g,$$

de unde rezultă

$$x = \frac{\rho_{Hg} - \rho_l}{\rho_c - \rho_l} = \frac{\rho_{Hg} - \rho_l}{\frac{1}{4} \rho_{Hg} - \rho_l} = 5,$$

deci în mercur rămîne scufundată o fracțiune egală cu $\frac{1}{5}$ din volumul său.

b) Considerînd curgerea staționară, se aplică ecuația de continuitate și legea lui Bernoulli, $v_1 S = v_2 s$,

$$p_0 + \rho_l \frac{v_1^2}{2} + \rho_l g h = \rho_l \frac{v_2^2}{2} + p_0,$$

unde p_0 este presiunea atmosferică și se determină

$$v_1 = \frac{\sqrt{2gh}}{\sqrt{\left(\frac{S}{s}\right)^2 - 1}} \text{ și } v_2 = \frac{\sqrt{2gh}}{\sqrt{1 - \left(\frac{s}{S}\right)^2}}.$$

Pentru cazul particular $h = \frac{h_0}{2}$, rezultă $v_1 \simeq \frac{1}{300}$ m/s și $v_2 = 2$ m/s.

4°. a) Aplicînd legea transformării izoterme, $p_A V_A = p_B V_B$, rezultă $V_B = \frac{V_A}{10} = 10^{-4}$ m³. Lucrul mecanic în transformarea izotermă este $L_{AB} = 2{,}3\ \nu R T_A \log \frac{V_B}{V_A}$; numărul ν de moli se determină din ecuația termică de stare $\nu = \frac{p_A V_A}{R T_A}$, iar lucrul mecanic care rezultă este $L_{AB} = 2{,}3\ p_A V_A \log \frac{V_B}{V_A} = -460$ J.

$$Q_{AB} = L_{AB} = -460 \text{ J}.$$

b) În transformarea adiabatică $p_B V_B^\gamma = p_C V_C^\gamma$, de unde $V_C = V_B \left(\frac{p_B}{p_C}\right)^{1/\gamma}$.

Cum $\gamma = \frac{C_p}{C_V} = \frac{C_V + R}{C_V} = \frac{7}{5}$ și $p_C = p_A$, rezultă $V_C = 10^{-4} \cdot 10^{\frac{5}{7}} = 5{,}18 \cdot 10^{-4}$ m³. Aplicînd ecuația lui Poisson, scrisă sub forma $T_B V_B^{\gamma-1} = T_C V_C^{\gamma-1}$ și ținînd seama că $T_B = T_A$, rezultă $T_C = T_A \left(\frac{V_B}{V_C}\right)^{\gamma-1} = 155{,}4$ K. Temperatura T_C se poate determina și aplicînd legea transformării izobare, $\frac{V_C}{T_C} = \frac{V_A}{T_A}$, de unde $T_C = T_A \frac{V_C}{V_A} = 155{,}4$ K. Prin urmare, variația de temperatură $T_B - T_C = T_A - T_C = 144{,}6$ K.

Variația energiei interne este

$$\Delta U_{BC} = \nu C_V (T_C - T_A) = \frac{5}{2} p_A (V_C - V_A) = -241 \text{ J}.$$

c) Pentru ciclul închis $ABCA$, $\Delta U_{AB} + \Delta U_{BC} + \Delta U_{CA} = 0$. Cum $\Delta U_{AB} = 0$, rezultă că $\Delta U_{CA} = -\Delta U_{BC} = 241$ J. $L_{CA} = p_A(V_A - V_C) = 96{,}4$ J și $Q_{CA} = \Delta U_{CA} + L_{CA} = 337{,}4$ J.

5°. a) Cantitatea de căldură degajată în rezistența R_1 este $Q = \frac{U^2}{R_1} t_1$, iar în rezistența R_2, $Q = \frac{U^2}{R_2} t_2$, unde U este tensiunea efectivă a rețelei. Deci $\frac{U^2}{R_1} t_1 = \frac{U^2}{R_2} t_2$, de unde rezultă $R_2 = 2 R_1$. Cînd cele două rezistențe sînt legate în serie, atunci $Q = \frac{U^2}{R_1 + R_2} t_s$, căldură egală cu cea dezvoltată în timpul t_2 în rezistența R_2, deci $\frac{U^2}{R_1 + R_2} t_s = \frac{U^2}{R_2} t_2$, de unde timpul t_s care rezultă este $t_s = \frac{t_2(R_1 + R_2)}{R_2} = t_2 \cdot \frac{3}{2} = 45$ min.

b) Analog se efectuează calculele pentru cazul în care cele două rezistențe sînt legate în paralel,

$$\frac{U^2}{\frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2}} t_p = \frac{U^2}{R_2} t_2, \text{ de unde rezultă } t_p = 10 \text{ min.}$$

c) Cantitatea de căldură Q_1 necesară firului pentru a ajunge la temperatura de topire este $Q_1 = mc\ (t_t - t) = Sldc\ (t_t - t) = 1\,871{,}1$ J. Cantitatea de căldură Q_2 disipată în fir prin efect Joule în timp de $\tau = 3$ min este

$$Q_2 = 0{,}9 \frac{\rho_0^l}{2S} [(1 + \alpha t_1) + (1 + \alpha t_2)]\ I^2\tau = 1137{,}2 \text{ J}.$$

Cum $Q_2 < Q_1$, rezultă că firul nu se topește.

XLIX. 1°. a) Acest subiect a fost tratat la II.4°.a.

b) Pentru ca vaporizarea la suprafața unui lichid să aibă loc, trebuie îndeplinite următoarele condiții:

— mediul ambiant să nu fie saturat cu vaporii lichidului, deci presiunea p_1 a vaporilor în atmosfera ambiantă, la temperatura mediului, să fie mai mică decît presiunea p_m a vaporilor lichidului la acea temperatură ($p_1 < p_m$);

— presiunea atmosferică H să fie mai mare decît presiunea p_m a vaporilor lichidului la temperatura lichidului ($H > p_m$).

Expresia vitezei de evaporare a lichidului este $v = K \frac{S(P_m - P_1)}{H}$, unde K este o constantă care depinde de unitățile de măsură alese și de viteza aerului în contact cu lichidul, S este aria suprafeței libere a lichidului, iar H este presiunea atmosferică.

c) Caracteristica diodei cu vid este curba care reprezintă variația curentului anodic I_A, în funcție de tensiunea anodică U_A, la o anumită temperatură constantă a catodului.

Caracteristica teoretică a diodei cu vid se prezintă în figura F.B.160. Cînd tensiunea U_A dintre anod și catod este zero, dar catodul este încălzit, acesta emite electroni care formează în apropierea catodului un nor electronic numit sarcină

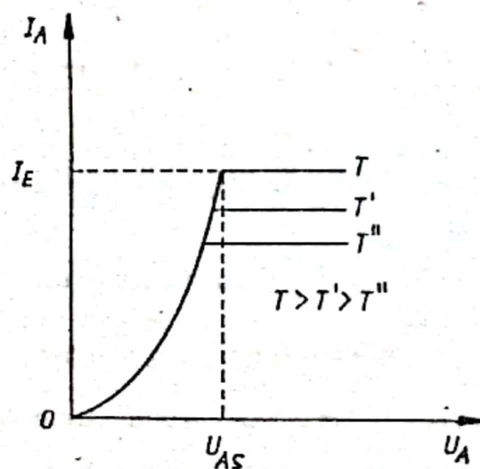


Fig. F.B.160

spațială. Norul electronic este în echilibru dinamic, adică numărul de electroni emiși de catod în unitatea de timp, care formează curentul de emisie de intensitate I_E, al catodului, este egal cu numărul de electroni care intră în catod în unitatea de timp (asupra electronilor emiși se exercită o atracție din partea catodului, care, prin emisie, devine pozitiv față de electroni).

Cînd tensiunea anodică este pozitivă (deci cînd dioda funcționează), dar este mai mică decît o valoare limită U_{AS}, numită tensiune de saturație ($0 < U_A < U_{AS}$), o parte din electronii emiși de catod sînt captați de anod și

participă la conducţie, formînd curentul anodic I_A, care, în acest caz, este mai mic decît curentul de emisie al catodului ($I_A < I_E$). Porţiunea corespunzătoare a caracteristicii se numeşte regiunea curenţilor limitaţi de sarcina spaţială sau regiunea de sarcină spaţială.

Cînd tensiunea anodică $U_A \geqslant U_{AS}$, toţi electronii emişi de catod sînt captaţi de anod şi deci intensitatea curentului anodic I_A devine egală cu intensitatea curentului de emisie I_E al catodului; creşterea tensiunii anodice peste valoarea U_{AS} nu mai modifică valoarea curentului anodic $I_A = I_E$. Porţiunea respectivă a caracteristicii se numeşte regiunea curenţilor limitaţi de emisie sau regiunea de saturaţie, în care $I_A = I_{AS} = I_E$. Cînd creşte temperatura catodului, va creşte şi intensitatea I_{AS} a curentului de saturaţie.

Caracteristica reală a diodei cu vid este prezentată în figura F.B.161. Aceasta are, în general, trei regiuni distincte:

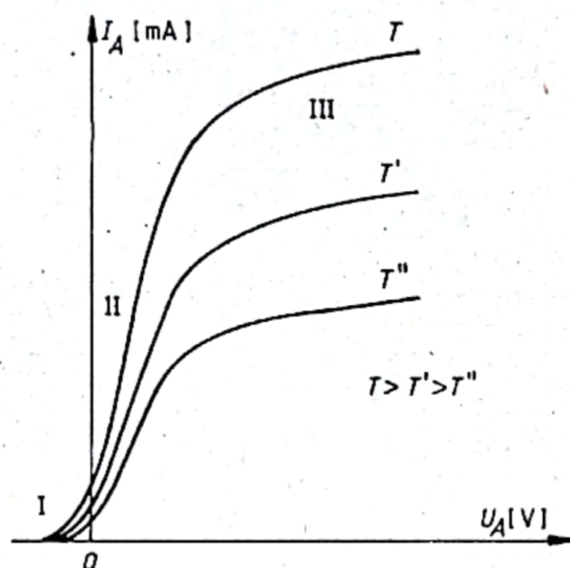


Fig. F.B.161

Regiunea I, care corespunde regimului de tensiuni anodice negative, $U_A < 0$. Caracteristica reală nu porneşte din origine ($U_A = 0$; $I_A = 0$), ci de la valori negative ale tensiunii anodice. Curentul, a cărui intensitate în această regiune creşte cu tensiunea anodică, se datorează unui număr foarte mic de electroni care au energii iniţiale suficient de mari pentru a putea ajunge la anod. Practic, acest curent fiind de intensitate foarte mică poate fi neglijat, iar caracteristica reală poate fi aproximată ca pornind din origine.

Regiunea II, care corespunde regimului de sarcină spaţială. În această regiune a curbei, care corespunde funcţionării obişnuite a diodei, variaţia intensităţii curentului anodic I_A cu tensiunea anodică U_A este dată de formula lui Langmuir, numită şi legea 3/2, $I_A = KU_A^{3/2}$, în care constanta K, numită perveanţa diodei, depinde de geometria sistemului catod-anod.

Regiunea III, numită regiune de saturaţie, în care intensitatea curentului anodic I_A nu rămîne constantă, ci creşte cu tensiunea U_A, deoarece, la suprafaţa catodului intensitatea cîmpului electric avînd valori mari, emisia de electroni devine mai intensă.

2°. a) Acest subiect a fost tratat la XXVII.5°.a.

b) Acest subiect a fost tratat la XXI.4°.b.

c) Acest subiect a fost tratat la X.3°.c.

3°. a) Din figura F.B.162, $\mathrm{tg}\,\alpha_1 = \frac{F_{cf}}{G}$, de unde $T_1 = 2\pi\sqrt{\frac{l_1 \cos\alpha_1}{g}} = 1{,}67$ s.

b) Fiind cunoscute unghiurile α_1 și α_2, se scrie $\mathrm{tg}\,\alpha_1 = \frac{F_{cf_1}}{G} = \frac{v_1^2}{R_1 g}$ și $\mathrm{tg}\,\alpha_2 = \frac{F_{cf_2}}{G} = \frac{v_2^2}{R_2 g}$ de unde rezultă $v_1^2 = R_1 g\,\mathrm{tg}\,\alpha_1 = l_1 g \sin\alpha_1 \,\mathrm{tg}\,\alpha_1$ și $v_2^2 = R_2 g\,\mathrm{tg}\,\alpha_2 = l_2 g \sin\alpha_2\,\mathrm{tg}\,\alpha_2$. Prin urmare, $\frac{v_2^2}{v_1^2} = \frac{l_2 \sin\alpha_2\,\mathrm{tg}\,\alpha_2}{l_1 \sin\alpha_1\,\mathrm{tg}\,\alpha_1}$. Aplicînd legea conservării momentului cinetic, se obține $mv_1R_1 = m\,v_2R_2$, de unde $\frac{v_2}{v_1} = \frac{R_1}{R_2} = \frac{l_1 \sin\alpha_1}{l_2 \sin\alpha_2}$. Înlocuind în expresia de mai sus, se obține

$$\frac{l_1^2 \sin^2\alpha_1}{l_2^2 \sin^2\alpha_2} = \frac{l_2 \sin\alpha_2\,\mathrm{tg}\,\alpha_2}{l_1 \sin\alpha_1\,\mathrm{tg}\,\alpha_1}, \text{ de unde}$$

$$\left(\frac{l_2}{l_1}\right)^3 = \frac{\sin^3\alpha_1}{\sin^3\alpha_2}\cdot\frac{\mathrm{tg}\,\alpha_1}{\mathrm{tg}\,\alpha_2} \text{ și deci}$$

$$l_2 = l_1 \frac{\sin\alpha_1}{\sin\alpha_2}\sqrt[3]{\frac{\mathrm{tg}\,\alpha_1}{\mathrm{tg}\,\alpha_2}} = 0{,}679 \text{ m.}$$

c) Exprimînd lucrul mecanic ca variație a energiei totale, se obține

$$L = \Delta E = \Delta E_c + \Delta E_p = \frac{mv_2^2}{2} - \frac{mv_1^2}{2} + mg(h_1 - h_2) = \frac{mg}{2}\left(l_2\frac{\sin^2\alpha_2}{\cos\alpha_2} - l_1\frac{\sin^2\alpha_1}{\cos\alpha_1}\right) +$$
$$+ mg(l_1\cos\alpha_1 - l_2\cos\alpha_2);\quad L \simeq 0{,}523 \text{ J.}$$

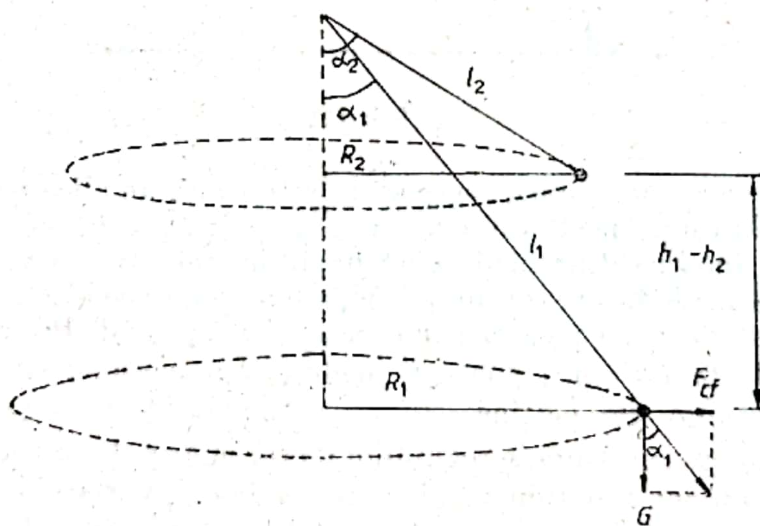


Fig. F.B.162

4°. a) Dacă se neglijează fenomenele de suprafață, atunci adîncimea h' la care se scufundă tubul se determină punînd condiția $G = F_A$, de unde $mg = Sh'\rho_0 g$, deci $h' = \frac{m}{S\rho_0}$.

Dacă se ține seama de fenomenele de suprafață, atunci $G = F_A + F_\sigma$, deci $mg = Sh''\rho_0 g + \pi d\sigma$, de unde se deduce

$$h'' = \frac{mg - \pi d\sigma}{S\rho_0 g} = \frac{m}{S\rho_0} - \frac{\pi d\sigma}{S\rho_0 g} = h' - \frac{\pi d\sigma}{S\rho_0 g}.$$

Prin urmare, $\Delta h = h' - h'' = \frac{\pi d\sigma}{S\rho_0 g} = \frac{4\sigma}{d\rho_0 g} = 3{,}65 \cdot 10^{-3}$ m.

b) Dacă sistemul este încălzit la $t = 50$ °C, atunci densitatea lichidului devine $\rho = \frac{\rho_0}{1+\gamma t}$, iar aria secțiunii tubului $S = S_0(1+2\alpha t)$, unde S_0 este aria secțiunii la 0 °C. Adîncimea h la care se scufundă densimetrul va fi dedusă din condiția $mg = Sh\rho g$, de unde $h = \frac{m}{S_0\rho_0} \cdot \frac{1+\gamma t}{1+2\alpha t}$. Cum adîncimea la care se scufundă densimetrul la temperatura $t_0 = 0$ °C este $h' = \frac{m}{S_0\rho_0}$, rezultă $\Delta h_1 = h - h' = \frac{m}{S_0\rho_0} \frac{t(\gamma - 2\alpha)}{1+2\alpha t} = 4{,}97 \cdot 10^{-3}$ m.

c) Perioada de oscilație $T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}$. Pentru a determina pe k se pornește de la constatarea că la adîncimea $h - x$, forța care acționează asupra densimetrului și-i va imprima mișcarea oscilatorie (este deci de forma $F = -kx$) va fi $F = F_A - G = S(h-x)\rho g - mg = S_0(1+2\alpha t)\left(\frac{m}{S_0\rho_0}\frac{1+\gamma t}{1+2\alpha t} - x\right)\frac{\rho_0}{1+\gamma t}g - mg = -S_0\rho_0 g\frac{1+2\alpha t}{1+\gamma t}x$.

Prin urmare, $k = S_0\rho_0 g\frac{1+2\alpha t}{1+\gamma t}$ și deci

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{m(1+\gamma t)}{S_0\rho_0 g(1+2\alpha t)}} = 1{,}4 \text{ s.}$$

5°. a) Potențialul va fi egal cu suma algebrică a potențialelor create de fiecare sarcină în punctul respectiv, $V = V_1 + V_2 = \frac{Q_1 + Q_2}{2\pi\varepsilon_0 l} = -18 \cdot 10^3$ V. Intensitatea cîmpului va fi egală cu suma geometrică (vectorială) a intensităților determinate de fiecare sarcină în punctul respectiv. Cum intensitățile au aceeași direcție și același sens, rezultă $E = E_1 + E_2 = \frac{Q_1 + |Q_2|}{\pi\varepsilon_0 l^2} = 54 \cdot 10^3$ V/m.

b) Se aplică teorema conservării energiei într-un cîmp coulombian, $\frac{m_1 v_1^2}{2} = |Q_1(V_{\text{final}} - V_{\text{inițial}})|$, de unde rezultă $\frac{m_1 v_1^2}{2} + Q_1\frac{|Q_2|}{4\pi\varepsilon_0\frac{l}{2}} = Q_1\frac{|Q_2|}{4\pi\varepsilon_0 l}$, relație din care se determină $v_1 = \sqrt{\frac{Q_1|Q_2|}{2\pi\varepsilon_0 m_1 l}} = \sqrt{3{,}6} = 1{,}89$ m/s. Analog se deduce că $v_2 = \sqrt{2{,}16} \simeq 1{,}47$ m/s.

c) Întrucît sferele sînt egale, la fiecare atingere sarcina totală se distribuie în mod egal pe fiecare.

După primul contact al sferei 3 cu sfera 1

$$Q_1^{(1)} + Q_3^{(1)} = Q_1, \text{ deci } Q_1^{(1)} = Q_3^{(1)} = \frac{Q_1}{2} = 1\mu C.$$

După contactul sferei 3, încărcată cu sarcina $Q_3^{(1)}$, cu sfera 2,

$$Q_3^{(1)} + Q_2 = Q_3^{(2)} + Q_2^{(1)}, \quad \text{deci} \quad Q_3^{(2)} = Q_2^{(1)} = -1{,}5\ \mu C.$$

În mod analog,

$$Q_3^{(2)} + Q_1^{(1)} = Q_3^{(3)} + Q_1^{(2)}, \quad \text{deci} \quad Q_3^{(3)} = Q_1^{(2)} = -0{,}25\ \mu\text{C},$$

$$Q_3^{(3)} + Q_2^{(1)} = Q_3^{(4)} + Q_2^{(2)}, \quad \text{deci} \quad Q_3^{(4)} = Q_2^{(2)} = -0{,}875\ \mu\text{C},$$

$$Q_3^{(4)} + Q_1^{(2)} = Q_3^{(5)} + Q_1^{(3)}, \quad \text{deci} \quad Q_3^{(5)} = Q_1^{(3)} = -0{,}5625\ \mu\text{C},$$

$$Q_3^{(5)} + Q_2^{(2)} = Q_3^{(6)} + Q_2^{(3)}, \quad \text{deci} \quad Q_3^{(6)} = Q_2^{(3)} = -0{,}7187\ \mu\text{C}.$$

Prin urmare, $Q_1^{(3)} = -0{,}5625\ \mu$C, $Q_2^{(3)} = -0{,}7187\ \mu$C și $Q_3^{(6)} = -0{,}7187\ \mu$C.

Pentru n foarte mare, suma algebrică a sarcinilor sferelor 1 și 2 trebuie să se distribuie, în părți egale, pe fiecare sferă conductoare, deci

$$Q_1^{(n)} = Q_2^{(n)} = Q_3^{(n)} = \frac{Q_1 + Q_2}{3} = -0{,}666\ \mu\text{C}.$$

L.1° a) Acest subiect a fost tratat la II. 4°. a.

b) Acest subiect a fost tratat la II. 5°. b.

c) Parametrii fundamentali ai unei triode sînt panta, factorul de amplificare și rezistența internă. Panta S se definește ca raportul dintre creșterea ΔI_A a intensității curentului anodic și creșterea ΔU_G a tensiunii de grilă care o determină, cînd tensiunea anodică $U_A = \text{const}$,

$$S = \left.\frac{\Delta I_A}{\Delta U_G}\right|_{U_A = \text{const}}.$$

Factorul de amplificare se definește ca raportul dintre variația tensiunii anodice ΔU_A și variația tensiunii de grilă ΔU_G, care produc aceeași variație ΔI_A a intensității curentului anodic,

$$\mu = \left.\frac{\Delta U_A}{\Delta U_G}\right|_{\Delta I_A = \text{const}}.$$

Rezistența internă R_i este raportul dintre variația tensiunii anodice ΔU_A și variația corespunzătoare a curentului anodic ΔI_A, atunci cînd tensiunea de grilă U_G este constantă,

$$R_i = \left.\frac{\Delta U_A}{\Delta I_A}\right|_{U_G = \text{const}}.$$

Înmulțind expresia pantei cu cea a rezistenței interne, se obține relația

$$SR_i = \mu,$$

care se numește ecuație internă a triodei.

2°. a) În cazul undelor plane, suprafețele de egală fază sînt plane, adică sînt suprafețe care se închid la infinit. Ca o consecință a legii conservării energiei, undele plane au proprietatea că amplitudinile oscilațiilor tuturor punctelor materiale ale mediului sînt aceleași. Se consideră un mediu elastic în care punctele materiale dintr-un plan dat, numit plan de referință, oscilează toate în fază, iar oscilația oricărui punct material este armonică, deci elongația este de forma $u = A \sin \omega t$. Punctele materiale care se află într-un plan paralel cu planul de referință vor intra în oscilație după un timp $\tau = \frac{x}{v_f}$, unde x este distanța dintre cele două plane, iar v_f este viteza de fază a undei.

Punctele materiale ale acestui plan vor efectua oscilații identice cu punctele materiale din planul de referință, dar defazate față de acestea; la un moment t oscilațiile acestor puncte vor fi identice cu cele ale planului de referință, dar la un

moment anterior cu timpul τ, deci la momentul $t - \tau$, prin urmare oscilațiile vor fi descrise de ecuația $u = A \sin \omega(t - \tau)$. Înlocuind pe τ se obține $u = A \sin\left(\omega t - \omega \frac{x}{v_f}\right)$, de unde rezultă $u = A \sin 2\pi\left(\frac{t}{T} - \frac{x}{\lambda}\right)$, care este ecuația undei plane și în care s-a notat cu $\lambda = \frac{2\pi v_f}{\omega}$, lungimea de undă a perturbației care se propagă în mediul elastic considerat.

b) Acest subiect a fost tratat la XXXVIII. 4°. b.

c) Cîmpul electric este o formă de existență a materiei din jurul corpurilor electrizate, care se manifestă prin acțiuni asupra corpurilor cu sarcină electrică.

Cîmpul magnetic este o formă a materiei, care se manifestă prin acțiunea asupra acului magnetic sau asupra conductorilor parcurși de curent electric.

3°. a) Sistemul lăsat liber (fig. F.B.163) rămîne în repaus dacă $m_2 g - m_1 g(\sin\alpha + \mu\cos\alpha) \leqslant 0$, deci pentru $m_2 \leqslant m_1(\sin\alpha + \mu\cos\alpha)$, de unde rezultă $m_2 \leqslant 1{,}173$ kg. Sistemul rămîne în repaus și dacă $m_1 g(\sin\alpha - \mu\cos\alpha) - m_2 g \leqslant 0$, deci pentru $m_2 \geqslant m_1(\sin\alpha - \mu\cos\alpha)$, de unde rezultă $m_2 \geqslant 0{,}827$ kg.

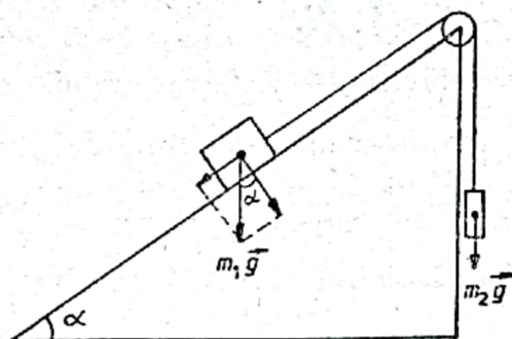


Fig. F.B.163

Prin urmare, sistemul lăsat liber rămîne în repaus pentru domeniul de valori ale masei m_2, $0{,}827 \text{ kg} \leqslant m_2 \leqslant 1{,}173$ kg.

b) Cînd $m_2 = 2{,}5$ kg sistemul va avea o mișcare accelerată, cu accelerația a, astfel încît corpul de masă m_2 să urce pe planul înclinat. Forța de inerție este forța care imprimă sistemului de masă $m_1 + m_2$ accelerația a, $(m_1 + m_2)a = m_2 g - m_1 g(\sin\alpha + \mu\cos\alpha)$, de unde se deduce $a = g\frac{m_2 - m_1(\sin\alpha + \mu\cos\alpha)}{m_1 + m_2} = 2{,}95$ m/s², iar forța de inerție $F_i = (m_1 + m_2)a = 13{,}27$ N.

c) Dacă $m_2 = 0{,}5$ kg, sistemul va avea o mișcare accelerată, cu accelerația a_1, astfel încît corpul de masă m_2 coboară pe planul înclinat, deci $m_1 g(\sin\alpha - \mu\cos\alpha) - m_2 g = (m_1 + m_2)a_1$, de unde rezultă $a_1 = g\frac{m_1(\sin\alpha - \mu\cos\alpha) - m_2}{m_1 + m_2} = 1{,}308$ m/s². Cum tensiunea în fir este $T = m_2 g + m_2 a_1$, rezultă $T = 5{,}654$ N.

4°. a) Se aplică ecuația calorimetrică, $Q_{primit} = Q_{cedat}$, deci $m_a c_a(\theta - t_a) = m_s c_s(t_s - \theta)$, de unde se deduce $t_s = \frac{m_a c_a(\theta - t_a) + m_s c_s \theta}{m_s c_s} = \frac{m_a c_a}{m_s c_s}(\theta - t_a) + \theta = 68 + 22 = 90$ °C. Din $\Delta V = V_0 \gamma t_s = V_0 3\alpha t_s$, se obține $\alpha = \frac{\Delta V}{3V_0 t_s} = 3{,}3 \cdot 10^{-5}$ K⁻¹.

b) La temperatura $t_0 = 0$ °C, densitatea sferei este $\rho_0 = \frac{m}{V_0} = \frac{20{,}5}{1{,}8 \cdot 10^{-3}} \simeq 11{,}4 \cdot 10^3$ kg/m³. La temperatura θ, densitatea sferei va fi $\rho_1 = \frac{\rho_0}{1 + 3\alpha\theta} \simeq$

$\simeq 11,375 \cdot 10^3$ kg/m³, iar la temperatura t_s va fi $\rho_2 = \frac{\rho_0}{1+3\alpha t_s} \simeq 11,299 \cdot 10^3$ kg/m³.
Rezultă că variația densității sferei în timpul răcirii va fi $\Delta\rho = \rho_1 - \rho_2 = 76$ kg/m³.

c) Forța arhimedică egală cu greutatea volumului de apă dislocuit de sferă va fi $F_A = V_s \rho_a g$, în care $V_s = V_0(1+3\alpha t)$, iar $\rho_a = \frac{\rho_{0a}}{1+\gamma_a t}$, deci dependența de temperatură a forței arhimedice în jurul temperaturii de 0 °C va fi $F_A = V_0 g \rho_{0a} \frac{1+3\alpha t}{1+\gamma_s}$.

5°. a) Puterea consumată în porțiunea de circuit exterioară sursei (fig. F.B.23) se poate exprima astfel: $P = U_{AB}I = (E - r_i I)I$, deci $r_i I^2 - EI + P = 0$. Înlocuind cu datele numerice și rezolvînd ecuația, se determină două valori pentru I și anume, $I_1 = 11$ A, $I_2 = 44$ A. Cum $I \leqslant \frac{E}{R+r_i}$, rezultă că se ia ca valoare pentru $I = 11$ A. Puterea P_h consumată în rezistențele hexagonului va fi $P_h = P - RI^2 = 121$ W.

b) $U_{CD} = E - I(R+r_i) = 11$ V.

Calculînd rezistența echivalentă a hexagonului, se obține $R_h = \frac{5r}{11}$. Dar puterea consumată în R_h am determinat-o ca fiind $P_h = 121$ W; se obține deci $R_h = \frac{P_h}{I^2} = 1\,\Omega$ și deci $r = \frac{11\,R_h}{5} = 2,2\,\Omega$.

c) Din figura F.B.23 și figura F.B.164 rezultă $I_{ad} = \frac{U_{CD}}{r} = 5$ A. Cum $I = I_{ad} + I_{cd} + I_{ed}$, rezultă $I_{cd} = I_{ed} = 3$ A și $I_{ac} = I_{ae} = \frac{U_{ac}}{r} = \frac{4,4}{2,2} = 2$ A, iar $I_{abc} = I_{afe} = \frac{U_{ac}}{2r} = \frac{4,4}{4,4} = 1$ A.

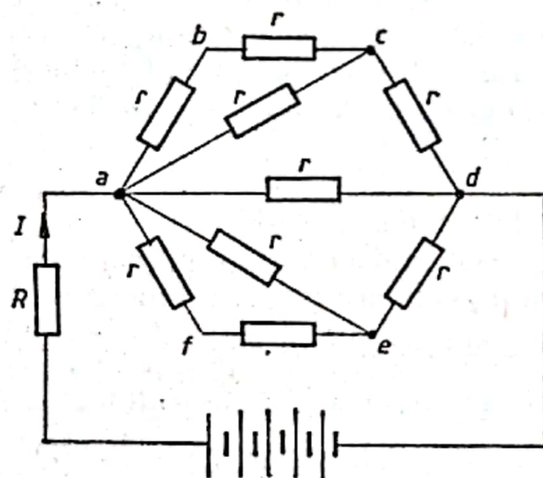


Fig. F.B.164

LI. 1°. a) Acest subiect a fost tratat la XVI.5°.b.

b) Acest subiect a fost tratat la XXXIII. 5°.c.

c) Se știe că marea majoritate a lichidelor își măresc volumul o dată cu creșterea temperaturii. Anomalia dilatării termice a apei constă în faptul că, în intervalul de temperatură 0 °C – 4 °C, apa își micșorează volumul o dată cu creșterea

temperaturii, avînd densitatea maximă, în acest interval, la temperatura de 3,98 °C. Apa este un amestec de molecule de forma H_2O; $(H_2O)_2$; $(H_2O)_3$ cu diferite volume specifice și care, prin asociere, formează molecule complexe. Întrucît concentrația diverselor grupe de molecule variază cu temperatura, se ajunge la anomalia constatată.

2°. a) Se pornește de la expresiile deviației unei particule cu sarcina q, care intră într-un cîmp electric uniform, respectiv într-un cîmp magnetic uniform, cu viteza inițială v_0, normală la liniile de cîmp, expresii deduse în XIV.4°.c și XI.3°.c:

$$Y_{(E)} = \frac{qUx}{2m_0v_0^2d}(x+2D) \text{ și } Y_{(B)} = \frac{qBx}{2m_0v_0}(x+2D).$$

Se constată că dacă s-ar cunoaște viteza v_0, s-ar putea deduce sarcina specifică $\frac{q}{m_0}$ a particulei respective. Cum, în general, în tuburile de descărcări, fasciculele de particule încărcate nu au aceeași viteză, J.J. Thomson a utilizat cîmpurile E și B, paralele între ele și de același sens (fig. F.B.165). Dacă asupra particulei încărcate s-ar acționa doar cu cîmpul electric E, particula ar urma traiectoria OA, iar dacă s-ar acționa numai cu cîmpul magnetic de inducție B, particula ar urma

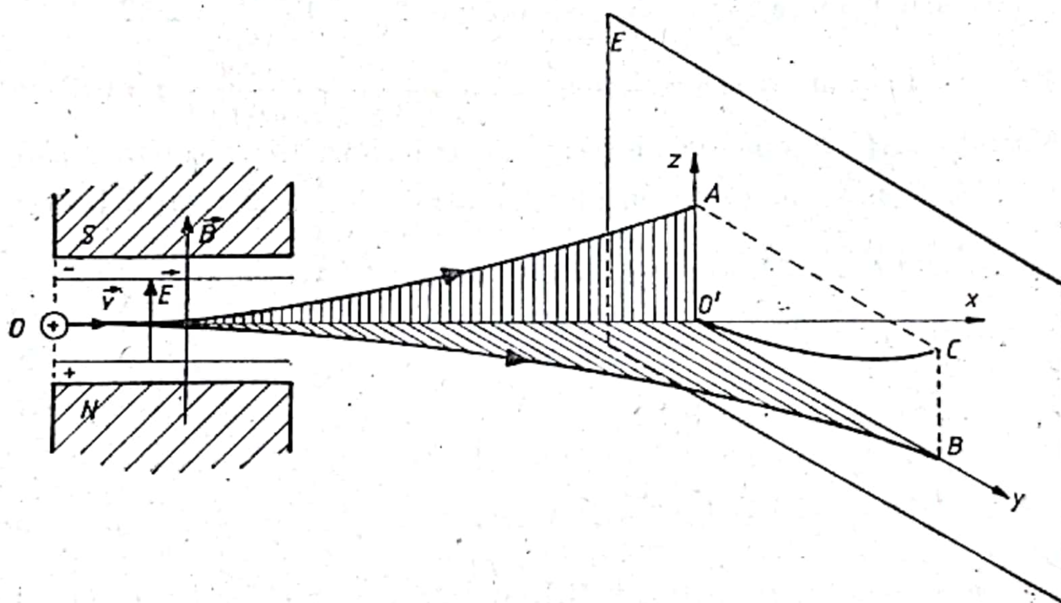


Fig. F.B.165

traiectoria OB. Acționînd simultan cu cele două cîmpuri, particula atinge ecranul E în punctul C. În acest caz, în planul $O'xyz$ deviația în cîmp electric devine Z, iar în cîmp magnetic Y. Cu această precizare, eliminînd v_0 din relațiile de mai sus, se obține

$$Z = \frac{2U}{B^2xd\frac{q}{m_0}(x+2D)}Y^2,$$

relație care reprezintă ecuația unei parabole cu vîrful în O', punctul de impact al particulei încărcate cu ecranul, în absența cîmpurilor E și B.

Din această relație rezultă sarcina specifică a particulei,

$$\frac{q}{m_0} = \frac{2U}{B^2xd(x+2D)}\cdot\frac{Y^2}{Z},$$

unde Y și Z sînt coordonatele unui punct de pe arcul de parabolă $O'C$. Dacă particula încărcată este un electron, se deduce sarcina specifică a electronului, $\frac{e}{m_0} = -1{,}76 \cdot 10^{11}$ C/kg.

b) $U = V_M - V_N = \frac{L}{q}$, unde $V_M - V_N$ este diferența de potențial dintre două puncte M și N sau tensiunea electrică dintre aceste puncte, L este lucrul mecanic efectuat de cîmp la deplasarea unui corp încărcat electric între cele două puncte, iar q este sarcina corpului.

c) Acest subiect a fost tratat la VII. 4°.c.

3°. a) Temperatura T_2 în starea finală se determină din expresia lucrului mecanic în transformarea izobară, $L = \nu R(T_2 - T_1)$, de unde $T_2 = T_1 + \frac{L}{\nu R} = 320 + 337 = 657$ K. Într-o transformare izobară lucrul mecanic poate fi exprimat și prin $L = p(V_2 - V_1)$, de unde se poate deduce presiunea $p = \frac{L}{V_2 - V_1}$. Din expresia numărului de moli $\nu = \frac{m}{\mu} = \frac{V_1 \rho}{\mu}$, se obține $V_1 = \frac{\nu\mu}{\rho} = 26{,}23 \cdot 10^{-3}$ m³. Aplicînd legea transformării izobare, $\frac{V_1}{T_1} = \frac{V_2}{T_2}$, se obține $V_2 = V_1 \frac{T_2}{T_1} = 26{,}23 \cdot 10^{-3} \cdot \frac{657}{320} = 58{,}85 \cdot 10^{-3}$ m³. Prin urmare, presiunea $p = \frac{L}{V_2 - V_1} = \frac{2 \cdot 800}{27{,}62 \cdot 10^{-3}} \simeq 1{,}013 \cdot 10^5$ N/m².

b) Variația ΔU a energiei interne în transformarea izobară este $\Delta U = \nu C_v(T_2 - T_1)$. Cunoscînd coeficientul adiabatic $\gamma = \frac{C_p}{C_v}$ și relația Robert-Mayer $C_p = C_v + R$, rezultă $C_v = \frac{R}{\gamma - 1}$. Prin urmare, $\Delta U = \nu \frac{R}{\gamma - 1}(T_2 - T_1) = \frac{L}{\gamma - 1} = 7 \cdot 10^3$ J.

c) $\bar{v}_1^2 = \frac{3RT_1}{\mu} = 24{,}93 \cdot 10^4 \frac{\text{m}^2}{\text{s}^2}$,

$$\bar{v}_2^2 = \frac{3RT_2}{\mu} = 51{,}18 \cdot 10^4 \frac{\text{m}^2}{\text{s}^2}.$$

4°. a) Tensiunea bateriei (fig. F.B.166) este $E = nE_i = 10$ V, iar rezistența ei internă $r = nr_i = 1\ \Omega$. Aplicînd legea lui Ohm, $I_1 = \frac{E}{R + r}$, unde $R =$

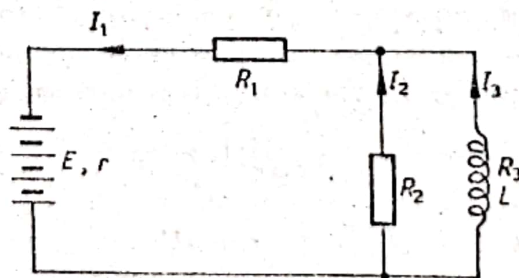


Fig. F.B.166

$= R_1 + \frac{R_2 R_3}{R_2 + R_3} = 6\ \Omega$, rezultă $I_1 = \frac{10}{7} = 1{,}43$ A. Tensiunea $U_2 = U_3 = I_1 \frac{R_2 R_3}{R_2 + R_3} = \frac{20}{7} = 2{,}85$ V. Prin urmare, $I_2 = \frac{U_2}{R_2} = \frac{20}{7} \cdot \frac{1}{6} = \frac{10}{21} = 0{,}48$ A și $I_3 = \frac{U_3}{R_3} = \frac{20}{21} = 0{,}95$ A.

b) Fluxul magnetic care străbate bobina este $\Phi = LI_2 = 1,9 \cdot 10^{-3}$ Wb. Inducția magnetică B în lungul axei bobinei este $B = \frac{\Phi}{NS} = 7,5 \cdot 10^{-3}$ T.

c) Căldura degajată timp de o oră în R_1 este $Q = R_1 I_1^2 t = 29,4$ KJ.

5°. a) În circuitul de curent alternativ (fig. F.B.167) puterea activă este $P = UI \cos\varphi = RI_R^2 = UI_R$, de unde se determină $I = \frac{P}{U \cos\varphi} = 0,19$ A și $I_R = \frac{P}{U} = \frac{1}{6} = 0,166$ A, iar rezistența $R = \frac{P}{I_R^2} = 360\ \Omega$. Pentru circuitul de curent alternativ RLC paralel se știe că $\operatorname{tg}\varphi = R\left(\omega C - \frac{1}{\omega L}\right)$, de unde se obține $C = \frac{\operatorname{tg}\varphi}{\omega R} + \frac{1}{\omega^2 L} = \frac{46,84}{3071} 10^{-3} = 15,2 \cdot 10^{-6}$ F $= 15,2\ \mu$F.

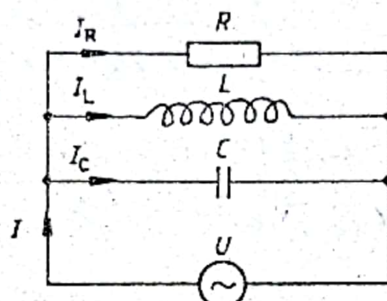


Fig. F.B.167

b) Expresia intensității instantanee a curentului prin bobină,

$$i_L = \frac{U_m}{X_L} \sin\left(\omega t - \frac{\pi}{2}\right) = \frac{60\sqrt{2}}{314} \sin\left(\omega t - \frac{\pi}{2}\right) = 0,27 \sin\left(314\, t - \frac{\pi}{2}\right).$$

c) Curentul total devine minim cînd circuitul se află la rezonanță, deci cînd $\omega L_1 = \frac{1}{\omega C}$, de unde se deduce $L_1 = \frac{1}{\omega^2 C} = \frac{1}{314^2 \cdot 15,2 \cdot 10^{-6}} = 0,667$ H. La rezonanță tot curentul debitat de sursă trece prin rezistența R, deci $I_{\min} = I_R = \frac{1}{6}$ A.

LII.1°. a) Acest subiect a fost tratat la XXV.5°.b.

b) Acest subiect a fost tratat la I.4°.b.

c) În condiții de echilibru, suprafața de separare dintre două lichide nemiscibile este plană și orizontală. În cazul a două lichide nemiscibile, de densități comparabile, dintre care unul se găsește în cantitate mult mai mică decît celălalt, suprafața de separare este sferică.

2°. a) Acest subiect a fost tratat la XIV.4°.c.

b) Acest subiect a fost tratat la X.4°c.

c) Acest subiect a fost tratat la XLVIII.2°.a.

3°. a) Se aplică prima lege a electrolizei și se determină

$$I_v = \frac{m}{KT} = \frac{32 \cdot 10^{-6}}{0,32 \cdot 10^{-6} \cdot 100} = 1 \text{ A}.$$

b) Din figura F.B.168 se constată că $U_v = U_s = R_v I_v = 4$ V, deci $I_s = \frac{U_s}{R_s} = \frac{4}{8} = 0,5$ A. În centrul solenoidului, inducția cîmpului magnetic $B = \mu_0 \frac{NI_s}{l}$

și deci fluxul $\Phi = NBS = \mu_0 \frac{N^2 I_s}{l} S = 0{,}166 \cdot 10^{-5}$ Wb, iar inductanța bobinei $L = \mu_0 \frac{N^2 S}{l} = \frac{\Phi}{I_s} = 0{,}333 \cdot 10^{-5}$ H.

c) Curentul total $I = I_s + I_v = 1{,}5$ A. Aplicînd legea lui Ohm rezultă, $I = \frac{E}{r_i + R_1 + \frac{R_v R_s}{R_v + R_s}}$, de unde se obține $r_i = 1{,}33\ \Omega$.

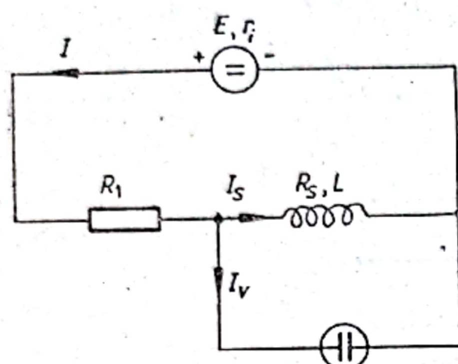


Fig. F.B.168

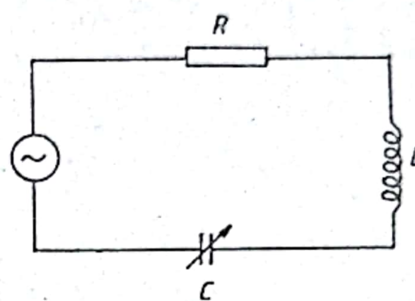


Fig. F.B.169

4°. a) Aplicînd legea lui Ohm (fig. F.B.169) rezultă $I = \frac{U}{\sqrt{R^2 + (X_L - X_{C_2})^2}} = \frac{U}{\sqrt{R^2 + (X_{C_1} - X_L)^2}}$ de unde se obține: $L\omega - \frac{1}{\omega C_2} = \frac{1}{\omega C_1} - L\omega$, de unde se determină inductanța $L = \frac{1}{2\omega^2} \cdot \left(\frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2}\right) = 95 \cdot 10^{-6}$ H. Tot din legea lui Ohm rezultă valoarea rezistenței,

$$R = \sqrt{\left(\frac{U}{I}\right)^2 - \left(\frac{1}{\omega C_1} - \omega L\right)^2} = \sqrt{450^2 - 200^2} \simeq 403\ \Omega.$$

b) La rezonanță întreaga tensiune a sursei se regăsește la bornele rezistenței, deci puterea consumată în circuit va fi $P_{\text{rezonanță}} = \frac{U^2}{R} = 50 \cdot 10^{-3}$ W.

c) Se știe că pentru un circuit RLC serie $\text{tg}\varphi = \frac{X_L - X_C}{R}$, deci în cazul problemei date $\text{tg}\varphi_2 = \frac{X_L - X_{C_2}}{R}$; $\text{tg}\varphi_1 = \frac{X_L - X_{C_1}}{R}$. Cum $\text{tg}\varphi_2 = -\text{tg}\varphi_1$, rezultă $\text{tg}\varphi_2 = -\text{tg}\varphi_1 = 0{,}5$.

5°. a) Aplicînd legea transformării izoterme (fig. F.B.170), $p_1 V_1 = p_2 V_2$, se deduce $V_2 = 10^{-4}$ m³. Aplicînd legea transformării adiabatice, $p_2 V_2^{\gamma} = p_3 V_3^{\gamma}$, și cum $p_3 = p_1$, rezultă $\left(\frac{V_3}{V_2}\right)^{\gamma} = \frac{p_2}{p_1}$ sau $\frac{V_3}{V_2} = \left(\frac{p_2}{p_1}\right)^{\frac{1}{\gamma}}$, de unde se deduce $V_3 = V_2 \left(\frac{p_2}{p_1}\right)^{\frac{1}{\gamma}} = 4{,}62 \cdot 10^{-4}$ m³.

Pentru a deduce temperatura T_3 se aplică ecuația termică de stare pentru stările (1) și (3) și se obține $p_1V_1 = \nu RT_1$; $p_3V_3 = \nu RT_3$. Prin împărțirea celor două relații se obține $\frac{V_3}{V_1} = \frac{T_3}{T_1}$, de unde $T_3 = T_1\frac{V_3}{V_1} = 138{,}6$ K.

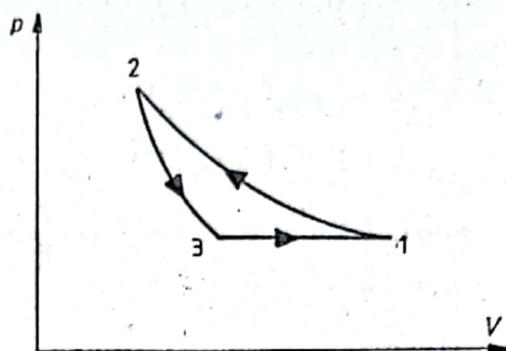


Fig. F.B.170

b) În transformarea izotermă căldura cedată $Q_{12} = \nu RT_1 \ln\frac{V_2}{V_1} = -p_1V_1 \cdot$ $\cdot\, 2{,}3 \log\frac{V_1}{V_2} = -10^5 \cdot 10^{-3} \cdot 2{,}3 = 230$ J. În transformarea izobară, căldura absorbită $Q_{31} = \nu C_p(T_1 - T_3)$. Cunoscînd exponentul adiabatic și utilizînd relația Robert-Mayer, rezultă $C_p = \frac{\gamma R}{\gamma - 1}$, deci $Q_{31} = \nu\frac{\gamma R}{\gamma - 1}(T_1 - T_3) =$

$$= \frac{\gamma}{\gamma - 1}(\nu RT_1 - \nu RT_3) = \frac{\gamma}{\gamma - 1}(p_1V_1 - p_3V_3) =$$

$$= \frac{\gamma}{\gamma - 1}(p_1V_1 - p_1V_3) = 3 \cdot 10^5(10^{-3} - 0{,}462 \cdot 10^{-3}) \simeq 161 \text{ J.}$$

c) Temperatura maximă $T_{max} = T_1 = T_2 = 300$ K, iar temperatura minimă $T_{min} = T_3$. Prin urmare,

$$\eta_c = 1 - \frac{T_{min}}{T_{max}} = 1 - \frac{T_3}{T_1} = 1 - \frac{138{,}6}{300} \simeq 0{,}538.$$

LIII. 1°. a) Acest subiect a fost tratat la XIV.4°.c.

b) Caracteristicile vaporizării în vid sînt:

— vaporizarea în vid este instantanee;

— vaporizarea în vid se face pînă cînd presiunea vaporilor obținuți atinge o valoare maximă p_m. În acest caz, vaporii se numesc saturanți, iar p_m se numește presiune maximă a vaporilor saturanți, în condițiile date de temperatură.

Presiunea maximă a vaporilor saturanți verifică următoarele legi:

— presiunea maximă a vaporilor saturanți nu depinde de masa lichidului și nici de masa vaporilor în contact;

— presiunea maximă a vaporilor saturanți rămîne constantă, atîta timp cît temperatura rămîne constantă;

— la o temperatură dată, presiunea maximă a vaporilor saturanți depinde numai de natura lichidului din care au provenit.

c) Acest subiect a fost tratat la XXXV.4°.c și IX.4°.c.

2°. a) Densitatea unui solid variază cu temperatura, datorită variației volumului solidului în funcție de temperatură, care se face după legea $V = V_0(1 + \gamma t)$,

unde V este volumul la temperatura t, V_0 este volumul la temperatura $t_0 = 0$ °C, iar γ este coeficientul de dilatare în volum al solidului. Densitatea solidului fiind definită ca raportul dintre masa și volumul corpului respectiv, se deduce

$\rho = \frac{m}{V} = \frac{\rho_0 V_0}{V_0(1 + \gamma t)} = \frac{\rho_0}{1 + \gamma t}$, unde ρ_0 este densitatea solidului respectiv la temperatura $t_0 = 0$ °C.

b) Acest subiect a fost tratat la II.5°.c.

c) Acest subiect a fost tratat la XLVI. 1°.b.

3°. a) Randamentul ciclului Carnot este $\eta = 1 - \frac{T_2}{T_1} = 1 - \frac{296}{773} = 1 - 0{,}383 = 0{,}617$ sau $\eta = 61{,}7\%$.

b) Cum randamentul unei mașini termice este $\eta = \frac{Q_1 - |Q_2|}{Q_1}$, unde Q_1 este căldura primită și $|Q_2|$ căldura cedată de mașină, rezultă $|Q_2| = Q_1(1 - \eta) = 6 \cdot 10^5(1 - 0{,}617) = 2{,}3 \cdot 10^5$ J. Puterea mașinii va fi egală cu $\frac{Q_1}{t} = \frac{6 \cdot 10^5}{60} = 10^4$ W $= 10$ kW.

c) Căldura folosită este $Q = 50\, Q_2 = 50 \cdot 2{,}3 \cdot 10^5$ J $= 115 \cdot 10^2$ KJ. Aplicînd ecuația calorimetrică, $Q = m_a c_a(t_4 - t_3) + m_a \lambda_v$, se poate determina

$$m_a = \frac{Q}{c_a(t_4 - t_3) + \lambda_v} = \frac{115 \cdot 10^2}{4{,}18 \cdot 80 + 2\,255} = 4{,}44 \text{ kg}.$$

4°. a) Se aplică circuitelor din figura F.B.171 și figura F.B.172 legea lui Ohm

$I_1 = \frac{E}{r_i + R_1 + R_2}$, de unde rezultă $R_1 + R_2 = 8\ \Omega$.

$I_2 = \frac{E}{r_i + \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2}}$, de unde rezultă $R_1 R_2 = 12\ \Omega^2$.

Cunoscînd suma și produsul valorilor rezistențelor, se deduce $R_1 = 6\ \Omega$ și $R_2 = 2\ \Omega$.

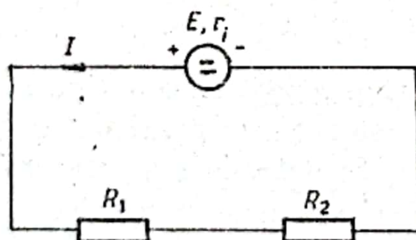


Fig. F.B.171

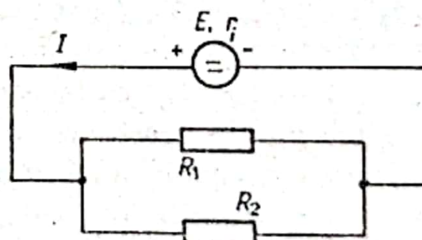


Fig. F.B.172

b) Tensiunea la borne în primul caz este $U_s = E - r_i I_1 = 18 - 2 = 16$ V, iar în cazul al doilea, $U_p = E - r_i I_2 = 18 - 7{,}2 = 10{,}8$ V.

c) În primul caz, puterile consumate în rezistoare sînt: $P_{R_1} = R_1 I_1^2 = 24$ W, $P_{R_2} = R_2 I_1^2 = 8$ W. În cazul al doilea, puterile consumate în rezistoare sînt: $P_{R_1} = \frac{U_p^2}{R_1} = \frac{10{,}8^2}{6} = 19{,}44$ W și $P_{R_2} = \frac{U_p^2}{R_2} = \frac{10{,}8^2}{6} = 58{,}32$ W.

5°. a) Pornind de la expresia inductanței bobinei $L = \mu_0\mu_r \frac{N^2S}{l}$, se deduce $\mu_r = \frac{L \cdot l}{\mu_0 N^2 S} = \frac{0,4 \cdot 0,1}{4\pi \cdot 10^{-7} \cdot 25 \cdot 10^4 \cdot \pi \cdot 10^{-4}} = \frac{4}{\pi^2} \cdot 10^3 = 406$.

b) Intensitatea curentului prin bobină este $I = \frac{E}{R} = 5,8$ A, iar fluxul magnetic $\Phi = LI = 0,4 \cdot 5,8 = 2,32$ Wb, sau $\Phi = NBS = N\mu \frac{NI}{l} \cdot \pi \frac{D^2}{4} = \mu_0\mu_r \frac{N^2 I}{l} \cdot \pi \frac{D^2}{4} = 2,32$ Wb.

c) Aplicînd legea lui Ohm circuitului RLC serie de curent alternativ care se formează, rezultă $I = \frac{U}{Z} = \frac{U}{\sqrt{R^2 + (X_L - X_C)^2}}$, unde $U = 100$ V. Din această relație se obține valoarea capacității $C = \frac{1}{\omega\left(X_L - \sqrt{\left(\frac{U}{I}\right)^2 - R^2}\right)}$. Dar $\frac{U}{I} = \frac{100}{5,8} = 17,2\ \Omega = R$, prin urmare capacitatea $C = \frac{1}{\omega X_L} = \frac{1}{\omega^2 L} = 25,3 \cdot 10^{-6}$ F $= 25,3$ μF.

LIV. 1°. a) Momentul $\vec{M}$ al unei forțe $\vec{F}$ în raport cu un punct numit pol, se definește ca produsul vectorial dintre vectorul de poziție $\vec{r}$ al forței față de pol și vectorul forță,

$$\vec{M} = \vec{r} \times \vec{F}.$$

Momentul unei forțe față de un punct este un vector căruia trebuie să i se precizeze direcția, sensul și mărimea. Direcția vectorului moment este perpendiculară pe planul determinat de vectorii $\vec{r}$ și $\vec{F}$. Sensul vectorului moment, dat de regula burghiului drept, este același cu sensul de înaintare al burghiului drept, cînd acesta este rotit, astfel încît primul vector ($\vec{r}$) al produsului vectorial este adus peste cel de-al doilea ($\vec{F}$) pe drumul cel mai scurt.

Mărimea momentului, $|\vec{M}| = M = rF \sin\alpha = F \cdot b$.

Perpendiculara coborîtă din pol pe direcția forței, egală cu $r \sin\alpha$ și notată cu b, se numește brațul forței față de polul O.

Se constată că atunci cînd polul se află pe dreapta suport a forței (deci cînd unghiul α este egal cu zero sau 180°), momentul forței este nul. Momentul forței se măsoară în Nm. Dacă mai multe forțe concurente $\vec{F}_1, \vec{F}_2, ..., \vec{F}_n$ acționează asupra unui punct material, atunci fiecare forță va avea un moment în raport cu un pol O. $\vec{M}_1 = \vec{r} \times \vec{F}_1$; $\vec{M}_2 = \vec{r} \times \vec{F}_2$; ...; $\vec{M}_n = \vec{r} \times \vec{F}_n$ și deci $\vec{M}_1 + \vec{M}_2 + ... + \vec{M}_n = \vec{M} = \vec{r} \times (\vec{F}_1 + \vec{F}_2 + ... + \vec{F}_n)$, adică $\vec{M} = \vec{r} \times \vec{F}$, unde $\vec{F}$ este forța rezultantă, iar $\vec{M}$ momentul rezultantei față de polul O. Prin urmare, suma vectorială a momentelor forțelor concurente în raport cu un pol este egală cu momentul rezultantei acestor forțe în raport cu același pol. Aceasta este teorema lui Varignon.

b) Acest subiect a fost tratat la XI.4°.b.

c) Fluxul magnetic Φ al inducţiei magnetice printr-o suprafaţă oarecare S se defineşte ca produsul dintre mărimea inducţiei magnetice, aria suprafeţei S şi cosinusul unghiului dintre vectorul inducţiei magnetice şi normala la suprafaţă,

$$\Phi = BS \cos \alpha.$$

Dacă $\alpha = 0$, deci dacă inducţia cîmpului magnetic străbate o suprafaţă normală la direcţia cîmpului, atunci fluxul printr-o astfel de suprafaţă este maxim, $\Phi_{max} = BS$. Dacă $\alpha = \frac{\pi}{2}$, deci dacă liniile de cîmp sînt perpendiculare cu direcţia normalei la suprafaţă, atunci fluxul magnetic prin acea suprafaţă este zero.

Unitatea de măsură a fluxului magnetic în SI se numeşte Weber şi are simbolul Wb. Un Wb este fluxul magnetic al unui cîmp magnetic uniform, de inducţie egală cu 1T, printr-o suprafaţă de 1 m², aşezată normal pe direcţia cîmpului magnetic.

2°. a) Prin definiţie, momentul cinetic al unui punct material în raport cu un pol este

$$\vec{L} = \vec{r} \times m\vec{v},$$

unde $\vec{r}$ este vectorul de poziţie al punctului material de masă m, iar $m\vec{v}$ este impulsul punctului material. Momentul cinetic se măsoară în J · s.

b) Acest subiect a fost tratat la III.4°.a.

c) Acest subiect a fost tratat la V.4°.c.

3°. a) Ecuaţiile spaţiului şi vitezei sînt: $l = \frac{at^2}{2}$, $v = at$, iar relaţia lui Galilei $v = \sqrt{2al}$. Din relaţia lui Galilei se determină $a = \frac{v^2}{2l} = \frac{25}{16}$ m/s², iar din ecuaţia spaţiului se deduce $t = \sqrt{\frac{2l}{a}} = 32$ s.

b) Forţa de propulsie a avionului este

$$F = ma = 8\,500 \cdot \frac{25}{16} \approx 13\,281 \text{ N}.$$

c) Puterea medie dezvoltată de avion la parcurgerea pistei este

$$P_m = F \cdot v_m = F \cdot \frac{v}{2} = 13\,281 \cdot \frac{50}{2} = \frac{1\,328\,100}{4} = 332\,025 \text{ W} = 332{,}025 \text{ kW}.$$

4°. Se aplică legea conservării energiei, $\frac{mv^2}{2} = eU$, de unde se deduce $v = \sqrt{\frac{2eU}{m}} = 6 \cdot 10^6$ m/s.

La acelaşi rezultat se ajunge aplicînd varianta cinematică.

Forţa electrică imprimă electronului o mişcare uniform accelerată, deci $F_e = qE = ma$, de unde se deduce acceleraţia mişcării $a = \frac{eE}{m} = \frac{e}{m}\frac{U}{d}$. Ecuaţiile spaţiului şi vitezei sînt $d = \frac{at^2}{2}$; $v = at$, iar relaţia lui Galilei $v = \sqrt{2ad}$, din care se deduce $v = \sqrt{2\frac{eU}{md}d} = \sqrt{\frac{2eU}{m}} \simeq 6 \cdot 10^6$ m/s.

b) Timpul de trecere a electronului de la o placă la alta este $t = \frac{v}{a} = 1{,}02 \cdot 10^{-9}$ s.

c) Intensitatea cîmpului electric dintre plăcile condensatorului este $E = \frac{U}{d} = \frac{1}{3} 10^5$ V/m.

LV. 1°. a) Acest subiect a fost tratat la XLVI. 2°.a.

b) Acest subiect a fost tratat la XI. 3°.a.

c) Acest subiect a fost tratat la XI. 3°.c.

2°. a) În procesul ciocnirii perfect elastice a două particule se conservă impulsul și energia. Considerînd ciocnirea frontală, deci impulsurile inițiale au aceeași direcție și anume direcția care unește centrele particulelor, ecuația conservării impulsului este

$$m_1\vec{v}_1 + m_2\vec{v}_2 = m_1\vec{v}_1' + m_2\vec{v}_2',$$

unde m_1, m_2 sînt masele particulelor, $\vec{v}_1$, $\vec{v}_2$ sînt vitezele particulelor înainte de ciocnire și $\vec{v}_1'$, $\vec{v}_2'$ sînt vitezele particulelor după ciocnire.

Pentru ciocnirea perfect elastică, legea conservării energiei este

$$\frac{m_1v_1^2}{2} + \frac{m_2v_2^2}{2} = \frac{m_1v_1'^2}{2} + \frac{m_2v_2'^2}{2},$$

unde mărimile care intervin au semnificațiile prezentate mai sus.

b) Acest subiect a fost tratat la I. 5°. a.

c) Acest subiect a fost tratat la VIII. 3°. c.

3°. a) În mișcarea oscilatorie armonică, expresia perioadei de oscilație este $T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}$, de unde rezultă $\omega = \sqrt{\frac{k}{m}} = 10^2$ rad/s. Ecuațiile elongației și vitezei în mișcarea oscilatorie armonică sînt:

$$x_1 = A\sin(\omega t_1 + \varphi_0),$$
$$v_1 = \omega A\cos(\omega t_1 + \varphi_0).$$

Ridicînd la pătrat cele două expresii și adunînd membru cu membru, se obține

$$A = \sqrt{x_1^2 + \left(\frac{v_1}{\omega}\right)^2} = 6 \cdot 10^{-2}\ \text{m} = 6\ \text{cm}.$$

b) Viteza este maximă la momentul pentru care $\cos(\omega t + \varphi_0) = 1$, deci $v_{max} = \omega A = 6$ m/s.

c) Energia potențială în momentul în care distanța față de echilibru este $x_2 = 2$ cm este

$$E_p = \frac{kx_2^2}{2} = 0{,}2\ \text{J}.$$

Cum energia totală este $E_{tot} = \frac{kA^2}{2} = 1{,}8$ J, rezultă că energia cinetică în acel moment va fi egală cu $E_c = E_{tot} - E_p = 1{,}8 - 0{,}2 = 1{,}6$ J.

4°. a) Aplicînd legea lui Ohm (Fig. F.B.173) pentru circuitul simplu rezultă $I = \frac{E}{r + R_1 + R_2} = 0{,}25$ A.

b) Inducția cîmpului magnetic în interiorul bobinei va fi

$$B = \mu \frac{NI}{l} = 4 \cdot \pi \cdot 10^{-7} \cdot \frac{10^3 \cdot 0{,}25}{0{,}314} = 10^{-3} \text{ T.}$$

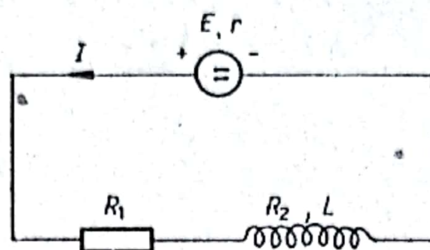


Fig. F.B.173

c) Inductanța bobinei este

$$L = \mu \frac{N^2 S}{l} = 4 \cdot \pi \cdot 10^{-7} \cdot \frac{10^6 \cdot 25 \cdot 10^{-4}}{0{,}314} = 10^{-2} \text{ H.}$$

LVI. 1°. a) Acest subiect a fost tratat la IX. 3°. b.
b) Acest subiect a fost tratat la VIII. 3°. b.
c) Acest subiect a fost tratat la XI. 4°. c.

2°. a) Legea reflexiei. Se consideră o porțiune a frontului de undă plană AA', care se deplasează cu viteza v, pe direcția SI, către suprafața P de separare dintre cele două medii, pe care o atinge la un moment t (fig. F.B.174). Începînd din acest moment, cînd frontul de undă este IA_1, pînă în momentul $t + \Delta t$, de la fiecare punct al frontului de undă care va atinge, succesiv, cîte un punct al suprafeței P, pe porțiunea IB, vor pleca unde elementare, care se vor propaga în mediul din care au venit. Suprafața tangentă fronturilor de undă ale tuturor acestor unde

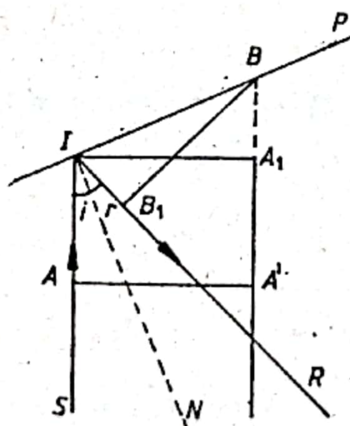


Fig. F.B.174

elementare formează un front de undă, care la momentul $t + \Delta t$ este B_1B, front ce se deplasează pe direcția IR. Se constată că $\triangle IA_1B = \triangle IBB_1$, întrucît au latura IB comună, iar catetele $A_1B = B_1I = v\Delta t$.

Prin urmare $\sphericalangle B_1BI = \sphericalangle A_1IB$, unghiuri care sînt egale cu unghiul r de reflexie, respectiv unghiul i de incidență, ca unghiuri cu laturile perpendiculare. Prin urmare, $i = r$, adică la reflexie, unghiul de reflexie este egal cu unghiul de incidență.

Legea refracţiei. Se consideră o porţiune a frontului de undă plan BB', care se deplasează cu viteza v_1 pe direcţia SI, către suprafaţa P, de separaţie dintre cele două medii, pe care o atinge la momentul t (fig. F.B.175). Începînd din acest moment, cînd frontul de undă este BB_1, pînă în momentul $t + \Delta t$, unda se refractă, deci, succesiv, din toate punctele situate între B şi I, se propagă în mediul

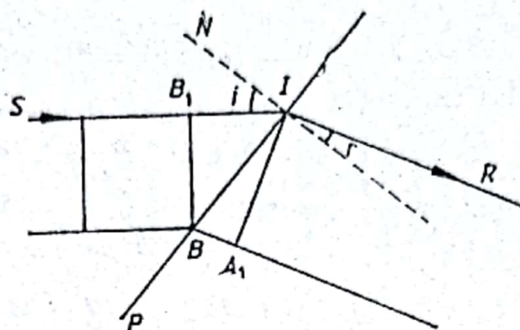


Fig. F.B.175

al doilea unde elementare cu viteza $v_2 \neq v_1$. Suprafaţa tangentă fronturilor de undă ale tuturor acestor unde elementare formează frontul undei refractate, care, la momentul $t + \Delta t$ este A_1I.

Din $\triangle BB_1I$ se deduce că $\sin \widehat{B_1BI} = \frac{B_1I}{BI} = \frac{v_1 \cdot \Delta t}{BI}$, iar din $\triangle BA_1I$ se deduce $\sin \widehat{BIA_1} = \frac{BA_1}{BI} = \frac{v_2 \cdot \Delta t}{BI}$. Făcînd raportul acestor sinusuri, se obţine $\frac{\sin \widehat{B_1BI}}{\sin \widehat{BIA_1}} = \frac{v_1}{v_2}$. Dar $\sphericalangle B_1BI = \sphericalangle i$ (unghiul de incidenţă) şi $\sphericalangle BIA_1 = \sphericalangle r$ (unghiul de refracţie). Prin urmare se obţine legea refracţiei, $\frac{\sin i}{\sin r} = \frac{v_1}{v_2} = n_{21}$. Raportul $\frac{v_1}{v_2} = n_{21}$ se numeşte indicele de refracţie al mediului 2 faţă de mediul 1. Ţinînd seama de faptul că $\lambda_1 = v_1T$ şi $\lambda_2 = v_2T$, acest raport se mai poate scrie $n_{21} = \frac{v_1}{v_2} = \frac{\lambda_1}{\lambda_2}$.

b) Acest subiect a fost tratat la II. 4°. c.

c) Valoarea efectivă a intensităţii curentului alternativ a fost prezentată la XLVI. 2°. c.

Definind valoarea efectivă a tensiunii alternative prin relaţia $U = IR$, rezultă $U = \frac{U_m}{\sqrt{2}} = 0{,}707\ U_m$. Instrumentele de măsură ale intensităţii curentului şi tensiunii alternative indică valori efective ale acestora.

3°. a) Corpul pluteşte cînd mărimea greutăţii lui este egală cu mărimea forţei arhimedice, $G = F_A$, deci $Sh\rho_c g = S\frac{h}{2}\rho_m g$, de unde $\rho_c = \frac{\rho_m}{2} = 6\,800$ kg/m³.

b) Se pune condiţia ca greutatea corpului să fie egală cu suma mărimilor forţelor arhimedice, $G = F_{Am} + F_{Aa}$, deci $Sh\rho_c g = Sx\rho_m g + S(h - x)\rho_a g$ de unde rezultă

$$x = h\frac{\rho_c - \rho_a}{\rho_m - \rho_a} = 4 \cdot 10^{-2} \frac{6\,800 - 1\,000}{13\,600 - 1\,000} = \frac{116}{63} \cdot 10^{-2} = 1{,}84 \cdot 10^{-2}\ \text{m} = 1{,}84\ \text{cm}.$$

c) Masa m_a a apei dislocuită de corp în cazul de la punctul b) este $m_a = S(h - x)\rho_a = h^2(h - x)\rho_a = 16 \cdot 2{,}16 \cdot 10^{-3} = 34{,}56$ g.

4°. a) Intensitatea curentului din circuit este $I = \frac{E}{R + r_i} = \frac{3}{24} = \frac{1}{8} = 0{,}125$ A, iar căderea de tensiune pe rezistor, $U_R = RI = 23 \cdot \frac{1}{8} = 2{,}875$ V.

b) Energia disipată în rezistența R în timp de 8 ore va fi

$$W = RI^2t = 23 \cdot \frac{1}{64} \cdot 8 \cdot 3\,600 = 23 \cdot 450 = 10\,350 \text{ Ws} = 10{,}35 \text{ kJ}.$$

c) Puterea disipată în rezistorul R este $P = RI^2 = R\frac{E^2}{(r_i + R)^2}$. Pentru a determina valoarea lui R pentru care puterea disipată în ea să fie maximă, se pune condiția ca derivata întîi a puterii în funcție de R să fie nulă,

$$\frac{dP}{dR} = \frac{d}{dR}\left[\frac{RE^2}{(r_i + R)^2}\right] = \frac{E^2(r_i + R) - 2RE^2}{(r_i + R)^3} = 0.$$

Rezultă $E^2(r_i + R - 2R) = 0$, de unde $R = r_i$. Deci valoarea rezistenței exterioare circuitului trebuie să fie egală cu rezistența interioară a sursei.

LVII. 1°. a) Acest subiect a fost tratat la XXXII. 4°. b.

b) Impedanța circuitului RLC paralel de curent alternativ a fost prezentată la XXXIII. 4°. c.

Defazajul curent-tensiune pentru un astfel de circuit se exprimă astfel:

$$\operatorname{tg} \varphi = R\left(\frac{1}{L\omega} - C\omega\right),$$

în care φ este unghiul de defazaj între curent și tensiune, R — rezistența, C — capacitatea și L — inductanța circuitului, iar ω — pulsația tensiunii alternative care alimentează circuitul.

c) Pentru ca într-o spiră închisă să nu apară curent electric cînd este deplasată într-un cîmp magnetic uniform, trebuie ca spira să fie astfel deplasată, încît să nu apară un flux magnetic variabil în timp. Cum $\Phi = BS\cos\alpha$ și B este uniform, rezultă că deplasarea trebuie astfel făcută încît să nu varieze în timp nici aria suprafeței spirei, nici unghiul dintre normala la spiră și direcția cîmpului magnetic.

2°. a) Acest subiect a fost tratat la XXXV. 4°. c și IX. 4°. c.

b) Acest subiect a fost tratat la XXVI. 3°. a.

c) Acest subiect a fost tratat la LIII. 1°. b.

3°. a) Aplicînd legile lui Kirchhoff (fig. F.B.25), se obține sistemul de ecuații

$$\begin{cases} E_1 + E_2 = r_1I_1 + (r_2 + R)I_2, \\ E_2 + E_3 = (r_2 + R)I_2 + r_3I_3, \\ I_1 + I_3 = I_2. \end{cases}$$

Din primele două ecuații rezultă $I_1 = I_3$, iar din ultima ecuație $I_2 = 2I_1$. Înlocuind pe $I_2 = 2I_1$ în prima ecuație, rezultă $I_1 = \frac{13{,}5}{203} = 0{,}0665$ A, deci și $I_3 = 0{,}0665$ A, iar $I_2 = 2I_1 = 0{,}133$ A.

b) $U_{AB} = r_1I_1 - E_1 = 0{,}0665 - 9 = -8{,}9335$ V.

c) Puterea disipată în rezistorul R este $P_R = RI_2^2 = 100 \cdot (0{,}133)^2 = 1{,}7689$ W. Puterea totală furnizată de baterii este $P = E_1I_1 + E_2I_2 + E_3I_3 = 1{,}7955$ W.

4°. a) Viteza pătratică medie a moleculelor de gaz $\sqrt{\bar{v}_1^2} = \frac{3RT_1}{\mu}$. Aplicînd ecuaţia termică de stare pentru starea (1) se obţine $p_1V_1 = \nu RT_1$, de unde $RT_1 = \frac{p_1V_1}{\nu}$ şi deci $\sqrt{\bar{v}_1^2} = \frac{3p_1V_1}{\mu\nu} = \frac{3 \cdot 6 \cdot 10^5 \cdot 3 \cdot 10^{-3}}{32 \cdot 0{,}2 \cdot 10^{-3}} = \frac{54}{6{,}4} \cdot 10^5 = 8{,}4375 \cdot 10^5 \ \frac{m^2}{s^2}$.

b) În transformarea izocoră $L_{izoc} = 0$. În transformarea izobară $L_{izob} = p_2(V_2 - V_3) = 3 \cdot 10^5 \cdot (6 \cdot 10^{-3} - 3 \cdot 10^{-3}) = 3 \cdot 10^5 \cdot 3 \cdot 10^{-3} = 9 \cdot 10^2 = 900$ J.

c) $T_2 = T_1 \frac{p_2}{p_1} = \frac{T_1}{2}$, prin urmare randamentul ciclului Carnot

$$\eta_c = 1 - \frac{T_2}{T_1} = 1 - \frac{T_1}{2T_1} = 0{,}5 \text{ sau } \eta_c = 50\%.$$

LVIII. 1°. a) Asupra fiecărui balon (Fig. F.B.176) acţionează forţele de rezistenţă egale, proporţionale cu viteza, $F_{r_1} = F_{r_2} = F_r = kv$ şi forţele arhimedice egale, $F_{A_1} = F_{A_2} = F_A = m'g$, unde $m'g$ este greutatea volumului de aer dislocuit de un balon, deci $F_A = V\rho g = 13$ N.

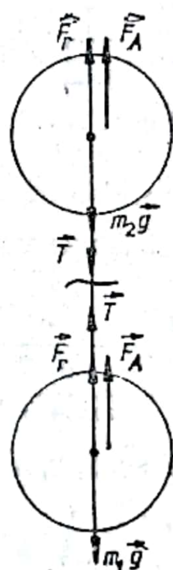


Fig. F.B.176

Aplicînd legea a doua a lui Newton la mişcarea celor două baloane, se obţin ecuaţiile mişcării,

$$m_1a = m_1g - kv - F_A - T,$$
$$m_2a = m_2g - kv - F_A + T.$$

În vecinătatea Pămîntului, $a = 0$ şi viteza tinde către o valoare limită $v = v_{lim}$, deci

$$m_1g - kv_{lim} - F_A - T = 0,$$
$$m_2g - kv_{lim} - F_A + T = 0.$$

Din aceste ecuaţii rezultă $T = \frac{m_1 - m_2}{2} \cdot g = 10$ N.

b) Din aceleaşi ecuaţii de mai sus se poate determina $kv_{lim} = \frac{m_1 + m_2}{2} \cdot g - F_A$. Aplicînd legea a doua a lui Newton mişcării primului balon, imediat după ciocnire, se obţine $m_1a' = F_A - m_1g - kv_{lim}$, de unde se determină acceleraţia

$$a' = \frac{V\rho g}{m_1} - g - \frac{m_1 + m_2}{2m_1} + \frac{V\rho g}{m_1} = -15 \text{ m/s}^2.$$

2°. a) În poziția de echilibru $mg = k \cdot \Delta l_0$, de unde rezultă $\Delta l_0 = \frac{l}{k} mg = 5$ cm (fig. F.B.177).

Amplitudinea A a oscilațiilor este $A = y_0 - \Delta l_0 = 5$ cm.

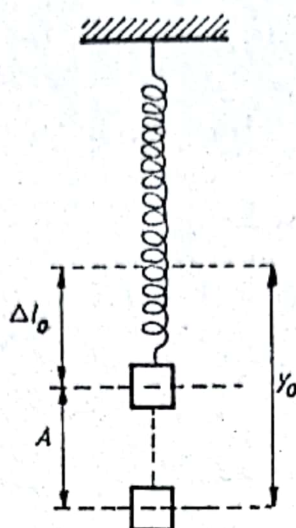


Fig. F.B.177

b) Aplicînd legea conservării impulsului, rezultă $m'v_0 = (m + m')v$, de unde se deduce $v = \frac{m'}{m+m'} v_0 = 0{,}8$ m/s. Din legea conservării energiei, $\frac{kA^2}{2} + \frac{(m+m')v^2}{2} = \frac{kA'^2}{2}$, se poate calcula amplitudinea A',

$$A' = \sqrt{A^2 + \frac{m'^2 v_0^2}{k(m+m')}} = 11 \text{ cm}.$$

Același rezultat se obține dacă se aplică varianta cinematică. Noua valoare a pulsației mișcării oscilatorii este $\omega' = \sqrt{\frac{k}{m+m'}}$, iar ecuația elongației și ecuația vitezei sînt $y = A' \sin(\omega' t + \varphi)$ și $v = A'\omega' \cos(\omega' t + \varphi)$.

Din aceste ecuații se deduce că $\frac{y^2}{A'^2} + \frac{v^2}{A'^2\omega'^2} = 1$, din care, pentru $y = A$, se determină amplitudinea $A' = \sqrt{A^2 + \frac{v^2}{\omega'^2}} = 11$ cm.

c) $Q = \frac{kA'^2}{2} = 60{,}5 \cdot 10^{-3}$ J.

3°. a) Se știe că randamentul unei mașini termice $\eta = 1 - \frac{|Q_2|}{Q_1}$, unde Q_1 este căldura primită, în cazul problemei, în procesul izobar și $|Q_2|$ căldura cedată, în cazul problemei, în procesul izoterm.

Căldura Q_1 primită de motor (fig. F.B.26) în procesul izobar $Q_1 = \nu C_p(T_2 - T_1) = \nu C_p T_1(e - 1)$, iar căldura cedată de motor în procesul izoterm va fi $|Q_2| = \nu R T_1 \ln \frac{V_3}{V_1}$. Din legea transformărilor izobare $\frac{V_1}{T_1} = \frac{V_2}{T_2} = \frac{V_2}{eT_1}$, se determină $V_2 = eV_1$. Aplicînd ecuația lui Poisson, a transformării adiabatice, $T_2V_2^{\gamma-1} = T_3V_3^{\gamma-1} = T_1V_3^{\gamma-1}$, de unde rezultă $eV_2^{\gamma-1} = V_3^{\gamma-1}$. Înlocuind în această relație pe V_2 cu eV_1, se obține $e^\gamma \cdot V_1^{\gamma-1} = V_3^{\gamma-1}$, deci $e^\gamma = \left(\frac{V_3}{V_1}\right)^{\gamma-1}$, de unde, prin logaritmare, se determină $\ln \frac{V_3}{V_1} = \frac{\gamma}{\gamma - 1}$.

Din relația Robert-Mayer, $C_p = C_V + R$ și $\gamma = \frac{C_p}{C_V}$ se determină $C_p = \frac{R\gamma}{\gamma - 1}$. Înlocuind aceste rezultate în expresiile lui Q_1 și $|Q_2|$ se obține $Q_1 = \frac{\nu R\gamma}{\gamma - 1} T_1(e - 1)$ și $|Q_2| = \nu R T_1 \cdot \frac{\gamma}{\gamma - 1}$ și randamentul motorului $\eta = 1 - \frac{1}{e - 1} = 0{,}42 = 42\%$.

b) Randamentul ciclului Carnot care ar funcționa între temperaturile extreme ale ciclului,

$$\eta_{Carnot} = \frac{T_{max} - T_{min}}{T_{max}} = \frac{T_2 - T_1}{T_2} = \frac{e - 1}{e} = 0{,}631 = 63{,}1\%.$$

4°. a) Acest subiect a fost tratat la XLVI.1°.a.

b) Ecuația Clapeyron-Mendeleev reprezintă dependența dintre parametrii de stare ai unui gaz ideal, aflat într-o stare de echilibru. Pentru a obține această ecuație considerăm două stări de echilibru (fig. F.B.178) ale unui gaz ideal de masă m caracterizate de parametrii: $1(p_0, V_0, T_0)$ și $2(p, V, T)$. Se poate ajunge de la

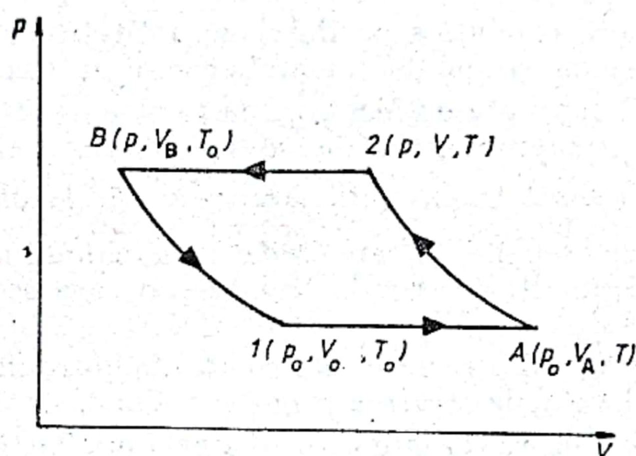


Fig. F.B.178

starea 1 la starea 2 printr-o succesiune de două transformări simple oarecare, de exemplu o izobară de presiune p_0, pînă în starea intermediară A (p_0, V_A, T) și o izotermă de temperatură T pînă în starea 2. Ecuațiile celor două transformări sînt $\frac{V_0}{T_0} = \frac{V_A}{T}$ și $p_0V_A = pV$. Eliminînd pe V_A între cele două relații se obține $\frac{pV}{T} = \frac{p_0V_0}{T_0} = \text{const}$, dacă $m = \text{const}$. Se obține aceeași relație între parametrii stării 1 și ai stării 2, dacă se ajunge de la starea 1 la 2 prin starea intermediară $B(p, V_B, T_0)$, printr-o transformare izotermă de temperatură T_0 și apoi o transformare izobară de presiune p. Ecuațiile acestor două transformări sînt $p_0V_0 = pV_B$ și $\frac{V_B}{T_0} = \frac{V}{T}$ și, eliminîndu-l pe V_B între aceste ecuații se obține relația $\frac{pV}{T} = \frac{p_0V_0}{T_0} = \text{const}$, dacă $m = \text{const}$.

Pentru un mol de gaz ideal care suferă o transformare oarecare din starea 1, stare în care gazul se află în condiții normale de presiune și temperatură ($p_0 = 1$ atm, $T_0 = 273{,}15$ K, $V_{\mu_0} = 22{,}42 \cdot 10^{-3}$ m³/mol), în starea 2 caracterizată prin parametrii p, V_μ, T, relația de mai sus devine $\frac{pV_\mu}{T} = \frac{p_0V_{\mu_0}}{T_0}$. Membrul drept al acestei relații, care nu depinde de natura gazului, este o constantă, se notează cu R și se numește constanta universală a gazelor. Ținînd seama că 1 atm $=$ $= 101\,325$ N/m² și înlocuind pe p_0, V_{μ_0} și T_0 se obține $R = 8{,}3143 \cdot 10^3$ J/kmol · K.

Utilizînd pe R, relația devine $pV_\mu = RT$, care este ecuația Clapeyron-Mendeleev pentru un mol de gaz ideal.

Pentru o masă m de gaz ideal, de masă molară μ, numărul de moli va fi $\nu = \frac{m}{\mu}$, iar relația devine $pV = \nu RT$, care este ecuația Clapeyron-Mendeleev pentru o masă m de gaz, sau ecuația termică de stare a gazului ideal.

c) La definirea modelului gazului ideal, forțele intermoleculare se neglijează și se consideră că moleculele se mișcă liber. Prin urmare, energia potențială datorată interacțiunilor dintre molecule se poate neglija. Contribuția mișcărilor de translație dezordonate a moleculelor la energia internă a gazului ideal se poate evalua pornind de la expresia energiei cinetice medii a unei molecule din teoria cinetico-moleculară a gazelor, $\varepsilon_t = \frac{3}{2}kT$, unde k este constanta lui Boltzmann. Dar într-o cantitate de ν kilomoli de gaz există νN_A molecule (N_A este numărul lui Avogadro), prin urmare energia internă a gazului ideal este $U = \nu N_A \cdot \varepsilon_t = \nu \frac{3}{2} kN_A T = \frac{3}{2} \nu RT$. Rezultă deci că energia internă a unui gaz ideal este proporțională cu temperatura absolută a gazului și cu cantitatea de gaz; energia internă nu depinde nici de presiune și nici de volumul ocupat de gaz.

5°. a) Unda staționară este un fenomen particular de interferență a undelor. Unda staționară apare la suprapunerea a două unde de lungimi de undă egale, care se propagă în sensuri opuse. Unda staționară prezintă, la distanțe egale cu $\frac{\lambda}{2}$, locuri, numite noduri de oscilație, în care oscilațiile au amplitudinea zero, și locuri, situate între noduri și numite ventre de oscilație, în care oscilațiile au amplitudinea maximă.

Faza mișcării oscilatorii armonice este constantă între două noduri consecutive și are un salt egal cu π, la trecerea prin fiecare nod.

b) Din familia de izocore (drepte care trec prin origine, în planul p, T) reținem izocorele tangente la cerc, celelalte, care intersectează ciclul, fiind situate între acestea (fig. F.B.179). Ecuația unei astfel de izocore este $p = aT$, unde a

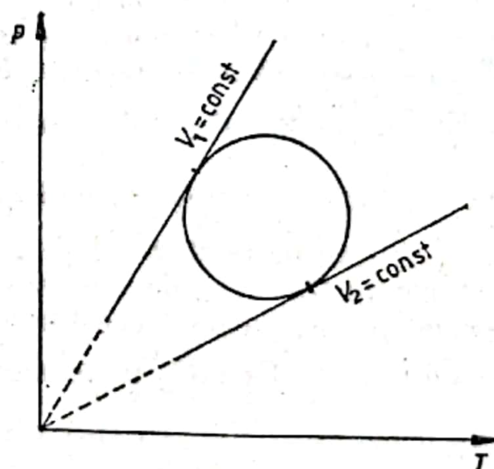


Fig. F.B.179

este panta dreptei. Aplicînd unui punct oarecare al ciclului ecuația termică de stare $pV = \nu RT$ și înlocuind presiunea p cu aT, rezultă $V = \frac{\nu R}{a}$. Prin urmare, volumul este maxim în punctul ciclului pentru care panta a a izocorei este minimă, și minim în punctul ciclului pentru care panta a este maximă. Rezultă deci că $V_1 = V_{min}$ și $V_2 = V_{max}$.

c) La echilibru (fig. F.B.180) presiunea p în punctul A imediat sub menisc este determinată de presiunea atmosferică p_0 și presiunea p_σ datorată forței de tensiune superficială, $p = p_0 - p_\sigma$.

Scriind egalitatea presiunilor la nivelul punctului B, rezultă $p_0 = p_0 + \rho gh - p_\sigma$, de unde se obține $p_\sigma = \rho gh$. Prin urmare, $p = p_0 - \rho gh$.

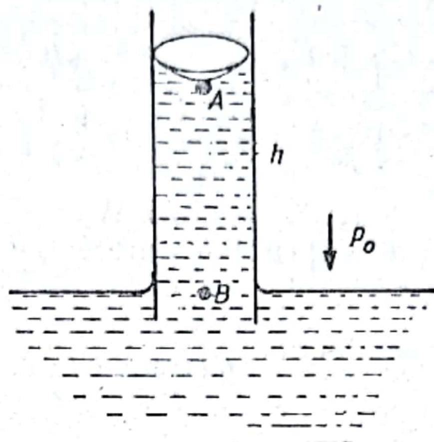


Fig. F.B.180

LIX. 1°. a) Asupra barei acționează (fig. F.B.181) greutatea proprie $\vec{G}$, forța de frecare $\vec{F}_f$ și forța electromagnetică $\vec{F} = I(\vec{l} \times \vec{B})$. Mărimea forței electromagnetice $F = BIl \sin(\vec{l}, \vec{B}) = BIl$, în care $I = \frac{e}{R}$ este intensitatea curentului indus în circuitul închis, iar e este tensiunea electromotoare de inducție,

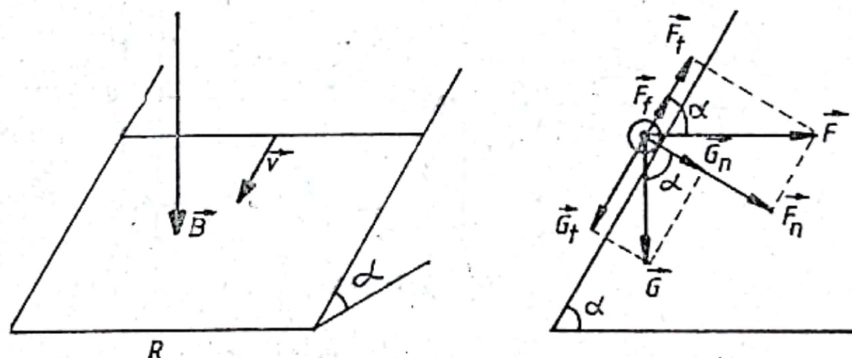


Fig. F.B.181

$e = Blv \sin(\vec{v}, \vec{B}) = Blv \sin\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = Blv \cos\alpha$. Rezultă $F = BIl = B \cdot \frac{Blv\cos\alpha}{R} \cdot l = \frac{B^2l^2v\cos\alpha}{R}$, de unde se deduce $B^2 = \frac{FR}{l^2v\cos\alpha}$. Componentele forțelor $\vec{G}$ și $\vec{F}$ pe direcția paralelă cu planul înclinat și pe o direcție perpendiculară pe acesta sînt: $G_n = G\cos\alpha$, $G_t = G\sin\alpha$, $F_n = F\cos\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = F\sin\alpha$; $F_t = F\sin\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = F\cos\alpha$. Mișcarea barei făcîndu-se cu viteza $\vec{v}$ constantă, rezultanta forțelor pe direcția de mișcare este nulă, $G_t - F_f - F_t = 0$. Forța de frecare $F_f = \mu(G_n + F_n) = \mu(G\cos\alpha + F\sin\alpha)$. Deci $G\sin\alpha - \mu(G\cos\alpha + F\sin\alpha) - F\cos\alpha = 0$ și cum $\mu = \operatorname{tg}\varphi$, se deduce $F = \frac{G(\sin\alpha - \operatorname{tg}\varphi\cos\alpha)}{\operatorname{tg}\varphi\sin\alpha + \cos\alpha} = G\operatorname{tg}(\alpha - \varphi)$. Prin urmare, $B^2 = \frac{G\operatorname{tg}(\alpha-\varphi)R}{l^2v\cos\alpha} = \frac{50\cdot10^{-3}\cdot10\cdot\operatorname{tg}(60-15)\cdot0{,}1}{(10\cdot10^{-2})^2\cdot10\cdot\cos60} = 1$, adică $B = 1$ T.

b) Puterea calorică totală degajată $P = P_R + P_f$, unde P_R este puterea electrică disipată în rezistorul R, iar P_f este puterea disipată prin frecare,

$$P_R = RI^2 = \frac{e^2}{R} = \frac{(Blv\cos\alpha)^2}{R} = \frac{\left(1\cdot 10\cdot 10^{-2}\cdot 10\cdot \frac{1}{2}\right)^2}{0{,}1} = 2{,}5 \text{ W},$$

$$P_f = F_f v = \mu(G_n + F_n)v = mgv \operatorname{tg}\varphi(\cos\alpha + \sin\alpha) =$$

$$= 50\cdot 10^{-3}\cdot 10\cdot 10\cdot \frac{0{,}73}{2{,}73}\left(\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}\right) = 1{,}825 \text{ W}.$$

Prin urmare, $P = 2{,}5 + 1{,}825 = 4{,}325$ W.

Aceeași valoare se obține exprimînd puterea ca variație a energiei potențiale în unitatea de timp,

$$P = \frac{W_p}{t} = \frac{mgh}{t} = \frac{mgl\sin\alpha}{t} = mgv\sin\alpha = 2{,}5\cdot\sqrt{3} = 4{,}325 \text{ W}.$$

2°. a) În figura F.B.182 se prezintă construcția imaginii discului solar prin lentilă. Se constată că diametrul d al acestei imagini se poate exprima astfel: $\frac{d}{2} = f\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}$ și cum unghiul α este foarte mic, se poate face aproximația $\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2} \simeq \frac{\alpha}{2}$, cu α exprimat în radiani. Deci $d = 2f\frac{\alpha}{2} = f\alpha = 1\cdot\frac{2\pi}{360}\cdot\frac{1}{2} = 8{,}72\cdot 10^{-3}$ m.

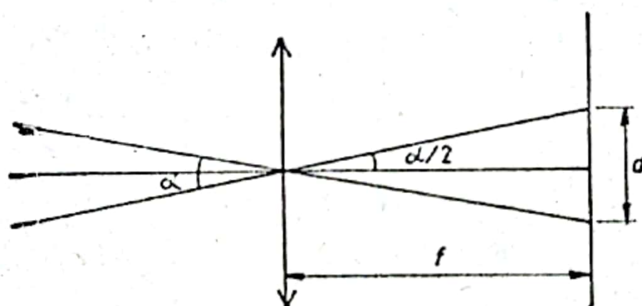


Fig. F.B.182

Iluminările în cele două situații, $E = \frac{\Phi}{S} = \frac{\Phi}{\frac{\pi D^2}{4}}$, respectiv $E' = \frac{\Phi}{\frac{\pi d^2}{4}}$, prin urmare raportul lor $\frac{E'}{E} = \frac{D^2}{d^2} = 21$.

b) Din condiția de obținere a aceleiași iluminări, $E'' = E$, rezultă $\frac{\Phi}{\frac{\pi x^2}{4}} = \frac{\Phi}{\frac{\pi d^2}{4}}$, deci $x = d = 8{,}72\cdot 10^{-3}$ m.

3°. a) Energia de excitare $E_{1,2} = eU_e$ necesară tranziției electronului orbital de pe nivelul fundamental, pentru care numărul cuantic este egal cu 1, pe nivelul cu număr cuantic egal cu 2, va fi $E_{1,2} = Rhc\left(\frac{1}{n^2} - \frac{1}{m^2}\right)$, în care R este constanta lui Rydberg, h constanta lui Planck și c, viteza luminii în vid. Făcînd substituțiile $n = 1$, $m = 2$, rezultă $E_{1,2} = Rhc\left(1 - \frac{1}{4}\right) = \frac{3}{4}Rhc$. Dar energia de ionizare a atomului, care corespunde excitării de pe nivelul fundamental pe

nivelul cu număr cuantic $m = \infty$, este $E_{ion} = Rhc$, prin urmare $E_{1,2} = \frac{3}{4} E_{ion}$ și deci $E_{ion} = \frac{4}{3} eU_e = 13,6$ eV.

b) Notînd cu m_p, m_H masele protonului, respectiv atomului de hidrogen și cu v_p, v'_p, v_H vitezele corespunzătoare, se scriu legile conservării energiei, respectiv a conservării impulsului, $\frac{m_p v_p^2}{2} = \frac{m_p v_p'^2}{2} + \frac{m_H v_H^2}{2} + E_{1,2}$, $m_p v_p = m_p v'_p + m_H v_H$ și, cum $m_p \simeq m_H$ și $v'_p \simeq v_H$, rezultă $m_p v_p \simeq m_p \cdot 2v'_p$ și deci $v'_p = \frac{1}{2} v_p$. Prin urmare, $\frac{m_p v_p^2}{2} = \frac{m_p}{2} \frac{v_p^2}{4} + \frac{m_p}{2} \frac{v_p^2}{4} + E_{1,2}$, de unde se deduce $\frac{m_p v_p^2}{2} = eU_p = 2E_{1,2}$ și se obține $U_p = 2U_e = 2 \cdot 10,2 = 20,4$ V.

4°. a) $\eta = \frac{W_u}{W_c}$, unde energia utilă W_u este energia condensatorului, iar energia consumată W_c este energia cheltuită de sursă pentru încărcarea condensatorului; $W_u = \frac{1}{2} QU$ și $W_c = QE$. După încărcarea condensatorului $U = E$ și deci

$$\eta = \frac{\frac{1}{2} QE}{QE} = \frac{1}{2} \text{ sau } \eta = 50\%.$$

b) Se scrie formula lentilelor, pentru imaginea prin lentilă, $\frac{1}{x_2} - \frac{1}{x_1} = \frac{1}{f_l}$ și formula oglinzilor pentru imaginea în oglindă, $\frac{1}{x'_2} + \frac{1}{x''_2} = \frac{1}{f_0}$ și, pentru imaginea finală, $-\frac{1}{x_2} + \frac{1}{x''_2} = \frac{1}{f_l}$. Din aceste trei relații rezultă $\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} = \frac{1}{f_0} - \frac{2}{f_l}$, deci oglinda echivalentă are distanța focală $f = \frac{f_0 f_l}{f_l - 2f_0}$.

c) În modelul planetar al atomului o orbită circulară este stabilă, dacă este îndeplinită condiția ca forța centripetă să fie egală cu forța electrostatică, $\frac{mv^2}{r} = \frac{e^2}{4\pi\varepsilon_0 r^2}$, unde m este masa electronului și r, raza orbitei sale. Se deduce deci că energia cinetică a electronului este $E_{cin} = \frac{e^2}{8\pi\varepsilon_0 r}$. Cum energia potențială a electronului este $E_{pot} = -\frac{e^2}{4\pi\varepsilon_0 r}$, se determină energia totală $E_t = E_{cin} + E_{pot} = -\frac{1}{8\pi\varepsilon_0} \cdot \frac{e^2}{r}$. Rezultă deci că relația dintre energia totală și energia potențială a electronului într-un atom hidrogenoid după modelul lui Bohr este $E_{pot} = 2E_t$.

5°. a) Este prezentată în figura F.B.183.

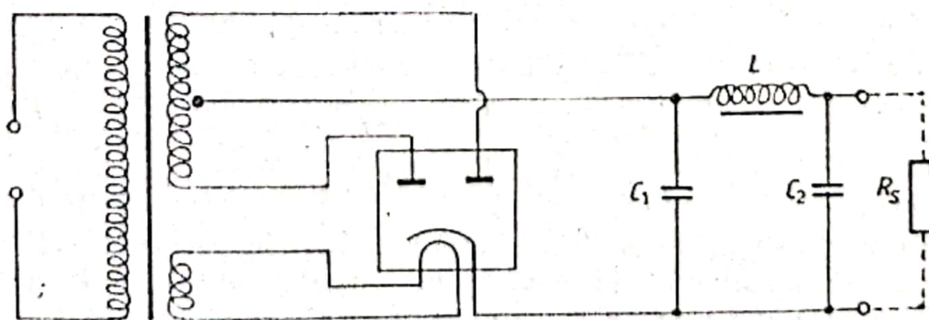


Fig. F.B.183

b) Unghiul de incidență Brewster este dat de legea: $\operatorname{tg} i_B = \frac{n_2}{n_1}$. Notăm cu α unghiul dintre raza reflectată și raza refractată (fig. F.B.184). Legea refracției se scrie: $n_1 \sin i_B = n_2 \sin r$. Din figură se constată că $\alpha = \pi - (i_B + r)$, deci $\sin \alpha = \sin(i_B + r) = \sin i_B \cos r + \cos i_B \sin r$.

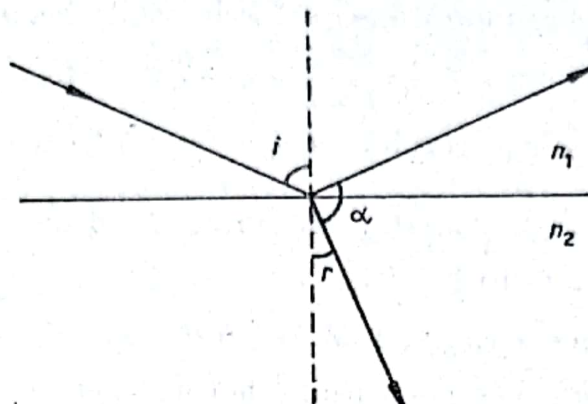


Fig. F.B.184

Se exprimă $\sin i_B$ și $\cos i_B$ în funcție de $\operatorname{tg} i_B$ și deci de $\frac{n_2}{n_1}$, se deduce $\sin r$ și $\cos r$ utilizînd legea refracției și se exprimă tot în funcție de n_2 și n_1, astfel se ajunge la relația $\sin \alpha = 1$, de unde rezultă $\alpha = \frac{\pi}{2}$.

c) Dacă ar apărea un singur foton, nu ar putea fi simultan satisfăcute legile de conservare a impulsului și energiei.

LX. 1°. a) Înălțimea h la care se ridică lichidul în tubul capilar este dată de legea lui Jurin, $h = \frac{2\sigma}{r\rho g}$, unde σ este coeficientul de tensiune superficială a lichidului, r este raza tubului capilar, ρ este densitatea lichidului și g, accelerația gravitațională. Din această lege rezultă densitatea lichidului,

$$\rho = \frac{2\sigma}{rgh} = \frac{2 \cdot 0{,}0245}{0{,}25 \cdot 10^{-3} \cdot 9{,}80 \cdot 2{,}5 \cdot 10^{-2}} = 800 \text{ kg/m}^3.$$

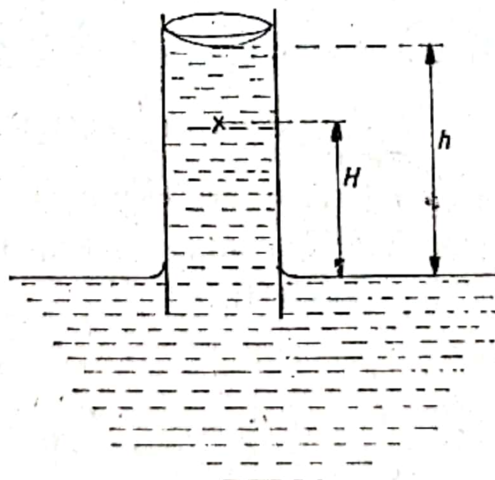


Fig. F.B.185

b) Se pune condiția de egalitate a presiunilor la același nivel, la echilibrul unui lichid. Astfel la nivelul lichidului din vasul mare (fig. F.B.185), rezultă $p_0 + \rho g h - p_\sigma = p_0$, unde p_σ este presiunea datorată forțelor de tensiune superficială. Din relație rezultă că această presiune este $p_\sigma = \rho g h$. Punînd aceeași

condiţie a egalităţii presiunilor la nivelul H în tubul capilar, se obţine $p_0+\rho g(h-H)-p_\sigma=p_H$, de unde rezultă $p_0+\rho gh-\rho gH-p_\sigma=p_H$ şi deci $p_H=p_0-\rho gH=10^5-800\cdot 9{,}8\cdot 10^{-2}=99\,921{,}6$ N/m².

2°. a) Poziţia iniţială a spirei fiind paralelă cu liniile cîmpului magnetic (fig. F.B.186), rezultă că unghiul α dintre normala $\vec{n}$ la spiră şi liniile cîmpului magnetic este egal cu $\frac{\pi}{2}$. Cum fluxul $\Phi=BS\cos\alpha$, se deduce că fluxul prin spiră în poziţia iniţială este nul.

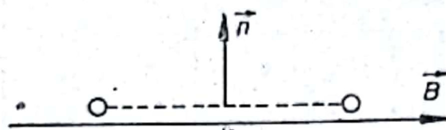


Fig. F.B.186

b) Dacă spira se roteşte cu un unghi α în jurul unui diametru perpendicular pe liniile de cîmp magnetic (fig. F.B.187 şi fig. F.B.188), în spira închisă va apărea un curent electric care va avea sensul indicat în figurile respective. Sensul curentului indus este dat de regula lui Lenz: tensiunea electromotoare indusă şi curentul indus au un astfel de sens, încît fluxul magnetic produs de curentul indus să se opună variaţiei fluxului magnetic inductor.

Sensul inducţiei magnetice induse $\vec{B}_{indus}$, este dat de regula burghiului drept şi anume, este acelaşi cu sensul de înaintare al burghiului drept cînd acesta este rotit în sensul în care circulă curentul electric indus prin spiră.

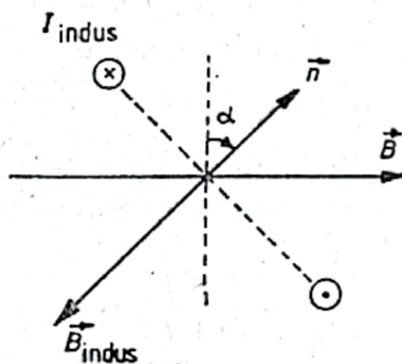


Fig. F.B.187

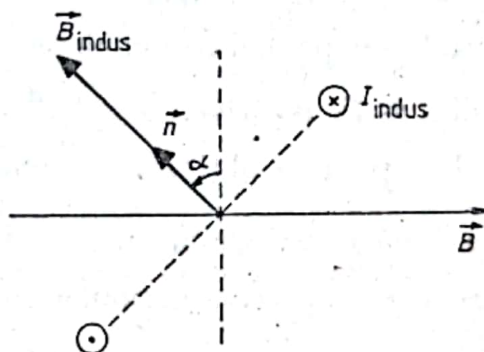


Fig. F.B.188

c) La rotirea spirei cu unghiul $\alpha=60°$, printr-o secţiune a spirei în timpul Δt va trece o sarcină electrică $q=i\Delta t=\frac{e}{R}\Delta t$, unde e este tensiunea electromotoare indusă, care, în conformitate cu legea lui Faraday, este $e=-\frac{\Delta\Phi}{\Delta t}$. Variaţia fluxului $\Delta\Phi=\Phi_{final}-\Phi_{iniţial}$, în care $\Phi_{iniţial}$ (fluxul pentru $\alpha=0$) este nul, iar Φ_{final} (cînd $\alpha=60°$) va fi: $\Phi_{1\,final}=BS\cos\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)=BS\sin\alpha$, pentru cazul 1 (fig. F.B.187), respectiv $\Phi_{2\,final}=BS\cos\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right)=-BS\sin\alpha$, pentru cazul 2 (fig. F.B.188). Prin urmare, în ambele cazuri,

$$|q|=\frac{BS\sin\alpha}{R\Delta t}\cdot\Delta t=\frac{BS\sin\alpha}{R}=\frac{2\cdot 10^{-3}\cdot 400\cdot 10^{-4}\cdot\pi\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}}{0{,}04}=\sqrt{3}\cdot\pi\cdot 10^{-3}\ \text{C}.$$

3°. a) Se formează imagini reale, răsturnate, una mai mare și cealaltă mai mică decît obiectul. Imaginile sînt reale pentru că lentila se află între obiect și imagine și deci imaginile sînt formate de razele care vin de la obiect. Pentru a determina pozițiile lentilei care dau imagine clară pe ecran se aplică, pentru una dintre cele două poziții ale lentilei (fig. F.B.189), formula lentilelor, $\frac{1}{x_2} - \frac{1}{x_1} = \frac{1}{f}$ și se ține seama de relația $x_2 + (-x_1) = d$. Eliminînd de exemplu pe x_2 între cele

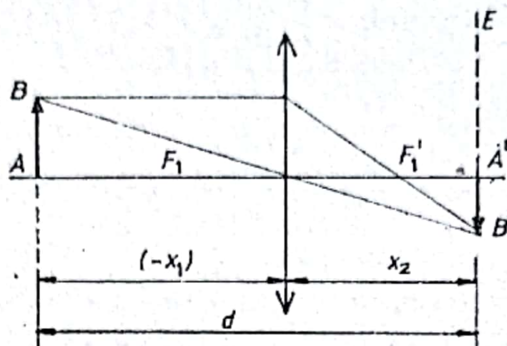


Fig. F.B.189

două relații, se obține ecuația de gradul al doilea, $x_1^2 + dx_1 + fd = 0$. Rezolvînd ecuația se obține $(x_1)_1 = \frac{-d + \sqrt{d^2 - 4fd}}{2}$ și $(x_1)_2 = \frac{-d - \sqrt{d^2 - 4fd}}{2}$. Întrucît $(x_1)_1$ și $(x_1)_2$ sînt distanțe de la obiect la lentilă, rezultă că $\frac{-d + \sqrt{d^2 - 4fd}}{2} < 0$ și $\frac{-d - \sqrt{d^2 - 4fd}}{2} < 0$. Întrucît $x_2 + (-x_1) = d$, se obțin cu ușurință și valorile corespunzătoare pentru cele două distanțe x_2 de la lentilă la imagine, distanțe care trebuie deci să fie pozitive, $(x_2)_1 = \frac{d + \sqrt{d^2 - 4fd}}{2} > 0$ și $(x_2)_2 = \frac{d - \sqrt{d^2 - 4fd}}{2} > 0$.

b) Pentru a se obține două imagini reale și distincte se pune condiția ca $\Delta = d^2 - 4fd > 0$, deci $d > 4f$. Pentru cazul $d = 4f$ se obțin imagini reale și egale, deci cele două imagini coincid.

c) Se cere raportul mărimilor imaginilor $\beta = \frac{|I_1|}{|I_2|} = \frac{|A'B'|}{|A''B''|}$.

Din figura F.B.189 rezultă $\frac{|A'B'|}{AB} = \frac{(x_2)_1}{(-x_1)_1}$ și, analog, $\frac{|A''B''|}{AB} = \frac{(x_2)_2}{(-x_1)_2}$, prin urmare raportul $\beta = \frac{|A'B'|}{|A''B''|} = \frac{(x_2)_1}{(-x_1)_1} \cdot \frac{(-x_1)_2}{(x_2)_2} = \frac{(d + \sqrt{d^2 - 4fd})^2}{(d - \sqrt{d^2 - 4fd})^2}$. Pentru valorile $d = 40$ cm și $f = 10$ cm, imaginile coincid $(\sqrt{d^2 - 4fd} = 0)$, deci raportul imaginilor $\beta = \frac{|A'B'|}{|A''L''|} = 1$.

4°. a) Scriind legile electrolizei, $m = KIt$ și $K = \frac{1}{F} \cdot \frac{A}{n}$, rezultă $m = \frac{1}{F} \frac{A}{n} It = \frac{1}{96\,400} \cdot \frac{108}{1} \cdot 1 \cdot 3\,600 = 4{,}03$ g $= 4{,}03 \cdot 10^{-3}$ Kg.

b) Pentru determinarea numărului de molecule se pornește de la ecuația termică de stare, scrisă sub forma $p_0 = nkT_0$, unde p_0 și T_0 sînt presiunea și temperatura în condiții normale, $n = \frac{N}{V}$ este numărul de molecule din unitatea de volum, iar $k = 1{,}38 \cdot 10^{-23}$ J/K este constanta lui Boltzmann.

Rezultă $N = \frac{p_0 V}{kT_0} = \frac{101\,325 \cdot 10^{-6}}{1{,}38054 \cdot 10^{-23} \cdot 273{,}15} = 2{,}687 \cdot 10^{19}$ molecule. Pentru determinarea masei volumului de gaz se pornește de la expresia numărului ν de kilomoli, $\nu = \frac{m}{\mu} = \frac{N}{N_A}$, de unde $m = \mu \frac{N}{N_A} = 2 \cdot \frac{2{,}687 \cdot 10^{19}}{6{,}023 \cdot 10^{26}} = 8{,}92 \cdot 10^{-8}$ kg. Atît numărul de molecule, cît și masa volumului de gaz pot fi determinate și în alte moduri.

c) Din expresia diferenței de drum pentru razele difractate care dau maxim de ordinul k, $l \sin\alpha = k\lambda$, rezultă $l = \frac{2\lambda}{\sin\alpha} = \frac{2 \cdot 500 \cdot 10^{-9}}{0{,}2} = 5 \cdot 10^{-6}$ m.

5°. Acest subiect a fost tratat la XXVII. 5°.b

LXI. 1°. a) Se rezolvă circuitul (fig. F.B.27) și se determină intensitatea I a curentului prin rezistența X, în funcție de valorile acesteia. În acest scop se determină mai întîi intensitatea I_1 a curentului care străbate rezistențele r și R_1, legate în serie, aplicînd legea lui Ohm,

$$I_1 = \frac{E}{r + R_1 + \frac{R_2 X}{R_2 + X}} = \frac{3(20 + X)}{10 + X}.$$

Cunoscînd pe I_1, se poate determina tensiunea U la bornele rezistenței X,

$$U = E - (r + r_1)I_1 = \frac{60X}{10 + X}.$$

Prin urmare, intensitatea I va fi

$$I = \frac{U}{X} = \frac{60}{10 + X}.$$

Pe de altă parte, cunoscînd puterea P disipată pe rezistența X, intensitatea I a curentului prin rezistența X se poate exprima și astfel:

$$I = \frac{P}{U} = \frac{4(10 + X)}{3X}.$$

Egalînd expresiile obținute în cele două moduri pentru intensitatea I a curentului prin rezistența X și rezolvînd ecuația de gradul II astfel formată se obțin valorile lui X pentru care puterea disipată pe X să fie de 80 W și anume, $X_1 = 20\ \Omega$ și $X_2 = 5\ \Omega$.

b) Puterea dezvoltată de sursă este $P = \frac{E^2}{R_t}$, unde R_t este rezistența totală a circuitului. Calculînd R_{t_1}, cînd X este înlocuit cu X_1, respectiv R_{t_2}, cînd X este înlocuit cu X_2, se constată că $R_{t_1} = 30\ \Omega$ este mai mare decît $R_{t_2} = 24\ \Omega$, deci puterea $P_1 = \frac{E^2}{R_{t_1}} = 480$ W, dezvoltată de sursă în primul caz, este mai mică decît puterea $P_2 = \frac{E^2}{R_{t_2}} = 600$ W dezvoltată de sursă în cazul al doilea.

2°. a) Se știe că energia internă a unei mase m de gaz ideal aflat la temperatura T este $U = \frac{3}{2} \nu RT$. Variația energiei interne în procesul izoterm se datorește numai variației numărului de kilomoli de gaz care ies din vas în timpul Δt. În starea inițială, energia internă a gazului este $U_1 = \frac{3}{2} \frac{m}{\mu} RT$, iar după timpul Δt, energia internă devine $U_2 = \frac{3}{2} \frac{m'}{\mu} RT$. Prin urmare, variația energiei interne $\Delta U = U_1 - U_2 = \frac{3}{2} \frac{\Delta m}{\mu} RT$.

Întrucit temperatura T nu este cunoscută, din ecuația termică de stare pentru momentul inițial $pV = \frac{m}{\mu} RT$ rezultă $\frac{1}{\mu} RT = \frac{1}{m} pV$, prin urmare $\Delta U = \frac{3}{2} \frac{Q\Delta t}{m} pV \simeq 831$ J.

b) Din ecuația termică de stare, $pV = \frac{m}{\mu} RT$, rezultă $T = \frac{\mu pV}{mR} = 296{,}2$ K.

3°. Scriind formula lentilelor subțiri, respectiv a oglinzilor concave pentru stratul de apă și oglindă considerate separat, precum și pentru sistemul format în condițiile date, se obține:

$$\frac{1}{x_2} - \frac{1}{x_1} = (n-1)\left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2}\right) = (n-1)\frac{1}{R}, \text{ întrucit } R_1 = \infty \text{ și } R_2 = -R,$$

$$\frac{1}{x_2'} + \frac{1}{x_1'} = -\frac{2}{R},$$

$$\frac{1}{x_2''} - \frac{1}{x_1''} = (n-1)\frac{1}{R}$$

și, ținînd seama de relațiile $x_1'' = -x_2'$, $x_1' = x_2$, $x_{2s} = -x_2''$, $x_{1s} = x_1$, din formulele de mai sus rezultă $\frac{1}{x_{2s}} + \frac{1}{x_{1s}} = 2n\left(-\frac{1}{R}\right)$, de unde se determină $\frac{1}{f_s} = -\frac{2n}{R}$ sau $f_s = -\frac{R}{2n} = -0{,}15$ m.

4°. a) Se știe că rezistența electrică a unui conductor metalic sub formă de fir este $R = \rho \frac{l}{S}$. Din cei trei factori, rezistivitatea ρ este cea care variază cel mai mult cu temperatura. Neglijînd deci variațiile cu temperatura ale lungimii l și secțiunii S, față de variația rezistivității, rezultă $R_t = \rho_t \frac{l}{S}$. Dar

$$\rho_t = \rho_{t_0}[1 + \alpha(t - t_0)] = 2{,}8 \cdot 10^{-8}[1 + 4 \cdot 10^{-3}(100 - 20)] = 3{,}696 \cdot 10^{-8}\ \Omega\,\text{cm}.$$

Prin urmare, rezistența firului de aluminiu la temperatura de 100 °C va fi

$$R_t = 3{,}696 \cdot 10^{-8} \frac{1}{10^{-6}} = 3{,}696 \cdot 10^{-2}\ \Omega.$$

b) Lucrul mecanic efectuat în transformarea adiabatică este $L = \nu C_v(T_1 - T_2)$. Pornind de la relația Robert-Mayer, $C_p = C_v + R$ și cunoscînd coeficientul adiabatic γ, se deduce că $C_v = \frac{R}{\gamma - 1}$. Aplicînd ecuația termică de stare, la stările inițială și finală ale gazului în transformarea adiabatică, se obține $T_1 = \frac{1}{\nu R} p_1 V_1$ și $T_2 = \frac{1}{\nu R} p_2 V_2$; prin urmare, $L = \frac{1}{\gamma - 1}(p_1 V_1 - p_2 V_2)$.

Pentru determinarea presiunii p_2 în starea finală, se aplică ecuația lui Poisson, $p_1 V_1^\gamma = p_2 V_2^\gamma$, de unde rezultă $p_2 = p_1 \left(\frac{V_1}{V_2}\right)^\gamma = p_1 \cdot \frac{1}{2^\gamma}$.

Înlocuind în expresia lucrului mecanic, se obține

$$L = \frac{1}{\gamma - 1}\left(p_1 V_1 - p_1 \frac{1}{2^\gamma} V_2\right) = \frac{p_1}{\gamma - 1}\left(V_1 - \frac{1}{2^\gamma} V_2\right) =$$

$$= \frac{10^5}{1{,}4 - 1}\left(10 \cdot 10^{-6} - \frac{1}{2^{1{,}4}} \cdot 20 \cdot 10^{-6}\right) = \frac{1}{0{,}4}\left(1 - \frac{1}{2^{0{,}4}}\right) = 0{,}608 \text{ J}.$$

c) Se pornește de la relația lui Bouguer, $I = I_0 e^{-kx}$, în care $I = \frac{I_0}{2}$ și, după logaritmare, se obține $x = \frac{\ln 2}{k} = 1{,}506$ cm.

5°. Fenomenul de interferență este observabil numai dacă radiațiile care interferă au aceeași frecvență și sînt coerente. În practică, fasciculele coerente se realizează prin divizarea, în două sau mai multe părți, a fasciculului emis de o sursă monocromatică. Fasciculele parțiale sînt coerente între ele, deoarece, provenind de la aceeași sursă, conțin în mod identic toate undele elementare emise de atomii sursei monocromatice. Dispozitivele cu ajutorul cărora se pot obține fascicule coerente se numesc dispozitive interferențiale, așa cum sînt dispozitivul lui Young, lama cu fețe plan-paralele și pana optică.

Dispozitivul lui Young, cu ajutorul căruia se obțin două fascicule coerente prin divizarea frontului de undă, constă dintr-o sursă de lumină S, alcătuită dintr-un filament drept, prevăzut cu filtru optic, un paravan opac PO, două fante F_1 și F_2, practicate în paravan, dreptunghiulare, paralele între ele și paralele și cu filamentul sursei și un ecran E (fig. F.B.190). Cele două fante devin două surse de lumină coerentă, deoarece undele emise de ele provin de pe aceeași suprafață de undă.

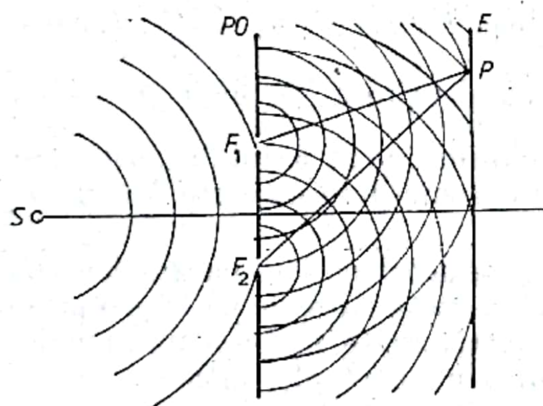


Fig. F.B.190

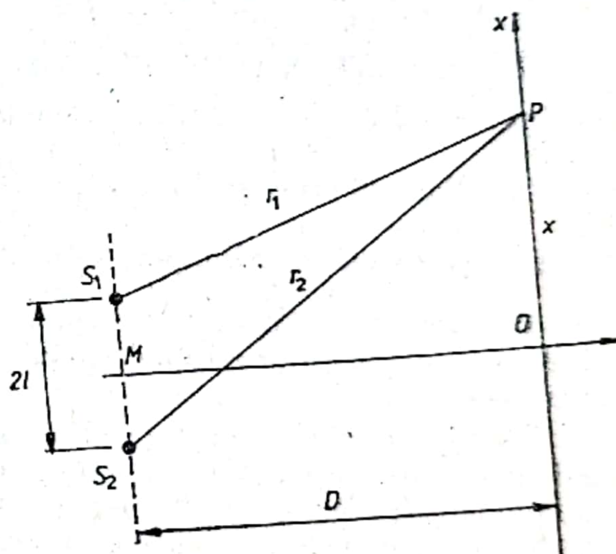


Fig. F.B.191

Se notează cu $2l$ distanța dintre sursele S_1 și S_2, cu r_1 și r_2, distanțele dintre surse și un punct oarecare P de pe ecran, cu D distanța dintre planul surselor și ecran și cu x, distanța dintre planul de simetrie al sistemului și punctul P (fig. F.B.191). În punctul P ecuațiile celor două unde vor fi

$$E_1 = E_0 \sin \frac{2\pi}{T}\left(t - \frac{r_1}{c}\right) \text{ și } E_2 = E_0 \sin \frac{2\pi}{T}\left(t - \frac{r_2}{c}\right),$$

iar ecuația undei rezultate din suprapunerea celor două unde va fi

$$E = E_1 + E_2 = E_0\left[\sin \frac{2\pi}{T}\left(t - \frac{r_1}{c}\right) + \sin \frac{2\pi}{T}\left(t - \frac{r_2}{c}\right)\right] =$$

$$= 2E_0 \cos \frac{2\pi}{T} \cdot \frac{r_2 - r_1}{2c} \cdot \sin \frac{2\pi}{T}\left(t - \frac{r_1 + r_2}{2c}\right).$$

Amplitudinea undei rezultante va fi

$$A = 2E_0 \cos \frac{2\pi(r_2 - r_1)}{2cT} = 2E_0 \cos \frac{\pi(r_2 - r_1)}{\lambda},$$

iar intensitatea luminoasă I în punctul P, $I = 4E_0^2 \cos^2 \frac{\pi(r_2 - r_1)}{\lambda}$. Intensitatea luminoasă va fi maximă cînd diferența de drum $r_2 - r_1 = 2k\frac{\lambda}{2}$ și minimă cînd $r_2 - r_1 = (2k+1)\frac{\lambda}{2}$, unde k este un număr întreg. Pentru un mediu transparent de indice de refracție n, condițiile de mai sus se scriu utilizîndu-se drumurile optice $n(r_2 - r_1) = 2k\frac{\lambda}{2}$ și $n(r_2 - r_1) = (2k+1)\frac{\lambda}{2}$. Prin suprapunerea celor două unde coerente, pe ecran vor apărea franje rectilinii, luminoase (maxime de interferență) și întunecoase (minime de interferență).

Distanța dintre două maxime (sau două minime) consecutive se numește interfranjă și se notează cu $i = x_{k+1} - x_k$. Pentru determinarea expresiei interfranjei, din figura F.B.191 se constată că:

$$r_1^2 = D^2 + (x-l)^2 \text{ și } r_2^2 = D^2 + (x+l)^2, \text{ deci}$$

$$r_2^2 - r_1^2 = (r_2 - r_1)(r_2 + r_1) = 4xl, \text{ prin urmare}$$

$$r_2 - r_1 = \frac{4xl}{r_1 + r_2}.$$ Cum $x \ll D$, se poate aproxima

$r_1 + r_2 \simeq 2D$. Notînd cu x_k valoarea lui x pentru care intensitatea este maximă, rezultă $\frac{4x_k l}{2D} = 2k\frac{\lambda}{2}$, de unde $x_k = \frac{kD\lambda}{2l}$. Pentru un ordin de interferență imediat superior $k+1$, $x_{k+1} = \frac{(k+1)D\lambda}{2l}$, deci $i = x_{k+1} - x_k = \frac{\lambda D}{2l}$. Cunoscîndu-se valoarea interfranjei, se poate determina lungimea de undă $\lambda = \frac{2li}{D}$.

Dacă izvoarele coerente sînt punctuale sau filiforme, ca în cazul dispozitivului lui Young, interferența este nelocalizată (regiunea din spațiu în care are loc interferența este mare).

Cu ajutorul lamei cu fețe plane și paralele și a penei optice, un fascicul de lumină este divizat cu una sau mai multe suprafețe reflectătoare, de pe care o parte din lumină se reflectă, iar altă parte se transmite; interferența în acest caz, numită interferență localizată, se obține cu surse de lumină nepunctuale, întinse.

Pentru lama cu fețe plane paralele (fig. F.B.192), de grosime d și indice de refracție n, diferența de drum optic dintre razele 2 și 3 care interferă este $\delta = n(AB + BC) - \left(AD - \frac{\lambda}{2}\right)$ sau $\delta = n\left(\frac{d}{\cos r} + \frac{d}{\cos r}\right) - \left(AC \sin i - \frac{\lambda}{2}\right)$, de

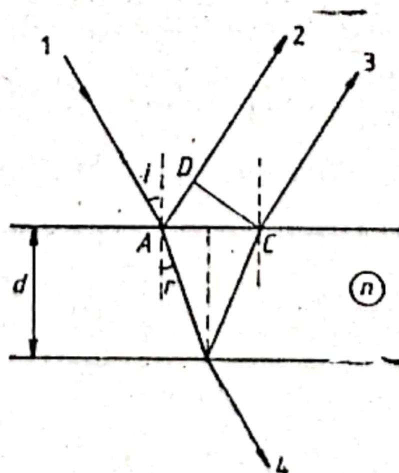


Fig. F.B.192

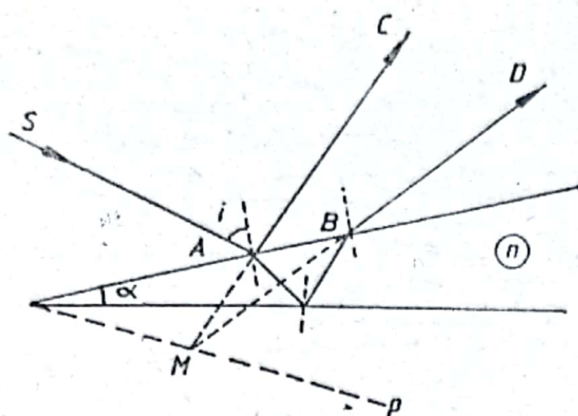


Fig. F.B.193

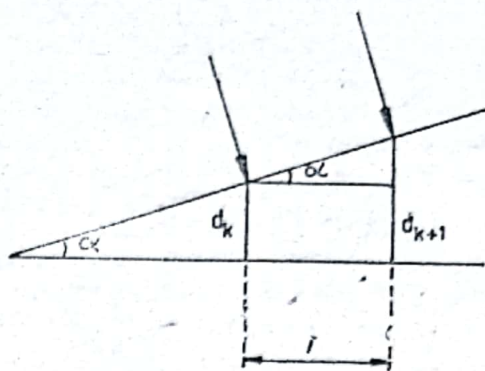


Fig. F.B.194

unde rezultă $\delta = 2nd\cos r + \frac{\lambda}{2}$. Pentru incidență normală, $i = 0$, rezultă că și $r = 0$ și deci $\cos r = 1$, adică $\delta = 2dn + \frac{\lambda}{2}$.

Pentru pana optică, de indice de refracție n și unghi α între fețele care delimitează pana, razele coerente AC și BD interferă în punctul M (fig. F.B.193). Toate punctele de localizare a franjelor se vor afla într-un plan P, care trece prin vîrful O al penei. Pentru determinarea interfranjei i, la incidență normală, dacă d_k este o grosime oarecare a penei pentru care se obține un maxim de interferență de ordinul k (fig. F.B.194), atunci $2nd_k + \frac{\lambda}{2} = k\lambda$, iar pentru un maxim de ordinul $k+1$, $2nd_{k+1} + \frac{\lambda}{2} = (k+1)\lambda$. Rezultă $\alpha i = d_{k+1} - d_k = \frac{\lambda}{2n}$ și deci $i = \frac{\lambda}{2\alpha n}$.

C. PROBLEME PROPUSE

ENUNŢURI

1. MECANICĂ

1°. Un resort cu masa neglijabilă şi constanta elastică $k = 10\ N \cdot m^{-1}$ este suspendat în poziţie verticală. Se cere: a) cu cît se alungeşte resortul cînd de capătul lui se agaţă o masă $m = 0,1$ kg care se lasă liberă; b) amplitudinea de oscilaţie a masei m şi viteza cu care corpul trece prin poziţia de echilibru; c) ecuaţia care descrie oscilaţia masei m considerînd momentul agăţării ca moment iniţial. Se va considera $g = 10\ m \cdot s^{-2}$.

2°. Un corp cu masa $m_1 = 5 \cdot 10^{-2}$ kg deplasîndu-se orizontal cu viteza $v = 20\ m \cdot s^{-1}$ ciocneşte elastic un corp cu masa $m_2 = 0,8$ kg suspendat de un fir cu lungimea $l = 1$ m, aflat în repaus. Să se calculeze: a) vitezele celor două corpuri după ciocnire; b) tensiunea din fir în momentul imediat următor ciocnirii; c) unghiul de deviaţie maximă a corpului faţă de poziţia de echilibru. Se va considera $g = 10\ m \cdot s^{-2}$.

3°. Un corp cu masa $M = 2,97$ kg se află în repaus pe un plan orizotnal şi este legat de un perete vertical prin intermediul unui resort lung, nedeformat, de masă neglijabilă şi constantă de elasticitate $k = 10\ N \cdot m^{-1}$. Un proiectil de masă $m = 30$ g şi viteză $v = 200\ m \cdot s^{-1}$ orientat pe direcţia orizontală şi în sensul corp-perete pătrunde şi se opreşte instantaneu în acest corp. Considerînd neglijabilă acţiunea forţelor elastice şi de frecare în procesul de ciocnire, să se calculeze: a) distanţa maximă faţă de poziţia iniţială la care se deplasează corpul şi lungimea drumului total parcurs de acesta în cazul cînd coeficientul de frecare dintre corp şi plan este $\mu = 0,2$; b) amplitudinea şi energia oscilaţiei sistemului în cazul absenţei frecării.

Se consideră acceleraţia gravitaţională $g = 10\ m \cdot s^{-2}$.

(Concurs de admitere, sept. 1982)

4°. Un om cu masa $m = 70$ kg aflat la marginea unei platforme cu înălţimea $H = 10$ m faţă de sol, ridică o greutate de 200 N cu ajutorul unui cablu trecut peste un scripete fix. Ştiind că, iniţial, greutatea se află la nivelul solului şi că 1 m de cablu are o masă de 0,5 kg, să se afle: a) lucrul efectuat de om în procesul de ridicare a greutăţii pînă la nivelul platformei; b) greutatea maximă pe care o poate ridica omul dacă el trage cablul orizontal la înălţimea $h = 1$ m, în dreptul centrului său de greutate, iar pasul său este de $l = 1$ m.

Se va lua $g = 10\ m \cdot s^{-2}$.

5°. Un corp sferic cu raza $r = 1$ cm, dintr-un material cu densitatea $\rho_c = 7\,800\ kg \cdot m^{-3}$, se află pe fundul unui bazin cu apă, adîncimea apei fiind $h = 2$ m. Dacă bila este lansată cu viteza $v_0 = 8\ m \cdot s^{-1}$ sub un unghi $\alpha = 60°$ faţă de fundul orizontal al bazinului, să se afle: a) distanţa de la punctul de lansare pînă la punctul în care corpul ajunge din nou pe fundul bazinului; b) energia potenţială a corpului faţă de fundul bazinului la 0,3 s după lansare; c) înălţimea maximă la care ajunge corpul faţă de fundul bazinului.

Se neglijează frecarea între corp şi apă. Se cunoaşte densitatea apei $\rho_a = 10^3\ kg \cdot m^{-3}$ şi se va lua $g = 10\ m \cdot s^{-2}$.

6°. Un proiectil cu masa $m = 2$ kg, aflat în repaus la înălţimea $h = 100$ m, explodează desfăcîndu-se în două fragmente ale căror mase sînt m_1 şi m_2. În urma exploziei, cele două fragmente capătă vitezele $v_{01} = 30$ m/s şi respectiv $v_{02} = 40$ m/s, ambele orientate orizontal. Neglijînd masa explozibilului, să se afle: a) energia degajată în explozie; b) distanţa dintre cele două fragmente în momentul cînd vitezele lor sînt orientate în direcţii reciproc perpendiculare; c) înălţimea la care se află corpurile în acest moment.

Se consideră $g = 10$ m/s².

7°. Două corpuri de dimensiuni mici avînd masele m_1 şi m_2 se află pe un plan înclinat de unghi α. Cele două corpuri sînt în contact unul cu celălalt, corpul de masă m_1 aflîndu-se mai jos. Notînd cu μ_1 şi μ_2 coeficienţii de frecare ai corpurilor m_1 şi, respectiv, m_2 cu planul, şi ştiind că $\mu_1 > \mu_2$, să se afle: a) forţa pe care corpul de masă m_2 o exercită asupra corpului de masă m_1 în timpul coborîrii pe plan; b) valoarea minimă a unghiului α pentru care corpurile coboară pe planul înclinat; c) ce viteză au corpurile la baza planului, dacă ele pornesc din repaus de la înălţimea h.

8°. Un corp de masă $m = 2 \cdot 10^{-3}$ kg efectuează o mişcare oscilatorie armonică. La un moment dat, t_1, elongaţia este $y_1 = 0{,}1$ m, viteza $v_1 = \sqrt{7} \cdot 10^{-1}$ m · s⁻¹, iar acceleraţia $a_1 = 0{,}9$ m · s⁻². Ştiind că la momentul iniţial $t = 0$, $y = A\frac{\sqrt{3}}{2}$, se cere: a) ecuaţia mişcării oscilatorii armonice; b) viteza maximă a corpului, acceleraţia maximă şi forţa maximă care acţionează asupra corpului; c) elongaţia y_2 pentru care energia cinetică a corpului este egală cu energia potenţială a sa; d) momentele în care energia potenţială este maximă şi energia cinetică este maximă; e) să se scrie ecuaţia oscilaţiei rezultante, într-un punct în spaţiu, unde oscilaţia considerată se compune cu o oscilaţie paralelă avînd ecuaţia

$$y_2(t) = \frac{5}{3} \cdot 10^{-1} \sin\left(3t + \frac{\pi}{2}\right) \text{m}.$$

9°. Pe un plan orizontal se află un plan înclinat de masă M şi de unghi α, peste care se aşează un corp de masă m (fig. F.C.1). Coeficientul de frecare dintre corpul de masă m şi planul înclinat este μ_m, iar coeficientul de frecare dintre planul înclinat şi planul orizontal este μ_M. Se cer: a) acceleraţiile a_m şi a_M ale celor două corpuri; b) forţa cu care apasă corpul de masă m asupra planului înclinat; c) forţa cu care apasă planul înclinat asupra planului orizontal; d) să se particularizeze rezultatele de la a), b) şi c) pentru $\mu_M = 0$.

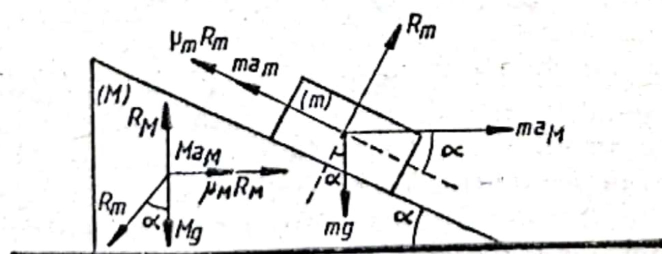


Fig. F.C.1

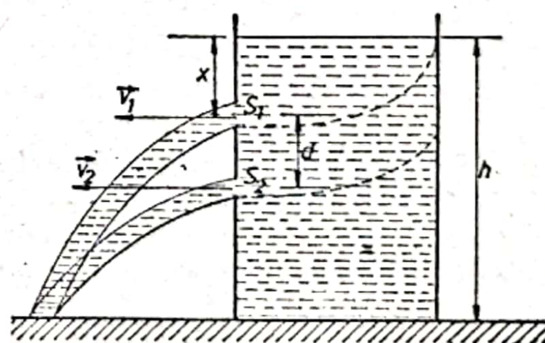


Fig. F.C.2

10°. Dintr-un vas cu apă, al cărui nivel este menţinut constant la înălţimea h, curge apă prin două orificii dispuse pe aceeaşi generatoare la distanţa d unul faţă de celălalt (fig. F.C.2). Se cere să se calculeze: a) distanţa faţă de suprafaţa apei a celor două orificii, dacă cele două jeturi de apă cad în acelaşi punct din planul orizontal care cuprinde baza vasului cu apă; b) debitele de volum Q_1 şi Q_2 corespunză-

toare celor două orificii, secțiunile deschiderilor acestora fiind S_1 și, respectiv, S_2; c) debitul de volum, Q, necesar pentru a menține constant nivelul apei în vas; d) forțele F_1 și F_2 care trebuie exercitate asupra unor dopuri pentru a opri curgerea lichidului din rezervor, acesta fiind umplut pînă la înălțimea h.

11°. O rachetă spațială se rotește în jurul Pămîntului pe o orbită circulară cu perioada $T_0 = 88,8$ min. Prin utilizarea dispozitivelor de manevră ale rachetei, traiectoria acesteia este modificată într-o nouă orbită circulară, caracterizată prin perioada $T_1 = 89,6$ min. Să se determine: a) cît de mult a schimbat această corecție a orbitei, înălțimea rachetei deasupra suprafeței Pămîntului? b) de cîte ori s-a schimbat viteza rachetei.

Se dau: accelerația gravitațională la suprafața Pămîntului $g = 9,80$ m/s², raza Pămîntului $R = 6\,370$ km.

(Prima Balcaniadă de Fizică, Plovdiv, R.P. Bulgaria, mai 1986)

12°. Două corpuri de mase $m_1 = 2$ kg și $m_2 = 1$ kg, legate printr-un fir inextensibil lung trecut peste un scripete fix avînd momentul de inerție $I = 10^{-2}$ kg · m² și raza $R = 0,1$ m, se găsesc inițial în repaus, la aceeași înălțime $h = 1$ m deasupra solului. Să se determine: a) durata după care corpul de masă m_1 atinge solul și viteza sa, în cazul în care firul alunecă fără frecare pe suprafața scripetelui (blocat); b) viteza cu care același corp atinge solul în cazul în care deplasarea firului antrenează scripetele (fără ca firul să alunece pe suprafața acestuia); c) accelerația unghiulară imprimată scripetelui în cazul precedent.

Se va lua accelerația gravitațională $g = 9,8$ m/s².

(Concursul de admitere în facultăți de profil electric, componenți ai loturilor olimpice de matematică, fizică și chimie, iunie 1984)

13°. Se consideră o sferă S de rază R, avînd un canal îngust în lungul unui diametru al său (v. fig. F.C.3). Definind fluxul intensității cîmpului gravitațional, $\overline{\Gamma}$, printr-un element de suprafață avînd aria ΔA și vectorul unitar al normalei la

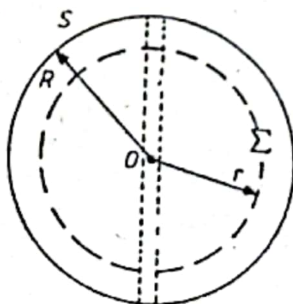


Fig. F.C.3

suprafață $\overline{1}_n$ prin relația $\Delta\Phi = \overline{\Gamma} \cdot \overline{1}_n \Delta A$, să se determine: a) fluxul intensității cîmpului gravitațional produs de o masă punctiformă m prin suprafața unei sfere s de rază r, concentrică cu S, în cazul în care corpul de masă m este interior, respectiv exterior sferei s, iar sfera S este goală; b) dependența forței de atracție universală („greutății") care acționează asupra corpului de masă m, de distanța r pînă la centrul O al sferei S, în cazul în care în această sferă ar fi distribuită uniform substanță cu densitatea $\rho = 6\,000$ kg · m⁻³; c) perioada oscilațiilor efectuate de corpul de masă m în interiorul canalului considerat.

Se dă constanta atracției universale $K = 6,67 \cdot 10^{-11}$ N · m² · kg⁻².

14°. Un vas cilindric de înălțime $h_0 = 0,8$ m și secțiune $S = 8 \cdot 10^{-2}$ m² este plin cu un lichid, care se poate scurge din vas printr-un orificiu de secțiune $s = 10^{-4}$ m², aflat la baza vasului.

a) Să se stabilească expresiile vitezelor v_1 de coborire a apei din vas, respectiv v_2 de ieșire a lichidului prin orificiu.

b) Să se calculeze timpul după care se scurge prin orificiu întreaga cantitate de lichid din vas.

c) Ce cantitate de lichid s-ar scurge în acest timp dacă nivelul lichidului din vas s-ar menține constant.

Se cunoaște $g = 9{,}8$ m/s².

15°. Două corpuri de mase $m_1 = 0{,}2$ kg și $m_2 = 0{,}8$ kg sînt separate printr-o distanță $r = 0{,}25$ m.

a) Să se găsească punctul de pe direcția maselor în care intensitatea cîmpului gravitațional se anulează.

b) Să se calculeze intensitatea cîmpului gravitațional datorită acestor mase într-un punct situat la distanța $r_1 = 0{,}20$ m față de m_1 și $r_2 = 0{,}15$ m față de m_2.

c) Presupunînd că corpul m_1 este lansat într-un tunel imaginar care străbate Pămîntul prin centrul acestuia și știind că forța gravitațională asupra punctului material aflat la distanța $r < R_0$ de centrul Pămîntului are expresia $F(r) = -kr$, unde $k = \frac{4\pi m_1 K \rho}{3}$, R_0 fiind raza Pămîntului, iar ρ densitatea acestuia, să se calculeze perioada mișcării oscilatorii a corpului m_1 în tunel. Se cunosc: raza Pămîntului $R_0 = 6{,}3 \cdot 10^6$ m, accelerația gravitațională la suprafața Pămîntului, $g_0 = 9{,}8$ m/s², constanta atracției universale $K = 6{,}670 \cdot 10^{-11} \frac{\mathrm{N \cdot m^2}}{\mathrm{kg^2}}$.

16°. Un corp cilindric plutește pe suprafața mercurului dintr-un vas, de formă cubică și de latură $l = 0{,}2$ m, astfel încît o treime din volumul corpului este scufundată. Se toarnă apă peste corp astfel încît corpul să fie acoperit la limită cu apă.

a) Să se calculeze densitatea corpului și fracțiunea din volumul acestuia scufundată în mercur după turnarea apei.

b) Dacă se scoate corpul cilindric și vasul se umple numai cu apă, să se afle forța rezultantă F exercitată de lichid asupra peretelui lateral al vasului cubic.

c) Să se afle înălțimea h_0, în raport cu baza, unde se află punctul de aplicație al forței rezultante.

Se cunosc: $\rho_{apă} = 1\,000$ kg/m³, $\rho_{Hg} = 13\,600$ kg/m³, $g = 9{,}8$ m/s².

17°. O bilă de masă m_1 este fixată la capătul unei bare rigide de lungime $l = 0{,}4$ m și masă neglijabilă ce poate oscila în jurul unui ax orizontal care trece prin celălalt capăt al barei. Bara este deviată în poziție orizontală față de poziția de echilibru și lăsată liberă, astfel încît, atunci cînd revine în poziția de echilibru, ciocnește elastic o altă bilă de masă $m_2 = 3m_1$ aflată în repaus.

a) Să se calculeze vitezele v_1 și v_2 ale bilelor după ciocnire.

b) Să se determine unghiul de deviație al barei după ciocnire.

c) Știind că bila de masă m_2 ciocnește frontal o a treia bilă de masă $m_3 = 2m_2$, aflată în repaus în apropierea sa, să se calculeze fracțiunea K din energia sa cinetică cedată bilei m_3, dacă ciocnirea este mai întîi perfect elastică, iar apoi perfect inelastică.

Se cunoaște $g = 9{,}8$ m/s².

2. FIZICĂ MOLECULARĂ ȘI CĂLDURĂ. TERMODINAMICĂ

18°. O cantitate $\nu = 1$ mol hidrogen se află într-un cilindru cu piston avînd lungimea $l = 150$ cm și secțiunea $S = 100$ cm². Gazul se comprimă prin deplasarea uniformă a pistonului cu viteza $v = 1$ cm · s⁻¹. Cilindrul fiind în permanență în contact cu un termostat cu temperatura $T = 300$ K, se cere: a) presiunea din cilindru înainte de începerea comprimării; b) presiunea din cilindru după 15 s de com-

primare; c) lucrul mecanic efectuat în acest timp, în ipoteza că transformarea poate fi considerată reversibilă; d) graficul de variaţie a forţei care acţionează asupra pistonului în funcţie de timp.

Se cunoaşte: constanta gazelor ideale $R = 8\,310$ J · kmol^{-1} · K^{-1} şi valorile $\ln 10 = 2{,}3026$ şi $\ln 3 = 1{,}0986$.

19°. Într-un tub de sticlă cu lungimea $L = 1$ m închis la ambele capete se găsesc, de o parte şi de alta a unui piston cu lungimea $l = L/10$ şi greutatea $G = 10$ N, cantităţi egale de gaz, $\nu = 0{,}01$ mol, la aceeaşi temperatură $T = 300$ K. Tubul este aşezat vertical. Să se stabilească: a) poziţia de echilibru a pistonului (se ia ca reper centrul său); b) dacă pistonul este îndepărtat de poziţia de echilibru, în ce condiţii oscilaţia pistonului poate fi aproximată ca oscilaţie armonică; c) perioada oscilaţiei în condiţiile de la punctul b).

Se neglijează frecările şi se ia $g = 10$ m · s^{-1}.

20°. Un calorimetru, care împreună cu accesoriile, are o capacitate calorică $C = 1\,200$ J · K^{-1}, conţine o masă $m_1 = 0{,}5$ kg gheaţă sfărîmată mărunt cu temperatura $T_1 = 258$ K. În calorimetru cade de la înălţimea $h = 5$ m un jet de apă cu debitul $D = 2 \cdot 10^{-3}$ kg · s^{-1} şi temperatura $T_2 = 323$ K. Să se calculeze: a) după cît timp în calorimetru va exista numai gheaţă cu temperatura $T = 273$ K; b) după cît timp în calorimetru va exista numai apă cu temperatura $T = 273$ K; c) energia cinetică a apei căzute în calorimetru în acest timp.

Se cunosc: căldura specifică a apei $c_a = 4\,180$ J · kg^{-1} · k^{-1}, a gheţii $c_g = 2\,100$ J · kg^{-1} · k^{-1} şi căldura latentă de topire a gheţii $\lambda = 334 \cdot 10^3$ J · kg şi se consideră $g = 10$ m · s^{-2}.

21°. Pentru un anumit experiment este necesar ca, într-un recipient cu volumul $V = 10^3$ cm^3, să se afle aer la presiunea $p_f = 100$ N · m^{-2}. Iniţial presiunea aerului din recipient este presiunea atmosferică $p_0 = 10^5$ N · m^{-2}. Evacuarea aerului se face cu o pompă la temperatura $T = 300$ K. Ştiind că secţiunea pistonului pompei este $S = 12{,}5$ cm^2 şi cursa pistonului este $l = 20$ cm, să se afle: a) masa de aer din vas în starea iniţială; b) masa de aer evacuată din recipient în prima curbă a pistonului; c) numărul de curse efectuate de piston pentru evacuarea aerului din recipient.

Se cunosc: masa molară a aerului $\mu = 28{,}9$ kg · kmol^{-1}, constanta universală a gazelor $R = 8\,310$ J · kmol^{-1} · K^{-1}, iar $\lg 5 = 0{,}69897$ şi $\lg 4 = 0{,}60206$.

22°. Se consideră un gaz care suferă două transformări ciclice formate din următoarele transformări: (1) izocoră, adiabată şi izotermă; (2) izobară, adiabată şi izotermă. a) Ştiind că în ambele cazuri procesul izoterm are loc la temperatura minimă atinsă în cursul ciclului respectiv şi că raportul dintre temperaturile extreme atinse în ambele cicluri este acelaşi, ε, să se compare randamentele celor două cicluri. b) Să se calculeze aceleaşi randamente dacă, în aceleaşi condiţii, procesul izoterm se desfăşoară la temperatura maximă atinsă în cursul fiecărui ciclu.

23°. Într-o pompă cu piston, fără pierderi de energie prin intermediul căldurii, se comprimă 10 l de aer care se află, iniţial, la temperatura de 20°C, comprimarea făcîndu-se de la presiunea de o atmosferă la presiunea de cinci atmosfere. Comprimarea se face lent şi pierderile fiind neglijabile, se admite reversibilitatea transformării. Să se calculeze: a) volumul final al aerului, V_f; b) temperatura finală, T_f; c) variaţia energiei interne, $U_f - U_i$.

Se cunoaşte $\gamma = \dfrac{C_P}{C_V} = \dfrac{7}{5}$.

24°. O sferă de plastilină este aruncată cu viteza $v_0 = 15$ m/s, sub unghiul $\alpha = 45°$ faţă de orizontală, spre un perete vertical aflat la distanţa $l = 8$ m faţă de punctul de aruncare. Sfera se lipeşte de perete. Considerînd că întreaga energie cinetică a sferei contribuie la încălzirea acesteia, să se calculeze creşterea temperaturii sferei.

Căldura specifică a plastilinei este $C = 2{,}5 \cdot 10^3$ J · kg^{-1} · K^{-1} și accelerația gravitațională $g = 9{,}81$ m · s^{-2}

25°. Un kilomol de oxigen efectuează un ciclu Carnot în intervalul de temperaturi dintre 27°C și 327°C. Se știe că raportul dintre presiunea maximă și presiunea minimă, atinse în decursul ciclului, este $\frac{p_{max}}{p_{min}} = 20$. Se cere: a) randamentul ciclului; b) cantitatea de căldură Q_1 primită în timpul ciclului; c) cantitatea de căldură Q_2 cedată sursei reci în timpul ciclului; d) lucrul mecanic L furnizat de gaz în decursul ciclului.

Se cunosc: $R = 8{,}314$ J · mol^{-1} și $\gamma = 1{,}41$.

26°. Un motor Otto (Beau de Rochas) are ciclul de funcționare dat în figura F.C.4. La o compresie $\frac{V_1}{V_2} = 4$ pentru substanța de lucru, s-a măsurat o creștere a presiunii $\frac{p_2}{p_1} = 8$. Se consideră ca substanță de lucru, cu ajutorul căreia se realizează ciclul, un gaz ideal monoatomic. Se cere: a) să se arate că în transformările $1 \rightarrow 2$ și $3 \rightarrow 4$ căldura molară a gazului este exprimată prin relația $C = C_V - 2R$, unde R este constanta universală a gazului ideal; b) să se calculeze randamentul ciclului în funcție de raportul de compresie $\varepsilon = \frac{V_1}{V_2}$ și de raportul de creștere a presiunii prin explozie $\mathcal{K} = \frac{p_3}{p_2}$, efectuîndu-se calculele numerice pentru $\varepsilon = 4$ și $\mathcal{K} = 2$; c) să se compare randamentul astfel obținut cu cel al unui ciclu Carnot, realizat între temperaturile extreme.

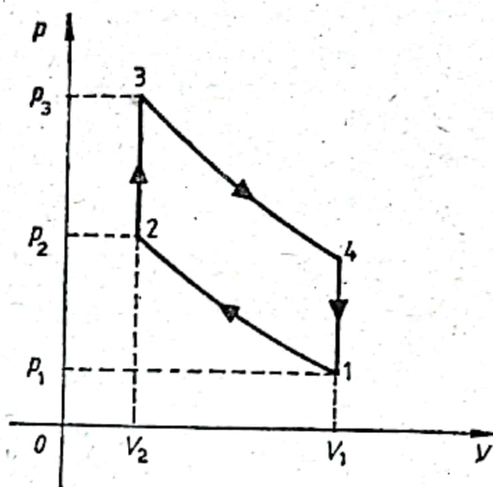


Fig. F.C.4

27°. Într-un cilindru cu piston de volum $V_1 = 1$ m^3, la temperatura $T = 303$ K se află un amestec de azot și vapori saturanți de apă. Masa amestecului este $m_0 = 0{,}286$ kg. Se cere: a) masa de vapori de apă care se va condensa, dacă volumul se micșorează de $k = 3$ ori la temperatură constantă; b) presiunea p a amestecului înainte de comprimare.

Se cunosc: presiunea vaporilor saturanți de apă $p_1 = 4{,}2 \cdot 10^3$ N · m^{-2}, la temperatura $T = 303$ K; masa molară pentru apă $\mu_1 = 18 \cdot 10^{-3}$ kg · mol^{-1} și masa molară pentru azot $\mu_2 = 28 \cdot 10^{-3}$ kg · mol^{-1}, $R = 8{,}314$ J · mol^{-1}.

28°. Într-o incintă de oțel se găsește un amestec de hidrogen H_2 și oxigen O_2 la temperatura $T_0 = 293$ K. Incinta este rigidă, presiunea în interiorul său crescînd — după arderea amestecului, inițiată de o scînteie electrică — de k ori. Se cere: a) să se determine dependența creșterii presiunii, în urma arderii, de compoziția

amestecului înaintea arderii; b) să se calculeze k, în cazul cînd masa hidrogenului din amestec reprezintă 0,5% din masa oxigenului.

Gazele vor fi considerate drept ideale. Se vor neglija dependențele de temperatură ale căldurilor molare, precum și procesele de disociere. Se știe că, prin arderea unui mol de hidrogen se degajă căldura $q = 485$ kJ/mol. Se va considera că în cursul arderii izocore căldurile molare ale hidrogenului și oxigenului sînt egale cu $\frac{5}{2}R$, iar căldura molară a vaporilor de apă rezultați cu $\frac{7}{2}R$, unde $R = 8{,}314 \frac{\text{J}}{\text{mol} \cdot \text{K}}$ este constanta universală a gazelor.

(Prima Balcaniadă de Fizică, Plovdiv — R.P. Bulgaria, mai 1986)

29°. Un motor termic parcurge un ciclu Brayton, format dintr-o destindere izobară la presiunea p_1, o destindere izotermă la temperatura T_1, o comprimare izobară la presiunea p_2 ($< p_1$) și o comprimare adiabatică, în cursul căreia temperatura gazului perfect utilizat ca agent de lucru variază de la T_2 la T_3. Să se determine: a) randamentul motorului termic; b) temperatura sursei reci a motorului termic care — lucrînd după un ciclu Carnot avînd aceeași destindere izotermă ca și motorul Brayton — ar efectua același lucru mecanic ca și acesta, în fiecare ciclu parcurs; c) raportul dintre căldura preluată de la sursa rece și lucrul mecanic efectuat asupra gazului, în fiecare ciclu, de compresorul mașinii frigorifice (eficiența mașinii frigorifice cu compresor), în cazul în care mașina frigorifică funcționează după un ciclu Brayton, parcurs în sensul invers (acelor de ceasornic).

(Olimpiada de fizică, clasa X-a, etapa județeană, 1984)

30°. Un kilomol de heliu parcurge o transformare ciclică reversibilă, a cărei reprezentare în diagrama U, s $\left(\text{unde } U \text{ este energia internă, iar } s = 2{,}3U_1\left(\lg p + \frac{5}{3}\lg V\right), \text{ cu } U_1 = 4\text{ MJ}\right)$ are forma unui poligon închis, ale cărui laturi (în număr par, oarecare) satisface cerințele: (1) sînt paralele cu axele U, respectiv s (v. fig. F.C.5), (2) nu depășesc pătratul delimitat de valorile $s_2 = 31$ MJ, $s_1 = 33$ MJ, $U_2 = 2$ MJ și U_1. Se cere: a) să se stabilească tipul transformărilor elementare din care este compus ciclul considerat; b) condiția suplimentară pe care trebuie să o

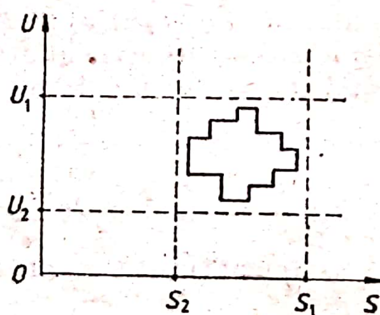


Fig. F.C.5

îndeplinească ciclul pentru ca gazul să primească o căldură maximă posibilă Q_1 și valoarea acestei călduri; c) să se demonstreze care este ciclul căruia i-ar corespunde cea mai mare valoare a randamentului motorului termic; d) să se determine randamentul motorului termic care ar funcționa după un ciclu a cărui reprezentare în diagrama indicată ar avea forma cercului înscris în pătratul considerat.

(Olimpiada de fizică, selecția lotului național, Bistrița, 1985)

31°. Se consideră parametrul fizic S definit pentru gaze perfecte prin expresia $S_{gp} = \nu(C_V \ln p + C_p \ln V)$. Se cere: a) să se exprime căldura primită de gaz într-un proces izoterm, prin valorile inițială și finală ale parametrului S_{gp}; b) să

se calculeze variaţia parametrului $G = U + pV - TS$ într-o transformare de fază, S fiind parametrul de tipul S_{gp}, definit prin relaţia dedusă la punctul a), generalizată pentru orice substanţă; c) să se deducă expresia raportului $\frac{\Delta T}{\Delta p}$, unde ΔT reprezintă variaţia temperaturii la care se produce o anumită transformare de fază, datorată variaţiei cu Δp a presiunii la care are loc transformarea de fază.

(Test în cadrul pregătirii componenţilor lotului olimpic de fizică, Timişoara, 1986)

32°. Un ansamblu de particule browniene (fum) de masă $m_b = 0{,}01$ µg se află în suspensie în aer. a) Să se afle raportul dintre viteza medie pătratică a particulelor de fum şi viteza medie pătratică a moleculelor de aer. b) Admiţînd că densitatea aerului dintr-o incintă este $\rho = 0{,}100$ kg/m³ şi presiunea $p = 100$ kN/m², să se afle viteza medie pătratică a moleculelor de aer. c) Cum depinde de presiune şi de volum viteza medie pătratică a moleculelor de aer (gaz ideal) într-o transformare adiabatică? d) La ce temperatură, energia cinetică medie a moleculelor de heliu din aer este suficientă pentru a putea învinge atracţia gravitaţională terestră şi a părăsi atmosfera?

Se cunosc: masa molară a aerului, $M_a = 29$ kg/kmol, numărul lui Avogadro $6{,}02 \cdot 10^{26}$ kmol^{-1}, acceleraţia gravitaţională $g = 9{,}8$ m/s², raza Pămîntului, $R_0 = 6{,}3 \cdot 10^6$ m, constanta gazelor perfecte, $R = 8{,}31 \cdot 10^3$ J/(kmol · K).

33°. La mijlocul unui tub subţire de sticlă, închis la ambele capete, avînd o lungime $l = 1$ m, se află o coloană de mercur de lungime $h = 20$ cm. Cînd tubul este aşezat vertical, coloana de mercur se deplasează pe lungimea $\Delta l = 10$ cm. Iniţial sistemul se află la temperatura $T_1 = 303$ K. După aducerea tubului în poziţie verticală, tubul se încălzeşte la temperatura $T_2 = 353$ K. a) Să se calculeze presiunea din tub în poziţie orizontală. b) Să se calculeze raportul dintre volumele de gaz din cele două incinte în care este separat tubul prin coloana de mercur, în poziţia verticală a acestuia, înainte şi după încălzire. Se neglijează dilatarea tubului de sticlă şi a mercurului. Se cunosc: $\rho_{Hg} = 13\,600$ kg/m³ şi $g = 9{,}8$ m/s².

34°. Un tub subţire de sticlă aşezat vertical, avînd $l_0 = 20$ cm la 0°C, este plin cu un lichid. Prin răcirea tubului, nivelul superior al lichidului scade cu $\Delta l = 4$ mm sub cel al tubului. a) Să se afle temperatura la care a fost răcit sistemul. b) Ştiind că în tubul de sticlă la 0°, golit de lichid, se introduce o coloană de mercur de lungime $h_0 = 19{,}33$ cm tot la 0°, să se afle la ce temperatură trebuie încălzit sistemul, pentru ca distanţa dintre centrul de greutate al tubului şi cel al mercurului să se reducă la jumătate faţă de cea iniţială.

Se cunosc: $\gamma_{Hg} = 1{,}82 \cdot 10^{-4}$K^{-1}, $\alpha_{sticlă} = 1{,}16 \cdot 10^{-5}$K^{-1}, $\gamma_{lichid} = 9 \cdot 10^{-4}$K^{-1}.

3. ELECTRICITATE

35°. Circuitul din figura F.C.6 este alimentat de la o tensiune constantă $U = 150$ V, aplicată între punctele A şi B. Rezistenţele au valoarea $R = 100\ \Omega$, iar bobina are aceeaşi rezistenţă şi o inductanţă $L = 4$ H. Să se calculeze: a) intensitatea curenţilor prin ramurile circuitului în situaţiile în care contactul K este închis şi cînd este deschis; b) potenţialul punctului C în cele două situaţii; c) modul în care variază potenţialul punctului C imediat după deschiderea contactului K. Se consideră că deschiderea contactului este practic instantanee.

36°. Două becuri, care funcţionează normal la tensiunea de 110 V, au puterile de 40 W şi, respectiv 60 W. a) Să se afle rezistenţele filamentelor şi intensităţile curenţilor prin filamente în regim de alimentare normală. b) Dacă cele două becuri se leagă în serie la o tensiune de 220 V, să se stabilească valoarea rezistenţei care

trebuie legată în paralel cu unul din becuri pentru a se asigura funcționarea normală a becurilor. c) Care este randamentul curentului, definit ca raport dintre puterea consumată de becuri și puterea totală absorbită de la sursă, în cazul montajului de la punctul b.

37°. Un condensator plan are distanța dintre armături $d = 1{,}5$ cm. Cînd între armături se află aer, capacitatea condensatorului este $C = 100$ pF. Plăcile condensatorului sînt legate la o tensiune $U = 500$ V. Să se afle: a) ce valoare are sarcina electrică de pe plăcile condensatorului dacă acestea se apropie la distanța $d_1 = 1$ cm în contact cu sursa; b) care este energia debitată de sursă în cursul deplasării plăcii; c) ce valoare are tensiunea dintre armături dacă se întrerupe contactul cu sursa și se introduce între armături, pe 1/2 din aria armăturilor, o placă de sticlă cu grosimea $d = 0{,}5$ cm. Se cunoaște permitivitatea relativă a sticlei $\varepsilon_r = 2{,}8$.

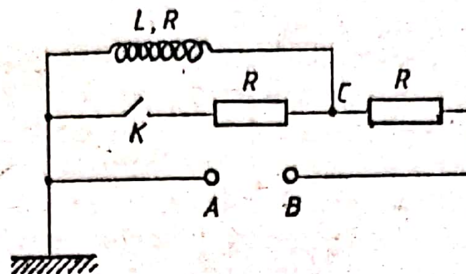


Fig. F.C.6

38°. Un bec cu rezistența $R_1 = 120\ \Omega$ și o bobină cu inductanța L și rezistența R_2, necunoscute, sînt legate în serie la rețeaua publică a cărei tensiune efectivă este de $U = 220$ V, iar frecvența $\nu = 50$ Hz. Măsurîndu-se cu un voltmetru termic, se găsește că tensiunea la bornele becului este $U_1 = 144$ V, iar tensiunea la bornele bobinei este $U_2 = 80$ V. Să se afle:

a) rezistența și inductanța bobinei;

b) puterea activă consumată de la rețea și factorul de putere;

c) ce capacitate trebuie să aibă un condensator care, legat în serie în circuit face ca intensitatea curentului să atingă o valoare maximă și mărimea intensității maxime.

39°. O bobină mică este plasată în întrefierul unui electromagnet, astfel încît axa bobinei și cea a polilor electromagnetului să coincidă. Secțiunea dreaptă a bobinei este $S = 3$ mm², iar numărul de spire este $N = 100$. Cînd bobina este rotită cu 180°, galvanometrul balistic branșat la bornele bobinei înregistrează sarcina electrică $q = 8\ \mu$C. Să se determine intensitatea cîmpului magnetic H din întrefierul electromagnetului, știind că rezistența bobinei, a galvanometrului și a firelor de conexiune este $R = 3\pi\ \Omega$.

Se știe că $\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7}\ \text{H} \cdot \text{m}^{-1}$.

40°. O baterie de acumulatoare care are tensiunea electromotoare $E = 24$ V și rezistența internă $r = 0{,}5\ \Omega$, alimentează un electrolizor (vas pentru electroliză) de rezistență $R_1 = 2\ \Omega$, în serie cu un rezistor avînd rezistența $R_2 = 3{,}5\ \Omega$. Două aparate de măsură identice (avînd rezistența $R_0 = 9{,}8\ \Omega$ și prin care poate trece un curent electric de intensitate maximă $I_0 = 0{,}1$ A) sînt utilizate, unul pentru a măsura intensitatea curentului prin circuit și celălalt pentru a măsura tensiunea electrică la bornele electrolizorului. Se cere: a) rezistența șuntului utilizat pentru aparatul folosit ca ampermetru, dacă dorim să se măsoare în circuit un curent electric de intensitate maximă $I_{max} = 5$ A; b) rezistența adițională utilizată pentru aparatul folosit ca voltmetru, dacă tensiunea de la bornele rezistenței R_1 (electro-

lizorului) este de maximum 30 V; c) să se facă schema circuitului introducînd și rezistențele calculate la punctele (a) și (b) și să se calculeze intensitatea curentului electric prin circuit; d) bilanțul puterilor în cazul punctului (c); e) să se calculeze cantitatea de argint depusă la catodul electrolizorului în timp de 2 h, știind că echivalentul electrochimic este $K = 4{,}025 \cdot 10^{-3}$ kg/A · h.

41°. Un circuit serie este format dintr-un condensator de capacitate $C = 318$ nF și un solenoid cu lungimea $l = 10$ cm, aria secțiunii transversale $S = 1$ cm² și format din $N = 300$ spire, avînd un miez magnetic. La bornele circuitului se aplică o tensiune alternativă sinusoidală. Pentru frecvența $\nu_0 = 10$ kHz, intensitatea efectivă a curentului electric atinge o valoare maximă cînd miezul magnetic ocupă jumătate din volumul interior al solenoidului (din lungimea sa). Dacă miezul magnetic ocupă tot volumul interior al solenoidului, intensitatea curentului electric la frecvența ν_0 este de $n = 5$ ori mai mică decît valoarea sa maximă. Să se calculeze: a) permeabilitatea relativă a miezului magnetic; b) frecvențele pentru care puterea activă din circuit este egală cu jumătate din valoarea maximă a puterii active, cînd miezul magnetic ocupă jumătate din volum; c) factorul de supratensiune al circuitului, cînd miezul ocupă jumătate din volum.

Se știe că $\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7}$ H · m⁻¹.

42°. O sursă avînd tensiunea electromotoare $E = 24$ V și rezistența internă $r = 0{,}5\ \Omega$ este conectată la două șine paralele conductoare, de rezistență electrică neglijabilă (fig. F.C.7), pe care se poate deplasa, fără frecare, o bară de masă $m_1 = 0{,}275$ kg și de rezistență $R = 0{,}5\ \Omega$. Distanța dintre șine este $l = 0{,}5$ m. De mijlo-

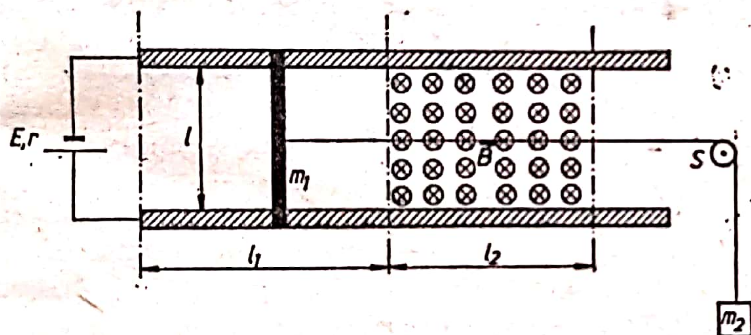


Fig. F.C.7

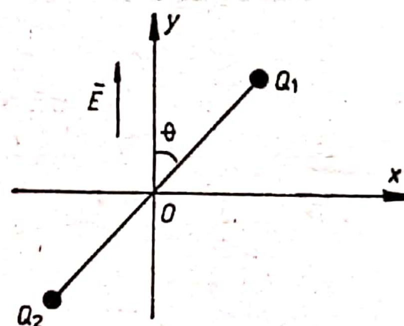


Fig. F.C.8

cul barei este legat un fir care, după ce este trecut peste un scripete S, susține un corp de masă $m_2 = 1{,}1$ kg. Bara parcurge distanța $l_1 = 1$ m, după care pătrunde într-un cîmp magnetic uniform de inducție $\bar{B}$, vectorul inducție fiind perpendicular pe planul șinelor, unde parcurge distanța $l_2 = 0{,}8$ m. Știind că mișcarea barei în regiunea cu cîmp magnetic se face uniform, se cere: a) valoarea inducției B a cîmpului magnetic; b) timpul de la începutul mișcării pînă cînd bara iese din cîmpul magnetic; c) bilanțul puterilor dezvoltate în cadrul sistemului studiat, în durata mișcării barei în cîmp magnetic.

Se consideră $g = 10$ m · s⁻².

43°. O tijă electroizolantă de masă neglijabilă și lungime $l = 0{,}2$ m, avînd fixate la capete puncte materiale de aceeași masă m și sarcini electrice $Q_1 = 1$ mC, $Q_2 = -1$ mC, se poate roti liber în jurul mijlocului său O, în planul orizontal xOy. Știind că tija se găsește într-un cîmp electric uniform, a cărui intensitatea $E = 100\ \frac{N}{C}$ este paralelă cu axa Oy și are sensul acestei axe, să se determine: a) momentul cuplului de forțe care acționează asupra tijei atunci cînd aceasta formează unghiul $\theta = 30°$ cu direcția cîmpului electric (fig. F.C.8); b) lucrul mecanic necesar

pentru aducerea tijei din poziția de echilibru stabil în cea indicată mai sus; c) masa m pentru care perioada micilor oscilații ale tijei, în jurul poziției sale de echilibru stabil, este $T = 1$ s.

(Olimpiada de fizică, faza județeană, clasa a X-a, 1986)

44°. Se consideră o balanță electrostatică cu brațe egale (fig. F.C.9). Știind că talerul T_1 și placa fixă P, avînd fiecare aria $A = 1\ \mathrm{dm}^2$, sînt încărcate cu densitățile superficiale de sarcină electrică $\sigma_{T_1} = 10^{-6}\ \frac{C}{m^2}$ și $\sigma_P = -10^{-6}\ \frac{C}{m^2}$ și sînt izolate electric de restul instalației, să se determine: a) intensitatea cîmpului electric în interiorul condensatorului plan format de talerul T_1 și placa P; b) masa corpului care trebuie așezat suplimentar pe talerul T_2 pentru echilibrarea balanței, dacă aceasta a fost echilibrată inițial în absența sarcinilor electrice; c) tensiunea U_e dintre talerul T_1 și placa P, atunci cînd distanța dintre acestea este $d_e = 2$ mm; d) caracterul echilibrului mecanic realizat, în cazul cînd — în situația de la punctul precedent — se racordează talerul T_1 și placa P la o sursă de tensiune constantă, egală cu U_e. Permitivitatea aerului este $\varepsilon_a \approx 8{,}86 \cdot 10^{-12}\ \frac{F}{m}$.

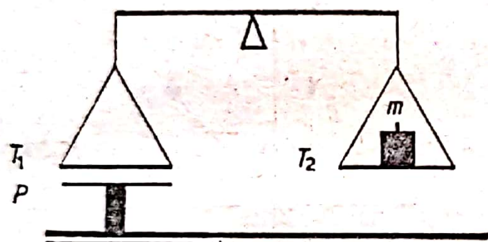


Fig. F.C.9

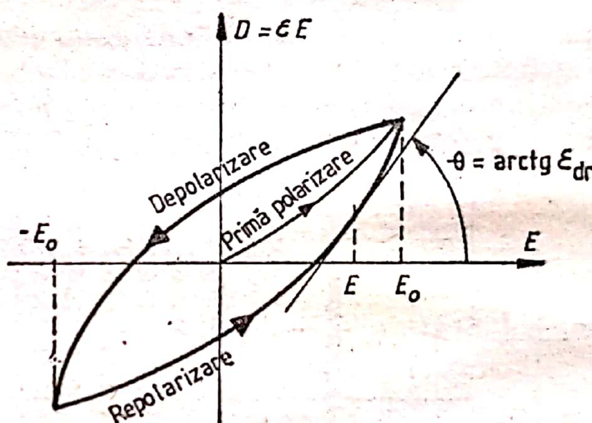


Fig. F.C.10

45°. În zona (Rayleigh) a cîmpurilor electrice slabe, dependența permitivității diferențiale ε_{dr} pe ramura de repolarizare a ciclului histerezis al unui material feroelectric de intensitățile momentană E și maximă E_a ale cîmpului electric aplicat (fig. F.C.10) este:

$$\lim_{\Delta E \to 0} \left(\frac{\Delta D}{\Delta E}\right)_{\text{repol.}} = \left(\frac{dD}{dE}\right)_{\text{repol.}} = \varepsilon_{dr}(E,\ E_0) = \varepsilon_i + RE + R_0 E_0,$$

unde ε_i (permitivitatea inițială), R și R_0 (parametrii Rayleigh) sînt constante fizice specifice materialului. Știind că acest material ocupă spațiul dintre armăturile cilindrice coaxiale, de raze r_i și r_0 și lungime L ($r_e - r_i \ll r_i \ll L$), ale unui condensator, să se determine: a) ecuațiile ramurilor de re-, depolarizare, ale ciclului histerezis; b) ecuația curbei de primă polarizare și dependențele permitivităților totală $\varepsilon = \frac{D}{E}$ și diferențială $\varepsilon_d = \frac{dD}{dE}$, pe curba de primă polarizare, de intensitatea cîmpului electric; c) puterea disipată în unitatea de volum a feroelectricului, în condițiile unui cîmp electric alternativ de amplitudine E_0 și frecvență f; d) rezistența electrică echivalentă pierderilor prin histerezis în feroelectric, în condițiile în care între armăturile condensatorului cilindric se aplică o tensiune de frecvență f și amplitudine U_0.

(Selecția lotului național de Fizică pentru Olimpiada internațională de la Londra, 1986, Univ. Timișoara)

46°. Se consideră montajul din figura F.C.11, unde $C_1 = 40\ \mu F$, iar $L = 0{,}3$ H. Ştiind că la momentul iniţial comutatorul K este trecut din poziţia 1 (pentru care pulsaţia de rezonanţă a circuitului era $\omega_0 = 500$ rad/s) în poziţia 2, moment în care potenţialele armăturilor condensatoarelor C_1 şi C_2 legate de solenoid erau $u_{10} = -1$ V, $u_{20} = 2$ V, iar fluxul magnetic prin solenoid era $\Phi_0 = 3 \cdot 10^{-3}$ Wb, să se determine: a) capacitatea condensatorului C_2; b) dacă există un punct al înfăşurării solenoidului al cărui potenţial electric să rămînă constant în timp (comutatorul K fiind în poziţia 2); c) amplitudinea $u_{1,\,max}$ a oscilaţiilor potenţialului armăturii considerate a condensatorului C_1; d) sistemul mecanic ale cărui oscilaţii să fie descrise de ecuaţii analoage cu cele ale circuitului serie C_1LC_2 considerat (fig. F.C.11).

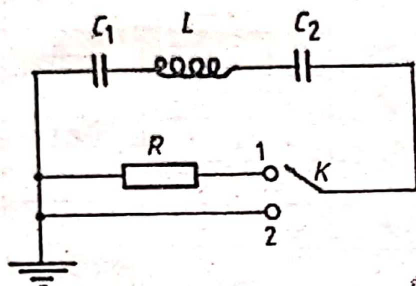


Fig. F.C.11

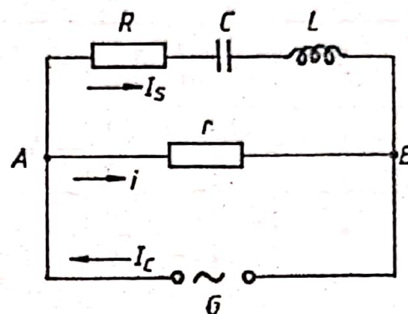


Fig. F.C.12

47°. Se consideră circuitul oscilant din figura F.C.12. Ştiind că generatorul G debitează un curent electric sinusoidal $I_c = I_0 \cos (2\pi \nu t - \varphi)$ de frecvenţă ν care poate fi variată, dar avînd aceeaşi amplitudine I_0 pentru toate frecvenţele, să se determine (în funcţie de R, r, C şi L): a) relaţia dintre amplitudinile i_0 şi I_{s0} ale intensităţilor curenţilor care trec prin rezistorul r, respectiv prin ramura serie RLC, precum şi defazajul φ_s dintre oscilaţiile acestor curenţi, pentru o frecvenţă ν dată a curentului debitat de generator; b) relaţia dintre amplitudinile i_0 şi I_0, precum şi defazajul φ dintre oscilaţiile curenţilor i şi I_c; c) dependenţa de frecvenţă a amplitudinii U_0 a tensiunii U_{AB} dintre bornele circuitului RLC mixt considerat, precum şi frecvenţa ν_0 la care amplitudinea acestei tensiuni atinge — în condiţiile unei valori invariabile a amplitudinii I_0 — valoarea minimă U_{min}; d) factorul de calitate pentru selectivitate al acestui circuit, definit prin expresia $Q = \nu_0/(\nu_2 - \nu_1)$, unde ν_1 şi ν_2 sînt frecvenţele pentru care tensiunea U_{AB} este egală cu $\sqrt{2}\, U_{min}$, specificînd şi condiţia în care definiţia acestui factor de calitate are sens. (Barajul pentru selecţia lotului naţional de Fizică, în vederea Balcaniadei şi Olimpiadei internaţionale, Ploieşti, 1986)

48°. O „cutie neagră“ cu trei borne (1, 2 şi 3) conţine o schemă electrică simplă, de forma unui triunghi. Pentru determinarea naturii elementelor schemei se scurtcircuitează pe rînd cîte două dintre bornele „cutiei negre“, ridicînd apoi caracteristica $I = f(U)$ (curent-tensiune) a dipolului astfel rezultat cu ajutorul montajului din figura F.C.13.

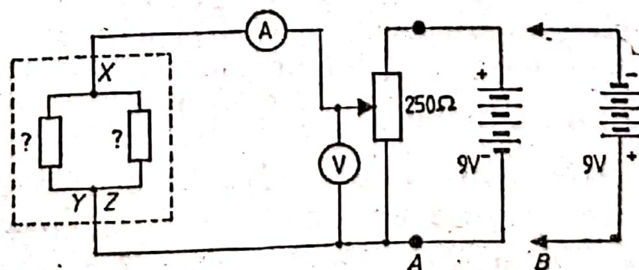


Fig. F.C.13

Rezultatele numerice obținute sînt indicate în tabelul de mai jos.

Bornele			Conexiunea	Parametrul	Valorile numerice ale $I = f(U)$							
X	Y	Z										
3	1	2	A	I[mA]	0	0	4	50	104	170	250	300
				U[V]	0	0,5	0,6	0,8	0,9	1,0	1,1	1,15
			B	I[mA]	0	−1,05	−2,1	−3,2	−4,2	−5,3	−6,35	−7,4
				U[V]	0	−1	−2	−3	−4	−5	−6	−7
2	1	3	A	I[mA]	0	0	4	44	115	175	250	300
				U[V]	0	0,4	0,6	0,8	0,9	1,0	1,1	1,15
			B	I[mA]	0	−0,4	−0,76	−1,12	−1,5	−1,9	−2,2	−2,6
				U[V]	0	−1	−2	−3	−4	−5	−6	−7
1	2	3	A	I[mA]	0	1,4	2,8	4,2	5,6	7,1	8,6	10
				U[V]	0	1	2	3	4	5	6	7
			B	I[mA]	0	−1,4	−2,8	−4,2	−5,6	−7,1	−8,6	−10
				U[V]	0	−1	−2	−3	−4	−5	−6	−7

Se cere: a) să se determine natura elementelor schemei; b) să se evalueze principalele lor caracteristici fizice (parametri).

(Prima Balcaniadă de Fizică, Plovdiv, R.P. Bulgaria, 1986)

49°. A. Un circuit oscilant este format dintr-un condensator de capacitate $C = 1{,}8\ \mu F$ și o bobină formată din $N = 200$ spire înfășurate pe un tor gol, avînd secțiunile axiale de formă dreptunghiulară, iar secțiunea transversală de forma unei coroane circulare (fig. F.C.14). Știind că dimensiunile torului sînt grosimea $g = 1$ cm, razele interioară $r_i = 2$ cm și exterioară $r_e = 4$ cm, iar frecvența de rezonanță a circuitului este $f_0 = 15{,}9$ kHz, să se determine a) expresia fluxului magnetic, printr-o porțiune de lățime dr a unei secțiuni axiale (fig. F.C.14), corespunzătoare intensității I a curentului electric prin înfășurarea torului, în funcție de distanța r de la această porțiune la axa de simetrie a torului; b) permeabilitatea absolută a aerului.

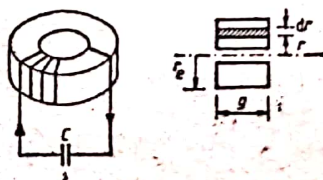


Fig. F.C.14

Se dă $\ln 2 \approx 0{,}693$.

B. În cazul în care circuitul oscilant de mai sus este cuplat cu un circuit deschis ce emite o undă electromagnetică total plan polarizată, cu frecvența de rezonanță f_0 a circuitului și densitatea fluxului de energie electromagnetică a undei — într-un mediu cu permitivitatea $\varepsilon = 10^{-11}\ \frac{F}{m}$ și $\mu_r = 1$ — fiind: $S = 14\ \frac{W}{m^2}$, să se determine; a) lungimea de undă în mediul considerat; b) amplitudinile oscilațiilor cîmpurilor electric, respectiv magnetic, ale undei.

(Test în cadrul pregătirii lotului de Fizică pentru Balcaniada din 1986, Univ. Timișoara)

50°. O linie AA', BB' de rezistență totală $R_1 = 1\ \Omega$, alimentată de la un generator de tensiune sinusoidală montat între punctele A și B, are ca sarcină un consumator, montat între punctele A' și B', format dintr-o rezistență R_2 și o inductanță L (fig. F.C.15), tensiunea efectivă la bornele consumatorului fiind $U_2 = 100$ V. Consumatorul disipă puterea $P_2 = 2$ kW și are un factor de putere $\cos\varphi = 0{,}8$. Să se calculeze: a) intensitatea curentului în circuit; b) valoarea efectivă U_1 a tensiunii între punctele A și B și puterea activă consumată între punctele A și B; c) defazajul ψ dintre curent și tensiune între punctele A și B.

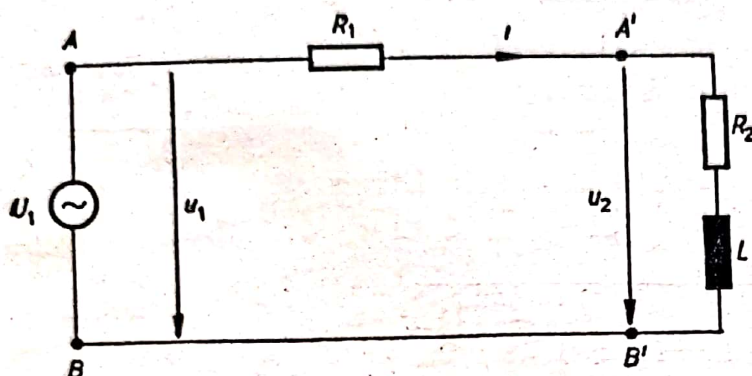


Fig. F.C.15

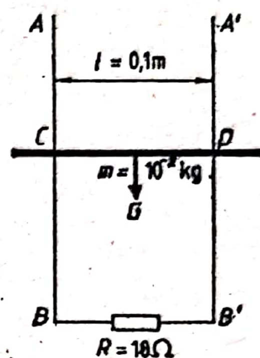


Fig. F.C.16

51°. În problema precedentă se anulează defazajul dintre U_2 și I fără a se schimba structura consumatorului ($\cos\varphi$, U_2 și P_2 aceleași), prin montarea în paralel cu consumatorul a unui condensator de capacitate C. Știind că frecvența curentului furnizat de generator este $f = 50$ Hz, să se calculeze: a) valoarea capacității C a condensatorului; b) valorile efective ale curenților I și I_C care trec prin rezistența R_1, respectiv prin condensator; c) puterea activă între punctele A și B în aceste condiții.

52°. Două conductoare verticale paralele AB și $A'B'$, situate la distanța $l = 0{,}1$ m, sînt așezate într-un cîmp magnetic uniform de inducție $B = 1$ T perpendicular pe planul conductorilor ca în figura F.C.16, extremitățile B și B' ale conductorilor fiind legate printr-o rezistență $R = 10\ \Omega$. O bară orizontală CD de masă $m = 10^{-2}$ kg glisează pe conductoarele AB și $A'B'$, avînd, la momentul inițial $t = 0$, viteza nulă. Se neglijează rezistențele firelor BC, CD și DB' și se consideră $g = 9{,}8$ m/s². Să se afle: a) legea de variație în timp a vitezei barei CD în funcție de timp și să se reprezinte grafic; b) viteza limită a barei; c) momentul t și valoarea curentului i prin rezistența R, atunci cînd mișcarea barei se face cu jumătate din viteza limită.

53°. Două condensatoare plane cu aer, C_1 și C_2, montate în paralel, au suprafața armăturilor $S = 100$ cm² și distanțele dintre armături $d_1 = 1$ cm, respectiv $d_2 = d_1/2$, la bornele sistemului fiind aplicată $U_0 = 1000$ V. a) Să se calculeze sarcina și energia înmagazinată în fiecare condensator. b) Se izolează sistemul celor două condensatoare legate în paralel de sursa de tensiune. Se deplasează una dintre armăturile condensatorului C_2 astfel încît $d_2 = d_1$. Să se calculeze în acest caz capacitățile, sarcinile și diferența de potențial pe fiecare condensator, precum și energia înmagazinată în fiecare dintre acestea. c) Să se calculeze forța care se exercită asupra armăturii mobile a lui C_2 într-o stare intermediară, unde distanța dintre armături este $\frac{d_1}{2} < x < d_1$. Aplicație pentru $x = 3d_1/4$. Se cunoaște $\varepsilon_0 = 8{,}85 \cdot 10^{-12}$ F/m.

54°. Se consideră montajul din figura F.C.17 în care două baterii, de tensiuni electromotoare E_1 și E_2, debitează pe rezistența R. Se cunosc: $E_1 = 120$ V,

$E_2=60$ V, $R_1=30\ \Omega$, $R_2=15\ \Omega$, $R=150\ \Omega$. a) Să se calculeze curentul I care circulă prin rezistența R prin două metode: aplicînd legile lui Kirchhoff și considerînd egalitatea $I=I'+I''$, unde I' și I'' corespund pe rînd stărilor de echilibru $E_1=0$, respectiv $E_2=0$. b) Să se calculeze tensiunea electromotoare și rezistența internă ale unui generator echivalent ansamblului situat la bornele AB ale rezistenței R. c) Care este tensiunea U la bornele rezistenței R și puterea disipată pe această rezistență?

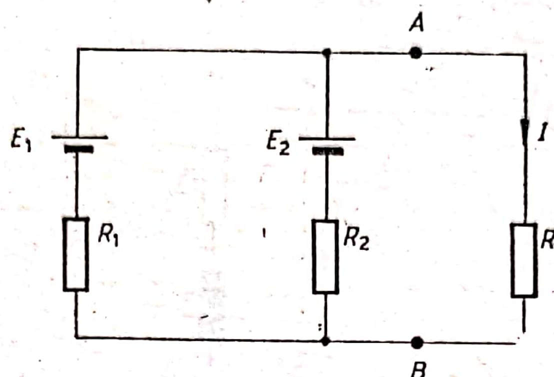


Fig. F.C.17

55°. Un circuit paralel este alcătuit dintr-un generator paralel, G, cu tensiunea electromotoare $E_1=120$ V și rezistența internă $r_1=2\ \Omega$, o baterie tampon B_t cu tensiunea electromotoare $E_2=100$ V și rezistența internă $r_2=1\ \Omega$ și un motor M cu rezistența $r_3=2\ \Omega$ care furnizează puterea mecanică P. a) Să se arate că intensitatea I_3 a curentului prin motor este determinată de o ecuație de gradul doi și să se stabilească pentru ce valori ale lui P această ecuație admite cel puțin o soluție. b) Să se stabilească ecuația verificată de tensiunea contraelectromotoare U_c a motorului și să se calculeze această tensiune în cazul în care intensitatea curentului prin bateria tampon $I_2=0$. c) Care sînt valorile curenților în circuit, dacă $P=650$ W?

4. OPTICĂ

56°. O lentilă convex-concavă (menisc convergent) are distanța focală $f=15$ cm. Știind că razele celor două suprafețe care mărginesc lentila sînt de 90 cm și, respectiv, 10 cm, să se determine: a) indicele de refracție al materialului lentilei; b) locul unde se formează imaginea unui obiect liniar cu lungimea $l=f/\sqrt{3}$ așezat la distanța de 25 cm de lentilă și mărimea imaginii; c) poziția și mărimea imaginii obținute în cazul cînd se plasează o oglindă plană perpendicular pe planul format de obiect și axul optic, astfel încît unghiul format cu axul optic să fie de 60°, iar intersecția oglinzii cu axul optic să coincidă cu imaginea punctului obiect aflat pe axul optic.

57°. Un sistem optic constă din două lentile subțiri cu distanțele focale f_1 și f_2, distanța dintre lentile fiind d. Sistemul dat trebuie înlocuit cu o singură lentilă subțire care, pentru orice poziție a unui obiect, trebuie să dea aceeași mărire transversală ca și sistemul. Să se calculeze: a) care trebuie să fie distanța focală a lentilei; b) unde trebuie să fie ea plasată în raport cu pozițiile lentilelor sistemului.

58°. O oglindă sferică dă, pentru un obiect real, o imagine virtuală dreaptă, de patru ori mai mică decît obiectul și situată la 12 cm de oglindă. Se cere: a) distanța de la obiect la oglindă; b) natura oglinzii; c) distanța sa focală.

59°. Filamentul AB al unui bec electric este plasat la 1 m în fața unei oglinzi sferice concave a cărei rază este $R=0{,}75$ m. Se cere: a) să se determine poziția imaginii $A'B'$ dată de oglindă; b) să se studieze ce devine imaginea $A'B'$, dacă

între filamentul AB și oglindă se interpune o cuvă de sticlă, umplută cu apă și de grosime $e = 0{,}32$ m. Se știe că $n = \frac{4}{3}$.

60°. Pentru a studia un ochi, acesta se consideră redus la o lentilă subțire echiconvexă, de indice de refracție 1,5, situată la 1,5 cm de retină. Se cere: a) raza de curbură R_1 a celor două fețe ale lentilei; b) raza de curbură R_2 a uneia din fețele lentilei cu care este echivalent ochiul, cînd acesta se acomodează să poată vedea obiecte la distanța de 20 cm.

61°. O rețea plană de difracție prin transmisie s-a obținut prin înregistrarea pe o peliculă a figurii de interferență obținută prin suprapunerea a două fascicule paralele monocromatice de lumină coerentă ale căror direcții formează un unghi α. Știind că suprafața plană a peliculei este plasată perpendicular pe unul dintre fascicule, se cere: a) interfranja în funcție de λ și α; b) numărul maxim de franje pe 1 mm pentru lungimea de undă $\lambda = 500$ nm; c) ordinul maxim de difracție ce se poate obține în cazul unei radiații ce cade normal pe rețea, avînd lungimea de undă $\lambda_1 = 0{,}5$ μm și lungimile de undă λ' ale radiațiilor din domeniul (0,4—0,7) μm ale căror maxime de difracție de ordinul k (observate în condițiile specificate) se suprapun cu maximul de difracție de ordinul $k+1$ ale radiației cu lungimea de undă λ_1, rețeaua de difracție fiind executată cu parametrii fasciculelor $\lambda = 0{,}65$ μm și $\sin \alpha = 0{,}195$.

(Olimpiada de fizică, faza națională, Ploiești, 1986)

62°. Un sistem optic constă dintr-o prismă rectangulară cu unghiul de refracție θ și indicele de refracție n_1 și o lentilă plan-convexă cu raza de curbură R și indicele de refracție n_2 ($>n_1$), alipită de prismă. Un fascicul îngust de lumină monocromatică, venind de la o sursă aflată la infinit în partea prismei, cade pe sistemul optic considerat după o direcție paralelă cu axa optică a lentilei. Se cere: a) să se găsească poziția imaginii sursei; b) să se studieze funcționarea sistemului în cazul unei distanțe nenule ($d \neq 0$) între prismă și lentilă. Se dau $R = 0{,}1$ m, $n_1 = 1{,}4$, $n_2 = 1{,}8$, $\theta = 18°$, $n_{aer} \approx 1$.

(Prima Balcaniadă de Fizică, Plovdiv, R.P. Bulgaria, mai 1986)

63°. O lentilă subțire de rază $r = 0{,}6$ cm și distanță focală $f = 12$ cm este tăiată și se îndepărtează porțiunea centrală, de lățime $a = 4$ mm (fig. F.C. 18, a); apoi se alipesc cele două părți egale, rămase. Pe axa de simetrie a dispozitivului optic astfel format, la distanța $p = 7{,}2$ cm de acesta, se așază o fantă reglabilă F, alipită de o sursă luminoasă; știind că în cazul în care deschiderea fan-

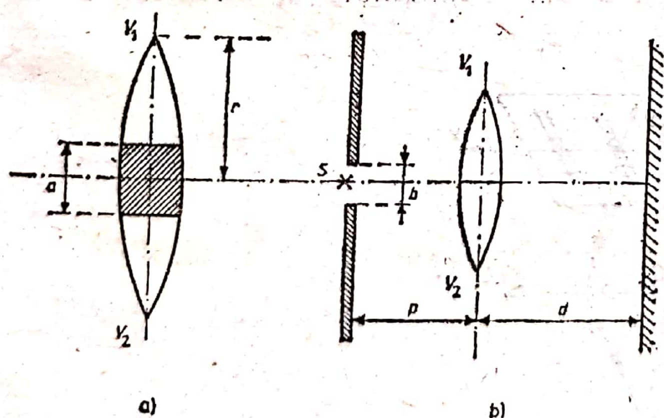


Fig. F.C.18

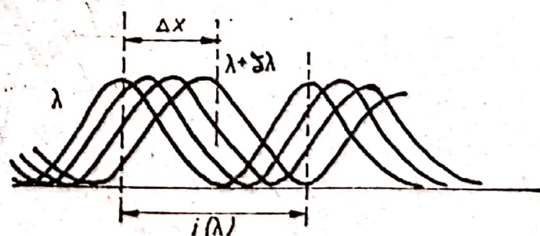


Fig. F.C.19

tei nu este punctiformă sau radiația e compusă din componente spectrale de lungimi de undă cuprinse în intervalul $[\lambda, \lambda + \delta\lambda]$, franjele figurii de interferență pot fi distinse atît timp cît distanța Δx, pe care se găsesc maximele de același ordin ale figurilor de interferență elementare, nu depășește $\frac{1}{2}$ din cea mai mică interfran-

jă a unei figuri de interferență elementare (fig. F.C. 19), să se determine: a) numărul franjelor de interferență care pot fi observate pe un ecran situat la distanța $d = 0{,}82$ m de dispozitivul optic, în cazul unei surse punctiforme monocromatice ($\lambda = 600$ nm); b) numărul franjelor care pot fi observate pe același ecran în cazul unei surse punctiforme, cu lungimi de undă cuprinse între 600 și 700 nm; c) lățimea maximă b a fantei pentru care mai pot exista franjele care apar în condițiile specificate la punctul a).

64°. Se consideră dispozitivul diferențial din figura F.C.20, în care $p = 0{,}2$ m și $a = 0{,}3$ m. Știind că lungimea de undă a radiației monocromatice emisă de sursă este $\lambda = 500$ nm și că pentru distanțe b de ordinul metrului interfranja rămîne constantă $i = 0{,}5$ mm, franjele dispărînd dacă $b > 11{,}5$ m, să se determine: a) dis-

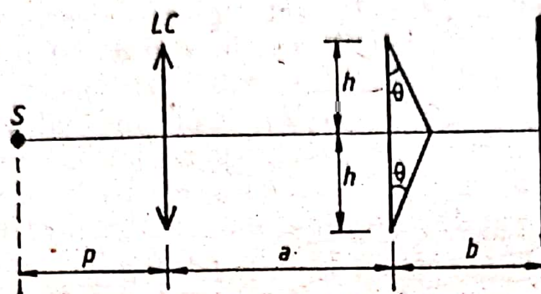


Fig. F.C.20

tanța focală a lentilei; b) unghiul refringent θ al biprismei, cunoscînd indicele de refracție ($n = 1{,}5$) ale acesteia; c) înălțimea $2h$ a biprismei; d) numărul maxim N_{max} de franje întunecate care pot fi observate și distanța b la care pot fi detectate acestea; e) poziția surselor virtuale care determină figura de interferență, în cazul scoaterii lentilei din dispozitiv. Se știe că unghiul $\theta \ll 1$ radian și se va ține seamă că $h \ll a + b$.

(Etapa națională a Olimpiadei de fizică, clasa a XI-a, Craiova, 1983)

65°. Se consideră incidența unei radiații electromagnetice monocromatice, de lungime de undă $\lambda = 460{,}2$ nm, pe o rețea de difracție unidimensională avînd lungimea $L = 2$ cm și 50 trăsături/mm. Știind că direcția fasciculului incident formează unghiul $\theta_0 = 60°$ cu normala OX pe laturile trăsăturilor, din planul rețelei (fig. F.C. 21), să se determine: a) unghiul θ format de direcția maximului de ordinul $k = 9$ cu normala Ox; b) diferența G dintre lungimile de undă $\lambda + G$ ale

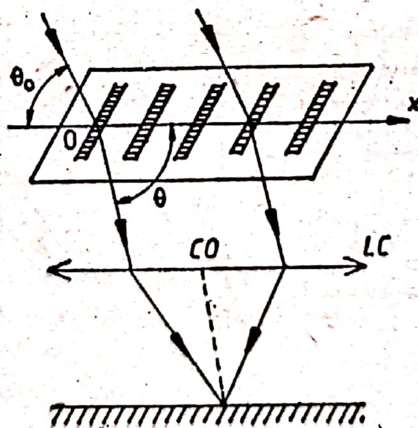


Fig. F.C.21

altei componente monocromatice și λ a componentei considerate pentru care maximul de ordin k al componentei $\lambda + G$ se suprapune cu maximul de ordin $(k+1)$ al componentei λ; c) diferența $\delta\lambda$ dintre lungimile de undă ale unei a treia com-

ponente monocromatice $\lambda + \delta\lambda$ şi cea a primei componente monocromatice λ considerate, pentru care maximul de ordinul k al componentei $\lambda + \delta\lambda$ se suprapune cu primul minim următor maximului de ordinul k al componentei λ.

(Test în cadrul pregătirii lotului naţional pentru Balcaniada de Fizică, 1986, Univ. Timişoara)

66°. Un obiectiv fotografic este alcătuit dintr-o lentilă convergentă plan-convexă formată din două lentile alipite: o lentilă subţire plan concavă de rază de curbură R şi indice de refracţie n_1 şi o lentilă subţire biconvexă de raze de curbură R şi R' şi indice de refracţie n_2. a) Să se scrie expresiile distanţelor focale imagine f_1 şi f_2' ale celor două lentile. b) Să se scrie expresia distanţei focale imagine F' a obiectivului fotografic. c) Ştiind că indicii de refracţie n_1 şi n_2 sînt funcţii de lungimile de undă ale radiaţiilor utilizate şi anume: n_1 (galben) $= 1{,}617$, n_1 (albastru) $= 1{,}629$, n_2 (galben) $= 1{,}512$, n_2 (albastru) $= 1{,}518$ şi că distanţa focală imagine a obiectivului este de 12 cm atît în galben, cît şi în albastru, să se calculeze razele de curbură R şi R'.

67°. Se consideră sistemul din figura F.C.22 în care imaginea punctului luminos A situat pe axa principală a lentilei convergente subţiri C_1, de 5 dioptrii, la 25 cm de lentilă, este A_1. Dincolo de lentila C_1, la 130 de cm, se află o altă lentilă

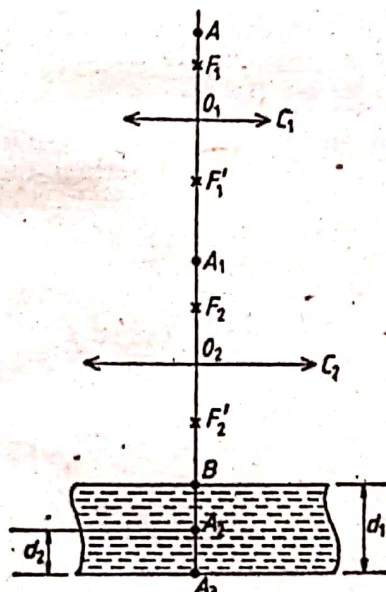


Fig. F.C.22

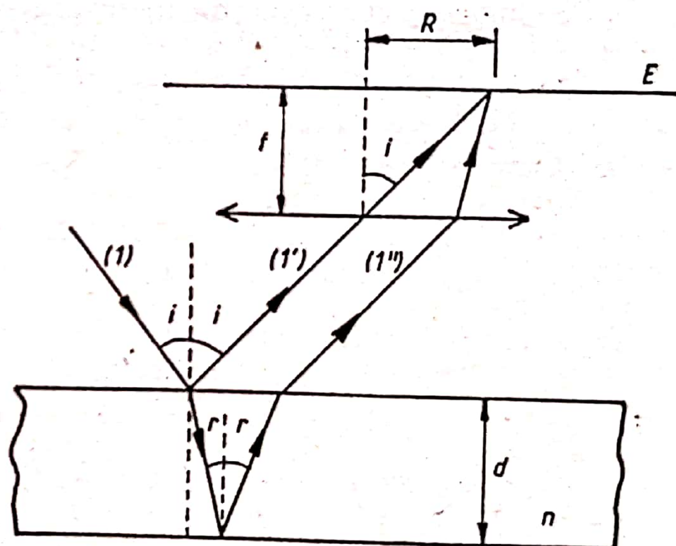


Fig. F.C.23

C_2 de 4 dioptrii. Se cere: a) poziţia imaginii finale A_2 a punctului luminos A în raport cu C_2; b) sub nivelul B, situat la 75 de cm de C_2, se introduce apă, astfel încît imaginea finală se formează în A_3; să se determine deplasarea A_2A_3; c) care este poziţia lentilei C_2 pentru ca imaginea punctului A să se formeze în A_3 în absenţa apei. Indicele de refracţie al apei este $n = 4/3$.

68°. Se observă fenomenul de interferenţă prin reflexie într-o lamă de sticlă plan-paralelă de grosime $d = 2$ cm iluminată cu o radiaţie avînd $\lambda = 6000$ Å, utilizîndu-se configuraţia experimentală din figura F.C. 23. Lentila L are distanţa focală $f = 10$ cm, iar lama plan-paralelă are indicele de refracţie $n = 1{,}5$. Se cere: a) diferenţa de drum dintre razele care interferă, pentru maximul de ordinul 20; b) să se stabilească dacă centrul figurii de interferenţă corespunde unui maxim sau unui minim; c) să se calculeze raza inelului de interferenţă de ordinul 10.

5. FIZICĂ ATOMICĂ ŞI NUCLEARĂ

69°. Pentru ca suprafaţa unui metal să emită fotoelectroni, este necesar să fie iluminată cu radiaţii avînd lungimea de undă $\lambda_0 = 3200$ Å. Se cere, să se determine: a) lucrul de ieşire al metalului folosit, exprimat în J şi în eV; b) diferenţa de potenţial de frînare necesară pentru a „tăia" fotocurentul, dacă iluminarea se face cu radiaţii avînd lungimea de undă $\lambda = 2400$ Å; c) viteza fotoelectronilor emişi în cazul în care iluminarea suprafeţei metalului se face cu radiaţii avînd lungimea de undă $\lambda = 2400$ Å şi lungimea de undă a undelor asociate fotoelectronilor emişi în acelaşi caz.

Se cunosc: $h \simeq 6{,}625 \cdot 10^{-34}$ J·s; $c \simeq 3 \cdot 10^8$ m·s^{-1}; $e \cong 1{,}6 \cdot 10^{-19}$ C şi $m \cong 9{,}1 \cdot 10^{-31}$ kg.

70°. Un foton avînd lungimea de undă λ_i se împrăştie cuasielastic pe un electron liber aflat în mişcare. După ciocnire electronul se opreşte, iar fotonul rezultat, cu lungimea de undă λ_0, deviat sub unghiul $\theta = 60°$ faţă de direcţia iniţială a fotonului, se ciocneşte cu un alt electron liber aflat în repaus. Din cel de-al doilea proces de ciocnire rezultă un foton cu lungimea de undă $\lambda_f = 1{,}25 \cdot 10^{-10}$ m, deviat sub unghiul $\theta = 60°$ faţă de direcţia de mişcare a fotonului cu lungimea de undă λ_0. Se cere: a) să se determine lungimea de undă de Broglie a electronului care interacţionează cu fotonul iniţial, în cazul nerelativist şi în cazul relativist; b) energia primită de la al doilea electron şi direcţia de mişcare faţă de direcţia fotonului de lungime de undă λ_0.

Se cunosc: constanta lui Planck, $h = 6{,}625 \cdot 10^{-34}$ J·s, masa de repaus a electronului, $m_0 = 9{,}1 \cdot 10^{-31}$ kg şi viteza luminii în vid, $c \cong 3 \cdot 10^8$ m·s^{-1}.

71°. Schema de niveluri energetice a Hg este dată în figura F.C.24. Comparaţi cantitatea de energie absorbită cînd vaporii de mercur sînt bombardaţi cu electroni de 6 eV şi cînd sînt bombardaţi cu fotoni de lumină de 6 eV.

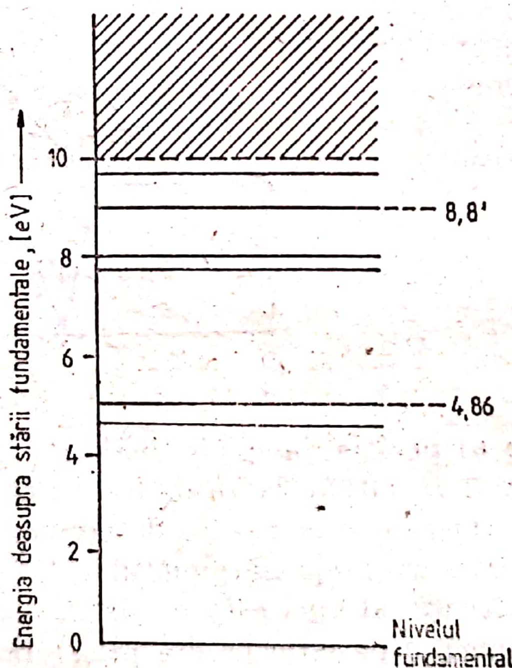


Fig. F.C.24

72°. O particulă α, cu viteza $v = 10^7$ m·s^{-1}, este deviată de un nucleu de aur aflat în repaus, sub un unghi de 60°. Presupunînd că doar o mică parte din energia cinetică a particulei α este transferată nucleului de aur, astfel încît viteza particulei după deviere rămîne aproape aceeaşi ca şi înainte, se cere să se calculeze:

a) impulsul imprimat atomului de aur; b) viteza imprimată nucleului de aur; c) energia cinetică cedată nucleului de aur. Se dau masele particulei α: $m_\alpha \simeq 6{,}62 \cdot 10^{-27}$ kg și a nucleului de aur: $m_N \simeq 3{,}3 \cdot 10^{-25}$ kg.

73°. Un preparat radioactiv emite două tipuri de radiații alfa, cu energiile cinetice de 6,25 MeV și 9 MeV. Fasciculul de particule alfa intră într-un spectrograf de masă cu deviere de 90°, în care acționează perpendicular pe viteza particulelor un cîmp magnetic omogen, cu inducția magnetică de 1 T. Să se calculeze: a) vitezele celor două tipuri de particule alfa; b) razele traiectoriilor lor în cîmpul magnetic; c) cu cît se vor separa cele două tipuri de particule pe placa fotografică înregistratoare așezată paralel față de direcția de intrare a fasciculului.

Se dau: masa de repaus a particulei alfa, $m_0 \cong 4$ u, unitatea de masă atomică fiind 1 u $\cong 1{,}67 \cdot 10^{-27}$ kg, sarcina particulei alfa $q = 2e$, sarcina elementară fiind $e \cong 1{,}6 \cdot 10^{-19}$ C și viteza luminii în vid $c \cong 3 \cdot 10^8$ m · s^{-1}.

Se știe că 1 MeV $= 1{,}6 \cdot 10^{-13}$ J.

(Concurs de admitere, septembrie 1982).

74°. O particulă α cu energia cinetică $E_\alpha = 5{,}2$ MeV inițiază reacția nucleară ^{9}Be $(\alpha, n)^{12}$C. Știind că energia degajată în reacție este $Q = 5{,}7$ MeV, să se calculeze energia cinetică a neutronului generat, în funcție de unghiul θ dintre traiectoria particulei α și traiectoria neutronului și să se particularizeze pentru $\theta = \frac{\pi}{2}$. Se cunosc: $m_n \cong 1{,}00866$ u, $m_\alpha \cong 4{,}0006$ u și $m_c = 12$ u.

75°. În primele experiențe ale lui Ives-Stilwell, cu ajutorul unui spectrograf, a cărui axă era perfect ortogonală pe planul oglinzii plane O (fig. F.C.25), a fost

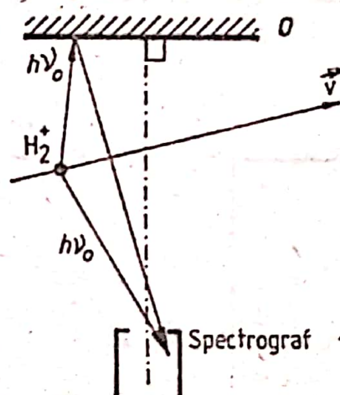


Fig. F.C.25

observat efectul Doppler pentru radiația monocromatică λ_0 a ionilor H_2^+, accelerați sub o diferență de potențial electric $U = 43$ kV. Știind că în cazul în care spectrograful captează și radiația reflectată de oglinda O, a cărei normală formează unghiul $\theta = 7°$ cu direcția ionilor H_2^+, spectrograful înregistrează componentele $\lambda_1 = \lambda_0 - \Delta\lambda + \Delta\lambda'$ și $\lambda_2 = \lambda_0 + \Delta\lambda + \Delta\lambda'$, unde $\lambda_0 = 4861$ Å, $\Delta\lambda = 35$ Å, iar $\Delta\lambda' = 0{,}12$ Å, să se determine: a) numerele cuantice principale ale stărilor atomului de hidrogen între care se produce tranziția însoțită de emisia fotonilor de lungime de undă λ_0; b) viteza ionilor de H_2^+ dedusă în baza (i) considerentelor energetice, respectiv (ii) a componentelor nerelativistă, respectiv relativistă ale efectului Doppler.

Se dau: masele electronului $m_0 \cong 9{,}1 \cdot 10^{-31}$ kg și ionului H_2^+: $m \cong 3{,}3 \cdot 10^{-27}$ kg, sarcina electrică elementară $e \cong 1{,}6 \cdot 10^{-19}$ C și constanta lui Planck, $h \cong 6{,}6 \cdot 10^{-34}$ J · s.

(Selecția lotului național de Fizică, 1988, Baia Mare).

76°. Nava cosmică „Balcaniada — 1" intersectează coada cometei Halley. Pe bordul navei funcționează un spectrometru de masă automat care studiază

periodic gazele din coada cometei şi transmite datele obţinute la centrul de comandă (control). În figura F.C. 26 puteţi vedea unul dintre spectrele primite la centrul de control. Analizaţi şi interpretaţi spectrul gazelor încă necunoscute prezente în coada cometei cu ajutorul unui catalog de linii caracteristice şi a unei rigle gradate, parcurgînd următoarele etape:

a) Priviţi spectrul de masă din figura F.C. 26. El conţine liniile spectrale ale gazelor necunoscute ale cometei şi — în plus — trei linii etalon (de calibrare). Liniile de calibrare corespund izotopilor neonului ($M = 20$ şi $M = 22$) şi beriliului ($M = 9$). Cu ajutorul liniilor calibrate, divizaţi axa OX a spectrelor în unităţi (numere) de masă, aşa cum s-a făcut în figurile F.C. 27a—l.

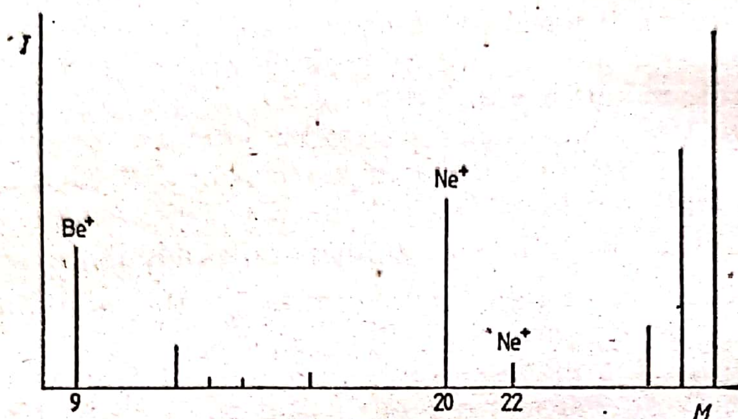
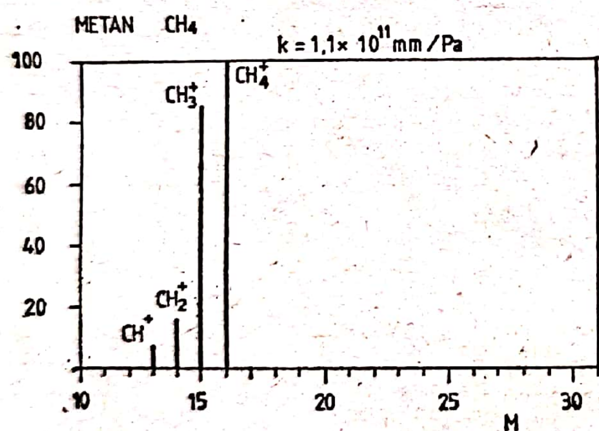
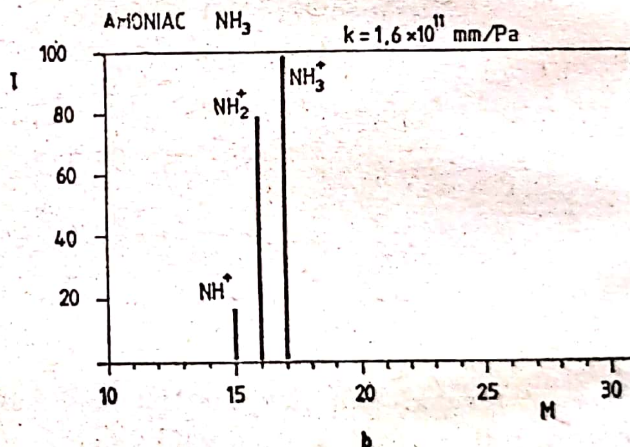
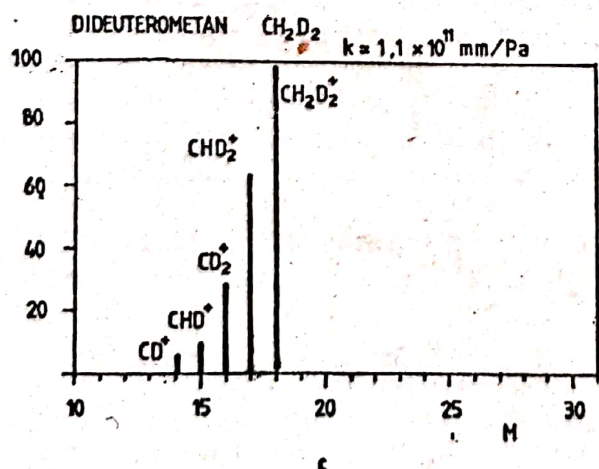
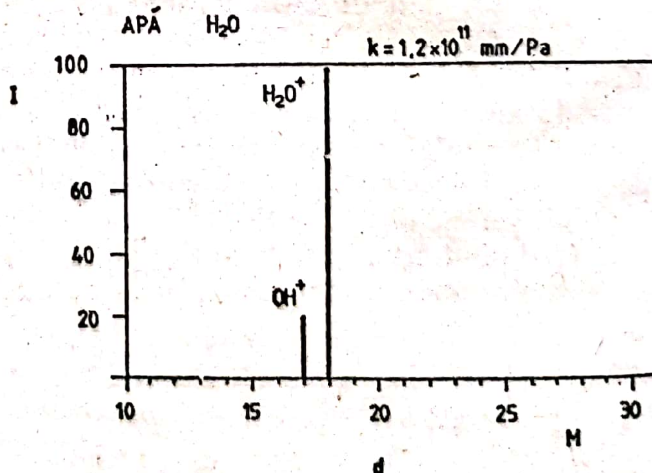


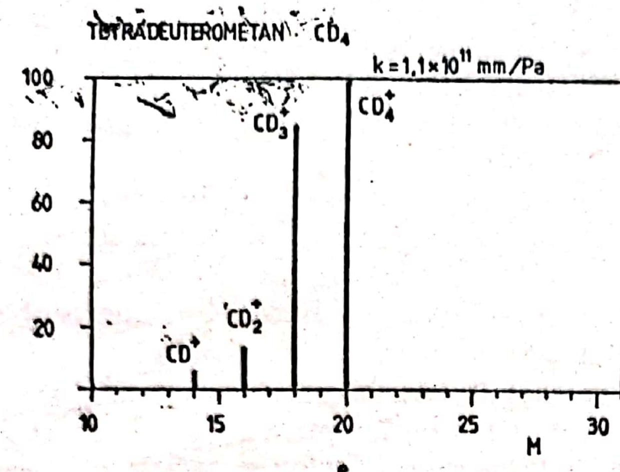
Fig. F.C.26

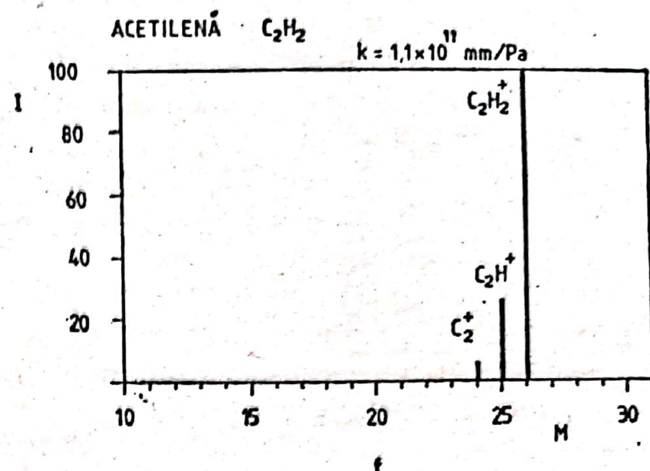


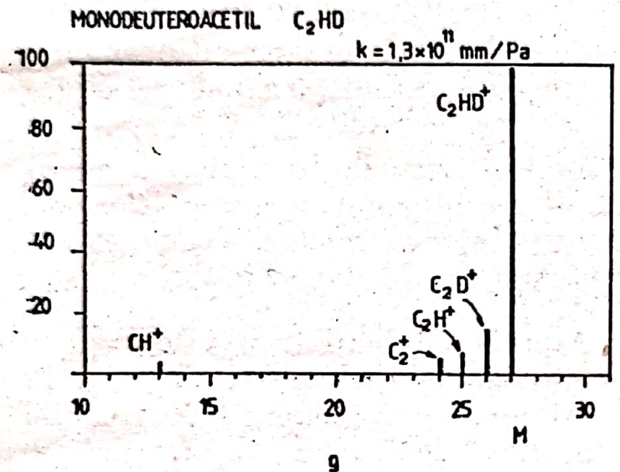


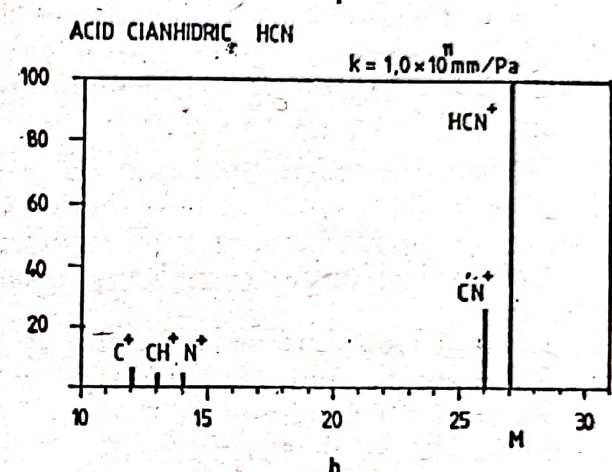


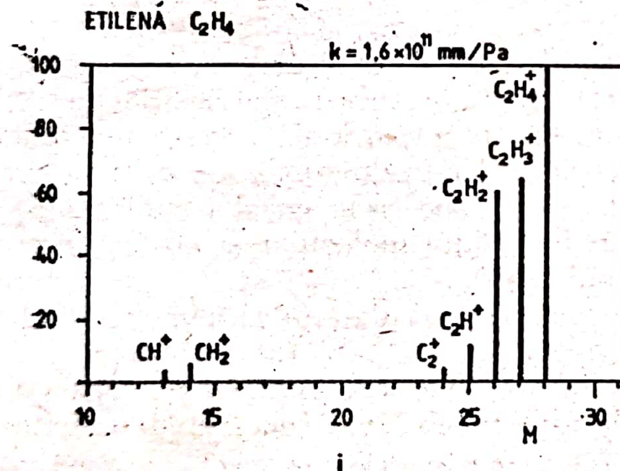


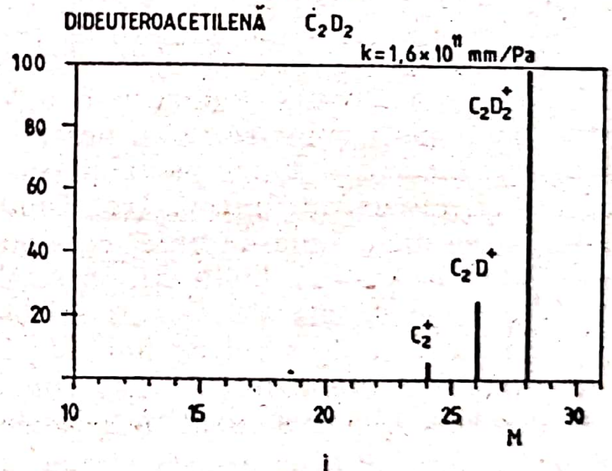

TETRADEUTEROMETAN CD4
k = 1,1×10^11 mm/Pa
100
80
60
40
20
CD+
CD2+
CD3+
CD4+
10
15
20
25
30
M
e

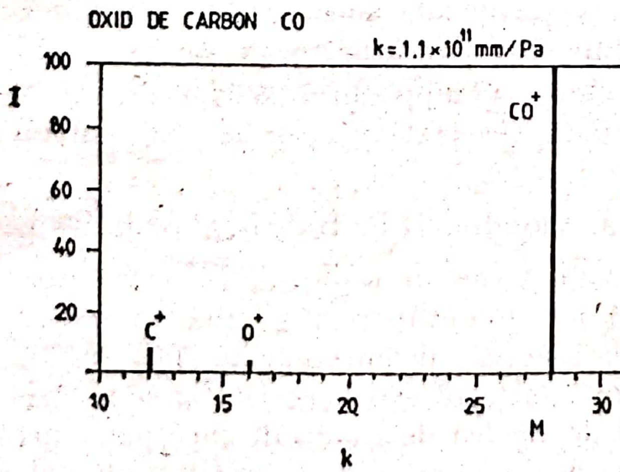

ACETILENĂ C2H2
k = 1,1×10^11 mm/Pa
I
100
80
60
40
20
C2H2+
C2H+
C2+
10
15
20
25
30
M
f


MONODEUTEROACETIL C2HD
k = 1,3×10^11 mm/Pa
100
80
60
40
20
C2HD+
C2D+
C2H+
C2+
CH+
10
15
20
25
30
M
g


ACID CIANHIDRIC HCN
k = 1,0×10^11 mm/Pa
100
80
60
40
20
HCN+
CN+
C+
CH+
N+
10
15
20
25
30
M
h


ETILENĂ C2H4
k = 1,6×10^11 mm/Pa
100
80
60
40
20
C2H4+
C2H3+
C2H2+
C2H+
C2+
CH+
CH2+
10
15
20
25
30
M
i


DIDEUTEROACETILENĂ C2D2
k = 1,6×10^11 mm/Pa
100
80
60
40
20
C2D2+
C2D+
C2+
10
15
20
25
30
M
j


OXID DE CARBON CO
k = 1,1×10^11 mm/Pa
I
100
80
60
40
20
CO+
C+
O+
10
15
20
25
30
M
k

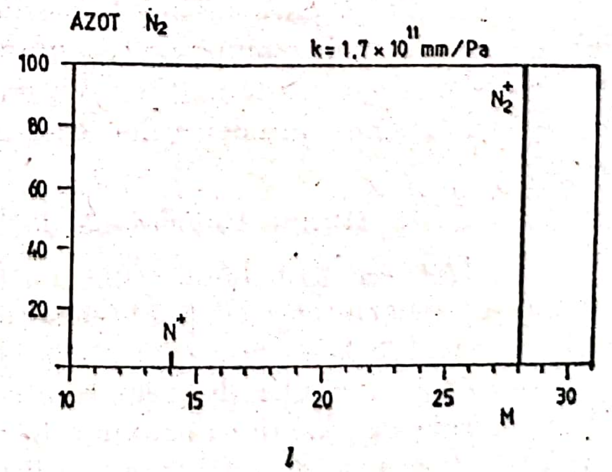

AZOT N2
k = 1,7×10^11 mm/Pa
I
100
80
60
40
20
N2+
N+
10
15
20
25
30
M
l

Fig. F.C.27

b) Spectrele din figurile F.C. 27a—l pot fi considerate drept un scurt catalog de spectre tipice de masă ale gazelor. Comparaţi spectrul primit de la nava spaţială cu spectrele din catalog. Identificaţi gazele cometei prezente în spectrul înregistrat şi scrieţi formulele lor chimice.

c) După ce aţi identificat gazele prezente în spectru, măsuraţi intensităţile (adică înălţimile maximelor) I_X, I_Y,... ale liniilor lor de bază, care corespund ionilor lor moleculari. Folosiţi aceste valori pentru a determina presiunile P_X, P_Y,... ale gazelor identificate, în ipoteza că intensitatea unei linii de bază din spectrul unui gaz este proporţională cu presiunea gazului, adică $I = kp$. Coeficientul k este sensibilitatea spectrometrului pentru respectivul gaz. Pentru gazele incluse în catalogul de spectre caracteristice, valorile coeficientului k sînt date cu o eroare de $\pm 2\%$. Estimaţi erorile cu care determinaţi presiunile gazelor şi scrieţi rezultatele dînd atît erorile absolute, cît şi cele relative, pentru fiecare presiune.

d) Determinaţi presiunea totală a atmosferei cometei în momentul analizei efectuate de spectrometru. Calculaţi eroarea cu care aţi determinat presiunea totală.

Indicaţii teoretice. Spectrometria de masă este o metodă de analiză a materialelor prin determinarea numerelor de masă M ale atomilor şi moleculelor lor. Numărul de masă este egal cu numărul de nucleoni din nucleu. Numerele de masă ale cîtorva atomi şi molecule uşoare sînt date în tabelul următor:

Atomul de hidrogen	H	1	Atomul de beriliu	Be	9
Molecula de hidrogen	H_2	2	Atomul de carbon	C	12
Atomul de deuteriu	D	2	Atomul de azot	N	14
Molecula de deuteriu	D_2	4	Atomul de oxigen	O	16
Atomul de heliu	He	4	Metanul	CH_4	16

Numerele de masă ale izotopilor unui element diferă prin ± 1, ± 2 etc.

Pentru a efectua analiza particulelor prin metoda spectrometriei de masă, aceste particule trebuie să fie în prealabil ionizate. În cursul ionizării este inevitabil totuşi ca o parte dintre particule să se disocieze, iar fragmentele lor să fie apoi ionizate şi înregistrate în spectru. Din acest motiv, spectrele gazelor moleculare conţin — pe lîngă linia de bază, care corespunde ionului molecular şi are cea mai mare intensitate — şi liniile fragmentelor moleculare.

Spectrele de masă ale materialelor pure sau spectrul unui singur gaz sînt caracterizate atît de setul de linii (de bază şi corespunzătoare fragmentelor), cît şi de rapoartele intensităţilor lor. Din acest motiv, spectrul unui singur gaz dă totdeauna posibilitatea identificării sale fără dubii, chiar şi atunci cînd diferite materiale pure ar avea acelaşi număr de masă. Amestecurile de gaze au spectre de masă complexe, care includ toate liniile spectrale ale spectrului fiecărui gaz simplu (care intră în componenţa amestecului). Dacă spectrul unui amestec conţine o linie comună pentru cîteva din gazele simple componente, intensitatea liniei comune va fi suma intensităţilor acestei linii în spectrele gazelor simple (care o conţin).

(Prima Balcaniadă de Fizică, Plovdiv, R.P. Bulgaria, mai 1986).

77°. Izotopul $^{35}_{17}Cl$, bombardat cu neutroni, trece în radiosulf $^{35}_{16}S$ care este negatogen (se dezintegrează β^-), avînd timpul de înjumătăţire de 87 zile. În reacţie se eliberează 168 keV. Se cere: a) să se scrie reacţiile dezintegrărilor $^{35}_{17}Cl$ şi $^{35}_{16}S$; b) să se arate că reacţia de formare a radiosulfului este exoenergetică şi să se calculeze energia de reacţie; c) numărul iniţial de nuclee de radiosulf care participă la reacţie, dacă prin dezintegrare se eliberează în prima secundă o cantitate de căl-

dură Q egală cu 20 J. Se cunosc: masa protonului $m_p \cong 1{,}00759$ u, masa neutronului $m_n \cong 1{,}00898$ u, masa atomului de clor $m_{Cl} \cong 34{,}98007$ u, masa atomului de sulf $m_S \cong 34{,}98022$ u.
(Se știe că: $1\ u \cong 1{,}660 \cdot 10^{-27}$ kg, $1\ u \cdot c^2 \cong 931{,}16$ MeV, $1\ eV \cong 1{,}6 \cdot 10^{-19}$ J, $N_A \cong$ $\cong 6{,}025 \cdot 10^{26}$ $kmol^{-1}$).

78°. Prin captarea unui neutron, nucleul de $^{59}_{27}Co$ se transformă în radiocobalt emițînd un foton γ. La rîndul său radiocobaltul emite particule beta cu energia de 0,4 MeV trecînd într-un izotop al nichelului, procesul fiind însoțit de emisia fotonilor gamma cu energia de 1,15 MeV. Știind că radiocobaltul are timpul de înjumătățire de 5,3 ani, se cere: a) să se scrie reacțiile nucleare care descriu aceste procese; b) știind că fotonii γ emiși de radiocobalt generează perechi electron-pozitron, să se determine vitezele acestor particule dacă energia electronului este egală cu cea a pozitronului și se neglijează efectele relativiste; c) numărul de nuclee de radiocobalt dezintegrate într-o oră și cantitatea de căldură degajată în acest timp, știind că numărul inițial de nuclee este $N_0 \cong 10^{22}$.

79°. Pentru caracterizarea unei fotodiode s-a utilizat un laser acordabil în vizibil și montajul din figura F.C.28, V fiind un voltmetru electronic cu impedanță foarte mare, iar mA un miliampermetru cu rezistența internă practic nulă.

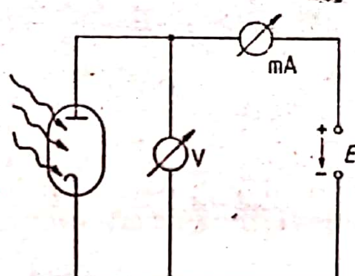


Fig. F.C.28

Pentru radiația cu lungimea de undă $\lambda_1 = 0{,}4898$ μm s-a obținut o tensiune de frînare (tensiune inversă pe fotodiodă care anulează curentul fotoelectric) $U_{f_1} = 0{,}709$ V, iar pentru radiația cu lungimea de undă $\lambda_2 = 0{,}4026$ μm, s-a obținut $U_{f_2} = 1{,}258$ V. a) Să se calculeze constanta lui Planck și lungimea de undă de prag a materialului fotocatodului. b) Pentru ce valoare a tensiunii de alimentare U, fotoelectronii ajunși la anod au o energie dublă față de cazul în care tensiunea pe fotodiodă este nulă. c) Care este lungimea de undă asociată fotoelectronilor în condițiile de la punctul b) pentru radiația cu lungimea de undă λ_1?
Se cunosc masa electronului, $m_0 \cong 9{,}1 \cdot 10^{-31}$ kg $\cong 0{,}511$ MeV și sarcina electrică a electronului, $e \cong 1{,}6 \cdot 10^{-19}$ C.

80°. Un electron de masă m și viteză $\vec{v}$ ciocnește un atom de masă M aflat inițial în repaus. Atomul capătă o viteză $\vec{V}$ avînd aceeași direcție cu $\vec{v}$ și este excitat pe un nivel energetic superior, cu energia ΔE mai înalt decît nivelul inițial (fundamental). Să se determine viteza minimă pe care trebuie să o aibă electronul inițial, știind că după ciocnire viteza sa este $\vec{v}'$.

REZOLVĂRI

1. MECANICĂ

1°. a) În figura F.C.29 este arătată situația corespunzătoare momentului agățării corpului și momentului cînd deformarea resortului este maximă, Δl. Luînd aceasta ca poziție de referință, în starea inițială corpul are energia potențială $mg\Delta l$. Aceasta este întreaga energie inițială a sistemului, deoarece corpul nu se mișcă, iar resortul este nedeformat: $E_i = mg\Delta l$. În situația finală corpul este în repaus și nu are nici energie potențială. Întrucît resortul este deformat cu Δl, energia sistemului în starea finală este $E_f = \frac{k(\Delta l)^2}{2}$. Conform conservării energiei,

$$mg\Delta l = \frac{k(\Delta l)^2}{2}, \qquad (1)$$

de unde $\Delta l = \frac{2mg}{k} = \frac{2 \cdot 0{,}1 \cdot 10}{10} = 0{,}2$ m.

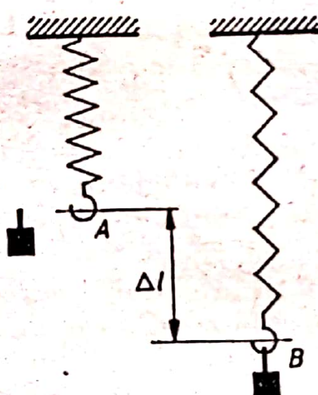


Fig. F.C.29

b) A și B sînt punctele în care se oprește corpul în timpul oscilației, deci poziția de echilibru este la mijlocul distanței $AB = \Delta l$; amplitudinea este $A = \frac{\Delta l}{2} = \frac{mg}{k} = 0{,}1$ m.

În această poziție, jumătate din energia potențială inițială s-a transformat în energie cinetică a corpului și energie potențială de deformare a resortului cu $\frac{\Delta l}{2}$, deci $\frac{mg\Delta l}{2} = \frac{mv^2}{2} + \frac{k(\Delta l)^2}{8}$ și, utilizînd (1), rezultă

$$v = \sqrt{g\frac{\Delta l}{2}} = g\sqrt{\frac{m}{k}} = 10\sqrt{\frac{0{,}1}{10}} = 1 \text{ m}\cdot\text{s}^{-1}.$$

c) Ecuația care descrie o mișcare oscilatorie armonică este $x = A\sin(\omega t + \varphi)$. În cazul de față, la momentul inițial, corpul se găsește la o extremitate, adică la $t = 0$ și $x = A$; rezultă $\sin\varphi = 1 \Rightarrow \varphi = \frac{\pi}{2}$.

Ţinînd seamă că $\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$, ecuaţia oscilaţiei devine

$$x = \frac{mg}{k} \sin\left(\sqrt{\frac{k}{m}}\, t + \frac{\pi}{2}\right) = 0{,}1 \sin\left(10\, t + \frac{\pi}{2}\right) \text{ [m]}.$$

2°. a) Vom scrie ecuaţiile pentru conservarea impulsului şi energiei în procesul ciocnirii elastice:

$$m_1 v = m_1 v' + m_2 v'', \qquad (1) \qquad \frac{m_1 v^2}{2} = \frac{m_1 v'^2}{2} + \frac{m_2 v''^2}{2}, \qquad (2)$$

unde am notat cu v' viteza corpului m_1 după ciocnire şi cu v'' viteza corpului m_2. Cele două ecuaţii se mai pot scrie: $m_1(v - v') = m_2 v''$ şi $m_1(v - v')(v + v') = m_2 v''^2$. Prin împărţire membru cu membru, rezultă $(v + v') = v''$. Introducînd în ecuaţia (1), se obţine $m_1(v - v') = m_2(v + v')$, de unde

$$v' = -\frac{v(m_2 - m_1)}{m_2 + m_1} = -\frac{20(0{,}8 - 5 \cdot 10^{-2})}{0{,}8 + 5 \cdot 10^{-2}} \approx -17{,}6 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}.$$

Semnul (—) arată că după ciocnire corpul m_1 se va mişca în sens opus.

$$v'' = v - \frac{v(m_2 - m_1)}{m_2 + m_1} = \frac{2m_1 v}{m_2 + m_1} = \frac{2 \cdot 5 \cdot 10^{-2} \cdot 20}{0{,}8 + 5 \cdot 10^{-2}} \approx 2{,}4 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}.$$

b) În momentul imediat următor ciocnirii, corpul m_2 este pus în mişcare circulară cu viteza v'', deci apare forţa centrifugă $F_{cf} = \frac{m_2 v''^2}{l}$. Tensiunea în fir va fi suma dintre greutate şi forţa centrifugă $T = G + F_{cf} = m_2\left(g + \frac{v''^2}{l}\right) = 0{,}8\left(10 + \frac{2{,}4^2}{1}\right) = 12{,}6$ N.

c) Corpul m_2 se va opri în momentul în care energia lui potenţială gravitaţională egalează energia cinetică iniţială: $m_2 g h = \frac{m_2 v''^2}{2}$. Ţinînd seama că $h = l - l \cos\alpha$ (fig. F.C.30), rezultă $\cos\alpha = 1 - \frac{v''^2}{2gl} = 1 - \frac{2{,}4^2}{2 \cdot 10 \cdot 1} = 0{,}712$, de unde $\alpha = \arccos 0{,}712 \approx 44°36'$.

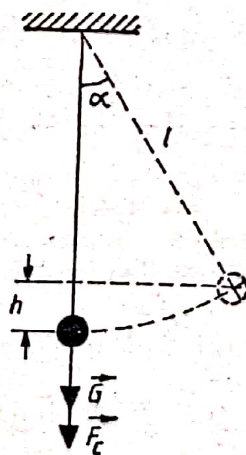


Fig. F.C.30

3°. a) Procesul de ciocnire fiind de tip plastic, conservarea impulsului se va scrie: $mv = (M + m)v'$, de unde $v' = \frac{mv}{M + m}$. Energia iniţială a sistemului este

energia cinetică a ansamblului celor două corpuri (deoarece resortul este nedeformat):

$$E_i = \frac{(M+m)}{2} v'^2 = \frac{m^2}{2(M+m)} v^2.$$

Corpul se va deplasa pînă cînd energia de deformare a resortului devine egală cu energia inițială, mai puțin lucrul consumat prin frecare $F_f x_1 = \mu(M+m)gx_1$, adică

$$\frac{m^2}{2(M+m)} v^2 - F_f x_1 = \frac{kx_1^2}{2} \quad \text{sau} \quad kx_1^2 + 2F_f x_1 - \frac{m^2}{(M+m)} v^2 = 0. \qquad (1)$$

Soluția acestei ecuații este

$$x_1 = \frac{-F_f \pm \sqrt{F_f^2 + \frac{km^2v^2}{(M+m)}}}{k}.$$

Evident, sens fizic are numai valoarea cu (+) în fața radicalului, deci

$$x_1 = \frac{F_f}{k}\left(\sqrt{1 + \frac{km^2v^2}{F_f^2(M+m)}} - 1\right) = \frac{\mu(M+m)g}{k}\left(\sqrt{1 + \frac{km^2v^2}{\mu^2g^2(M+m)^2}} - 1\right) =$$

$$= \frac{0,2(2,97+0,03)\cdot 10}{10}\left(\sqrt{1 + \frac{10\cdot 0,03^2\cdot 200^2}{0,2^2\cdot 10^2(2,97+0,03)^3}} - 1\right) = 0,65 \text{ m}.$$

Dacă deplasarea are loc pînă la o distanță mai mică decît $x_0 = \frac{F_f}{k} = \frac{\mu g(M+m)}{k} = \frac{0,2\cdot 10(2,97+0,03)}{10} = 0,6$ m, atunci forța elastică este mai mică decît forța de frecare și corpul nu poate porni înapoi spre poziția de echilibru.

Întrucît $x_1 > x_0$, corpul va porni înapoi. Totuși, datorită valorii mici a diferenței $x_1 - x_0 = 0,05$ m, deplasarea corpului se va face numai pe o distanță mică Δx. Aceasta se obține din conservarea energiei, scriind că energia în punctul A, $\frac{kx_1^2}{2}$, va fi egală cu suma dintre energia de deformare în starea finală, $\frac{k(x_1-\Delta x)^2}{2}$, și lucrul consumat prin frecare pe distanța Δx, adică:

$$\frac{kx_1^2}{2} = \frac{k(x_1-\Delta x)^2}{2} + F_f\Delta x.$$

Aceasta se mai poate scrie:

$$\frac{k\Delta x}{2} = kx_1 - F_f \quad \text{sau} \quad \Delta x = 2(x_1 - x_0) = 2(0,65 - 0,6) = 0,1 \text{ m}.$$

Rezultă că, spațiul total parcurs de corp pînă la oprire este $S = x_1 + \Delta x = 0,65 + 0,1 = 0,75$ m.

b) În absența frecării, ecuația (1) devine

$$\frac{m^2v^2}{2(M+m)} = \frac{kx_m^2}{2}.$$

Amplitudinea este

$$x_m = A = mv\sqrt{\frac{1}{(M+m)k}} = 0,03\cdot 200\sqrt{\frac{1}{(2,97+0,03)10}} = 1,095 \text{ m}.$$

Energia oscilației nu se modifică în timp și are valoarea

$$E = E_i = \frac{m^2v^2}{2(M+m)} = \frac{0{,}03^2 \cdot 200^2}{2(2{,}97 + 0{,}03)} = 6 \text{ J}.$$

4°. a) Forța F cu care trebuie să tragă omul pentru a ridica greutatea G trebuie să egaleze suma dintre greutatea G și greutatea cablului aflată sub nivelul scripetelui. Notînd cu x lungimea porțiunii de cablu care atîrnă sub nivelul scripetelui (fig. F.C.31), vom avea $F = G + \mu_l g x$, unde μ_l este masa unității de lungime a cablului.

În figura F.C.32 este arătată variația forței în funcție de distanța x. Remarcăm asemănarea acestei dependențe cu cea întîlnită în cazul forțelor de

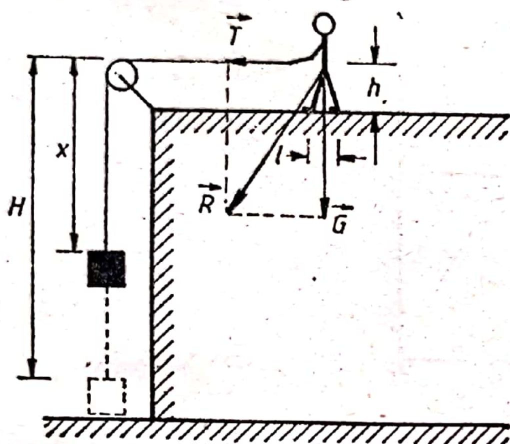


Fig. F.C.31

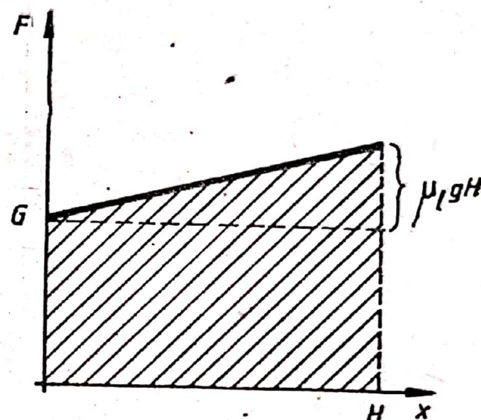


Fig. F.C.32

deformare elastică. În ambele cazuri variația este liniară. Lucrul mecanic efectuat în procesul de ridicare, în care x variază de la H la zero, este egal cu aria hașurată pe figura F.C.32, adică

$$L = \frac{H(G + \mu_l g H)}{2} H = GH + \frac{\mu_l g H^2}{2}.$$

Întrucît GH este lucrul efectuat pentru ridicarea unei greutăți G la înălțimea H, $\frac{\mu_l g H^2}{2}$ reprezintă lucrul efectuat pentru ridicarea cablului; se remarcă asemănarea cu expresia lucrului efectuat într-o deformare elastică. Lucrul efectuat este $L = 200 \cdot 10 + \frac{0{,}5 \cdot 10 \cdot 100}{2} = 2250$ J.

b) Omul va fi răsturnat dacă momentul tensiunii T din cablu este mai mare decît momentul greutății proprii, ambele calculate în raport cu punctul de sprijin anterior (piciorul anterior) al omului. Conform figurii F.C.31, ținînd seama că $T = F$, avem $h(G + \mu_l g H) = \frac{l}{2}$ mg, de unde

$$G = \frac{mgl}{2h} - \mu_l g H = \frac{70 \cdot 10 \cdot 1}{2 \cdot 1} - 0{,}5 \cdot 10 \cdot 10 = 300 \text{ N}.$$

5°. a) Componentele vitezei inițiale pe cele două direcții, verticală și orizontală, sînt, respectiv,

$$v_{0y} = v_0 \sin\alpha = 8 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = 6{,}928 \text{ m}\cdot\text{s}^{-1} \text{ și } v_{0x} = v_0 \cos\alpha = 8 \cdot \frac{1}{2} = 4 \text{ m}\cdot\text{s}^{-1}.$$

În timpul mişcării în apă, asupra corpului acţionează forţa $F = G - F_A$, unde F_A este forţa arhimedică. Acceleraţia corpului, a, orientată vertical în jos, este dată de $ma = mg - F_A = V\rho_c g - V\rho_a g$, de unde

$$a = g\frac{\rho_c - \rho_a}{\rho_c} = 10\frac{7\,800 - 1\,000}{7\,800} = 8{,}71\ \text{m}\cdot\text{s}^{-2}.$$

În mişcarea pe verticală corpul ar ajunge la o înălţime maximă dată de

$$h_{\max} = \frac{v_{0y}^2}{2a} = \frac{6{,}928^2}{2\cdot 8{,}71} = 2{,}75\ \text{m},$$

deci corpul va ieşi din apă, mişcarea lui fiind cea arătată de curba punctată din figura F.C.33. În momentul ieşirii din apă, acceleraţia se modifică brusc de la

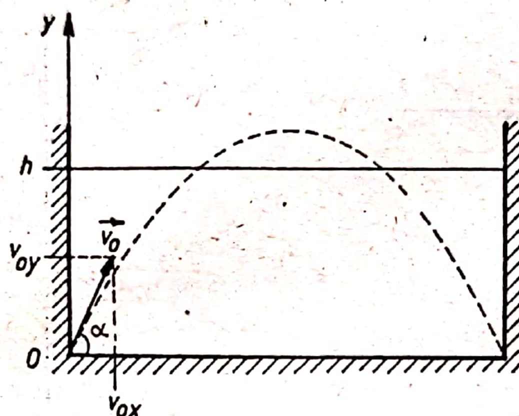


Fig. F.C.33

valoarea a la valoarea g. Viteza verticală în acest moment este dată de ecuaţia lui Galilei, $v_y^2 = v_{0y}^2 - 2ah$, de unde

$$v_y = \sqrt{v_{0y}^2 - 2ah} = \sqrt{6{,}928^2 - 2\cdot 8{,}71\cdot 2} = 3{,}63\ \text{m}\cdot\text{s}^{-1}.$$

Timpul de mişcare prin apă este dat de $v_y = v_{0y} - at_1$, de unde

$$t_1 = \frac{v_{0y} - v_y}{a} = \frac{6{,}928 - 3{,}633}{8{,}71} = 0{,}378\ \text{s}.$$

Timpul cît corpul urcă, în continuare, pînă la înălţimea maximă este dat de $0 = v_y - gt_2$, adică $t_2 = \frac{v_y}{g} = \frac{3{,}63}{10} = 0{,}363$ s.

Astfel, durata totală a mişcării este $t = 2(t_1 + t_2) = 2(0{,}378 + 0{,}363) = 1{,}482$ s.

Distanţa parcursă pe orizontală cu viteza constantă v_{0x} va fi

$$x = v_{0x}t = 4\cdot 1{,}482 = 5{,}93\ \text{m}.$$

b) La $t' = 0{,}3$ s după lansare corpul se află în apă, iar energia lui potenţială va fi egală numeric cu lucrul mecanic consumat pentru ridicarea corpului la înălţimea h la care a ajuns în acest timp, adică $E_p = mah'$, unde

$$h' = v_{0y}t' - \frac{at'^2}{2} = 6{,}928\cdot 0{,}3 - \frac{8{,}71}{2}\cdot 0{,}3^2 = 1{,}68\ \text{m}.$$

Rezultă

$$E_p = V\rho_c ah' = \frac{4\pi r^3}{3}\rho_c ah' = \frac{4\pi}{3}(10^{-2})^3\cdot 7\,800\cdot 8{,}71\cdot 1{,}68 = 0{,}48\ \text{J}.$$

c) Deasupra apei corpul se ridică la înălţimea maximă dată de $h'' = \frac{v_y^2}{2g} = \frac{3{,}63^2}{2 \cdot 10} = 0{,}66$ m, deci înălţimea maximă la care ajunge corpul în timpul mişcării este

$$h_{max} = h + h'' = 2 + 0{,}66 = 2{,}66 \text{ m}.$$

6°. a) Energia degajată în explozie se regăseşte ca energie cinetică iniţială a celor două fragmente:

$$E = \frac{m_1 v_{01}^2}{2} + \frac{m_2 v_{02}^2}{2}. \quad (1)$$

Conservarea impulsului se scrie

$$m_1 v_{01} = m_2 v_{02}. \quad (2)$$

Masa de explozibil fiind neglijabilă,

$$m_1 + m_2 = m. \quad (3)$$

Din ecuaţiile (2) şi (3) rezultă:

$$m_1 = \frac{m v_{02}}{v_{01} + v_{02}}, \quad m_2 = \frac{m v_{01}}{v_{01} + v_{02}},$$

încît

$$E = \frac{m v_{01} v_{02}}{2} = \frac{2 \cdot 30 \cdot 40}{2} = 1\,200 \text{ J}.$$

b) Cele două corpuri cad simultan, deci la orice moment ele se află la aceeaşi înălţime. Vitezele celor două corpuri vor avea direcţii perpendiculare în momentul în care suma unghiurilor α_1 şi α_2 din figura F.C.34 este $\frac{\pi}{2}$, sau $\text{tg}\, \alpha_1 = \text{ctg}\, \alpha_2$ (4).

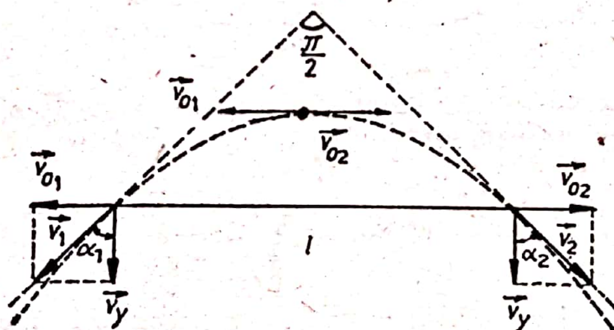


Fig. F.C.34

În timpul căderii pe distanţa h_1 corpurile capătă o viteză verticală $v_y = \sqrt{2gh_1}$, ecuaţia (4) devenind

$$\frac{v_{01}}{v_y} = \frac{v_y}{v_{02}} \text{ sau } v_{01}v_{02} = 2gh_1. \quad (5)$$

Timpul în care corpurile cad pe distanţa h_1 este $t = \sqrt{\frac{2h_1}{g}} = \frac{\sqrt{v_{01}v_{02}}}{g}$. După acest timp distanţa dintre cele două corpuri este $l = (v_{01} + v_{02})t = \frac{(v_{01} + v_{02})\sqrt{v_{01}v_{02}}}{g} = \frac{(30 + 40)\sqrt{30 \cdot 40}}{10} \approx 242{,}5\ m.$

c) $h' = h - h_1 = h - \frac{v_{01}v_{02}}{2g} = 100 - \frac{30 \cdot 40}{2 \cdot 10} = 60\,\text{m}$, unde s-a utilizat ecuația (5).

7°. a) Conform figurii F.C.35, ecuația fundamentală a dinamicii pentru corpul m_1 este

$$m_1 g \sin\alpha - m_1 g \mu_1 \cos\alpha + F = m_1 a, \tag{1}$$

iar pentru corpul m_2

$$m_2 g \sin\alpha - m_2 g \mu_2 \cos\alpha - F = m_2 a. \tag{2}$$

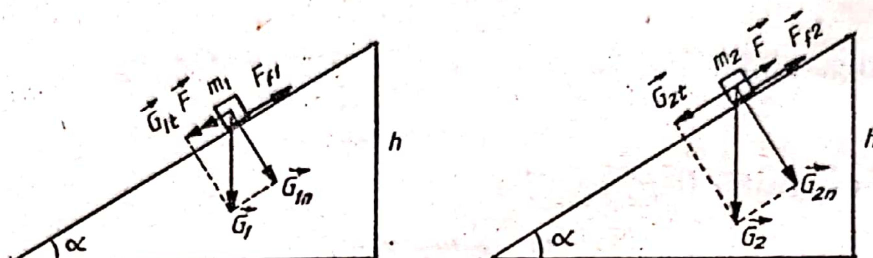


Fig. F.C.35

Întrucît corpurile se mișcă împreună, ele au aceeași accelerație. Eliminînd accelerația a între ecuațiile (1) și (2), rezultă

$$F(m_1 + m_2) = m_1 m_2 = g(\mu_1 - \mu_2)\cos\alpha \text{ sau } F = \frac{m_1 m_2 g}{m_1 + m_2}(\mu_1 - \mu_2)\cos\alpha. \tag{3}$$

b) Unghiul minim pentru care cele două corpuri coboară liber pe plan va fi dat de condiția ca mișcarea acestora să fie uniformă. Punînd $a = 0$ în ecuațiile (1) și (2) și însumîndu-le, rezultă

$$\operatorname{tg}\alpha_{\min} = \frac{m_1\mu_1 + m_2\mu_2}{m_1 + m_2}. \tag{4}$$

c) Presupunînd α mai mare decît $\alpha_{\min}$, atunci cele două corpuri coboară cu aceeași accelerație, deci viteza lor comună va fi dată de

$$v = \sqrt{2al} = \sqrt{2a\frac{h}{\sin\alpha}}, \tag{5}$$

deoarece, inițial, ele se află practic la aceeași înălțime h. Accelerația se obține din oricare dintre ecuațiile (1) și (2) cu ajutorul relației (3):

$$a = g\left(\sin\alpha - \frac{m_1\mu_1 + m_2\mu_2}{m_1 + m_2}\cos\alpha\right),$$

deci viteza la baza planului va fi

$$v = \sqrt{\frac{2gh}{\sin\alpha}\left(\sin\alpha - \frac{m_1\mu_1 + m_2\mu_2}{m_1 + m_2}\cos\alpha\right)}.$$

8°. a) $y = A\sin(\omega t + \varphi)$, $\frac{A\sqrt{3}}{2} = A\sin\varphi \Rightarrow \sin\varphi = \frac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow \varphi = \frac{\pi}{3}$,

$$y = A\sin\left(\omega t + \frac{\pi}{3}\right).$$

Pentru momentul t_1 avem: $y_1 = A\sin\left(\omega t_1 + \frac{\pi}{3}\right)$, $v_1 = A\omega\cos\left(\omega t_1 + \frac{\pi}{3}\right)$ și $|a_1| = A\omega^2\sin\left(\omega t_1 + \frac{\pi}{3}\right)$. Din aceste relații obținem:

$$\omega = \sqrt{\frac{|a_1|}{y_1}} = \sqrt{\frac{0,9}{0,1}} = 3\ \text{rad}\cdot\text{s}^{-1}$$

și

$$A = \frac{\sqrt{v_1^2 + \omega^2 y_1^2}}{\omega} = \frac{\sqrt{(\sqrt{7}\cdot 10^{-1})^2 + 3^2\cdot 10^{-2}}}{3} = \frac{4}{3}\cdot 10^{-1}\ \text{m}.$$

Ecuația mișcării armonice va fi

$$y = \frac{4}{3}\cdot 10^{-1}\sin\left(3t + \frac{\pi}{6}\right).$$

b) $v_{max} = \omega A = 3\cdot\frac{4}{3}\cdot 10^{-1} = 0,4\ \text{m}\cdot\text{s}^{-1}$; $a_{max} = \omega^2 A = 3^2\cdot\frac{4}{3}\cdot 10^{-1} = 1,2\ \text{m}\cdot\text{s}^{-2}$;

$$F_{max} = kA = m\omega^2 A = 2\cdot 10^{-3}\cdot 3^2\cdot\frac{4}{3}\cdot 10^{-1} = 2,4\cdot 10^{-3}\ \text{N}.$$

c) $y_2 = \frac{4}{3}\cdot 10^{-1}\sin\left(3t_2 + \frac{\pi}{6}\right) = A\sin\left(3t_2 + \frac{\pi}{6}\right)$;

$$E_p = \frac{1}{2}ky_2^2;\quad E_c = E - E_p = \frac{1}{2}k(A^2 - y_2^2);$$

$$E_p = E_c \Rightarrow \frac{1}{2}ky_2^2 = \frac{1}{2}k(A^2 - y_2^2) \Rightarrow y_2 = A\frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{4}{3}\cdot 10^{-1}\frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{2\sqrt{2}}{3}\cdot 10^{-1}\ \text{m}.$$

d) $E_p = \frac{1}{2}ky^2$; $E_p = E_{p_{max}} \Rightarrow \sin^2\left(3t_p + \frac{\pi}{3}\right) = 1 \Rightarrow \sin\left(3t_p + \frac{\pi}{3}\right) = \pm 1 =$

$$= \sin\left(\frac{\pi}{2} + n\pi\right);\ n = 0,1,2,...$$

$$t_p = \frac{\pi}{3}\left(n + \frac{1}{6}\right);\ n = 0,1,2,...$$

$$E_c = \frac{1}{2}mv^2;\ E_c = E_{c_{max}} \Rightarrow \cos^2\left(3t_c + \frac{\pi}{3}\right) = 1 \Rightarrow \cos\left(3t_c + \frac{\pi}{3}\right) =$$

$$= \pm 1 = \cos(n\pi) \Rightarrow t_c = \frac{\pi}{3}\left(n - \frac{1}{3}\right).$$

e) $y_1 = A_1\sin(\omega t + \varphi_1)$, $y_2 = A_2\sin(\omega t + \varphi_2)$, $y = y_1 + y_2 = A\sin(\omega t + \varphi)$,

$$A = \sqrt{A_1^2 + A_2^2 + 2A_1A_2\cos(\varphi_2 - \varphi_1)} =$$

$$= \sqrt{\left(\frac{4}{3}\cdot 10^{-1}\right)^2 + \left(\frac{5}{3}\cdot 10^{-1}\right) + 2\cdot\frac{4}{3}\cdot\frac{5}{3}\cdot 10^{-2}\cos\frac{\pi}{6}} = \frac{10^{-1}\sqrt{41 + 20\sqrt{3}}}{3} \cong 0,29\ \text{m},$$

$$\text{tg}\varphi = \frac{A_1\sin\varphi_1 + A_2\sin\varphi_2}{A_1\cos\varphi_1 + A_2\cos\varphi_2} = \frac{\frac{4}{3}\cdot 10^{-1}\sin\frac{\pi}{3} + \frac{5}{3}\cdot 10^{-1}\sin\frac{\pi}{2}}{\frac{4}{3}\cdot 10^{-1}\cos\frac{\pi}{3} + \frac{5}{3}\cdot 10^{-1}\cos\frac{\pi}{2}} = \frac{2\sqrt{3} + 5}{2},$$

$$y = \frac{\sqrt{41 + 20\sqrt{3}}}{3}\cdot 10^{-1}\sin\left(3t + \text{arctg}\,\frac{5 + 2\sqrt{3}}{2}\right).$$

9°. a) Din ecuaţiile de echilibru dinamic pentru cele două corpuri:

$$\mu_m R_m + m a_m = m a_M \cos\alpha + mg \sin\alpha, \quad R_m + m a_M \sin\alpha = mg\cos\alpha,$$

$$R_m \sin\alpha = M a_M + \mu_M R_M, \quad R_M = Mg + R_m \cos\alpha,$$

eliminînd pe R_m şi R_M, obţinem:

$$a_M = g\frac{m\cos\alpha(\sin\alpha - \mu_M\cos\alpha) - \mu_M M}{m\sin\alpha(\sin\alpha - \mu_M\cos\alpha) + M}$$

şi

$$a_m = g\frac{m(\sin\alpha - \mu_M\cos\alpha) + M[\sin\alpha - \mu_M\cos\alpha - \mu_m(\cos\alpha + \mu_M\sin\alpha)]}{m\sin\alpha(\sin\alpha - \mu_M\cos\alpha) + M}.$$

b) $R_m = m(g\cos\alpha - a_M\sin\alpha) = mg\dfrac{M(\cos\alpha + \mu_M\sin\alpha)}{m\sin\alpha(\sin\alpha - \mu_M\cos\alpha) + M}$;

c) $R_M = g\dfrac{M(M+m)}{m\sin\alpha(\sin\alpha - \mu_M\cos\alpha) + M}$.

Notă: Toate relaţiile de mai sus sînt valabile dacă $a_M \geqslant 0$ şi $a_m \geqslant 0$, adică pentru $\mu_M \leqslant \dfrac{m\sin\alpha\cos\alpha}{M + m\cos^2\alpha}$ şi $\mu_m \leqslant \dfrac{(m+M)(\sin\alpha - \mu_M\cos\alpha)}{M(\cos\alpha + \mu_M\sin\alpha)}$. Dacă $\mu_M > \dfrac{m\sin\alpha\cos\alpha}{M + m\cos^2\alpha}$, planul înclinat rămîne imobil şi problema capătă forma sa simplă.

d) $a_M = g\dfrac{m\sin\alpha\cos\alpha}{M + m\sin^2\alpha}$, $a_m = g\dfrac{(M+m)\sin\alpha - \mu_m M\cos\alpha}{M + m\sin^2\alpha}$,

$$R_m = mg\frac{M\cos\alpha}{M + m\sin^2\alpha}, \quad R = g\frac{M(M+m)}{M + m\sin^2\alpha}.$$

10°. a) Aplicînd „legea“ lui Bernoulli pentru tubul de curent de sus se obţine:

$$p_0 + \rho gh = p_0 + \frac{1}{2}\rho v_1^2 + \rho g(h - x), \tag{1}$$

iar pentru tubul de curent de jos

$$p_0 + \rho gh = p_0 + \frac{1}{2}\rho v_2^2 + \rho g(h - x - d), \tag{2}$$

p_0 fiind presiunea atmosferică.

Din (1) rezultă

$$v_1 = \sqrt{2gx}, \tag{3}$$

iar din (2)

$$v_2 = \sqrt{2g(x+d)}. \tag{4}$$

Pentru a calcula timpii de coborîre ai unei picături de apă pînă la sol, avem $y_1 = h - x - \frac{1}{2}gt_1 = 0$, de unde rezultă

$$t_1 = \sqrt{\frac{2}{g}(h - x)} \tag{5}$$

şi $y_2 = h - x - d - \frac{1}{2}gt_2^2 = 0$, obţinîndu-se

$$t_2 = \sqrt{\frac{2}{g}(h - d - x)}. \tag{6}$$

Mişcarea pe orizontală fiind uniformă, avem $v_1t_1 = v_2t_2$, adică:

$$\sqrt{2gx}\sqrt{\frac{2}{g}(h-x)} = \sqrt{2g(x+d)}\sqrt{\frac{2}{g}(h-d-x)}\text{, rezultînd } x = \frac{h-d}{2}. \quad (7)$$

Deci orificiul de secţiune S_1 se află la distanţa $x_1 = \frac{h-d}{2}$ de nivelul apei din vas, iar orificiul de secţiune S_2 la distanţa $x_2 = \frac{h+d}{2}$.

b) $Q_1 = S_1v_1 = S_1\sqrt{g(h-d)}$, (8)

$Q_2 = S_2v_2 = S_2\sqrt{g(h+d)}$. (9)

c) $Q = Q_1 + Q_2 = \sqrt{g}(S_1\sqrt{h-d} + S_2\sqrt{h+d})$. (10)

d) Pentru ca lichidul să nu curgă, este necesar ca presiunea exercitată pe dop să fie egală cu presiunea hidrostatică a apei, adică:

$$F_1 = p_1S_1 = \rho gxS_1 = \frac{1}{2}\rho gS_1(h-d) \quad (11)$$

şi

$$F_2 = p_2S_2 = \rho g(x+d)S_2 = \frac{1}{2}\rho gS_2(h+d). \quad (12)$$

11°. a) Forţa cu care este atrasă nava cosmică de către Pămînt este dată de legea lui Newton a atracţiei universale:

$$F = \gamma\frac{mM}{(R+h)^2},$$

unde γ este constanta atracţiei universale, m şi M sînt masele navei cosmice, respectiv Pămîntului, iar h este înălţimea navei cosmice deasupra suprafeţei Pămîntului (presupus de formă sferică). Întrucît acceleraţia centrifugă imprimată navei cosmice de mişcarea sa circulară este $a_c = \frac{v_0^2}{R+h}$, unde v_0 este viteza navei pe orbita sa, condiţia de stabilitate a navei pe traiectoria sa circulară — exprimată prin egalitatea forţei centrifuge (în modul) cu forţa gravitaţională — are forma

$$\frac{mv_0^2}{R+h} = \gamma\frac{mM}{(R+h)^2},$$

constanta atracţiei universale fiind corelată cu acceleraţia gravitaţională la suprafaţa Pămîntului prin relaţia

$$mg = \frac{\gamma mM}{R^2},$$

din care rezultă că $\gamma M = gR^2$.

Din ultimele relaţii reiese expresia vitezei navei cosmice pe orbita circulară situată la înălţimea h deasupra suprafeţei Pămîntului:

$$v_0 = R\sqrt{\frac{g}{R+h}}.$$

Perioada mişcării navei pe orbita sa iniţială rezultă ca fiind:

$$T_0 = \frac{2\pi(R+h)}{v_0} = 2\pi\sqrt{\frac{R+h}{g}}\left(1+\frac{h}{R}\right).$$

După efectuarea corecţiei asupra orbitei de deplasare a navei, perioada mişcării sale devine $T_1 (> T_0)$, dată în funcţie de noua înălţime $h + \Delta h$ a navei deasupra suprafeţei Pămîntului prin relaţia analoagă:

$$T_1 = 2\pi \sqrt{\frac{R + h + \Delta h}{g}} \left(1 + \frac{h + \Delta h}{R}\right).$$

Din ultimele două relaţii reiese că:

$$\Delta h = \left[\left(\frac{T_1}{T_0}\right)^{2/3} - 1\right] \cdot \left(\frac{gR^2T_0^2}{4\pi^2}\right)^{1/3} \cong 3{,}95 \cdot 10^4 \text{ m (39,5 km)}.$$

b) Expresia vitezei v_1 a navei cosmice după efectuarea corecţiei orbitei circulare este analoagă celei a vitezei v_0, adică:

$$v_1 = R\sqrt{\frac{g}{R + h + \Delta h}}, \text{ deci } \frac{v_1}{v_0} = \sqrt{\frac{r_0}{r_1}} \cong 0{,}997.$$

12°. a) Acceleraţia a a mişcării sistemului de corpuri, cînd scripetele este blocat, iar mişcarea decurge fără frecare, reiese din aplicarea legii a II-a a dinamicii, $ma = (m_1 + m_2)\, a = R = (m_1 - m_2)g$, de unde

$$a = \frac{(m_1 - m_2)\, g}{m_1 + m_2} \cong 3{,}27 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}.$$

Acum se poate calcula durata după care corpul 1 atinge solul, $t = \sqrt{\frac{2h}{a}} \approx 0{,}782$ s, iar viteza acestui corp în momentul în care atinge solul va fi $v = \sqrt{2ah} \approx 2{,}56 \frac{\text{m}}{\text{s}}$.

b) Atunci cînd deplasarea firului antrenează scripetele, fără ca firul să alunece pe suprafaţa acestuia, condiţia de conservare a energiei sistemului între starea iniţială şi cea în care corpul 1 atinge solul are forma:

$$\frac{(m_1 + m_2)\, v^2}{2} + \frac{I\omega^2}{2} + (m_2 - m_1)\, gh = 0.$$

Asimilînd scripetele cu un disc circular şi omogen (de grosime L şi densitate ρ constante, fig. F.C.36), găsim expresia momentului de inerţie al discului faţă de centrul său:

$$I = \int_{\text{disc}} r^2 \text{d}m = \int_0^R r^2 \rho \cdot 2\pi r L \text{d}r = \rho \frac{\pi R^4}{2} L = \frac{MR^2}{2},$$

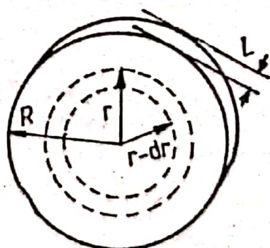


Fig. F.C.36

unde M este masa discului (expresia dedusă este indicată şi în manualul de Fizică pentru clasa IX-a de liceu). Din această relaţie reiese că $M = \frac{2I}{R^2} = 2$ kg.

Ținînd seamă că între viteza unghiulară ω a rotației discului și viteza liniară a deplasării marginii discului (egală cu viteza v a mișcării sistemului) există relația $v = \omega R$, expresia de mai sus a legii conservării energiei mecanice capătă forma:

$$\left(m_1 + m_2 + \frac{M}{2}\right)\frac{v^2}{2} = (m_1 - m_2)\, gh,$$

care evidențiază că antrenarea discului în mișcare echivalează cu creșterea masei sistemului cu o masă „echivalentă" (discului) egală cu $\frac{M}{2}$. Rezultă și valoarea cerută a vitezei corpului 1 în momentul atingerii solului, în condițiile antrenării discului în mișcare:

$$v = \sqrt{\frac{2(m_1 - m_2)\, gh}{m_1 + m_2 + \frac{M}{2}}} \approx 2{,}21\ \frac{\text{m}}{\text{s}}.$$

c) Ținînd seamă că, în condițiile antrenării discului în mișcare, masa sa „efectivă" este egală — în conformitate cu cele deduse mai sus — cu $\frac{M}{2}$, accelerația mișcării sistemului în condițiile antrenării discului este:

$$a = \frac{(m_1 - m_2)\, g}{m_1 + m_2 + \frac{M}{2}}.$$

Deoarece între accelerația unghiulară ε a mișcării discului și accelerația liniară corespunzătoare mișcării marginii discului (egală cu cea a mișcării sistemului) există relația $a = \varepsilon R$, rezultă că:

$$\varepsilon = \frac{a}{R} = \frac{(m_1 - m_2)\, g}{\left(m_1 + m_2 + \frac{M}{2}\right) R} = 24{,}5\ \text{rad/s}^2.$$

13°. a) Considerăm un element de suprafață al sferei s, de arie ΔA. Fie ρ distanța de la corpul punctiform de masă m la acest element de suprafață, iar $\bar{1}_\rho$ vectorul unitar al razei vectoare a elementului ΔA (de dimensiuni foarte reduse) față de punctul P în care se găsește corpul punctiform (fig. F.C.37a). În conformitate cu definiția din enunț a fluxului intensității cîmpului gravitațional printr-un element de suprafață, $\Delta\Phi = \bar{\Gamma}\cdot\bar{1}_n \Delta A$; înlocuind expresia intensității cîmpului gravitațional, obținem

$$\Delta\Phi = \frac{Km}{\rho^2}\bar{1}_\rho \cdot \bar{1}_n \Delta A.$$

Deoarece aria ΔA_n a proiecției elementului de suprafață ΔA în planul perpendicular pe raza vectoare $\bar{\rho}$ se exprimă prin unghiul θ format de normala $\bar{1}_n$, la suprafața ΔA, cu raza vectoare $\bar{\rho}$ prin relația $\Delta A_n = \Delta A \cos\theta = \Delta A \cdot \bar{1}_n \cdot \bar{1}_\rho$, expresia fluxului prin elementul de suprafață ΔA devine:

$$\Delta\Phi = Km\frac{\Delta A_n}{\rho^2} = Km\Delta\Omega,$$

unde $\Delta\Omega$ este unghiul solid sub care se observă elementul de suprafață ΔA din punctul P în care se găsește corpul punctiform considerat (numeric egal cu aria „decupată" de conul cu vîrful în punctul P și baza pe elementul de suprafață ΔA,

pe sfera de rază unitate, avînd centrul în punctul P). Rezultă că fluxul intensității cîmpului gravitațional prin suprafața sferică s este:

$$\Delta \Phi_{\overline{\Gamma}, s} = Km \sum_{s} \Delta \Omega,$$

unde $\sum_{s} \Delta\Omega$ este suma unghiurilor solide sub care se observă din punctul P, în care se găsește corpul punctiform, diferitele elemente ale suprafeței sferei s. În cazul în care punctul P este interior sferei s, suma $\sum_{s} \Delta\Omega$ este egală cu 4π steradiani (fiind numeric egală cu aria sferei de rază 1; v. și fig. F.C.37a); rezultă că în acest caz $\Phi_{\overline{\Gamma}, s} = 4\pi Km$.

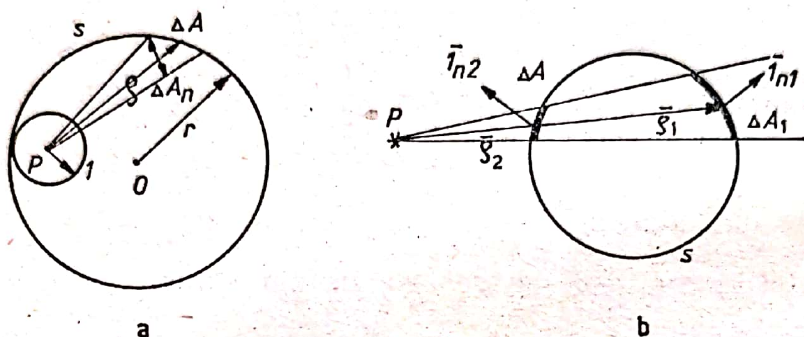


Fig. F.C.37

În cazul în care punctul P este exterior sferei s, această sferă poate fi împărțită — prin intermediul unor conuri cu vîrful în P — în perechi de elemente de suprafață (de arii ΔA_1, ΔA_2, v. fig. F.C.37b), cărora le corespund unghiuri solide $\Delta\Omega_1$, $\Delta\Omega_2$ egale, însă de semne contrare (produsele scalare $\overline{\rho}_1 \cdot \overline{1}_{n1}$ și $\overline{\rho}_2 \cdot \overline{1}_{n2}$ au semne contrare, deoarece normalele la o suprafață închisă sînt definite ca avînd întotdeauna sensul spre exterior; rezultă că $\Delta\Omega_1 + \Delta\Omega_2 = 0$, deci $\sum_{s} \Delta\Omega = 0$ și $\Phi_{\overline{\Gamma}, s} = 0$, dacă punctul material P se găsește în afara sferei s.

b) Se consideră sfera s de rază r, cu centrul în O, sferă care trece prin punctul material de masă m considerat. Fie un element al sferei S, de masă Δm_k; după cum acest element aparține (este interior) sferei s, respectiv este exterior ei, contribuția acestui element la fluxul intensității cîmpului gravitațional prin suprafața S este egală cu $4\pi K \Delta m_k$, sau cu 0. Deoarece rezultanta mai multor forțe gravitaționale este suma vectorială a acestor forțe: $\overline{F}_{rez} = \sum \overline{F}_k$, rezultanta intensității cîmpului gravitațional produs de mai multe corpuri („surse" de gravitație) este $\overline{\Gamma}_{rez} = \frac{\overline{F}_{rez}}{m} = \frac{1}{m} \sum \overline{F}_k = \sum \overline{\Gamma}_k$, iar fluxul rezultantei intensităților cîmpurilor gravitaționale va fi:

$$\Phi_{\overline{\Gamma}_{rez}, s} = \sum_{\Delta A, h} \overline{\Gamma}_k \overline{1}_n \, \Delta A = \sum_{k} \Phi_{\overline{\Gamma}_k, s};$$

ținînd seamă de rezultatele de mai sus, găsim că

$$\Phi_{\overline{\Gamma}_{rez}, s} = 4\pi K m_{int.\, s} = 4\pi K \rho \frac{4\pi}{3} r^3,$$

unde $m_{int.\, s}$ este masa substanței din interiorul sferei s. Pe de altă parte, datorită simetriei sferice, rezultanta intensităților cîmpurilor gravifice este aceeași în toate punctele sferei s și are direcție radială, ceea ce face ca:

$$\Phi_{\overline{\Gamma}_{rez}, s} = \sum_{\Delta A(s)} \overline{\Gamma}_{rez} \cdot \overline{1}_n \Delta A = \Gamma_{rez} \sum_{\Delta A(s)} \Delta A = 4\pi r^2 \cdot \Gamma_{rez}.$$

Egalînd cele două expresii obținute pentru fluxul rezultantei intensităților cîmpurilor gravitaționale prin sfera s, obținem:

$$4\pi r^2 \Gamma_{rez} = 4\pi K \rho \frac{4\pi}{3} r^3,$$

de unde

$$\Gamma_{rez} = K \rho \frac{4\pi r}{3},$$

deci forța care acționează asupra punctului material de masă m situat la distanța r de centrul O al sferei omogene este:

$$F = m\Gamma_{rez} = mK\rho \frac{4\pi r}{3}.$$

c) Se constată că forța gravitațională care acționează asupra unui punct material de masă m, situat la o distanță r de centrul unei sfere omogene „pline" mai mică decît raza R a sferei, este echivalentă acțiunii unui resort elastic de constantă echivalentă:

$$k = \frac{4\pi}{3} K\rho m,$$

a cărui extremitate ar coincide, în cazul în care ar fi nedeformat, cu centrul O al sferei „pline" S. Prin urmare punctul material de masă m efectuează — în interiorul canalului „săpat" în lungul unui diametru al sferei „pline" S — o mișcare oscilatorie de perioadă:

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{m}{k}} = \sqrt{\frac{3\pi}{K\rho}} \simeq 4{,}85 \cdot 10^3 \text{ s} \; (\simeq 1 \text{ h } 21 \text{ min}).$$

14°. a) $\frac{\rho v_1^2}{2} + \rho g h = \frac{\rho v_2^2}{2}$, $Sv_1 = sv_2$.

Din sistemul de ecuații de mai sus rezultă

$$v_1(h) = \frac{s}{\sqrt{S^2 - s^2}} \sqrt{2gh}, \quad v_2(h) = \frac{S}{\sqrt{S^2 - s^2}} \sqrt{2gh}.$$

b) $dh = -v_1 dt = -\frac{s}{\sqrt{S^2 - s^2}} \sqrt{2gh}\, dt.$

Prin integrare, cu condiția inițială $h = h_0$ pentru $t = 0$, se obține:

$$t_1 = \sqrt{\frac{2h_0}{g}} \cdot \frac{\sqrt{S^2 - s^2}}{s}.$$

Numeric:

$$t_1 \simeq \sqrt{\frac{2h_0}{g}} \cdot \frac{S}{s} = \sqrt{\frac{2 \cdot 0{,}8}{9{,}8}} \cdot \frac{8 \cdot 10^{-2}}{10^{-4}} = 3{,}23 \cdot 10^2 \text{ s}.$$

c) $v_2(h_0) = \frac{S}{\sqrt{S^2 - s^2}} \sqrt{2gh_0}$,

$$V_1 = sv_2(h_0)t_1 = \frac{sS}{\sqrt{S^2 - s^2}} \sqrt{2gh_0} \sqrt{\frac{2h_0}{g}} \cdot \frac{\sqrt{S^2 - s^2}}{s},$$

$$V_1 = 2Sh_0 = 2V_0 = 2 \cdot 8 \cdot 10^{-2} \cdot 0{,}8 = 12{,}8 \cdot 10^{-2} \text{ m}^3 = 0{,}128 \text{ m}^3.$$

15°. a) $F_{12} = -K\frac{m_1 m_2}{r_{12}^2}$, $\vec{F}_{12} = -K\frac{m_1 m_2}{r_{12}^2} \cdot \frac{\vec{r}_{12}}{r_{12}}$, $\vec{\Gamma} = \frac{\vec{F}}{m}$.

Fie P punctul căutat. Atunci

$$\overline{\Gamma} = -K\left(\frac{m_1}{r_1^2}\vec{r}_{01} + \frac{m_2}{r_2^2}\vec{r}_{02}\right), \quad r_1 + r_2 = r,$$

$$\frac{m_1}{r_1^2} = \frac{m_2}{r_2^2} \Rightarrow \frac{r_1^2}{r_2^2} = \frac{m_1}{m_2} = \frac{0{,}2}{0{,}8} = \frac{1}{4} \Rightarrow \frac{r_1}{r_2} = \frac{1}{2} \Rightarrow r_2 = 2r_1,$$

$$r_1 + 2r_1 = r \Rightarrow r_1 = \frac{r}{3} = 8{,}33 \text{ cm}, \quad r_2 = \frac{2r}{3} = 16{,}66 \text{ cm}.$$

b) $\overline{\Gamma}_1 = -K\frac{m_1}{r_1^2}\vec{r}_{01}, \quad \overline{\Gamma}_2 = -K\frac{m_2}{r_2^2}\vec{r}_{02}.$

Din figura F.C.38a,b avem $|\overline{\Gamma}| = \sqrt{\Gamma_1^2 + \Gamma_2^2 + 2\Gamma_1\Gamma_2\cos\alpha}$; dar $\cos\alpha = \frac{r^2 - r_1^2 - r_2^2}{2r_1r_2} = 0$, $\alpha = \frac{\pi}{2}$, deci $|\overline{\Gamma}| = \sqrt{\Gamma_1^2 + \Gamma_2^2}$, iar atunci

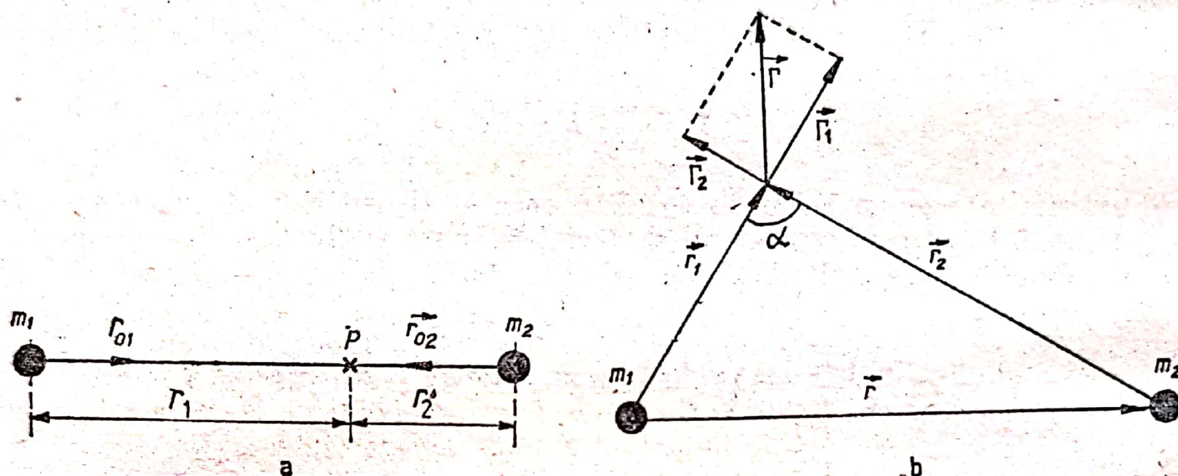


Fig. F.C.38

$$\Gamma_1 = 6{,}670 \cdot 10^{-11} \cdot \frac{0{,}2}{(0{,}2)^2} = 0{,}333 \cdot 10^{-9} \text{ N/m}^2,$$

$$\Gamma_2 = 6{,}670 \cdot 10^{-11} \cdot \frac{0{,}8}{(0{,}15)^2} = 2{,}371 \cdot 10^{-9} \text{ N/m}^2,$$

$$\Gamma = \sqrt{5{,}662 \cdot 10^{-18} + 0{,}111 \cdot 10^{-18}} = 2{,}39 \cdot 10^{-9} \text{ N/m}^2.$$

c) Forța fiind de tip elastic, mișcarea executată de corpul m_1 este oscilatorie armonică de forma (fig. F.C.39) $r = R_0 \sin(\omega t + \varphi)$, unde

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m}} = \sqrt{\frac{4\pi m_1 K\rho}{3m_1}} = \sqrt{\frac{4\pi K\rho}{3}}.$$

Întrucît $g_0 = K\frac{M_0}{R_0^2}$, rezultă $\omega = \sqrt{\frac{g_0}{R_0}}$, deci

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi\sqrt{\frac{R_0}{g}} = 5{,}03 \cdot 10^3 \text{s}.$$

16°. a) $m_c = V\rho_c$, unde ρ_c este densitatea corpului. Dar $V\rho_c g = \frac{V\rho_{Hg}g}{3}$ (v. fig. F.C.40), de unde

$$\rho_c = \frac{\rho_{Hg}}{3} = 4533{,}33 \text{ kg/m}^3.$$

Evident,

$$V = V' + V'',$$

unde V' este volumul părţii din corp aflată în mercur, iar V'' volumul părţii din corp aflată în apă. De asemenea,

$$V\rho_c g = V'\rho_{Hg} g + V''\rho_a g,$$

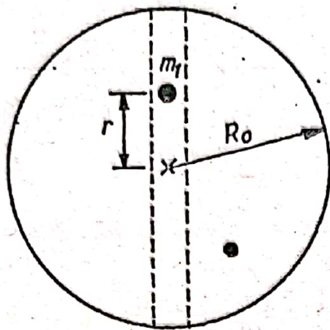


Fig. F.C.39

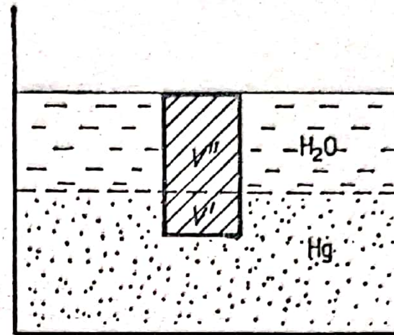


Fig. F.C.40

ρ_a fiind densitatea apei. Dacă se elimină V'' între ecuaţiile de mai sus se obţine:

$$\frac{V'}{V} = \frac{\rho_{Hg}/3 - \rho_a}{\rho_{Hg} - \rho_a}.$$

Numeric rezultă

$$\frac{V'}{V} = \frac{\frac{13\,600}{3} - 1\,000}{13\,600 - 1\,000} = 0{,}280.$$

b) Presiunea la cota h în raport cu suprafaţa apei este (fig. F.C.41) $p(h) = \rho_a gh$, încît

$$dF = p\,dS = pl\,dh = \rho_a glh\,dh,$$

$$F = \int_0^l \rho_a ghl\,dh = \frac{1}{2}\rho_a gl^3 = \frac{1}{2}\cdot 1\,000\cdot 9{,}8(0{,}3)^3 = 132{,}3 \text{ N}.$$

c) Momentul forţei F în punctul căutat P, în raport cu baza, are expresia:

$$M = Fh_0 = \int_0^l dM,$$

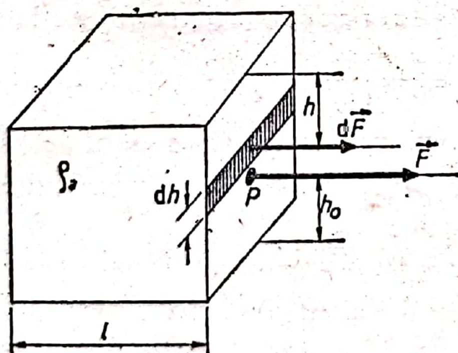


Fig. F.C.41

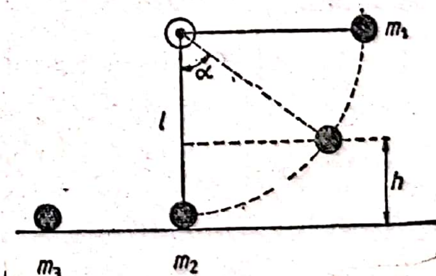


Fig. F.C.42

unde $dM = dF(l - h) = (l - h)\,\rho_a ghl\,dh$. Prin integrare rezultă

$$h_0 = \frac{l}{3} = 0{,}1 \text{ m}.$$

17°. a) Se scriu legile de conservare pentru energie şi impuls (Fig. F.C.42):

$$m_1 V = m_1 v_1 + 3\, m_1 v_2, \qquad m_1 V^2 = m_1 v_1^2 + 3\, m_1 v_2^2,$$

din care se obține

$$V - v_1 = 3v_2, \quad V + v_1 = v_2.$$

Deoarece $\frac{m_1V^2}{2} = m_1gl \Rightarrow V = \sqrt{2gl}$.

Rezolvînd sistemul, se obține:

$$2V = 4v_2 \Rightarrow v_2 = \frac{V}{2} = \frac{\sqrt{2gl}}{2}, \quad v_1 = v_2 - V = -\frac{V}{2}.$$

Numeric: $V = \sqrt{2 \cdot 0{,}4 \cdot 9{,}8} = 2{,}8$ m/s, deci $v_1 = 1{,}4$ m/s, iar $v_2 = 1{,}4$ m/s.

b) $\frac{m_1v_1^2}{2} = m_1gh \Rightarrow \frac{v_1^2}{2} = gl(1 - \cos\alpha) \Rightarrow 1 - \cos\alpha = \frac{v_1^2}{2gl} \Rightarrow \cos\alpha = 1 - \frac{v_1^2}{2gl} \Rightarrow$

$\Rightarrow \alpha = \arccos\left(1 - \frac{v_1^2}{2gl}\right) = \arccos\left(1 - \frac{(1{,}4)^2}{2 \cdot 0{,}4 \cdot 9{,}8}\right) = \arccos(0{,}75) = 0{,}722$ rad $= 41{,}40°$.

c) Ciocnirea lui m_2 cu m_3 fiind perfect elastică, avem

$$m_2v_2 = m_2v_2' + m_3v_3', \quad m_2v_2^2 = m_2v_2'^2 + m_3v_3'^2,$$

$$K = \frac{E_{c_3}}{E_{c_2}} = \frac{m_3}{m_2}\left(\frac{v_3'}{v_2}\right)^2 = \frac{4m_3m_2}{(m_3 + m_2)^2} = \frac{8m_2^2}{9m_2^2} = \frac{8}{9} \simeq 0{,}89,$$

unde E_{c_3} este energia cinetică a bilei cu masa m_3, după ciocnire, iar E_{c_2} este energia cinetică a bilei cu masa m_2 înainte de ciocnirea cu bila m_3.

Considerînd acum ciocnirea perfect plastică a lui m_2 cu m_3, viteza comună după ciocnire va fi $u = \frac{m_2v_2}{m_2 + m_3}$, iar

$$K = \frac{E_{c_3}}{E_{c_2}} = \frac{m_3}{m_2}\left(\frac{u}{v_2}\right)^2 = \frac{m_2m_3}{(m_2 + m_3)^2} = \frac{2m_2^2}{2m_2^2} = \frac{2}{9} \simeq 0{,}22.$$

2. FIZICĂ MOLECULARĂ ȘI CĂLDURĂ TERMODINAMICĂ

18°. a) Presiunea din cilindru se obține cu ajutorul ecuației termice de stare a gazului ideal, $pV = \nu RT$, de unde $p_1 = \frac{\nu RT}{V_1} = \frac{10^{-3} \cdot 8\,310 \cdot 300}{150 \cdot 10^{-4}} = 1{,}662 \cdot 10^5 \frac{\text{N}}{\text{m}^2}$.

b) În timpul $t = 15$ s pistonul se deplasează pe distanța $s = vt = 15$ cm. Volumul ocupat de gaz va fi $V_2 = S(l - vt)$, iar presiunea gazului va fi dată de aceeași ecuație: $p_2 = \frac{\nu RT}{V_2} = \frac{\nu RT}{S(l - vt)} = \frac{10^{-3} \cdot 8\,310 \cdot 300}{100 \cdot 10^{-4}(1{,}5 - 0{,}15)} = 1{,}847 \cdot 10^5 \frac{\text{N}}{\text{m}^2}$.

c) Transformarea suferită de gaz fiind izotermă, lucrul efectuat pentru comprimarea gazului va fi $L = \nu RT \ln\frac{V_2}{V_1} = \nu RT \ln\frac{l - vt}{l} = 10^{-3} \cdot 8310 \cdot 300 \ln\frac{1{,}35}{1{,}5} =$ $= 2\,493(\ln 9 - \ln 10) = 2\,493(2 \cdot 1{,}0986 - 2{,}3026) \simeq -263$ J. Semnul (—) arată că gazul primește lucrul mecanic.

d) Întrucît $F = pS$, cu ajutorul ecuației termice de stare a gazului ideal, avem:

$$F = \frac{\nu RT}{V} : S = \frac{\nu RT}{l - vt}.$$

Aceasta este ecuația de variație a forței în funcție de timp, iar reprezentarea ei este dată în figura F.C.43 pentru intervalul 0—15 s.

19° a) Conform figurii F.C.44, poziția de echilibru a pistonului va fi cea pentru care forța F exercitată de gaz asupra pistonului echilibrează greutatea

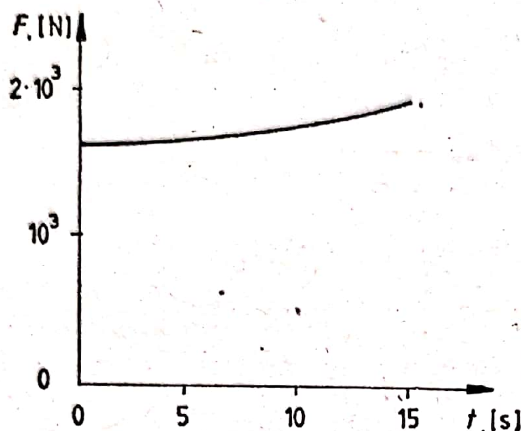


Fig. F.C.43

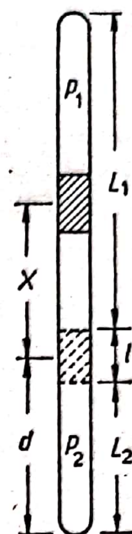


Fig. F.C.44

acestuia. Centrul pistonului se va afla la distanța $d = L_2 + \frac{l}{2}$ de capătul inferior al tubului. Asupra pistonului acționează forța

$$F = (p_2 - p_1)S = \nu RT\left(\frac{1}{V_2} - \frac{1}{V_1}\right)S = \nu RT\left(\frac{1}{L_2} - \frac{1}{L_1}\right), \qquad (1)$$

unde s-a făcut uz de ecuația termică de stare a gazului. Întrucît $L_1 + L_2 = L - l$, ecuația (1) devine

$$F = \nu RT \frac{L - l - 2L_2}{L_2(L - l - L_2)}.$$

Utilizînd condiția de echilibru $F = G$, rezultă ecuația

$$GL_2^2 - [2\nu RT + G(L - l)]L_2 + \nu RT(L - l) = 0$$

a cărei soluție este

$$L_2 = \frac{2\nu RT + G(L - l)}{2G}\left(1 \pm \sqrt{1 - \frac{4G\nu RT(L - l)}{[2\nu RT + G(L - l)]^2}}\right).$$

Numai soluția cu semnul (—) în fața celui de al doilea termen este acceptabilă din punct de vedere fizic. Poziția de echilibru a pistonului va fi dată de

$$d = L_2 + \frac{l}{2} = \frac{2\nu RT + G(L - l)}{2G}\left(1 - \sqrt{1 - \frac{4G\nu RT(L - l)}{[2\nu RT + G(L - l)]^2}}\right) + \frac{l}{2} =$$

$$= \frac{2 \cdot 10^{-5} \cdot 8\,310 \cdot 300 + 10(1 - 0{,}1)}{2 \cdot 10}\left(1 - \sqrt{1 - \frac{4 \cdot 10 \cdot 10^{-5} \cdot 8\,310 \cdot 300(1 - 0{,}1)}{[2 \cdot 10^{-5} \cdot 8\,310 \cdot 300 + 10(1 - 0{,}1)]^2}}\right) +$$

$$+ \frac{0{,}1}{2} = 0{,}459\,7\,\text{m}.$$

b) Într-o situaţie oarecare, cînd pistonul se află la distanţa x de poziţia de echilibru, $L_2 \to d + x - \frac{l}{2}$, astfel încît, utilizînd ecuaţia (1), forţa care acţionează asupra pistonului este

$$F = \nu RT \frac{L - 2(d + x)}{\left(d + x - \frac{l}{2}\right)\left(L - \frac{l}{2} - d - x\right)} - G. \qquad (2)$$

Această expresie depinde în mod complicat de x. Dependenţa liniară se va obţine numai pentru valori ale lui x extrem de mici, neglijabile în factorii de la numitor, adică pentru $x \ll d - \frac{l}{2}$, $x \ll L - \frac{l}{2} - d$. Adunînd membru cu membru aceste inegalităţi, rezultă condiţia

$$x \ll \frac{L - l}{2}.$$

Întrucît $L - l = 90$ cm, înseamnă că valori ale lui x de ordinul a 1 cm satisfac această condiţie. La numărător, în ecuaţia (2), x nu poate fi neglijat deoarece $2x$ este comparabil cu $L - 2d$. Forţa care pune pistonul în mişcare (2) devine

$$F = \nu RT \frac{(L - 2d - 2x)}{\left(d - \frac{l}{2}\right)\left(L - \frac{l}{2} - d\right)} - \nu RT \frac{L - 2d}{\left(d - \frac{l}{2}\right)\left(L - \frac{l}{2} - d\right)} =$$

$$= -\nu RT \frac{2x}{\left(d - \frac{l}{2}\right)\left(L - \frac{l}{2} - d\right)}.$$

În acest caz forţa este proporţională cu deplasarea şi de sens opus, adică mişcarea este oscilatorie armonică.

c) În mişcarea oscilatorie armonică a unui corp de masă m, sub acţiunea unei forţe $F = -kx$, perioada este $T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}$. În cazul nostru

$$k = \frac{2\nu RT}{\left(d - \frac{l}{2}\right)\left(L - \frac{l}{2} - d\right)}, \text{ deci } T = 2\pi\sqrt{\frac{G\left(d - \frac{l}{2}\right)\left(L - \frac{l}{2} - d\right)}{g 2\nu RT}} =$$

$$= 2\pi\sqrt{\frac{10(0,4597 - 0,05)(1 - 0,05 - 0,4597)}{10 \cdot 2 \cdot 10^{-5} \cdot 8\,310 \cdot 300}} = 0,399 \text{ s.}$$

20°. a) Cantitatea de apă Δm_1, care intră în calorimetru de la momentul $t_0 = 0$ pînă la momentul t_1, cînd în calorimetru se află numai gheaţă la temperatura $T = 273$ K, va ceda o cantitate de căldură răcindu-se pînă la temperatura T şi o cantitate de căldură datorită transformării ei în gheaţă. Aceste cantităţi de căldură sînt absorbite de gheaţă şi calorimetru pentru a se încălzi de la T_1 la T. Ecuaţia calorimetrică se va scrie:

$$\Delta m_1 c_a(T_2 - T) + \Delta m_1 \lambda + \Delta m_1 \frac{v^2}{2} = m_1 c_g(T - T_1) + C(T - T_1). \qquad (1)$$

În această ecuație s-a ținut seama și de energia căpătată de masa de apă în căderea de la înălțimea h. Întrucît $\Delta m_1 = Dt_1$, iar $v = \sqrt{2gh}$, din ecuația (1) se obține:

$$t_1 = \frac{(T - T_1)(m_1c_a + C)}{D[c_a(T_2 - T) + \lambda + gh]} = \frac{(273 - 258)(0{,}5 \cdot 2{,}1 \cdot 10^3 + 1{,}2 \cdot 10^3)}{2 \cdot 10^{-3}[4\,180\,(323 - 273) + 334 \cdot 10^3 - 10 \cdot 5]} = 31{,}13 \text{ s.}$$

b) Pentru ca în calorimetru să existe numai apă cu temperatura $T = 273$ K, cantitatea de căldură cedată de masa suplimentară de apă Δm_2 spre a se răci de la temperatura T_2 la temperatura T (plus energia ei cinetică) trebuie să fie suficientă pentru a topi gheața existentă în calorimetru în cantitatea $m_1 + \Delta m_1$. Ecuația calorimetrică se va scrie:

$$\Delta m_2 c_a(T_2 - T) + \Delta m_2 \frac{v^2}{2} = (m_1 + \Delta m_1)\lambda. \qquad (2)$$

Notînd că $\Delta m_2 = Dt_2$, ecuația (2) conduce la:

$$t_2 = \frac{(m_1 + Dt_1)\lambda}{D[c_a(T_2 - T) + gh]} = \frac{(0{,}5 + 2 \cdot 10^{-3} \cdot 31{,}13) \cdot 334 \cdot 10^3}{2 \cdot 10^{-3}[4\,180(323 - 273) + 10 \cdot 5]} = 449{,}16 \text{ s.}$$

Deci, de la începutul experimentului și pînă în momentul în care în calorimetru se află numai apă la $T = 273$ K, s-a scurs un timp $t = t_1 + t_2 = 31{,}13 + 449{,}16 = 480{,}29$ s.

c) Cantitatea de apă care a căzut în calorimetru în acest interval de timp este $\Delta m = \Delta m_1 + \Delta m_2 = D(t_1 + t_2)$. Energia cinetică a acestei mase, datorită căderii de la înălțimea h, este

$$E_c = \frac{\Delta m v^2}{2} = \Delta mgh = D(t_1 + t_2)gh = 2 \cdot 10^{-3} \cdot 480{,}29 \cdot 10 \cdot 5 \approx 48 \text{ J.}$$

21°. a) Inițial pistonul se află în poziția A (figura F.C.45), deci aerul, la presiunea inițială, ocupă volumul V al recipientului. Ecuația termică de stare a gazului ideal $pV = \frac{m}{\mu}RT$ permite obținerea masei de aer:

$$m = \frac{\mu p_0 V}{RT} = \frac{28{,}9 \cdot 10^5 \cdot 10^3 \cdot 10^{-6}}{8\,310 \cdot 300} = 1{,}16 \cdot 10^{-3} \text{ kg.}$$

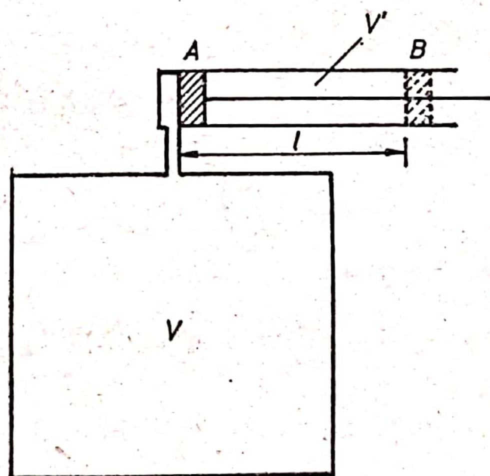


Fig. F.C.45

b) După prima cursă, pistonul ajunge în poziția B, deci gazul, care inițial ocupa volumul V, a ocupa acum volumul $V + V'$. Procesul fiind izoterm, se poate scrie.

$$p_0V = p_1(V + V'), \text{ de unde } p_1 = p_0\frac{V}{V + V'}.$$

Înlocuind în ecuaţia termică de stare a gazului ideal, se obţine masa m' din cilindrul pompei:

$$m' = \frac{\mu p_1 V'}{RT} = \frac{\mu p_0 V}{RT} \cdot \frac{V'}{V + V'} = \frac{mV'}{V + V'} = \frac{mSl}{V + Sl} = \frac{1{,}16 \cdot 10^{-3} \cdot 12{,}5 \cdot 10^{-4} \cdot 20 \cdot 10^{-2}}{10^3 \cdot 10^{-6} + 12{,}5 \cdot 10^{-4} \cdot 20 \cdot 10^{-2}} = $$
$$= 2{,}32 \cdot 10^{-4} \text{ kg}.$$

Aceasta este masa evacuată în prima cursă a pistonului.

c) Pentru fiecare cursă a pistonului se produce o transformare izotermă (masa de gaz este constantă pentru o cursă). Cursele succesive vor fi descrise de următoarele ecuaţii: $p_0 V = p_1(V + V')$, $p_1 V = p_2(V + V')$, $p_2 V = p_3(V + V')$, ..., $p_{n-1} V = p_n(V + V')$.

Eliminînd p_1, p_2,... şi ţinînd seama că $p_n = p_f$, vom avea succesiv:

$$p_2 = p_0 \left(\frac{V}{V + V'}\right)^2, \quad p_3 = p_0 \left(\frac{V}{V + V'}\right)^3, \quad ..., \quad p_f = p_0 \left(\frac{V}{V + V'}\right)^n.$$

Prin logaritmare, rezultă $\lg \frac{p_f}{p_0} = n \lg \frac{V}{V + V'}$ de unde se obţine

$$n = \frac{\lg \frac{p_0}{p_f}}{\lg \frac{V + V'}{V}} = \frac{\lg \frac{10^5}{10^2}}{\lg \frac{10^3 \cdot 10^{-6} + 250 \cdot 10^{-6}}{10^3 \cdot 10^{-6}}} = \frac{\lg 10^3}{\lg 5 - \lg 4} = \frac{3}{0{,}69\,897 - 0{,}60206} \approx 31.$$

22°. a) Situaţia descrisă în problemă ne conduce la următoarea expresie a randamentului primului ciclu:

$$\eta_1 = 1 - \frac{|Q_2|}{Q_1} = 1 - \frac{|Q_{23}|}{Q_{31}}, \tag{1}$$

unde am observat că gazul primeşte căldură în procesul izocor şi cedează căldură în cel izoterm:

$$Q_{23} = \nu R T_2 \ln \frac{V_3}{V_2}, \quad Q_{31} = \nu C_V (T_1 - T_2).$$

Înlocuind în (1), rezultă

$$\eta_1 = 1 - \frac{R \ln \frac{V_2}{V_3}}{C_V \left(\frac{T_1}{T_2} - 1\right)} = 1 - \frac{R \ln \frac{V_2}{V_3}}{C_V(\varepsilon - 1)}. \tag{2}$$

În cazul celui de-al doilea ciclu

$$\eta_2 = 1 - \frac{|Q_2|}{Q_1} = 1 - \frac{|Q_{23'}|}{Q_{3'1}}, \tag{3}$$

unde acum căldura este primită în procesul izobar $3' \to 1$. Întrucît

$$Q_{23'} = \nu R T_2 \ln \frac{V_{3'}}{V_2}, \quad Q_{3'1} = \nu C_p (T_1 - T_2),$$

ecuaţia (3) devine

$$\eta_2 = 1 - \frac{R \ln \frac{V_2}{V_{3'}}}{C_p(\varepsilon - 1)}. \tag{4}$$

Pentru a compara expresiile (3) şi (4) trebuie să le exprimăm în raport cu aceleaşi cantităţi. Ţinînd seama de ecuaţiile:

$$C_p = \gamma C_V \quad \text{şi} \quad C_p - C_V = R$$

obţinem

$$C_p = \frac{R\gamma}{\gamma - 1} \quad \text{şi} \quad C_V = \frac{R}{\gamma - 1}. \tag{5}$$

Pentru izotermă $p_2V_2 = p_{3'}V_{3'}$.

Dar $p_{3'} = p_1$, deci rezultă $p_2V_2 = p_1V_{3'}$, adică

$$\frac{V_2}{V_{3'}} = \frac{p_1}{p_2}. \tag{6}$$

Pentru transformarea adiabatică $p_1V_1^\gamma = p_2V_2^\gamma$ şi $T_1V_1^{\gamma-1} = T_2V_2^{\gamma-1}$, deci

$$\frac{V_2}{V_3} = \frac{V_2}{V_1} = \left(\frac{T_1}{T_2}\right)^{\frac{1}{\gamma-1}} = \varepsilon^{\frac{1}{\gamma-1}} = \left(\frac{p_1}{p_2}\right)^{\frac{1}{\gamma}}. \tag{7}$$

Introducînd ecuaţiile (5) şi (7), ecuaţia (2) devine:

$$\eta_1 = 1 - \frac{\ln \varepsilon}{\varepsilon - 1}. \tag{8}$$

Cu ajutorul relaţiilor (5) şi (7), ecuaţia (4) devine:

$$\eta_2 = 1 - \frac{\gamma - 1}{\gamma(\varepsilon - 1)} \ln \frac{p_1}{p_2} = 1 - \frac{\ln \varepsilon}{\varepsilon - 1}, \tag{9}$$

unde am ţinut seama că $\frac{p_1}{p_2} = \left(\frac{T_1}{T_2}\right)^{\frac{\gamma}{\gamma-1}} = \varepsilon^{\frac{\gamma}{\gamma-1}}$.

Expresiile (8) şi (9) sînt identice, deci randamentele celor două cicluri sînt egale.

b) Raţionamentul fiind cu totul analog, este lăsat pe seama cititorului; se obţine acelaşi rezultat: randamentele celor două cicluri sînt egale şi au expresia

$$\eta_1' = \eta_2' = 1 - \frac{\varepsilon - 1}{\varepsilon \ln \varepsilon}.$$

23°. Ţinînd seama de condiţiile descrise, fiind absent un schimb de energie al sistemului cu exteriorul prin intermediul căldurii, este vorba de o transformare adiabatică.

a) Relaţia lui Poisson ne permite a scrie:

$$p_iV_i^\gamma = p_fV_f^\gamma,$$

de unde

$$\ln V_f = \ln V_i + \gamma^{-1} \ln \frac{p_i}{p_f} = \ln 10 - \frac{5}{7} \ln 5 = 1{,}153$$

şi

$$V_f = 3{,}16 \text{ l}.$$

b) Relaţia $TV^{\gamma-1} = \text{const.}$ ne permite să scriem:

$$T_iV_i^{\gamma-1} = T_fV_f^{\gamma-1},$$

de unde

$$T_f = T_i\left(\frac{V_i}{V_f}\right)^{\gamma-1} = 293{,}15 \cdot \left(\frac{10}{3{,}16}\right)^{0{,}4} = 464{,}5 \text{ K} = 191{,}35° \text{ C}.$$

c) $U_f - U_i = \frac{1}{\gamma - 1}(p_f V_f - p_i V_i) = \frac{1}{1,4 - 1}(5 \cdot 1{,}013 \cdot 10^5 \cdot 3{,}16 \cdot 10^{-3} -$
$- 1 \cdot 1{,}013 \cdot 10^5 \cdot 10 \cdot 10^{-3}) = 1468$ J.

24°. Viteza sferei în momentul ciocnirii peretelui se poate găsi din relațiile:

$$v_x = v_0 \cos \alpha, \quad v_y = v_0 \sin \alpha - gt, \tag{1}$$

adică

$$v^2 = v_x^2 + v_y^2 = (v_0 \cos \alpha)^2 + (v_0 \sin \alpha - gt)^2. \tag{2}$$

Introducînd în (2) pe

$$t = \frac{l}{v_x} = \frac{l}{v_0 \cos \alpha}, \tag{3}$$

rezultă

$$v^2 = v_0^2 - 2gl \operatorname{tg} \alpha + \frac{g^2 l^2}{v_0^2 \cos^2 \alpha}. \tag{4}$$

Din legea conservării energiei,

$$\frac{1}{2} m v^2 = mC \Delta T, \tag{5}$$

rezultă

$$\Delta T = \frac{1}{2C}\left(v_0^2 - 2gl \operatorname{tg} \alpha + \frac{g^2 l^2}{v_0^2 \cos^2 \alpha}\right) \cong 2{,}45 \cdot 10^{-2} \text{ K}. \tag{6}$$

25°. a) $T_1 = 327° + 273° = 600$ K, $T_2 = 27 + 273 = 300$ K,

$$\eta = \frac{T_1 - T_2}{T_1} = \frac{600 - 300}{600} = 50\%.$$

b) Din figura F.C.46, avem:

$$Q_1 = 2{,}3 \frac{m}{\mu} R T_1 \lg \frac{V_2}{V_1}, \tag{1}$$

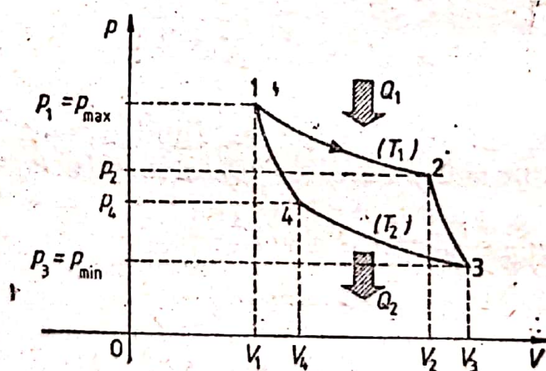


Fig. F.C 46

$$\left.\begin{aligned} p_1 V_1 = p_2 V_2 &\Rightarrow \frac{V_2}{V_1} = \frac{p_1}{p_2}, \\ p_2 V_2^\gamma = p_3 V_3^\gamma &\Rightarrow p_2 = p_3 \left(\frac{V_3}{V_2}\right)^\gamma, \end{aligned}\right\} \Rightarrow \frac{V_2}{V_1} = \frac{p_1}{p_3}\left(\frac{V_2}{V_3}\right)^\gamma, \tag{2}$$

$$T_1 V_2^{\gamma-1} = T_2 V_3^{\gamma-1} \Rightarrow \left(\frac{V_2}{V_3}\right)^{\gamma-1} = \frac{T_2}{T_1} \Rightarrow \frac{V_2}{V_3} = \left(\frac{T_2}{T_1}\right)^{\frac{1}{\gamma-1}}, \tag{3}$$

deci din (2) şi (3) rezultă

$$\frac{V_2}{V_3} = \left(\frac{T_2}{T_1}\right)^{\frac{\gamma}{\gamma-1}} \cdot \frac{p_1}{p_3}. \tag{4}$$

Introducînd pe (4) în (1), avem:

$$Q_1 = 2{,}3\nu\, RT_1 \lg\left[\frac{p_1}{p_3}\left(\frac{T_2}{T_1}\right)^{\frac{\gamma}{\gamma-1}}\right] =$$

$$= 2{,}3 \cdot 10^3 \cdot 8{,}314 \cdot 600 \lg\left[20 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{1{,}41}{1{,}41-1}}\right] \simeq 3{,}058 \cdot 10^6 \text{ J} = 3{,}058 \text{ MJ}.$$

c) $\eta = \frac{Q_1 - |Q_2|}{Q_1} \Rightarrow Q_2 = Q_1(1 - \eta) = 3{,}058 \cdot 0{,}5 = 1{,}529$ MJ.

d) $L = Q_1 - |Q_2| = 3{,}058 - 1{,}529 = 1{,}529$ MJ.

26°. a) $pV^n = \text{const}$, $\frac{p_1}{p_2} = \left(\frac{V_1}{V_2}\right)^n \Rightarrow 8 = 4^n \Rightarrow n = \frac{3}{2}$.

Astfel, pentru transformările $1 \to 2$ şi $3 \to 4$, există relaţiile:

$$pV^{\frac{3}{2}} = \text{const.},\quad TV^{1/2} = \text{const. şi } T^2V = \text{const.}, \tag{1}$$

$$\nu C\Delta T = \nu C_V \Delta T + p\Delta V, \tag{2}$$

$$\left.\begin{aligned} &(T + \Delta T)^2(V + \Delta V) - T^2V = 0 \Rightarrow \Delta V = -2\frac{V}{T}\Delta T,\\ &pV = \nu RT \Rightarrow \frac{V}{T} = \frac{\nu R}{p}, \end{aligned}\right\} \Rightarrow \Delta V = -2\frac{\nu R}{p}\Delta. \tag{3}$$

Introducînd pe (3) în (2), avem $\nu C\Delta T = \nu C_V\Delta T - 2\nu R\Delta T$, adică

$$C = C_V - 2R. \tag{4}$$

b) $\eta = 1 - \frac{Q_2}{Q_1}$, (5)

$$Q_2 = Q_{12} + Q_{41} = \nu CT_1(1 - \varepsilon^{1/2}) + \nu C_V T_1(\mathcal{H} - 1), \tag{6}$$

$$Q_1 = Q_{23} + Q_{34} = \nu C_V T_2(\mathcal{H} - 1) + \nu CT_4(1 - \varepsilon^{1/2}), \tag{7}$$

$$\frac{T_2}{T_1} = \varepsilon^{1/2},\quad \frac{T_3}{T_2} = \mathcal{H},\quad \frac{T_3}{T_4} = \varepsilon^{1/2},\quad \frac{T_4}{T_1} = \mathcal{H}. \tag{8}$$

Astfel, rezultă

$$\eta = 1 - \frac{C(1 - \varepsilon^{1/2}) + C_V(\mathcal{H} - 1)}{C\mathcal{H}(1 - \varepsilon^{1/2}) + C_V\varepsilon^{1/2}(\mathcal{H} - 1)}. \tag{9}$$

Deoarece $C = C_V - 2R$, conform relaţiei (4), (9) devine

$$\eta = \frac{2R(\varepsilon^{1/2} - 1)(\mathcal{H} - 1)}{2R\mathcal{H}(\varepsilon^{1/2} - 1) + C_V(\mathcal{H} - \varepsilon^{1/2})}. \tag{10}$$

Mai departe, deoarece $C_V = \frac{3}{2}R$, avem

$$\eta = \frac{2(\varepsilon^{1/2} - 1)(\mathcal{H} - 1)}{\frac{3}{2}(\mathcal{H} - \varepsilon^{1/2}) + 2\mathcal{H}(\varepsilon^{1/2} - 1)}. \tag{11}$$

Pentru $\mathcal{H} = 2$ și $\varepsilon = 4$, se obține $\eta = 0,5 = 50\%$.

c) $\eta_c = 1 - \frac{T_1}{T_3} = 1 - \frac{1}{\mathcal{H}\varepsilon^{1/2}} = 0,75 = 75\%$.

27°. a) Dacă în cilindru s-ar afla numai vapori de apă cu masa m_0 și ei s-ar condensa, atunci volumul ocupat de apă ar fi egal cu $0,286\,l = 0,286 \cdot 10^{-3}$ m³. Deci, în comparație cu volumul cilindrului după compresie, $V_2 = \frac{V_1}{k} = \frac{1}{3} \cong 0,33$ m³, acesta ar fi neglijabil. Din această cauză, presiunea parțială a vaporilor, p_1, în timpul compresiei se poate considera constantă. Considerînd că masa vaporilor de apă înainte de compresie este m_1 și după compresie este m_2, din ecuația de stare, obținem:

$$m_1 = \mu_1 \frac{p_1 V_1}{RT} \text{ și } m_2 = \mu_1 \frac{p_1 V_2}{RT} = \mu_1 \frac{p_1 V_1}{kRT}. \tag{1}$$

Masa vaporilor de apă care se vor condensa este:

$$m = m_1 - m_2 = \mu_1 \frac{p_1 V_1}{RT}\left(\frac{k-1}{k}\right) = 18 \cdot 10^{-3} \cdot \frac{4,2 \cdot 10^3 \cdot 1}{8,314 \cdot 303}\left(\frac{(3-1)}{3}\right) = 0,020 \text{ kg}. \tag{2}$$

b) Masa de azot din cilindru este:

$$m_3 = m_0 - m_1 = \frac{m_0 RT - p_1 V_1 \mu_1}{RT}.$$

Presiunea parțială a azotului este:

$$p_2 = \frac{m_3 RT}{\mu_2 V_1} = \frac{m_0 RT - p_1 V_1 \mu_1}{\mu_2 V_1}.$$

Presiunea amestecului va fi:

$$p = p_1 + p_2 = \frac{p_1 V_1(\mu_2 - \mu_1) + m_0 RT}{\mu_2 V_1} =$$

$$= \frac{4,2 \cdot 10^3 \cdot 1 \cdot (28 - 18) \cdot 10^{-3} + 0,286 \cdot 8,314 \cdot 303}{28 \cdot 10^{-3} \cdot 1} = 2,72 \cdot 10^4 \text{ N} \cdot \text{m}^{-2}.$$

28°. a) Notăm prin ν_1 și ν_2 numerele de moli de hidrogen H_2, respectiv de oxigen O_2 în amestec, iar prin x raportul $\frac{\nu_1}{\nu_2} (= x)$. Deoarece arderea are loc după reacția $2H_2 + O_2 = 2H_2O$, se constată că pentru $x \leqslant 2$ arde tot hidrogenul, iar pentru $x > 2$ arde tot oxigenul. Cele două situații vor fi examinate succesiv.

Cazul I, $x \leqslant 2$

În urma arderii a ν_1 moli hidrogen și a $\frac{\nu_1}{2}$ moli oxigen, rămîn nearși $\nu_2 - \frac{\nu_1}{2} = \nu_1\left(\frac{1}{x} - \frac{1}{2}\right)$ moli oxigen și se formează n_1 moli de apă.

Aplicînd între stările inițială (înaintea arderii) și finală (după încheierea arderii) primul principiu al termodinamicii, $U_1 + Q = U_2$, unde $U_1 = \nu_1 \frac{5R}{2} T_0 + \frac{\nu_1}{x} \cdot \frac{5R}{2} T_0$ este energia internă a amestecului înainte arderii, $Q = \nu_1 q$ este căldura degajată prin ardere, iar $U_2 = \nu_1 \frac{7R}{2} T + \nu_1 \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{2}\right) \frac{5R}{2} T$ este energia internă a amestecului rezultat în urma arderii, reiese că temperatura finală a amestecului de vapori de apă și oxigen, rezultat prin ardere, este:

$$T = \frac{2[5RT_0(x+1) + 2qx]}{R(10+9x)}.$$

În conformitate cu ecuația termică de stare a gazelor perfecte și cu principiul lui Dalton relativ la presiunea exercitată de un amestec de gaze, presiunile exercitate de amestecurile de gaze existente în incintă înainte, respectiv după ardere, sînt:

$$p_0 = \left(\nu_1 + \frac{\nu_1}{x}\right) \frac{RT_0}{V}, \text{ respectiv } p = \left[\nu_1 + \nu_1\left(\frac{1}{x} - \frac{1}{2}\right)\right] \frac{RT}{V},$$

deci creșterea presiunii în urma arderii este

$$k = \frac{p}{p_0} = \frac{x+2}{2(x+1)} \cdot \frac{T}{T_0} = \frac{[5RT_0(x+1) + 2qx](x+2)}{RT_0(10+9x)(x+1)}.$$

Cazul II, $x > 2$

În urma arderii a $\nu_2 = \frac{\nu_1}{x}$ moli de oxigen și a $2\nu_2 = \frac{2\nu_1}{x}$ moli de hidrogen, rezultă $2\nu_2 = \frac{2\nu_1}{x}$ moli de (vapori de) apă și (rămîn) $\nu_1 - 2\nu_2 = \nu_1\left(1 - \frac{2}{x}\right)$ moli hidrogen.

Expresia specifică a primului principiu al termodinamicii pentru procese în cadrul cărora nu se efectuează lucru mecanic, $U_1 + Q = U_2$, capătă în acest caz forma

$$\nu_1 \frac{5R}{2} T_0 + \frac{\nu_1}{x} \cdot \frac{5R}{2} T_0 + \frac{\nu_1}{x} \cdot q = \frac{2\nu_1}{x} \cdot \frac{7R}{2} T + \nu_1\left(1 - \frac{2}{x}\right) \cdot \frac{5R}{2} T,$$

de unde rezultă că

$$T = \frac{5RT_0(x+1) + 4q}{R(4+5x)}.$$

În conformitate cu ecuația termică de stare a gazelor perfecte și cu legea lui Dalton:

$$p_0 = \left(\nu_1 + \frac{\nu_1}{x}\right) \frac{RT_0}{V}, \quad p = \left[\frac{2\nu_1}{x} + \nu_1\left(1 - \frac{2}{x}\right)\right] \frac{RT}{V},$$

de unde

$$k = \frac{p}{p_0} = \frac{[5RT_0(x+1) + 4q]x}{RT_0(x+1)(5x+4)}.$$

b) Fracțiunii 0,5% din masa oxigenului, reprezentată de masa hidrogenului din amestec, îi corespunde valoarea $x = 5 \cdot 10^{-3} \frac{M_{O_2}}{M_{H_2}} = 0{,}08$ a fracțiunii molare; această valoare a lui x situîndu-se în primul caz studiat, se aplică prima expresie dedusă pentru k și se obține $k = 6{,}7$.

29°. a) Lucrurile mecanice efectuate și căldurile primite de gaz în fiecare dintre procesele ciclului considerat sînt (fig. F.C.47)

$$L_{AB}=Q_{AB}=\nu RT_1\ln\frac{p_1}{p_2}>0,\quad L_{BC}=p_2(V_C-V_B)=\nu R(T_2-T_1)<0,$$

$$Q_{BC}=\nu C_p(T_2-T_1)<0,\quad L_{CD}=-\Delta U_{CD}=\nu C_V(T_2-T_3)<0 \text{ și, desigur, } Q_{CD}=0,$$

$$L_{DA}=p_1(V_A-V_D)=\nu R(T_1-T_3)>0,\quad Q_{DA}=\nu C_p(T_1-T_3)>0.$$

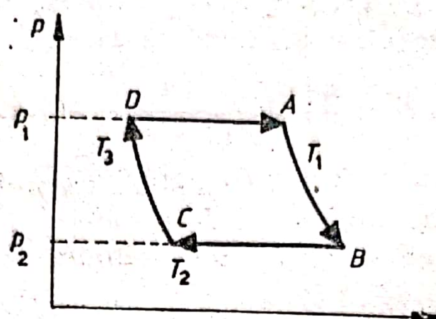


Fig. F.C.47

Rezultă că lucrul mecanic efectuat și căldura totală primită într-un ciclu sînt:

$$L=\nu RT_1\ln\frac{p_1}{p_2}+\nu R(T_2-T_1)+\nu C_V(T_2-T_3)+\nu R(T_1-T_3)=$$

$$=\nu RT_1\ln\frac{p_1}{p_2}+\nu(C_V+R)(T_2-T_3)=\nu C_p(T_2-T_3)+\nu RT_1\ln\frac{p_1}{p_2},$$

$$Q_{\text{primit}}=Q_{AB}+Q_{DA}=\nu C_p(T_1-T_3)+\nu RT_1\ln\frac{p_1}{p_2}.$$

Pe de altă parte, $pV^\gamma=\text{const.}$ este echivalent cu $p\left(\frac{T}{p}\right)^\gamma=\text{const.}$ și cu $Tp^{(1-\gamma)/\gamma}=\text{const.}$, de unde

$$T_3p_1^{(1-\gamma)/\gamma}=T_2p_2^{(1-\gamma)/\gamma}\Rightarrow\left(\frac{p_1}{p_2}\right)^{(\gamma-1)/\gamma}=\frac{T_3}{T_2}\ \text{ și }\ \frac{\gamma-1}{\gamma}\ln\frac{p_1}{p_2}=\ln\frac{T_3}{T_2}.$$

Cum $\gamma=\frac{C_p}{C_V}$, avem $\frac{\gamma-1}{\gamma}=\frac{C_p-C_V}{C_p}=\frac{R}{C_p}$, deci $\frac{R}{C_p}\ln\frac{p_1}{p_2}=\ln\frac{T_3}{T_2}$.

Rezultă că

$$\eta=\frac{L}{Q_{\text{primit}}}=\frac{\nu C_p(T_2-T_3)+\nu RT_1\ln\frac{p_1}{p_2}}{\nu C_p(T_1-T_3)+\nu RT_1\ln\frac{p_1}{p_2}}=\frac{T_2-T_3+T_1\ln\frac{T_3}{T_2}}{T_1-T_3+T_1\ln\frac{T_3}{T_2}}.$$

b) $\eta_c=\frac{L_c}{Q_{AB}}=\frac{T_1-T_r}{T_1}$, deci $L_c=Q_{AB}\frac{T_1-T_r}{T_1}=\nu RT_1\ln\frac{p_1}{p_2}\cdot\frac{T_1-T_r}{T_1}=$

$$=\nu R(T_1-T_r)\ln\frac{p_1}{p_2}=L=\nu C_p(T_2-T_3)+\nu RT_1\ln\frac{p_1}{p_2}.$$

Împărțind egalitatea ultimilor membri ai relației de mai sus (după reducerea termenului $\nu RT_1\ln\frac{p_1}{p_2}$) cu $\frac{\nu}{C_p}$, obținem:

$$-T_r\cdot\frac{R}{C_p}\ln\frac{p_1}{p_2}=-T_r\cdot\ln\frac{T_3}{T_2}=T_2-T_3,\ \text{ deci }\ T_r=\frac{T_3-T_2}{\ln T_3-\ln T_2}$$

(temperatura mediată „logaritmic").

c) $\varepsilon = \frac{1-\eta}{\eta} = \frac{1 - \frac{L}{Q_{\text{primit}}}}{\frac{L}{Q_{\text{primit}}}} = \frac{Q_{\text{cedat}}}{L_{\text{efectuat}}}$. În cazul inversării sensului parcurgerii ciclului reversibil: $\varepsilon = \frac{Q_{\text{primit}}}{L_{\text{primit}}}$, unde ε reprezintă acum eficiența mașinii frigorifice (cu compresor), care funcționează după ciclul parcurs (în sens invers). Înlocuind rezultatele obținute la primul punct al problemei, rezultă

$$\varepsilon = \frac{Q_{\text{primit}} - L}{L} = \frac{T_1 - T_2}{T_2 - T_3 + T_1 \ln \frac{T_3}{T_2}}.$$

30°. a) Deoarece, pentru heliu, $U = \frac{3}{2}\nu RT$, atunci pentru $U = \text{const.}$ rezultă $T = \text{const.}$, deci procesele elementare reprezentate prin segmente paralele cu axa S sînt *izoterme.*

Deoarece $S = U_1(\ln p + \ln V^{5/3}) = U_1 \ln (pV^{5/3})$, iar pentru heliu $C_V = \frac{\Delta Q_V}{\nu \Delta T} = \frac{\Delta U}{\nu \Delta T} = \frac{3R}{2}$, $C_p = C_V + R = \frac{5R}{2}$ și $\gamma = \frac{C_p}{C_V} = \frac{5}{3}$, rezultă că $S = \text{const.}$ implică $pV^{\gamma} = \text{const.}$, deci *procesele* elementare reprezentate prin segmente paralele cu axa U sînt *adiabatice.*

b) Gazul primește căldură numai în procesele elementare de destindere izotermă. În acest caz:

$$S = \frac{3}{2}\nu RT_1\left(\ln p + \frac{5}{3}\ln V\right) = \nu T_1(C_V \ln p + C_p \ln V) =$$
$$= \nu T_1[C_V \ln (pV) + (C_p - C_V)\ln V] = \nu RT_1 \ln V + C,$$

unde $C = \nu C_V T_1 \ln (\nu RT)$ este o constantă pentru procese izoterme. Căldura primită de gaz în cursul destinderii izoterme reprezentată prin segmentul orizontal k (fig. F.C.48 a) al porțiunii de sus a ciclului ($k = 1, 2, \ldots, N$) va fi $Q_{1k} = \nu RT_k \ln \frac{V_{fk}}{V_{ik}} = \frac{U_k}{U_1} \cdot \nu RT_1 \ln \frac{V_{fk}}{V_{ik}} = \frac{U_k(S_{fk} - S_{ik})}{U_1}$, mărime proporțională cu aria cuprinsă între izoterma elementară k și axă. Pentru ca $Q_1 = \sum_{k=1'}^{n} Q_{1k} = \frac{1}{U_1}\sum_{1'}^{n} U_k(S_{fk} - S_{ik})$ să aibă o valoare maximă, *partea superioară a ciclului studiat trebuie să coincidă cu latura $U_1 = const.$ a pătratului considerat.* În acest caz $U_k = U_1$, $n = 1$, $S_{fk} = S_1$ și $S_{ik} = S_2$, deci $Q_1 = S_1 - S_2 = 2\,\text{MJ}$.

c) În mod asemănător, căldurii cedate în comprimarea izotermă reprezentată prin segmentul orizontal $j\,(= n+1, \ldots, N)$ îi corespunde expresia $|Q_{2j}| = \nu RT_j \ln \frac{V_{ij}}{V_{fj}} = \frac{U_j}{U_1}\nu RT_1 \ln \frac{V_{ij}}{V_{fj}} = \frac{U_j}{U_1}(S_{ij} - S_{fj})$, mărime proporțională — prin același coeficient $\left(\frac{1}{U_1}\right)$ — cu aria A_j cuprinsă între izoterma elementară j și axa S. Rezultă posibilitatea de a exprima căldura cedată Q_2 prin aria $A_{\text{inf.}}$ cuprinsă între partea inferioară a ciclului și axa S, $Q_2 = \frac{A_{\text{inf.}}}{U_1}$, iar căldura primită Q_1 prin aria cuprinsă între porțiunea superioară a ciclului și axa S, $Q_1 = \frac{A_{\text{sup}}}{U_1}$, și, în fine, lucrul mecanic efectuat L prin aria A a ciclului, $Q_1 - |Q_2| = L = \frac{A_{\text{sup.}} - A_{\text{inf.}}}{U_1} = \frac{A}{U_1}$.

Deoarece randamentul motorului termic, $\eta = \frac{L}{Q_1} = \frac{A}{A_{sup.}}$, dintre toate ciclurile înscrise în pătratul considerat, care au o aceeași parte superioară (deci aceeași arie $A_{sup.}$), randamentul maxim îl va avea ciclul a cărui parte de jos este un segment în lungul laturii $U_2 = \text{const.}$ (figura F.C.48 b).

Dintre toate ciclurile a căror parte inferioară este un segment în lungul laturii $U_2 = \text{const.}$, randamentul cel mai mare corespunde ciclului avînd forma unui dreptunghi cu două din laturi (segmente) pe laturile $U_1 = \text{const.}$, $U_2 = \text{const.}$, ale pătratului considerat (figura F.C.48 c). În acest caz, la numărătorul A și numitorul

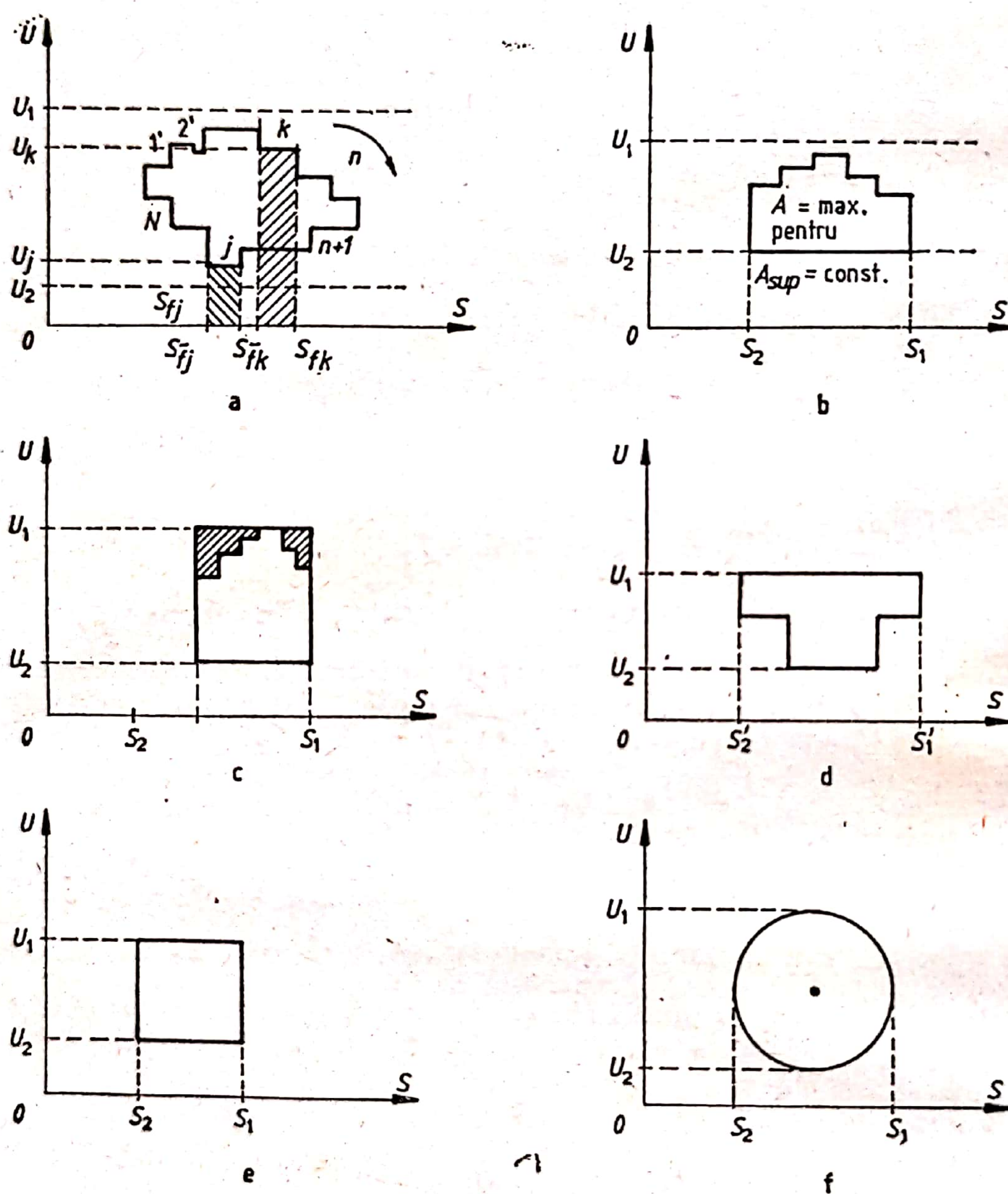


Fig. F.C.48

$A_{sup.}$ al fracției subunitare η s-a adăugat aceeași cantitate pozitivă, aria hașurată în fig. F.C.48 c, ceea ce mărește valoarea η. Nu se poate adăuga mai mult, pentru că atunci s-ar schimba partea de jos a ciclului (figura F.C.48 d) și în final s-ar ajunge tot la un ciclu de randament maxim de forma unui dreptunghi (eventual pătrat) între U_1 și $U_2 = \text{const.}$ (fig. F.C.48 e). Conform constatărilor de la primul punct al problemei, toate acestea sînt cicluri Carnot, al căror randament poate fi dedus

în baza relațiilor: $A_{sup.} = U_1(S_1 - S_2)$, $A_{inf.} = U_2(S_1 - S_2)$, $A = A_{sup.} - A_{inf} = (U_1 - U_2)(S_1 - S_2)$, deci $\eta = \frac{A}{A_{sup.}} = \frac{U_1 - U_2}{U_1} = \frac{T_1 - T_2}{T_1}$ ($\eta = 0{,}5$ în cazul de față).

d) În acest caz $A = \frac{\pi}{4}(U_1 - U_2)^2 = \pi[\mathrm{MJ}]^2$ și $A_{sup.} = \frac{\pi}{8}(U_1 - U_2)^2 + \frac{U_1 + U_2}{2}(S_1 - S_2) = 6 + \frac{\pi}{2}[\mathrm{MJ}]^2$, deci $\eta = \frac{A}{A_{sup.}} = \frac{2\pi}{\pi + 12} \approx 0{,}413$.

S-a ținut seama că este posibilă aproximarea oricît de precisă a circumferinței (fig. F.C.48 f) printr-un poligon cu $N \to \infty$ laturi paralele cu axele U, respectiv S (conform condițiilor impuse în enunțul problemei).

31°. a) În baza relației lui Robert Meyer, $C_p = C_V + R$, expresia parametrului fizic S_{gp}, definit pentru gaze perfecte, capătă forma $S_{gp} = \nu[C_V(\ln p + \ln V) + R \ln V] = \nu[C_V \ln(\nu RT) + R \ln V]$. Rezultă posibilitatea de a exprima căldura primită de gazul perfect într-un proces izoterm ($T_i = T = T_f$) prin relația:

$$Q = \nu RT \ln \frac{V_f}{V_i} = T(S_{gp,f} - S_{gp,i}),$$

unde $S_{gp,f}$ și $S_{gp,i}$ sînt valorile parametrului S_{gp} în stările finală și, respectiv, inițială.

b) Într-o transformare de fază, temperatura și presiunea rămîn constante, $T_i = T_f = T$ și $p_i = p_f = p$, deci variația parametrului G într-o transformare de fază este dată de expresia $\Delta G = G_f - G_i = \Delta U + p\Delta V - T\Delta S$. Întrucît, conform enunțului, S este parametrul de tipul S_{gp}, definit prin relația dedusă la punctul a, generalizată pentru orice substanță, iar transformările de fază sînt procese izoterme, rezultă că — în relația de sus — avem $T\Delta S = Q$, deci $\Delta G = \Delta U - Q + p\Delta V$. Deoarece, conform primului principiu al termodinamicii, $\Delta U = Q - L$, expresia de mai sus capătă forma $\Delta G = p\Delta V - L = 0$ (L este lucrul mecanic efectuat în cursul transformării de fază), rezultînd astfel că parametrul fizic G rămîne constant în cursul unei transformări de fază.

c) Notăm prin δG_i și δG_f variațiile — datorate modificărilor cu δp ale presiunii la care are loc transformarea de fază și (implicit) cu δT a temperaturii la care se produce transformarea de fază — ale parametrului G în fazele inițială și, respectiv, finală (rezultată după transformarea de fază). După cum transformarea de fază are loc la presiunea p și temperatura T, respectiv la presiunea $p + \delta p$ și temperatura $T + \delta T$, condiția de constanță a parametrului G în cursul transformării de fază are forma:

$$G_i(p, T) = G_f(p, T),$$

$$G_i(p + \delta p, T + \delta T) = G_i(p, T) + \delta G_i = G_f(p + \delta p, T + \delta T) = G_f(p, T) + \delta G_f.$$

Scăzînd membru cu membru relațiile de mai sus, obținem

$\delta G_i = \delta G_f$. Ori, $\delta G_i = (\delta U_i + p_i \delta V_i - T_i \delta S_i) + \delta p \cdot V_i - \delta T \cdot S_i$, iar

$\delta G_f = (\delta U_f + p_f \delta V_f - T_f \delta S_f) + V_f \cdot \delta p - S_f \cdot \delta T$; în conformitate cu cele arătate la punctul precedent, avem $\delta U_i + p_i \delta V_i - T_i \delta S_i = 0 = \delta U_f + p_f \delta V_f - T_f \delta S_f$, deci $V_i \cdot \delta p - S_i \cdot \delta T = \delta G_i = \delta G_f = V_f \cdot \delta p - S_f \cdot \delta T$. Din ultima egalitate rezultă că $\delta T(S_f - S_i) = \delta p(V_f - V_i)$, deci $\frac{\delta T}{\delta p} = \frac{V_f - V_i}{S_f - S_i}$; întrucît, în conformitate cu cele arătate la punctul anterior, $S_f - S_i = \Delta S = \frac{Q}{T}$, unde căldura Q primită de o cantitate de substanță de masă m în cursul unei transformări de fază se

exprimă, cu ajutorul căldurii latente λ corespunzătoare, prin relația $Q = m\lambda$, raportul $\frac{\delta T}{\delta p}$ poate fi scris în final în forma

$$\frac{\delta T}{\delta p} = \frac{T(V_f - V_i)}{m\lambda} \text{ (ecuația Clausius-Clapeyron).}$$

32°. a) Fie v_{Tb} viteza medie pătratică a particulelor browniene și v_{Ta} viteza medie pătratică a moleculelor de aer:

$$v_{Tb}^2 = \frac{3kT}{m_b}, \quad v_{Ta}^2 = \frac{3kT}{m_a}, \quad \frac{|v_{Tb}|}{|v_{Ta}|} = \sqrt{\frac{M_a}{N_A m_b}}.$$

Numeric: $\frac{v_{Tb}}{v_{Ta}} = 0{,}7 \cdot 10^{-7}$.

b) $pV = \frac{m}{\mu_a} RT$, $\rho = \frac{p\mu}{RT}$, $v_{Ta} = \sqrt{\frac{3RT}{\mu_a}} = \sqrt{3}\sqrt{\frac{p}{\rho}}$.

Numeric: $v_{Ta} = 1{,}73 \cdot 10^3$ m/s.

c) $pV^\gamma = \text{const.}$, $TV^{\gamma-1} = \text{const.}$, $Tp^{\frac{1-\gamma}{\gamma}} = \text{const}$,

$$v_{Ta} = \sqrt{\frac{3RT}{\mu_a}} \sim T^{1/2} \sim p^{\frac{\gamma-1}{2\gamma}} = p^{\frac{1}{i+2}} \text{ și } v_{Ta} \sim V^{-\frac{1}{i}},$$

unde i reprezintă numărul gradelor de libertate ale moleculei.

Pentru un gaz monoatomic $i = 3$, iar pentru un gaz biatomic $i = 5$.

d) Se calculează lucrul mecanic necesar pentru deplasarea particulelor de R_0 la ∞:

$$L = \int_{R_0}^{\infty} K \frac{m_0 M}{r^2} \mathrm{d}r = K \frac{m_0 M}{R_0} = m_0 g R_0,$$

unde m_0 este masa moleculei, iar M masa Pămîntului.

Din condiția $\frac{1}{2} m_0 \widetilde{v}^2 = \frac{3}{2} kT \geqslant m_0 g R_0$ rezultă $T \geqslant \frac{2m_0 g R_0}{3k} = \frac{2AgR_0}{3R}$.

Numeric: $T > 2 \cdot 10^4$ K.

33°. Fie p_0 și V_0 parametrii gazului din cele două incinte, în poziție orizontală, p_1, V_1 și, respectiv, p_2, V_2 aceeași parametri în poziție verticală la temperatura T_1, iar p_1', V_1' și, respectiv p_2', V_2' parametrii gazului după încălzire (fig. F.C.49).

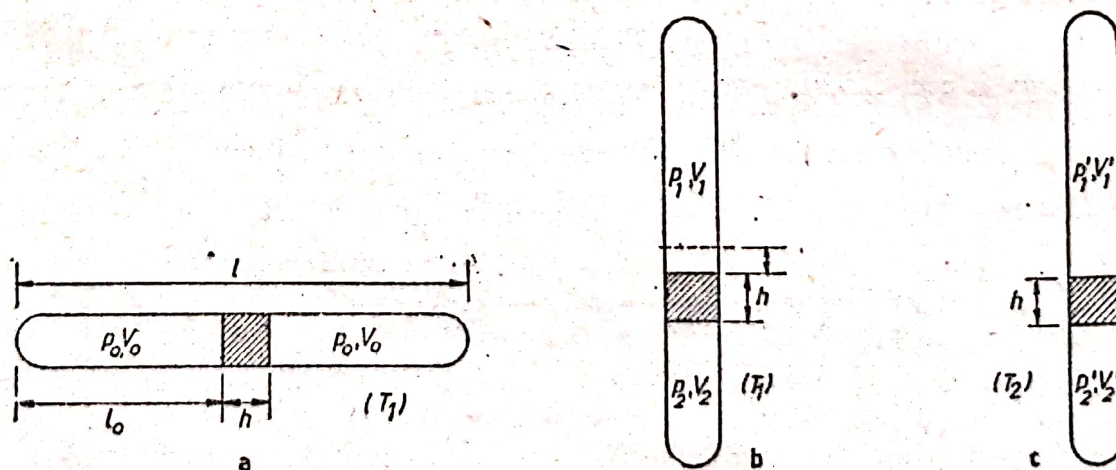


Fig. F.C.49

a) $p_0V_0 = p_1V_1$, $p_0V_0 = p_2V_2$, $p_2 = p_1 + \rho g h$, $V_0 = \frac{l-h}{2}S$, S fiind secțiunea tubului, $V_1 = V_0 + S\Delta l$, $V_2 = V_0 - S\Delta l$.

Rezultă

$$p_2 = \rho g h \frac{\left(\frac{l-h}{2}\right)^2 - (\Delta l)^2}{\Delta l(l-h)} = 0{,}49 \cdot 10^5\ \text{N/m}^2.$$

b) Între volume există relațiile:

$$n = \frac{V_1}{V_2} = \frac{V_0 + S\Delta l}{V_0 - S\Delta l} = \frac{l_0 + \Delta l}{l_0 - \Delta l} = \frac{5}{3} = 1{,}66(6),\ x = \frac{V_1'}{V_2'},\ V_1 + V_2 = V_1' + V_2'.$$

De asemenea, între presiuni mai există relațiile:

$$p_2 = \rho g h + p_1,\ p_2' = \rho g h + p_1',\ \frac{p_1}{p_2} = \frac{1}{n}\ \text{și}\ \frac{p_1'}{p_2'} = \frac{1}{x}.$$

Relațiile dintre volume determină egalitatea

$$V_1\left(1 + \frac{1}{n}\right) = V_1'\left(1 + \frac{1}{x}\right),$$

iar relațiile dintre presiuni o egalitate asemănătoare:

$$p_1(n-1) = p_1'(x-1).$$

Masele gazului în cele două compartimente fiind egale, se pot scrie ecuația:

$$\frac{p_1V_1}{T_1} = \frac{p_1'V_1'}{T_2}.$$

Din ultimele trei egalități se obține o ecuație de gradul doi în x:

$$x^2 - \frac{T_1}{T_2}\left(n - \frac{1}{n}\right)x - 1 = 0,$$

care admite soluțiile $x_{1,2} = \frac{T_1}{2T_2}\left(n - \frac{1}{n}\right) \pm \sqrt{\frac{T_1^2}{4T_2^2}\left(n - \frac{1}{n}\right)^2 + 1}$.

Pentru cazul studiat, $x_{1,2} = 0{,}50071 \pm 1{,}11835 = \begin{cases} 1{,}619, \\ -0{,}618. \end{cases}$

Evident, are sens fizic numai soluția $x > 0$.

34°. a) Variațiile de volum a lichidului și, respectiv, a sticlei, prin răcirea tubului, au expresiile $\Delta V_l = V_0 - V_l = -Sl_0\gamma_l t$ și $\Delta V_{st} = V_{0\,st} - V_{st} = -Sl_0\gamma_{st}t$, unde S este secțiunea tubului.

Rezultă $\Delta l = l_0 t(\gamma_{st} - \gamma_l)$, deci $t = -\frac{\Delta l}{l_0(\gamma_l - \gamma_{st})}$.

Numeric: $t = -\frac{4 \cdot 10^{-3}}{2 \cdot 10^{-1}(9 \cdot 10^{-4} - 0{,}348 \cdot 10^{-4})} = -23\ °\text{C}$.

b) Fie $d_0 = \frac{l_0 - h_0}{2}$, respectiv $d = \frac{l-h}{2}$ distanțele dintre centrele de greutate al tubului, respectiv al mercurului, la 0 °C, respectiv la temperatura t. Din legile dilatării pentru sticlă și mercur rezultă:

$$l = l_0(1 + \alpha_{st}t),\quad h = h_0\frac{1 + \gamma_{Hg}t}{1 + 2\alpha_{st}t},\quad d = \frac{d_0}{2}.$$

Din ecuația $l_0(1+\alpha_{st}t) - h_0 \frac{1+\gamma_{Hg}t}{1+2\alpha_{st}t} = \frac{l_0 - h_0}{2}$, se obține:

$$t = \frac{l_0 - h_0}{2[h_0(\gamma_{Hg} - 2\alpha_{st}) - 2l_0\alpha_{st}}.$$

Numeric: $t = 128{,}6$ °C.

3. ELECTRICITATE

35°. a) Conform figurii F.C.6, rezistența echivalentă a circuitului între punctele A și B, cînd K este închis, este $R_e = R + \frac{R \cdot R}{R+R} = \frac{3R}{2}$; astfel, intensitatea curentului în ramura BC este $I_1 = \frac{U}{\frac{3R}{2}} = \frac{2U}{3R} = \frac{2 \cdot 150}{3 \cdot 100} = 1$ A. Intensitățile curenților în ramurile în paralel vor fi egale, deci $I_1 = I_2 + I_3 = 2I_2$ sau $I_2 = I_3 = \frac{I_1}{2} = 0{,}5$ A.

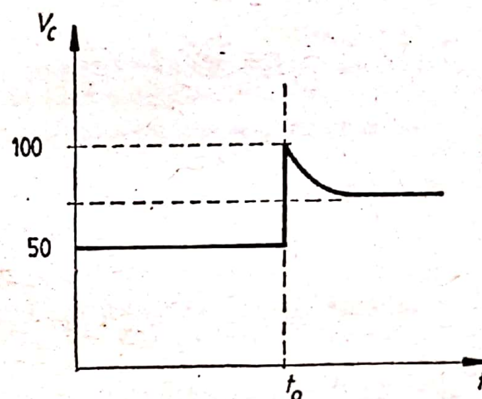


Fig. F.C.50

Cînd contactul K este deschis, rezistența echivalentă între punctele A și B este $R_e = R + R = 2R$. Intensitatea curentului în circuit este $I_1' = \frac{U}{2R} = \frac{150}{2 \cdot 100} = \frac{3}{4}$ A.

b) Potențialul punctului C va fi mai mic decît potențialul punctului B cu tensiunea pe ramura BC, deci

$$V_C = V_B - U_{BC}.$$

În cazul K închis, $V_C = V_B - I_1 R = 150 - 1 \cdot 100 = 50$ V.

În cazul K deschis, $V_C' = V_B - I_1' R = 150 - \frac{3}{4} \cdot 100 = 75$ V.

c) Imediat după deschiderea contactului K, apare în bobină o tensiune electromotoare autoindusă care împiedică curentul să crească de la valoarea I_2 la valoarea I_1', deci intensitatea curentului prin circuit în momentul imediat ulterior deschiderii contactului este I_2. Potențialul punctului C va fi (fig. F.C.50)

$$V_C = V_B - U_{BC} = V_B - I_2 R = 150 - 0{,}5 \cdot 100 = 100 \text{ V}.$$

Deci potențialul punctului C suferă un salt brusc de 50 V în momentul deschiderii contactului pentru ca apoi să scadă lent (exponențial) către valoarea finală V_C'. Evoluția este arătată în figura F.C.50, unde t_0 este momentul deschiderii contactului K.

36°. a) Rezistențele filamentelor sînt obținute din ecuația

$$P = \frac{U^2}{R}, \text{ de unde}$$

$$R_1 = \frac{U^2}{P_1} = \frac{110^2}{40} = 302{,}5\ \Omega;\ R_2 = \frac{U^2}{P_2} = \frac{110^2}{60} = 201{,}66\ \Omega.$$

Din ecuația $P = UI$ rezultă

$$I_1 = \frac{P_1}{U} = \frac{40}{110} = 0{,}363\ \text{A}, \qquad I = \frac{P_2}{U} = 0{,}545\ \text{A}.$$

b) Cînd cele două becuri sînt legate în serie, rezistența circuitului este $R = R_1 + R_2 = 302{,}5 + 201{,}66 = 504{,}16\ \Omega$. Dacă becurile legate în serie sînt alimentate la tensiunea $U' = 220$ V, curentul care trece prin filamentele lor este

$$I' = \frac{U'}{R} = \frac{220}{504{,}16} = 0{,}436\ \text{A}.$$

Dar acest curent este prea mare pentru becul de 40 W care s-ar putea arde. Deci o parte din acest curent trebuie deviat cu ajutorul unei rezistențe legate în paralel cu acest bec, așa cum se arată în figura F.C.51.

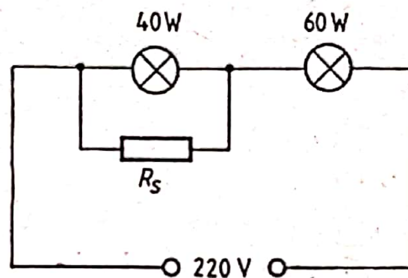


Fig. F.C.51

Rezistența R_s va fi determinată din condiția ca tensiunea U' să se dividă egal pe cele două becuri. În aceste condiții, intensitatea curentului prin circuit va fi I_2, iar gruparea formată din R_1 și R_s va avea rezistența R_2, adică $\frac{R_1R_s}{R_1 + R_s} = R_2$ sau $R_s = \frac{R_1R_2}{R_1 - R_2} = \frac{302{,}5 \cdot 201{,}66}{302{,}5 - 201{,}66} = 604{,}94\ \Omega$.

c) Legate așa cum se arată în figura F.C.51, becurile funcționează normal, deci puterea consumată de ele (puterea utilă) este $P_u = P_1 + P_2 = 40 + 60 = 100$ W. Puterea consumată de la sursă este $P_C = U'I_2 = 220\frac{60}{110} = 120$ W. deci randamentul va fi

$$\eta = \frac{P_u}{P_c} = \frac{100}{120} = 0{,}83 = 83\%.$$

37°. a) Dacă deplasarea plăcilor se face în contact cu sursa, atunci diferența de potențial dintre plăci rămîne nemodificată. Capacitatea condensatorului variază de la valoarea $C = \frac{\varepsilon_0 S}{d}$ la valoarea $C_1 = \frac{\varepsilon_0 S}{d_1}$, deci devine $C_1 = \frac{Cd}{d_1} = \frac{100 \cdot 10^{-12} \cdot 1{,}5 \cdot 10^{-2}}{10^{-2}} = 150$ pF. Sarcina de pe placă va fi $Q_1 = C_1U = 150 \cdot 10^{-12} \cdot 500 = 7{,}5 \cdot 10^{-8}$ C.

b) Înainte de deplasarea plăcii, sarcina de pe armături are valoarea $Q = CU = 100 \cdot 10^{-12} \cdot 500 = 5 \cdot 10^{-8}$ C.

În cursul deplasării plăcii se produce o variație a sarcinii cu $\Delta Q = Q_1 - Q = 7{,}5 \cdot 10^{-8} - 5 \cdot 10^{-8} = 2{,}5 \cdot 10^{-8}$ C.

În acest proces sursa debitează o energie egală cu lucrul efectuat pentru a deplasa această sarcină între cele două puncte (bornele sursei) între care există diferența de potențial U:

$$L = U\Delta Q = 500 \cdot 2{,}5 \cdot 10^{-8} = 1{,}25 \cdot 10^{-5}\ \text{J}.$$

c) Prin introducerea plăcii de sticlă, capacitatea condensatorului se modifică. În noua situație, este ca și cum în jumătatea care conține sticla există două condensatoare legate în serie, unul, C_a, avînd ca dielectric aer, iar al doilea, C_s, avînd ca dielectric sticla. Cea de a doua jumătate constituie un condensator cu aer, C'_a, legat în paralele cu primele două. În figura F.C.52 se arată schema echivalentă descrisă.

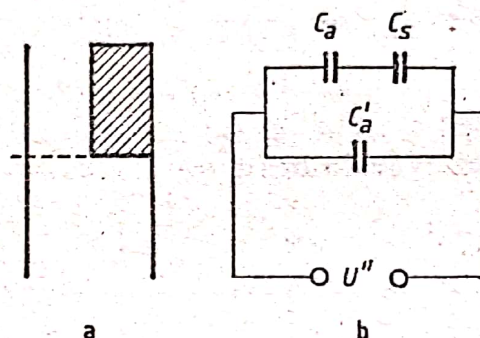


Fig. F.C.52

Capacitatea echivalentă a celor două condensatoare legate în serie este dată de relația $\frac{1}{C_e} = \frac{1}{C_a} + \frac{1}{C_s}$, de unde $C_e = \frac{C_a C_s}{C_a + C_s}$. Capacitatea condensatorului va fi $C'' = C_e + C'_a = \frac{C_a C_s}{C_a + C_s} + C'_a$. Pe de altă parte, placa de sticlă fiind introdusă pe jumătate din aria armăturilor și distanța dintre armături fiind d_1, vom avea

$$C_a = \frac{\varepsilon_0 S}{2(d_1 - d')} = \frac{Cd}{2(d_1 - d')}, \quad C_s = \frac{\varepsilon_0 \varepsilon_r S}{2d'} = \frac{\varepsilon_r Cd}{2d'}, \quad C'_a = \frac{\varepsilon_0 S}{2d_1} = \frac{Cd}{2d_1}.$$

Capacitatea condensatorului devine

$$C'' = \frac{\frac{Cd}{2(d_1 - d')} \cdot \frac{\varepsilon_r Cd}{2d'}}{\frac{Cd}{2(d_1 - d')} + \frac{\varepsilon_r Cd}{2d'}} + \frac{Cd}{2d_1} = \frac{\varepsilon_r Cd}{2[d' + \varepsilon_r(d_1 - d')]} + \frac{Cd}{2d_1} =$$

$$= \frac{Cd}{2}\left(\frac{\varepsilon_r}{d' + \varepsilon_r(d_1 - d')} + \frac{1}{d_1}\right) = \frac{100 \cdot 10^{-12} \cdot 1{,}5 \cdot 10^{-2}}{2} \times$$

$$\times \left(\frac{2{,}8}{0{,}5 \cdot 10^{-2} + 2{,}8(1 \cdot 10^{-2} - 0{,}5 \cdot 10^{-2})} + \frac{1}{1 \cdot 10^{-2}}\right) = 185{,}5\ \text{pF}.$$

În procesul de introducere a plăcii de sticlă, sarcina de pe armături nu s-a schimbat, deci are tot valoarea Q_1, astfel incît diferența de potențial dintre armături va fi

$$U'' = \frac{Q_1}{C''} = \frac{7{,}5 \cdot 10^{-8}}{530 \cdot 10^{-12}} = 404{,}2\ \text{V}.$$

38°. a) Valorile măsurate cu voltmetrul termic sînt valori efective. Prin toate elementele circuitului circulă acelaşi curent a cărui intensitate efectivă este (fig. F.C.53)

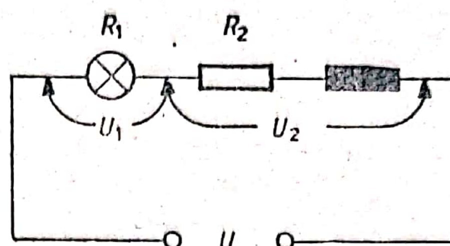


Fig. F.C.53

$$I = \frac{U_1}{R_1} = \frac{144}{120} = 1,2 \text{ A}.$$

Impedanţa bobinei este $Z_b = \sqrt{R_2^2 + L^2\omega^2}$. Legea lui Ohm pentru bobină va fi $I = \frac{U_2}{Z_b}$, de unde rezultă ecuaţia

$$R_2^2 + L^2\omega^2 = \frac{U_2^2}{I^2}. \quad (1)$$

Impedanţa circuitului din figura F.C.53 va fi $Z = \sqrt{(R_1 + R_2)^2 + L^2\omega^2}$, iar legea lui Ohm pentru circuit $I = \frac{U}{Z}$, de unde $(R_1 + R_2)^2 + L^2\omega^2 = \frac{U^2}{I^2}$ (2). Scăzînd membru cu membru ecuaţia (1) din ecuaţia (2), rezultă

$$R_2 = \frac{1}{2R_1}\left(\frac{U^2 - U_2^2}{I^2} - R_1^2\right) = \frac{R_1}{2}\left(\frac{U^2 - U_2^2}{U_1^2} - 1\right) = \frac{120}{2}\left(\frac{220^2 - 80^2}{144^2} - 1\right) = 61,5\,\Omega.$$

Din ecuaţia (1), rezultă

$$L = \frac{1}{\omega}\sqrt{\left(\frac{U_2}{I}\right)^2 - R_2^2} = \frac{1}{2\pi\cdot 50}\sqrt{\left(\frac{80}{1,2}\right)^2 - 61,5^2} \approx 0,082 \text{ H} = 82 \text{ mH}.$$

b) Puterea activă consumată este $P_a = (R_1 + R_2)\,I^2 = (120 + 61,5)\,1,2^2 = 261,3$ W.

Factorul de putere se obţine cu ajutorul figurii F.C.54:

$$\cos\varphi = \frac{U_{R_1} + U_{R_2}}{U} = \frac{(R_1 + R_2)\,I}{U} = \frac{(120 + 61,5)\cdot 1,2}{220} \approx 0,99$$

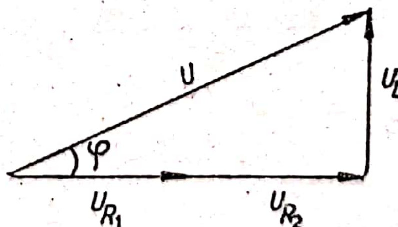


Fig. F.C.54

c) Intensitatea în circuit va fi maximă cînd se obţine rezonanţa, adică în cazul cînd C este dat de relaţia $L\omega = \frac{1}{C\omega}$ sau $C = \frac{1}{0,082\cdot 4\pi^2 50^2} = 1,24\cdot 10^{-4}$ F $= 124$ μF.

In cazul rezonanței, impedanța devine $Z' = R_1 + R_2$, deci intensitatea curentului este

$$I' = \frac{U}{R_1 + R_2} = \frac{220}{120 + 61,5} = 1,212 \text{ A}.$$

39°. $\Phi = BS_t = \mu_0 HNS$,

Tensiunea electromotoare indusă în spirele bobinei la rotire este:

$$|e| = \frac{\Delta\Phi}{\Delta t}.$$

Curentul care trece prin circuit va fi:

$$i = \frac{|e|}{R} = \frac{\Delta\Phi}{R\Delta t},$$

iar sarcina electrică înregistrată de galvanometrul balistic

$$q = i\Delta t = \frac{\Delta\Phi}{R} = \frac{2\mu_0 HNS}{R}.$$

De aici rezultă

$$H = \frac{qR}{2\mu_0 NS} = \frac{8 \cdot 10^{-6} \cdot 3\pi}{2 \cdot 4\pi \cdot 10^{-7} \cdot 100 \cdot 3 \cdot 10^{-6}} = 10^5 \text{ A} \cdot \text{m}^{-1}.$$

40°. a) În figura F.C.55, avem $I_V = I_A = I_0 = 0,1$ A și $R_A = R_V = R_0 = 9,8\ \Omega$. Relațiile $I = I_A + I_S = I_0 + I_S$ și $I_A R_A = I_0 R_0 = I_S R_S$ conduc la:

$$R_S = \frac{R_A}{\frac{I}{I_0} - 1} = \frac{9,8}{\frac{5}{0,1} - 1} = 0,2\ \Omega. \qquad (1)$$

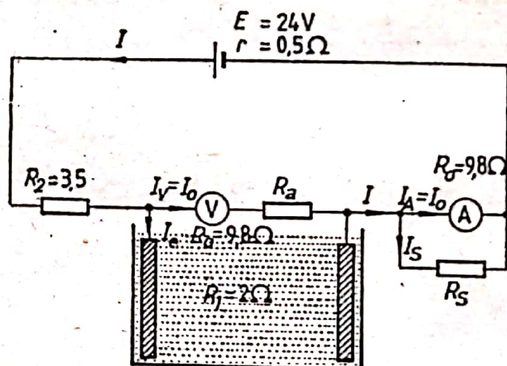


Fig. F.C.55

b) Din relațiile $U_{R_1} = U_V + U_{R_a}$ și $U_{R_1} = nU'_V$, ținînd seama de faptul că $I'_V = I_0$, se obține:

$$U_{R_A} = (n - 1)\,U'_V. \qquad (2)$$

Deoarece

$$\frac{U_V}{R_V} = \frac{U_{R_a}}{R_a} = \frac{(n-1)\,U_V}{R_a}; \qquad (3)$$

rezultă

$$R_a = R_V(n-1) = R_0\left(\frac{U_{R_1}}{I_0 R_0} - 1\right) = \frac{U_{R_1}}{I_0} - R_0 = \frac{30}{0{,}1} - 9{,}8 = 290{,}2.$$

c) Schema circuitului este dată în figura F.C.56.

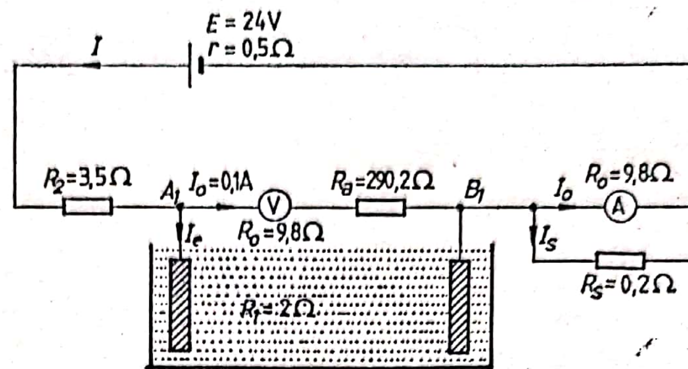


Fig. F.C.56

$$I = \frac{E}{r + R_{ech}} = \frac{E}{r + R_2 + \dfrac{(R_0 + R_a)\,R_1}{R_0 + R_a + R_1} + \dfrac{R_0 R_s}{R_0 + R_s}} =$$

$$= \frac{24}{0{,}5 + 3{,}5 + \dfrac{300 \cdot 2}{302} + \dfrac{9{,}8 \cdot 0{,}2}{10}} = 3{,}882 \text{ A},$$

$I_e = I - I_0 = 3{,}882 - 0{,}1 = 3{,}782$ A,

$I_s = I - I_0 = I_e = 3{,}782$ A.

d) $EI = (r + R_2)\,I^2 + (R_1 + R_s)\,I_e^2 + (2R_0 + R_a)\,I_0^2 \approx 94{,}8$ W.

e) $m = KI_e t = 4{,}025 \cdot 10^{-3} \cdot 3{,}782 \cdot 2 = 3{,}0445 \cdot 10^{-2}$ kg $= 30{,}445$ g.

41°. a) $I_{ef} = \max$, pentru $L = \dfrac{1}{4\pi^2 \nu_0^2 C} = L_1 + L_2 = \dfrac{\mu_0 N^2 S}{2l} + \dfrac{\mu_0 \mu_r N^2 S}{2l}$,

adică

$$\mu_r = \frac{2l}{4\pi^2 \nu_0^2 C \mu_0 N^2 S} - 1 \approx 13{,}07.$$

b) $I_0 = \dfrac{I_{ef\,max}}{n} \Rightarrow n \dfrac{}{\sqrt{R^2 + \left(L' \cdot 2\pi\nu_0 - \dfrac{1}{C \cdot 2\pi\nu_0}\right)^2}} = \dfrac{U}{R}$,

rezultînd

$$R = \frac{2\pi\nu_0 L' - \dfrac{1}{C \cdot 2\pi\nu_0}}{\sqrt{n^2 - 1}} = \frac{2\pi\nu_0 \dfrac{\mu_0\mu_r N^2 S}{l} - \dfrac{1}{C \cdot 2\pi\nu_0}}{\sqrt{n^2 - 1}} = 8{,}75\ \Omega.$$

Condiția pentru putere se scrie:

$$\frac{1}{2} \cdot \frac{U^2}{R} = \frac{U^2 R}{R^2 + (X_L - X_C)^2} \Rightarrow X_L - X_C = \pm R,$$

$$2\pi\nu_1 L - \frac{1}{2\pi\nu_1 C} = R \quad \text{și} \quad 2\pi\nu_2 L - \frac{1}{2\pi\nu_2 C} = -R,$$

unde $L = \frac{\mu_0 N^2 S}{2l}(1 + \mu_r)$. Rezultă:

$$\nu_1 = \frac{1}{2\pi}\left(\sqrt{\frac{1}{LC} + \frac{R^2}{4L^2}} + \frac{R}{2L}\right) = 10{,}837 \text{ kHz},$$

$$\nu_2 = \frac{1}{2\pi}\left(\sqrt{\frac{1}{LC} + \frac{R^2}{4L^2}} - \frac{R}{2L}\right) = 9{,}169 \text{ kHz}.$$

c) $Q = \frac{\omega_0 L}{R} = \frac{\nu_0}{\nu_1 - \nu_2} = 5{,}995.$

42°. a) Accelerația barei pe distanța l_1 este

$$a = \frac{m_2}{m_1 + m_2} g = \frac{1{,}1}{0{,}275 + 1{,}1} 10 = 8 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}; \qquad (1)$$

Viteza barei la intrarea în cîmpul magnetic va fi:

$$v = \sqrt{2al_1} = \sqrt{2 \cdot 8 \cdot 1} = 4 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}. \qquad (2)$$

Bara de lungime l se mişcă în cîmpul magnetic cu viteza v şi în ea se induce tensiunea electromotoare $e = -Blv$; prin bară va trece curentul electric de intensitate

$$I = \frac{E + e}{R + r} = \frac{E - Blv}{R + r}. \qquad (3)$$

Asupra barei, cînd se află în cîmpul magnetic de inducție B, acționează forțele $m_2 g$ şi BIl, deci:

$$m_2 g = B \frac{E - Blv}{R + r} l \qquad (4)$$

sau

$$B^2 - 12B + 11 = 0,$$

obținîndu-se $B_1 = 1$ T şi $B_2 = 11$ T.

b) $t = t_1 + t_2 = \frac{v}{a} + \frac{l_2}{v} = \frac{4}{8} + \frac{0{,}8}{4} = 0{,}7$ s. (5)

c) $m_2 g v + (R + r) I^2 = EI$ (6a)

sau

$$m_2 g v + (R + r)\left(\frac{E - Blv}{R + r}\right)^2 = E \frac{E - Blv}{R + r}$$

$$1{,}1 \cdot 10 \cdot 4 + \frac{(24 - 1 \cdot 0{,}5 \cdot 4)^2}{0{,}5 + 0{,}5} = 24 \cdot \frac{24 - 1 \cdot 0{,}5 \cdot 4}{0{,}5 + 0{,}5},$$

$44 + 484 = 528$, pentru B $= 1$ T,

$$1{,}1 \cdot 10 \cdot 4 + \frac{(24 - 11 \cdot 0{,}5 \cdot 4)^2}{0{,}5 + 0{,}5} = 24 \cdot \frac{24 - 11 \cdot 0{,}5 \cdot 4}{0{,}5 + 0{,}5},$$

$44 + 4 = 48$, pentru $B = 11$ T.

43°. a) $M = bF_1 = l \sin\theta \cdot Q_1 E = 0{,}2 \text{ m} \cdot \sin 30° \cdot 10^{-3} \text{C} \cdot 100 \frac{\text{N}}{\text{C}} = 0{,}01 \text{ N} \cdot \text{m}.$

Direcția momentului cuplului de forțe este perpendiculară pe planul xOy, sensul — dat de regula burghiului — fiind spre cititor (fig. F.C. 57a), deci:

$$\overline{M} = 0{,}01\,\overline{1}_z [\text{N} \cdot \text{m}],$$

unde $\overline{1}_z$ este vectorul unitar (versorul) al axei Oz, asociată axelor Ox şi Oy în triedrul drept $Oxyz$.

b) Poziția de echilibru stabil este cea pentru care $\theta = 0$, iar poziția de echilibru instabil cea pentru care $\theta = 180°$. Dacă Q_{1x} este poziția sarcinii Q_1 la echilibrul stabil al tijei (fig. F.C.57b), $OQ_{1x} = \frac{l}{2}$, atunci lucrul mecanic cerut este:

$$L = 2Q_1Ed = 2Q_1E\frac{l}{2}(1 - \cos\theta) = Q_1El(1 - \cos\theta).$$

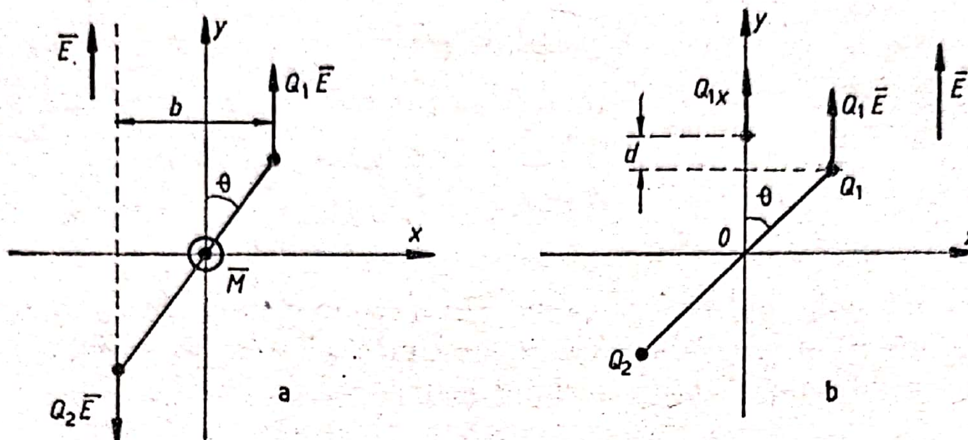


Fig. F.C.57

Efectuînd calculele numerice, obținem:

$$L = 10^{-3} \cdot 100 \cdot 0{,}2\left(1 - \frac{\sqrt{3}}{2}\right) \approx 2{,}68 \cdot 10^{-3}\ \text{J}.$$

c) În cazul micilor oscilații, cele două puncte materiale se deplasează ca și cînd ar fi legate printr-un fir inextensibil de lungime $\frac{l}{2} = 0{,}1$ m în punctul fix O și ar fi supuse unui cîmp de forțe uniform de accelerație $a = \frac{F_1}{m} = \frac{Q_1E}{m}$.

Prin analogie cu problema micilor oscilații ale pendulului gravitațional, în locul expresiei $T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}$, vom avea $T = 2\pi\sqrt{\frac{l/2}{a}}$, de unde $T^2 = 4\pi^2\frac{l}{2a}$ și $a = \frac{Q_1E}{m} = \frac{2\pi^2 l}{T^2}$. Rezultă că

$$m = \frac{Q_1ET^2}{2\pi^2 l} = \frac{10^{-3} \cdot 100 \cdot 1}{19{,}78 \cdot 0{,}1} \cong 5{,}06 \cdot 10^{-2}\ \text{kg}\ (50{,}6\ \text{g}).$$

44°. a) $E = \frac{U}{d} = \frac{Q}{dC} = \frac{Q}{\varepsilon_a A} = \frac{\sigma}{\varepsilon_a} = \frac{10^{-6}}{8{,}86 \cdot 10^{-12}} \simeq 1{,}13 \cdot 10^5\ \frac{\text{V}}{\text{m}}$.

b) Fie E_+ și E_- intensitățile cîmpurilor electrice produse de densitățile superficiale de sarcini electrice $+\sigma$ și $-\sigma$. Evident (fig. F.C. 58), aceste intensități sînt

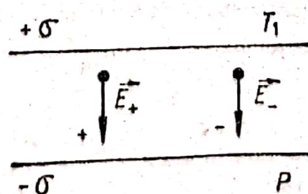


Fig. F.C.58

egale, inclusiv ca sens, deci $E = 2E_-$ și $E_- = \frac{E}{2}$.

Rezultă că forța electrostatică de atragere a talerului T_1 de către placa fixă P va fi $F = QE_- = \sigma A \frac{E}{2}$, iar masa corpului suplimentar care trebuie pus pe talerul T_2 pentru reechilibrarea balanței este

$$m = \frac{F}{g} = \frac{\sigma A}{g} \cdot \frac{E}{2} = \frac{10^{-6} \cdot 10^{-2}}{9,8} \cdot \frac{1,13 \cdot 10^5}{2} \simeq 57,6 \text{ mg}.$$

c) $U_e = Ed_c = 1,13 \cdot 10^5 \cdot 2 \cdot 10^{-3} = 226$ V.

d) În acest caz:

$$F = CU_e \frac{U_e}{2d} = \frac{\varepsilon_0 A}{2} \cdot \frac{U_e^2}{d^2} = mg \frac{d_e^2}{d^2} \begin{cases} < mg, \text{ pentru } d > d_0, \\ = mg, \text{ pentru } d = d_0, \\ > mg, \text{ pentru } d < d_0, \end{cases}$$

deci echilibrul mecanic (al balanței electrostatice) devine instabil.

45°. a) Integrînd expresia indicată în enunț pentru permitivitatea diferențială pe ramura de repolarizare a ciclului histerezis,

$$\left(\frac{dD}{dE}\right)_{\text{repol.}} = \varepsilon_i + RE + R_0E_0,$$

se obține dependența de intensitatea E a cîmpului electric a inducției electrice D pe ramură de repolarizare:

$$D_{\text{repol.}}(E, E_0) = \varepsilon_i E + R\frac{E^2}{2} + R_0E_0E + C.$$

Pentru $E = \pm E_0$, inducția electrică pe ramura de repolarizare atinge valorile extreme ($\pm D_0$) corespunzătoare ciclului histerezis considerat, deci:

$$D_{\text{repol.}}(E_0, E_0) = D_0 = \varepsilon_i E_0 + R\frac{E_0^2}{2} + RE_0^2 + C,$$

$$D_{\text{repol.}}(-E_0, E_0) = -D_0 = -\varepsilon_i E_0 + R\frac{E_0^2}{2} - RE_0^2 + C.$$

Însumînd membru cu membru ultimele două relații obținute, rezultă că $0 = RE_0^2 + 2C$, reieșind valoarea constantei C de integrare: $C = -\frac{R}{2}E_0^2$; inlocuind în expresia de mai sus a inducției electrice pe ramura de repolarizare, găsim:

$$D_{\text{repol.}}(E, E_0) = (\varepsilon_i + R_0E_0)E + \frac{R}{2}(E^2 - E_0^2).$$

Datorită simetriei ciclului histerezis, inducția electrică pe ramura de depolarizare a ciclului este dată de expresia:

$$D_{\text{depol.}}(E, E_0) = -D_{\text{repol.}}(-E, E_0) = (\varepsilon_i + R_0E_0)E - \frac{R}{2}(E^2 - E_0^2).$$

b) În baza expresiilor obținute pentru ramurile ciclului histerezis, inducția maximă D_0 este dată de relația:

$$D_0 = D_{\text{repol.}}(E_0, E_0) = D_{\text{depol.}}(E_0, E_0) = \varepsilon_i E_0 + R_0E_0^2,$$

care, în forma $D_{pr.\,pol.} = \varepsilon_i E + R_0 E^2$, constituie și ecuația curbei de primă polarizare. Rezultă expresiile permitivității diferențiale:

$$\varepsilon_d = \left(\frac{dD}{dE}\right)_{pr.\,pol.} = \varepsilon_i + 2R_0 E,$$

respectiv totale, pe curba de primă polarizare:

$$\varepsilon_{tot} = \left(\frac{D}{E}\right)_{pr.\,pol.} = \varepsilon_i + R_0 E.$$

c) Densitatea volumică a energiei electrostatice disipate pentru parcurgerea unui ciclu histerezis este:

$$\frac{\Delta W}{\Delta V} = \int_{-E_0}^{E_0} (D_{depol.} - D_{repol.})dE = R\int_{-E_0}^{E_0} (E_0^2 - E^2)dE = \frac{4R}{3}E_0^3.$$

În condițiile unui cîmp electric alternativ de perioadă T (și frecvență f), densitatea volumică a puterii disipate este:

$$\frac{\Delta|\widetilde{P}|}{\Delta V} = \frac{1}{T}\cdot\frac{\Delta W}{\Delta V} = \frac{4R}{3}E_0^3 f.$$

d) Din ecuația fluxului electric scrisă pentru o suprafață a cilindrului de rază r, coaxială cu armăturile considerate, găsim: $2\pi r L\cdot E(r) = \frac{Q_{int.}}{\varepsilon}$, unde $Q_{int.}$ este sarcina electrică de pe armătura interioară. Rezultă că $E(r) = \frac{Q_{int.}}{2\pi\varepsilon L}\cdot\frac{1}{r}$, iar tensiunea dintre armături (fig. F.C.59):

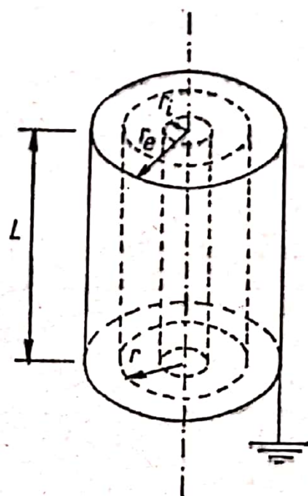


Fig. F.C.59

$U = -\int_{r_e}^{r} E(r)dr = \frac{Q_{int.}}{2\pi\varepsilon L}\ln\frac{r_e}{r_i}$. Împărțind membru cu membru ultimele două relații, găsim că $E(r) = \frac{U}{r\ln\frac{r_e}{r_i}}$. Deoarece $r_e - r_i \ll r$, avem (între armături)

$$E_0(r) \approx E_0(r_i) = \frac{U_0}{r_i \ln\frac{r_e}{r_i}}.$$

Rezultă puterea disipată pentru parcurgerea repetată a ciclului feroelectric:

$$P = f \cdot \pi(r_e^2 - r_i^2)L \cdot \frac{4R}{3}\left[\frac{U_0}{r_i \ln \frac{r_e}{r_i}}\right]^3.$$

Comparînd această expresie cu aceea a puterii disipate pe rezistența echivalentă R_f pentru o tensiune alternativă de frecvență f și amplitudine U_0, $P = \frac{U_0^2}{2R_f}$, găsim:

$$R_f = \frac{3}{4\pi R(r_e^2 - r_i^2)LU_0 f}\left(r_i \ln \frac{r_e}{r_i}\right)^3.$$

46°. a) $\left(\frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2}\right)\frac{1}{L} = \omega_0^2$, deci $\frac{1}{C_2} = L\omega_0^2 - \frac{1}{C_1} = 0{,}3 \cdot 25 \cdot 10^4 - \frac{1}{4 \cdot 10^{-5}}$, obținînd $C_2 = 2 \cdot 10^{-5} F$ $(= 20\ \mu F)$.

b) Sarcina electrică a condensatorului format din înfășurarea solenoidului și armăturile condensatoarelor C_1 și C_2, legate de înfășurare, nu variază în timp: $Q = C_1u_1 + C_2u_2 = \text{const.}\ (t)$. Rezultă că potențialul punctului înfășurării solenoidului aflat la fracțiunea $\frac{C_1}{C_1 + C_2}$ (din înfășurare) spre condensatorul C_1 și fracțiunea $\frac{C_2}{C_1 + C_2}$ spre condensatorul C_2 este $u = u_1\frac{C_1}{C_1 + C_2} + u_2\frac{C_2}{C_1 + C_2} = \frac{Q}{C_1 + C_2} = \text{const.}\ (t)$.

c) În cazul problemei de față, potențialul u constant în timp are valoarea $u = \frac{1}{C_1 + C_2}(C_1u_{10} + C_2u_{20}) = 0$. În aceste condiții, se poate scrie condiția de conservare a energiei electromagnetice (în absența elementelor disipative) pentru circuitul format din condensatorul C_1 și fracțiunea $\frac{C_2}{C_1 + C_2}$ din înfășurarea solenoidului, obținînd:

$$\frac{C_1u_{10}^2}{2} + \frac{C_2L}{C_1 + C_2} \cdot \frac{I_0^2}{2} = \frac{C_1u_{10}^2}{2} + \frac{C_2}{C_1 + C_2} \cdot \frac{\Phi_0^2}{2L} = \frac{C_1u_{1,\max}^2}{2}$$

obținînd:

$$u_{1,\max} = \sqrt{u_{10}^2 + \frac{C_2}{C_1} \cdot \frac{\Phi_0^2}{L(C_1 + C_2)}} = \sqrt{1^2 + \frac{2}{4} \cdot \frac{9 \cdot 10^{-6}}{0{,}3 \cdot 6 \cdot 10^{-5}}} \approx 1{,}12\ \text{V}.$$

d) Pornind de la expresia pulsației de rezonanță în circuitul serie C_1LC_2,

$$\omega_{rez} = \frac{1}{\sqrt{L\frac{C_1C_2}{C_1 + C_2}}},$$

și de la expresiile energiilor electrostatică (într-un condensator înseriat într-un circuit cu fluxuri magnetice) și magnetostatică (într-o bobină),

$$W_{es} = \frac{Cu^2}{2} = \frac{C}{2}\left(\frac{\Delta\Phi}{\Delta t}\right)^2, \quad W_{ms} = \frac{\Phi^2}{2L},$$

comparate cu energiile cinetică $W_c = \frac{m}{2}\left(\frac{\Delta x}{\Delta t}\right)^2$ şi elastică $W_e = \frac{kx^2}{2}$, se stabilesc parametrii fizici analogi:

Electromagnetici	Φ	$u\left(=\frac{\Delta\Phi}{\Delta t}\right)$	C	$Q(=Cu)$	$I\left(=\frac{\Delta Q}{\Delta t}\right)$	$L\left(=\frac{\Phi}{I}\right)$
Mecanici	x	$V\left(=\frac{\Delta x}{\Delta t}\right)$	m	$p(=mv)$	$F\left(=\frac{\Delta p}{\Delta t}\right)$	$\frac{1}{k}\left(=\frac{x}{F}\right)$

şi sistemul mecanic oscilant analog (fig. F.C.60).

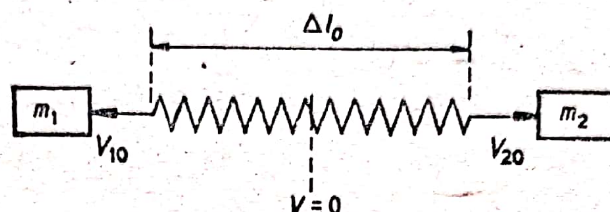


Fig. F.C.60

47°. a) Impedanţa Z a ramurii RLC serie este:

$$Z = \sqrt{R^2 + \left(L\omega - \frac{1}{C\omega}\right)^2};$$

deci, amplitudinea U_0 a tensiunii la bornele circuitului este:

$$U_0 = ri_0 = ZI_{s0} = I_{s0}\sqrt{R^2 + \left(L\omega - \frac{1}{C\omega}\right)^2}. \tag{1}$$

Deoarece tensiunea U_{AB} la bornele circuitului este în fază cu intensitatea i a curentului electric prin rezistorul r, defazajul φ_s dintre oscilaţiile curenţilor i şi I_s este acelaşi cu defazajul dintre tensiunea U_{AB} la bornele ramurii serie RLC şi intensitatea I_s a curentului prin această ramură, fiind dat de expresiile:

$$\cos\varphi_s = \frac{R}{Z} = \frac{R}{\sqrt{R^2 + \left(L\omega - \frac{1}{C\omega}\right)^2}}, \quad \sin\varphi_s = \frac{L\omega - \frac{1}{C\omega}}{Z} = \frac{L\omega - \frac{1}{C\omega}}{\sqrt{R^2 + \left(L\omega - \frac{1}{C\omega}\right)^2}},$$

$$\operatorname{tg}\varphi_s = \frac{X_L - X_C}{R} = \frac{1}{R}\left(L\omega - \frac{1}{C\omega}\right). \tag{2}$$

Oscilaţiile I_s sînt *în urmă* cu φ_s; deci, dacă $U_{AB} = U_0 \cos\omega t$ şi $i = i_0 \cos\omega t$, atunci $I_s = I_{s0}\cos(\omega t - \varphi_s)$.

b) Conform primei legi a lui Kirchhoff, $I_c = I_s + i$, deci

$$I_s = I_c - i. \tag{3}$$

Deducerile relaţiei dintre amplitudinile I_0 şi i_0, precum şi a expresiei defazajului, φ, pot fi efectuate atît pe cale fazorială, cît şi prin procedura algebrică, utilizarea acestor metode fiind prezentată mai jos.

Metoda I (fazorială)

Din diagrama fazorială a curenților (fig. F.C.61) avem: $I_0^2 = i_0^2 + I_{s0}^2 + 2 i_0 I_{s0} \cos\varphi_s$, de unde — înlocuind I_{s0} prin i_0 în baza relației (2) — găsim:

$$I_0^2 = i_0^2\left[1 + \frac{r^2}{R^2 + \left(L\omega - \frac{1}{C\omega}\right)^2} + 2\frac{rR}{R^2 + \left(L\omega - \frac{1}{C\omega}\right)^2}\right] =$$

$$= i_0^2 \cdot \frac{(R+r)^2 + \left(L\omega - \frac{1}{C\omega}\right)^2}{R^2 + \left(L\omega - \frac{1}{C\omega}\right)^2}. \qquad (4)$$

Din fig. F.C.61 rezultă și relațiile

$$I_0 \cos\varphi = i_0 + I_{s0}\cos\varphi_s \ (5)$$

și, respectiv,

$$I_0 \sin\varphi = I_{s0}\sin\varphi_s. \qquad (6)$$

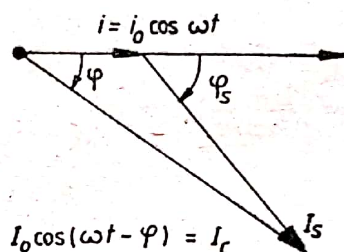


Fig. F.C.61

Înlocuind în relațiile (5) și (6) valorile $\frac{I_{s0}}{i_0}$, $\cos\varphi_s$ și $\sin\varphi_s$, $\frac{i_0}{I_0}$ date de relațiile (1), (2) și — respectiv — (4), se obțin expresiile:

$$\cos\varphi = \frac{R(R+r) + \left(L\omega - \frac{1}{C\omega}\right)^2}{\sqrt{\left[R^2 + \left(L\omega - \frac{1}{C\omega}\right)^2\right]\left[(R+r)^2 + \left(L\omega - \frac{1}{C\omega}\right)^2\right]}}, \qquad (7)$$

$$\sin\varphi = \frac{r\left(L\omega - \frac{1}{C\omega}\right)}{\sqrt{\left[R^2 + \left(L\omega - \frac{1}{C\omega}\right)^2\right]\left[(R+r)^2 + \left(L\omega - \frac{1}{C\omega}\right)^2\right]}}. \qquad (8)$$

Metoda a II-a (algebrică)

Legea I a lui Kirchhoff ne dă:

$$I_c(t) = I_0\cos(\omega t - \varphi) = i(t) + I_s(t) = i_0\cos\omega t + I_{s0}\cos(\omega t - \varphi_s)$$

Descompunînd funcțiile $\cos(\omega t - \varphi)$ și $\cos(\omega t - \varphi_s)$, obținem:

$$I_0\cos\varphi \cdot \cos\omega t + I_0\sin\varphi \cdot \sin\omega t = (i_0 + I_{s0}\cos\varphi_s)\cos\omega t + I_{s0}\sin\varphi_s \cdot \sin\omega t. \qquad (9)$$

Deoarece relația de mai sus trebuie satisfăcută la orice moment t, ea este o identitate; întrucît identitatea $A\sin x + B\cos x = 0$ (x poate fi ωt) impune cu necesitate $A = B = 0$, coeficienții funcțiilor $\cos\omega t$, respectiv $\sin\omega t$, din membrii stîng și drept ai identității (9) trebuie să fie egali: $I_0\cos\varphi = i_0 + I_{s0}\cdot\cos\varphi_s$, (5)

$$I_0\sin\varphi = I_{s0}\sin\varphi_s. \qquad (6)$$

Ţinînd seamă de relaţiile (1) şi (2), relaţiile (5) şi (6) devin:

$$I_0 \cos\varphi = i_0 \frac{R^2 + Rr + \left(L\omega - \frac{1}{C\omega}\right)^2}{R^2 + \left(L\omega - \frac{1}{C\omega}\right)^2}, \quad I_0 \sin\varphi = i_0 \frac{r\left(L\omega - \frac{1}{C\omega}\right)}{R^2 + \left(L\omega - \frac{1}{C\omega}\right)^2}. \quad (10)$$

Împărţind membru cu membru relaţiile (10), respectiv ridicîndu-le la pătrat şi adunîndu-le membru cu membru, se obţine:

$$\operatorname{tg}\varphi = \frac{r\left(L\omega - \frac{1}{C\omega}\right)}{R^2 + r^2 + \left(L\omega - \frac{1}{C\omega}\right)^2}, \quad (11)$$

[relaţie echivalentă cu (7) şi (8)], precum şi relaţia (4).

Notă. Relaţia (4) se poate obţine şi observînd că bilanţul tensiunilor în ochiul *ARCLBrA* este echivalent cu cel din ochiul din fig. F.C.62.

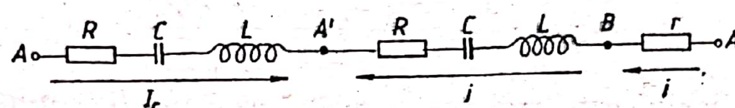


Fig. F.C.62

Deoarece, la orice moment t, suma diferenţelor de potenţial electric $U_{A'} - U_A$ şi $U_A - U_{A'}$ este nulă, $U_{A'A}(t) + U_{AA'}(t) = 0$, amplitudinile respectivelor tensiuni sînt egale:

$$I_0 Z = I_0 \sqrt{R^2 + \left(L\omega - \frac{1}{C\omega}\right)^2} = i_0 \sqrt{(R + r)^2 + \left(L\omega - \frac{1}{C\omega}\right)^2} = i_0 Z_0, \quad (4')$$

unde Z_0 este impedanţa ochiului *RCLr* real.

c) $$U_0 = r i_0 = r I_0 \sqrt{\frac{R^2 + \left(L\omega - \frac{1}{C\omega}\right)^2}{(R + r)^2 + \left(L\omega - \frac{1}{C\omega}\right)^2}} = r I_0 \left[1 + \frac{r(2R + r)}{R^2 + \left(L\omega - \frac{1}{C\omega}\right)^2}\right]^{-\frac{1}{2}}.$$

Se constată că dependenţa de frecvenţă a amplitudinii U_0 are forma din figura F.C.63, cu un minim pentru frecvenţa ν_0 (de „rezonanţă") pentru care:

$$L\omega_0 - \frac{1}{C\omega_0} = 0, \text{ deci } \omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}} \text{ şi } \nu_0 = \frac{1}{2\pi\sqrt{LC}}.$$

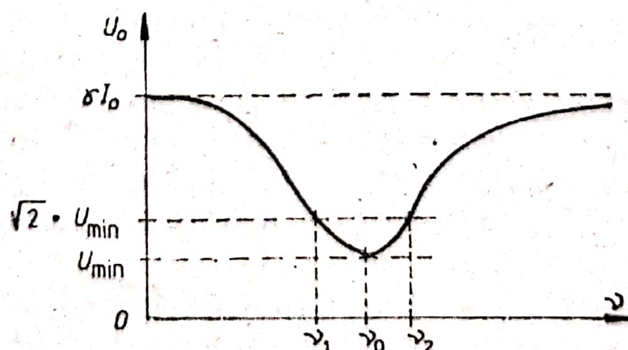


Fig. F.C.63

d) Pentru ca amplitudinea U_0 a tensiunii între bornele A și B să fie egală cu $\sqrt{2}\,U_{min}$ pentru pulsațiile $\omega_1 = 2\pi\nu_1$ și $\omega_2 = 2\pi\nu_2$, trebuie ca

$$U_0(\omega_{1,2}) = rI_0\left[1 + \frac{r(2R+r)}{R^2 + \left(L\omega_{1,2} - \frac{1}{C\omega_{1,2}}\right)^2}\right]^{-\frac{1}{2}} = \sqrt{2}U_{min} = \sqrt{2}I_0\,\frac{Rr}{R+r},$$

de unde

$$\left(L\omega_{1,2} - \frac{1}{C\omega_{1,2}}\right)^2 = R'^2, \text{ unde } R' = \frac{R(R+r)}{\sqrt{2Rr + r^2 - R^2}}. \tag{12}$$

Se obține în continuare:

$$L\omega_{1,2} - \frac{1}{C\omega_{1,2}} = \pm R', \text{ de unde } LC\omega_{1,2}^2 \mp R'C\omega_{1,2} - 1 = 0, \text{ cu soluțiile}$$

$$\omega_{1,2} = \frac{\pm R'C \pm \sqrt{R'^2C^2 + 4LC}}{2LC}.$$

Deoarece radicalul este mai mare decît termenul $R'C$ din față, soluțiile cu semnificație fizică sînt cele cu „+“ în fața radicalului: $\omega_1 = \frac{\sqrt{R'^2C^2 + 4LC} - R'C}{2LC}$, $\omega_2 = \frac{\sqrt{R'^2C^2 + 4LC} + R'C}{2LC}$.

Rezultă că factorul de calitate pentru selectivitate are expresia:

$$Q = \frac{\nu_0}{\nu_2 - \nu_1} = \frac{\omega_0}{\omega_2 - \omega_1} = \frac{\omega_0}{\frac{2R'C}{2LC}} = \frac{L\omega_0}{R'} = \frac{L\omega_0\sqrt{2Rr + r^2 - R^2}}{R(R+r)}. \tag{13}$$

Pentru ca definiția dată pentru factorul de calitate să aibă sens, este necesar ca

$$U_{max} = [\lim_{\omega\to 0} U_0(\omega) = \lim_{\omega\to\infty} U_0(\omega)] = rI_0 \geqslant \sqrt{2}\,U_{min} = \sqrt{2}\,\frac{Rr}{R+r}\,I_0, \tag{14}$$

de unde $R + r \geqslant \sqrt{2}\,R$, adică $r \geqslant (\sqrt{2} - 1)\,R$.

Notă. La același rezultat se ajunge și din condiția „matematică“, rezultată de expresia (13), ca

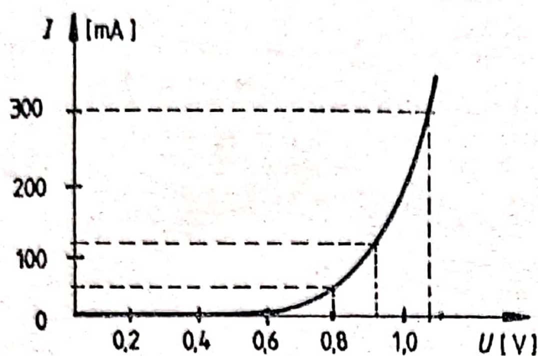
$$0 \leqslant 2Rr + r^2 - R^2 = (R + r)^2 - 2R^2.$$

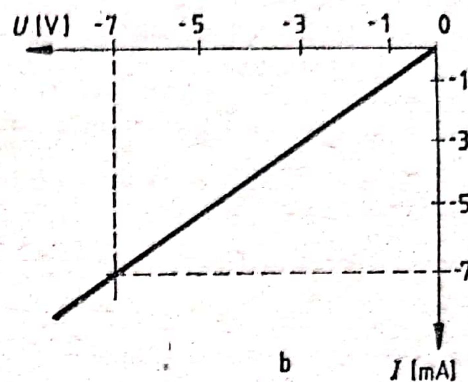
48°. a) Reprezentînd grafic valorile indicate în enunț pentru anumite puncte ale caracteristicii $I = f(U)$ corespunzînd dipolului obținut prin scurtcircuitarea bornelor 1 și 2, pentru conexiunea A, respectiv B, a bateriei electrice externe, se obțin figurile F.C.64 a și b, respectiv — prin sinteza acestora — caracteristica din figura F.C.64 c.

Din caracteristica $I = f(U)$ se pot stabili următoarele concluzii:

1. Deoarece pentru $U = 0$, s-a obținut $I = 0$, reiese că în dipol nu este inclusă vreo sursă de curent electric.

2. Din figura F.C.64a reiese că în dipol este inclus un element neliniar — o diodă, iar din figura F.C.64b că există şi un element liniar — un rezistor.





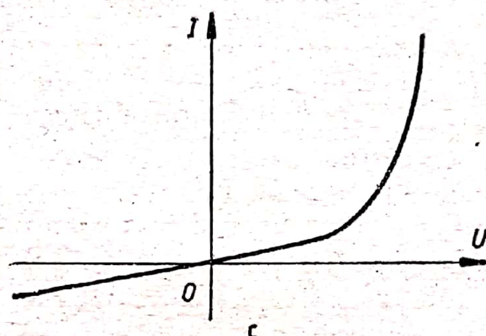


Fig. F.C.64

3. Cele două elemente sînt legate în paralel (altfel, n-ar fi putut fi observat curentul „invers", prin diodă, a cărei rezistenţă inversă este foarte („infinit") mare), borna 3 separînd dioda de rezistor, aşa cum s-a indicat în figura F.C.65.

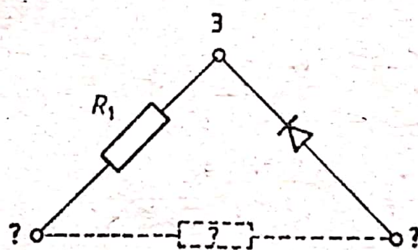


Fig. F.C.65

4. Din graficul liniar (dus printre punctele obţinute prin reprezentarea datelor numerice ale tabelului din enunţ) din figura F.C.65 se poate determina — în baza relaţiei $R = \frac{\Delta U}{\Delta I}$ — valoarea aproximativă a rezistenţei. Deoarece rezistenţa inversă a diodei este mult mai mare decît panta (de cca. 1 kΩ, a) caracteristicii $U = f(I)$ din figura b, rezultă că $R_1 \simeq 1$ kΩ.

Notă. Caracterul practic liniar al dependenţei $U = f(I)$ corespunzător datelor tabelului din enunţ (pentru conexiunea inversă (B) şi scurtcircuitarea bornelor 1 şi 2) poate fi constatat şi prin calculul coeficientului de corelaţie $r(U, I)$ corespunzător celor 8 perechi de valori $\{U_k, I_k;\ k = 1, 2, ..., 8\}$ indicate în tabel:

$$r(U, I) = \frac{\sum_k \left(U_k - \frac{1}{8}\sum_i U_i\right)\left(I_k - \frac{1}{8}\sum_j I_j\right)}{\sqrt{\left[\sum_k \left(U_k - \frac{1}{8}\sum_i U_i\right)^2\right]\left[\sum_k \left(I_k - \frac{1}{8}\sum_j I_j\right)^2\right]}}.$$

Valoarea de peste 0,99 obținută pentru $r(U, I)$, foarte apropiată de valoarea maximă (1, pentru o dependență perfect liniară) a coeficientului de corelație, atestă cuasiliniaritatea dependenței $U(I)$ înregistrată în conexiunea inversă (B) a sursei electrice externe. După cum este arătat și în manualul „Prelucrarea datelor experimentale în fizică", pentru clasele XI și XII (autori Tr. Crețu și V. Fălie, Ed. Didactică și Pedagogică, București, 1980), metoda celor mai mici pătrate permite și evaluarea precisă a pantei dependențelor liniare (aici, a rezistenței R_1) în baza expresiei particularizate aici în forma ($b = R_1$, $x_i = U_i$, $g_i = I_i$, $n = 8$):

$$R_1 = \frac{\sum_{i=1}^{8} U_i I_i - \frac{1}{8}\sum_{i=1}^{8} U_i \cdot \sum_{i=1}^{8} I_i}{\sum_{i=1}^{8} I_i^2 - \frac{1}{8}\left(\sum_{i=1}^{8} I_i\right)^2}.$$

Calculele efectuate pe baza acestei relații conduc la valoarea $R_1 \simeq 945\ \Omega$.

. . . .

Reprezentînd grafic valorile indicate în enunț pentru anumite puncte ale caracteristicii $I = f(U)$ corespunzînd dipolului obținut prin scurtcircuitarea bornelor 1 și 3, pentru cele două conexiuni A și B ale bateriei electrice externe, se obțin grafice asemănătoare celor din figurile F.C.64 a — c. Ca urmare, din noile grafice rezultă concluzii similare celor din primul caz, conform cărora la borna 2 este conectată o diodă, iar în cealaltă parte un rezistor, după cum este arătat în figura F.C.66. Din punctele caracteristicii $I = f(U)$, pentru conexiunea B și bornele 1 și 3 scurtcircuitate, reiese prin metoda celor mai mici pătrate (v. mai sus), sau calculînd panta dreptei trasate „printre puncte" — că $R_2 \simeq 2{,}7\ \text{k}\Omega$.

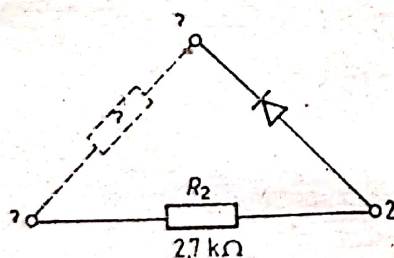


Fig. F.C.66

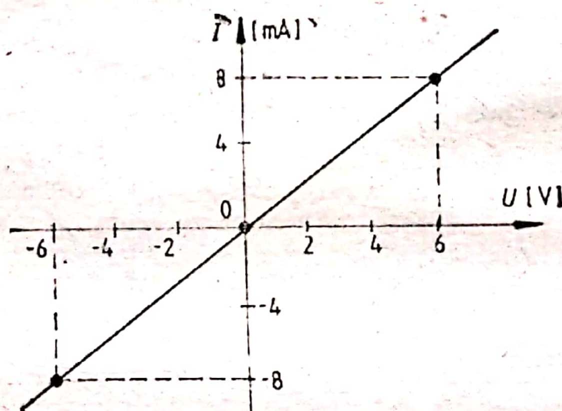


Fig. F.C.67

În fine, reprezentînd grafic valorile indicate în enunț pentru anumite puncte ale caracteristicii $I = f(U)$ corespunzătoare dipolului obținut prin scurtcircuitarea bornelor 2 și 3, pentru cele două conexiuni ale bateriei electrice externe, se obține graficul din figura F.C.67. Atît din reprezentarea grafică, cît și din valoarea înaltă (peste 0,99) a coeficientului de corelație $r(U, I)$ calculat similar celor indicate mai sus, reiese caracterul liniar al dependenței $U(I)$ pentru ambele conexiuni ale sursei externe. Rezultă următoarele concluzii: 1. Deoarece pentru $U = 0$, se obține $I = 0$, reiese că în dipol nu există surse de t.e.m.; 2. În dipol sînt incluse numai elemente liniare — rezistori; 3. Deoarece rezistența echivalentă grupării derivație obținută prin scurtcircuitarea bornelor 2 și 3, calculată din caracteristica din figura F.C.67 este finită:

$$R = \frac{\Delta U}{\Delta I} \simeq 700\ \Omega,$$

ambele ramuri (1—2 și 1—3) ale acestui dipol conțin cîte un rezistor, de rezistență de ordinul kΩ; 4. Întrucît rezistența echivalentă grupării derivație a rezistorilor R_1, R_2, evidențiați anterior:

$$R_e = \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2} = \frac{2{,}7 \cdot 10^3}{2{,}7 + 1} \simeq 0{,}73\ k\Omega,$$

coincide în bună măsură cu valoarea lui R dedusă din graficul din figura F.C.67, iar rezistorii R_1 și R_2 sînt conectați la bornele 3, respectiv 2, conform constatărilor anterioare, reiese că natura elementelor schemei electrice conținute de „cutia neagră“ este cea din figura F.C.68.

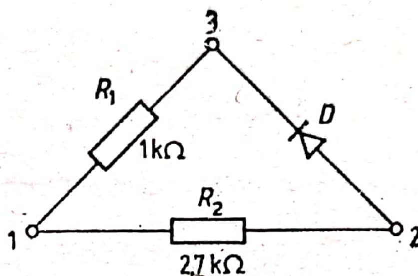


Fig. F.C.68

b) Valorile rezistențelor rezistorilor R_1 și R_2 au fost determinate mai înainte: $R_1 \simeq 945\ \Omega$, $R_2 \simeq 2\,700\ \Omega$. Din graficul din figura F.C.64a, corespunzător grupării derivație formate de diodă și rezistorul R_1, se poate determina rezistența internă R_D a diodei, pentru diferite porțiuni ale graficului, în baza relației:

$$R_D = \frac{R_1 \dfrac{\Delta U}{\Delta I}}{R_1 - \dfrac{\Delta U}{\Delta I}}.$$

49°. A. a) Din ecuația („legea“) circuitului magnetic scrisă pentru o linie de cîmp magnetic avînd forma unei circumferințe de rază r, cu centrul situat pe axa de simetrie a torului:

$$H(r) \cdot 2\pi r = NI,$$

reiese dependența intensității cîmpului magnetic în tor de distanța r pînă la axa de simetrie:

$$H(r) = \frac{NI}{2\pi r}.$$

Rezultă că expresia fluxului magnetic prin porțiunea de lățime dr a unei secțiuni axiale este (în prezența a N spire):

$$d\Phi(r, r + \mathrm{d}r) = NB\mathrm{d}A = N\mu H(r) g \mathrm{d}r = \mu \frac{N^2 g I}{2\pi r} \mathrm{d}r.$$

b) Fluxul magnetic prin întreaga secțiune a torului reiese ca fiind

$$\Phi = \int_{r_i}^{r_e} \mu \frac{N^2 g I}{2\pi r} \mathrm{d}r = \frac{\mu N^2 g I}{2\pi} \ln \frac{r_e}{r_i}.$$

Rezultă că inductanța bobinei toroidale este

$$L = \frac{\Phi}{I} = \frac{\mu N^2 g}{2\pi} \ln \frac{r_e}{r_i}.$$

Deoarece frecvența de rezonanță a circuitului oscilant este dată de expresia (Thompson) $f_0 = \frac{1}{2\pi\sqrt{LC}}$, găsim că

$$L = \frac{1}{4\pi^2 f_0^2 C} = \frac{\mu N^2 g}{2\pi} \ln \frac{r_e}{r_i},$$

de unde

$$\mu = \frac{1}{2\pi g N^2 f_0^2 C \ln \frac{r_e}{r_i}}.$$

Efectuînd calculele, se obține $\mu_{aer} \simeq 4\pi \cdot 10^{-7} \frac{\mathrm{H}}{\mathrm{m}}$.

B. a) Avem $\lambda = \frac{v}{f_0} = \frac{1}{f_0\sqrt{\varepsilon\mu_r\mu_0}}$; efectuînd calculele, se obține $\lambda \simeq 17{,}7$ km.

b) Între densitatea volumică media (în timp) a energiei unei unde electromagnetice, $w = \frac{\varepsilon E_0^2}{2} = \frac{\mu H_0^2}{2}$ (unde E_0 și H_0 sînt amplitudinile intensităților cîmpurilor electrice, respectiv magnetice, ale undei) și densitatea (medie în timp, a) fluxului de energie electromagnetică a undei există relația:

$$S = wv = \frac{\varepsilon E_0^2}{2} \cdot \frac{1}{\sqrt{\varepsilon\mu}} = \frac{\mu H_0^2}{2} \cdot \frac{1}{\sqrt{\varepsilon\mu}}.$$

Rezultă că

$E_0 = \sqrt{2\zeta S}$, iar $H_0 = \sqrt{\frac{2S}{\zeta}} = \frac{E_0}{\zeta}$, unde $\zeta = \sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}}$ este impedanța electromagnetică a mediului.

Pentru mediul considerat, avem

$$\zeta = \sqrt{\frac{4\pi \cdot 10^{-7}}{10^{-11}}} \simeq 354{,}5\ \Omega,$$

deci

$$E_0 \approx \sqrt{2 \cdot 354{,}5 \cdot 14} = 99{,}63 \frac{\mathrm{V}}{\mathrm{m}},$$

$$H_0 \approx \sqrt{\frac{2 \cdot 14}{354{,}5}} \approx 0{,}28 \frac{\mathrm{A}}{\mathrm{m}}.$$

50°. a) Fie $i = I\sqrt{2}\cos\omega t$ și $u_2 = U_2\sqrt{2}\cos(\omega t + \varphi)$ valorile instantanee ale curentului și, respectiv, tensiunii la bornele consumatorului. Întrucît $P_2 = U_2 I \cos\varphi$ se obține

$$I = \frac{P_2}{U_2 \cos\varphi} = 25\ A.$$

b) $u_1 = Ri + u_2$, unde $u_2 = U_2\sqrt{2}\cos(\omega t + \psi)$, ψ fiind defazajul dintre curentul i și tensiunea u_1 între punctele A și B.

Dacă se proiectează relaţia fazorială $\underline{u}_1 = R_1\underline{i} + \underline{u}_2$ pe suportul lui $\underline{i}$ şi pe o axă perpendiculară pe prima, se obţin ecuaţiile (fig. F.C.69)

$$U_1 \cos \psi = R_1 I + U_2 \cos \varphi,$$
$$U_1 \sin \psi = U_2 \sin \varphi.$$

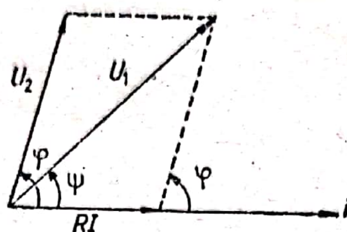


Fig. F.C.69

Prin eliminarea lui ψ între aceste ecuaţii şi ţinînd seama de expresia puterii P_2, rezultă:

$$U_1 = \sqrt{U_2^2 + 2R_1P_2 + \frac{R_1^2P^2}{U_2^2\cos^2\varphi}} = 121 \text{ V}.$$

Puterea activă între punctele A şi B are expresia:

$$P_1 = RI^2 + P_2.$$

Numeric:

$$P_1 = 2\,625 \text{ W}.$$

c) Prin împărţirea ecuaţiilor rezultate prin proiecţia relaţiei fazoriale $\underline{u}_1 = R_1\underline{i} + \underline{u}_2$, membru cu membru, se obţine:

$$\text{tg}\, \psi = \frac{U_2 \sin \varphi}{R_1 I + U_2 \cos \varphi},$$

unde

$$\sin \psi = \sqrt{1 - \cos^2\varphi} = 0{,}6.$$

Numeric:

$$\text{tg}\, \psi = 0{,}571 \Longrightarrow \psi \approx 29°45'.$$

51°. a) În circuitul din figura F.C.70:

$$i = I\sqrt{2} \cos \omega t,$$
$$i_c = I_c\sqrt{2} \cos \left(\omega t + \frac{\pi}{2}\right),$$
$$i_2 = I_2\sqrt{2} \cos (\omega t - \varphi),$$
$$i = i_2 + i_c.$$

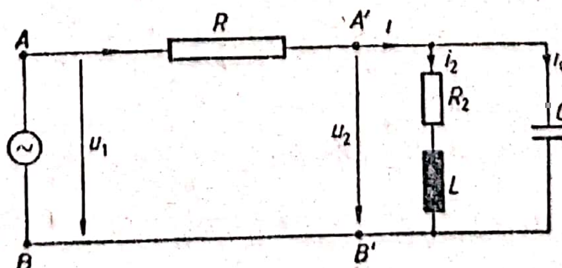


Fig. F.C.70

Prin proiecția ultimei relații pe axele din figura F.C.71 se obțin ecuațiile:

$$I = I_2 \cos \varphi,$$
$$0 = I_c - I_2 \sin \varphi,$$
$$\sin \varphi = \frac{I_c}{I_2},$$
$$\cos \varphi = \frac{I}{I_2},$$

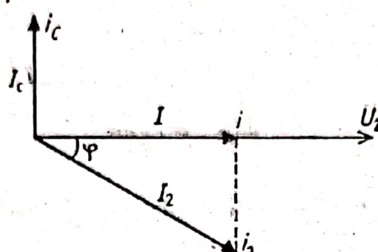


Fig. F.C.71

unde

$$I_2 = \frac{P_2}{U_2} \cdot \frac{1}{\cos \varphi}$$

și

$$I_c = \frac{U_2}{1/\omega C} = 2\pi f C U_2.$$

Se poate scrie

$$\sin \varphi = \frac{I_c}{I_2} = \frac{U_2 C 2\pi f}{P_2/(U_2 \cos \varphi)} = \frac{2\pi f U_2^2 C}{P_2} \cos \varphi,$$

deci

$$C = \frac{P_2 \operatorname{tg} \varphi}{U_2^2 2\pi f}.$$

Numeric:

$$C = 478\ \mu\text{F}.$$

b) Din expresia lui I_c rezultă $I_c = 2\pi f C U_2 = 15$ A. Se observă totodată, că

$$I_2 = \frac{I_c}{\sin \varphi} = \frac{15}{0{,}6} = 25\ \text{A},$$
$$I = I_2 \cos \varphi = 20\ \text{A}.$$

c)
$$P_1 = R_1 I^2 + P_2,$$
$$P_1 = 2\,400\ \text{W}.$$

52°. Bara CD se deplasează sub acțiunea propriei sale greutăți $G = mg$, producînd variația fluxului magnetic, care traversează circuitul închis $BCDB'$. Ca urmare, în circuit se induce o tensiune electromotoare $e = Blv$, care determină curentul indus

$$i = \frac{e}{R} = \frac{Blv}{R}.$$

Bara CD este supusă forței electromagnetice

$$F = Bil = \frac{B^2 l^2 v}{R}$$

dirijată în sus, conform regulii lui Lenz.

Ecuaţia de mişcare a barei are forma:

$$m\frac{dv}{dt} = mg - \frac{B^2l^2v}{R}.$$

Pentru integrare se separă variabilele:

$$\frac{dv}{g - \frac{B^2l^2}{mR}v} = dt.$$

Cu notaţia $\tau = \frac{mR}{B^2l^2}$ se obţine

$$\lg\frac{(g - v/\tau)}{C} = -\frac{t}{\tau},$$

$$v = \tau(g - Ce^{-t/\tau}),$$

unde C este o constantă de integrare.

Pentru $t = 0$, $v = 0$ astfel încît rezultă $C = g$.

În final se obţine expresia

$$v = \tau g(1 - e^{-t/\tau})$$

reprezentată grafic în figura F.C.72.

b) Viteza limită a barei se obţine pentru $t \to \infty$,

$$\lim_{t\to\infty} v = g\tau = v_0,$$

$$v_0 = \frac{gmR}{B^2l^2} = \frac{9{,}8 \cdot 10^{-2} \cdot 10}{(0{,}1)^2} = 98 \text{ m/s}.$$

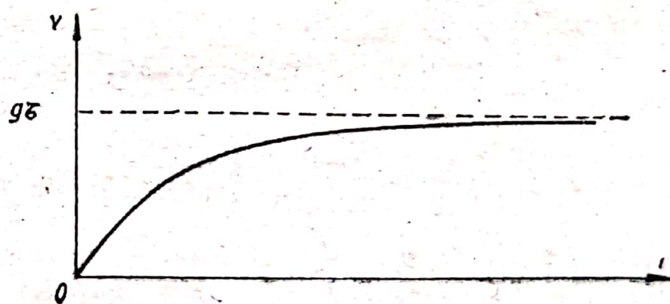


Fig. F.C.72

c) Pentru $v = \frac{v_0}{2} = \frac{g\tau}{2}$, se obţine $\frac{1}{2} = 1 - e^{-\frac{t}{\tau}}$, adică $e^{-\frac{t}{\tau}} = \frac{1}{2}$ sau $-\frac{t}{\tau} =$ $= -\ln 2$, de unde $t = \tau \ln 2$. Deoarece $\tau = \frac{10^{-2} \cdot 10}{10^{-2}} = 10$ s, $\to t = 6{,}93$ s.

$$i = \frac{Blv}{R} \to i = \frac{Blv_0}{2R} = \frac{1 \cdot 0{,}1 \cdot 98}{2 \cdot 10} = 0{,}49 \text{ A}.$$

53°. a) Avem montajul din figura F.C.73:

$$C_1 = \varepsilon_0 \frac{S}{d_1} = 8{,}85 \text{ pF},$$

$$C_2 = \varepsilon_0 \frac{S}{d_1/2} = 17{,}70 \text{ pF},$$

$$Q_1 = C_1 U_0 = 8{,}85 \cdot 10^{-9} \text{ C},$$

$$Q_2 = 2Q_1 = 17{,}70 \cdot 10^{-9} \text{ C},$$

$$W_1 = \frac{1}{2} C_1 U_0^2 = 4{,}425 \cdot 10^{-6} \text{ J},$$

$$W_2 = \frac{1}{2} C_2 U_0^2 = 8{,}85 \cdot 10^{-6} \text{ J}.$$

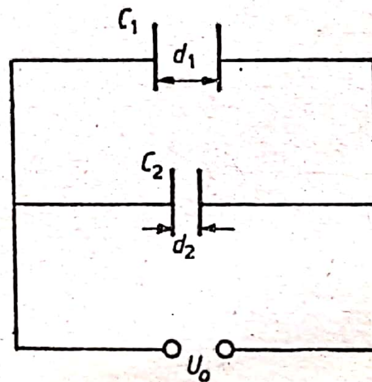


Fig. F.C.73

b) Pentru sistemul izolat se conservă sarcina totală:

$$Q_{\text{total}} = Q_1 + Q_2 = 3\varepsilon_0 \frac{S}{d_1} U_0$$

$$C_1 = C_2 = \varepsilon_0 \frac{S}{d_1} = 8{,}85 \text{ pF}$$

$$Q = \frac{Q_1 + Q_2}{2} = 13{,}275 \cdot 10^{-9} \, C$$

$$U = \frac{Q}{C_1} = \frac{3}{2} U_0 = 1\,500 \, V$$

$$W = \frac{1}{2} QU = \frac{9}{8} \varepsilon_0 \frac{S}{d_1} U_0^2 = 9{,}956 \cdot 10^{-6} \text{ J}$$

c) Într-o stare intermediară pentru care distanța dintre armăturile condensatorului C_2 este x, se notează cu Q_1' și Q_2' sarcinile pe cei doi condensatori și cu U' tensiunea dintre armături.

$$U' = \frac{Q_1'}{C_1} = \frac{Q_2'}{C_2} = \frac{Q_1' + Q_2'}{C_1 + C_2}$$

unde

$$C_1 = \varepsilon_0 \frac{S}{d_1} \text{ și } C_2 = \varepsilon_0 \frac{S}{x}$$

astfel încît

$$Q_1'+Q_2'=Q_1+Q_2$$

Se obţine:

$$U'=\frac{Q_1+Q_2}{C_1+C_2}=\frac{3U_0}{1+d_1/x}$$

Variaţia energiei înmagazinată în condensatoare este determinată de lucrul mecanic efectuat de forţa F:

$$dW=-F dx$$

deci

$$F=-\frac{dW}{dx}$$

unde

$$W=\frac{1}{2}(Q_1'U'+Q_2'U')=\frac{1}{2}U'(Q_1+Q_2)$$

Se obţine

$$W=\frac{9}{2}\varepsilon_0\frac{SU_0^2}{d_1(1+d_1/x)}$$

astfel încît

$$F=-\frac{dW}{dx}=-\frac{9}{2}\varepsilon_0\frac{SU_0^2}{(x+d_1)^2}$$

Pentru $x=3d_1/4$ se obţine

$$F=-\frac{9}{2}\varepsilon_0\frac{SU_0^2}{\left(\frac{7d_1}{4}\right)^2}=-\frac{72}{49}\cdot\frac{\varepsilon_0 SU_0^2}{d_1^2}=-\frac{72}{49}\cdot\frac{8,85\cdot10^{-12}\cdot10^{-2}}{10^{-4}}10^6\approx-1,3\cdot10^{-3}\text{ N},$$

semnul minus indică caracterul atractiv al acestei forţe.

54°. a) Aplicînd legile lui Kirchhoff se obţine:

$$I=\frac{R_2E_1+R_1E_2}{R(R_1+R_2)+R_1R_2}.$$

— A doua metodă constă în aplicarea legilor lui Kirchhoff reţelei pentru $E_1=0$, respectiv $E_2=0$. Rezultă

$$I'=\frac{R_1E_2}{R(R_1+R_2)+R_1R_2}$$

şi

$$I''=\frac{R_2E_1}{R(R_1+R_2)+R_1R_2},$$

astfel că $I=I'+I''$.

Pentru datele problemei, $I=0,5$ A.

b) Circuitul echivalent este prezentat în figura F.C.74 alăturată. Se exprimă I din legea lui Ohm:

$$I = \frac{E}{R + r}$$

și se compară cu expresia lui I de la punctul a).

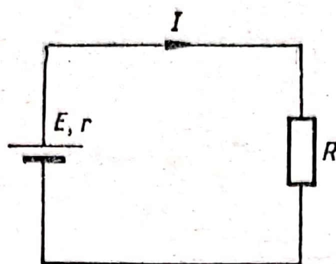


Fig. F.C.74

Prin identificare rezultă:

$$E = \frac{R_2E_1 + R_1E_2}{R_1 + R_2}$$

și

$$r = \frac{R_1R_2}{R_1 + R_2}.$$

Înlocuind se obține $E = 80$ V și $r = 10\ \Omega$.

c)
$$U = RI = \frac{R(R_2E_1 + R_1E_2)}{R(R_1 + R_2) + R_1R_2}$$

$$U = 75 \text{ V}$$

$$P = RI^2 = UI = 75 \cdot 0,5 = 37,5 \text{ W}.$$

55°. a) Pentru sensurile din figurile F.C.75 legile lui Kirchhoff se scriu astfel:

$$I_1 = I_2 + I_3,$$

$$r_1I_1 + r_3I_3 = E_1 - \frac{P}{I_3},$$

$$r_2I_2 - r_3I_3 = \frac{P}{I_3} - E_2.$$

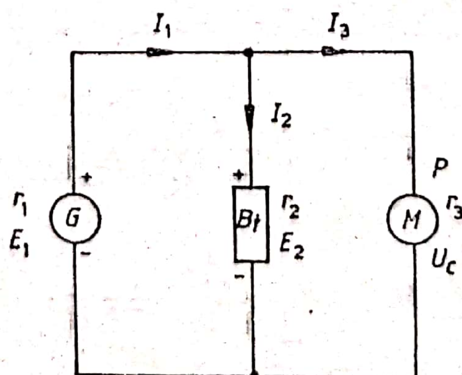


Fig. F.C.75

Între aceste ecuații se elimină I_1 și I_2 și se obține ecuația următoare de gradul doi în I_3:

$$I_3^2 \cdot \left[r_3 + \frac{r_1 r_2}{r_1 + r_2}\right] - I_3\left[\frac{r_1 E_2 + r_2 E_1}{r_1 + r_2}\right] + P = 0.$$

Ecuația admite cel puțin o soluție, dacă discriminantul său este pozitiv său nul:

$$\left[\frac{r_1 E_2 + r_2 E_1}{r_1 + r_2}\right]^2 - 4P\left[r_3 + \frac{r_1 + r_2}{r_1 r_2}\right] \geqslant 0,$$

sau

$$P \leqslant \frac{(r_1 E_2 + r_2 E_1)^2}{4(r_1 + r_2)\,[r_3(r_1 + r_2) + r_1 r_2]}.$$

Numeric se obține ecuația

$$8I_3^2 - 320 I_3 + 3P = 0,$$

astfel incit

$$P \leqslant \frac{3\,200}{3}\ \text{W}\ (\approx 1{,}067\ \text{kW}).$$

b)
$$U_c = \frac{P}{I_3}.$$

Introducind expresia lui $I_3 = \frac{P}{U_c}$ în ecuația obținută mai sus, rezultă

$$\frac{8P^2}{U_c^2} - 320\frac{P}{U_c} + 3P = 0$$

sau

$$3U_c^2 - 320 U_c + 8P = 0 \qquad (P \neq 0).$$

Din ecuațiile lui Kirchhoff se obține

$$I_2 = \frac{E_1 - E_2 - r_1 I_3}{r_1 + r_2}.$$

Pentru $I_2 = 0$ se obține

$$I_3 = \frac{E_1 - E_2}{r_1} = 10\ \text{A},$$

valoare care, introdusă în ecuația de gradul doi verificată de I_3, conduce la $P = 800$ W. Rezultă că $U_c = \frac{P}{I_3} = 80$ V.

c) Pentru $P = 650$ W, din ecuația lui I_3 se obțin soluțiile $I_3 = 32{,}5$ A și $I_3 = 7{,}5$ A. Rezultă apoi și $I_2 = -15$ A și $I_2 = 1{,}67$ A, astfel încît $I_1 = 17{,}5$ A, respectiv, $I_1 = 9{,}17$ A.

4. OPTICĂ

56°. a) Conform formulei convergenței lentilelor

$$\frac{1}{f} = (n-1)\left(\frac{1}{R_2} - \frac{1}{R_1}\right).$$

În cazul de față, R_1 și R_2 au aceleași sensuri, deci

$$n = \frac{R_1 R_2}{f(R_1 - R_2)} + 1 = \frac{0{,}9 \cdot 0{,}1}{0{,}15(0{,}9 - 0{,}1)} + 1 = 1{,}75.$$

b) Distanța pînă la imagine este dată de formula lentilelor subțiri:

$$\frac{1}{x_2} - \frac{1}{x_1} = \frac{1}{f}, \text{ unde } x_1 = -25 \text{ cm.}$$

Rezultă

$$x_2 = \frac{f x_1}{f + x_1} = \frac{0,15(-0,25)}{0,15 - 0,25} = 37,5 \text{ cm.}$$

Din relația $\frac{i}{o} = \frac{x_2}{x_1}$ obținem $i = o \cdot \frac{x_2}{x_1} = \frac{f}{\sqrt{3}} \cdot \frac{37,5}{(-25)} = -\frac{\sqrt{3}}{2} f \approx -0,13 \text{ m}$, semnul minus indicînd faptul că imaginea este răsturnată față de obiect.

c) Construcția imaginii în prezența oglinzii așezate la distanța de 37,5 cm de lentilă este arătată în figura F.C.76. Punctat este arătată imaginea $A'B'$ care se formează în absența oglinzii. Din datele problemei se observă că unghiul α este de 30°, deoarece $\operatorname{tg} \alpha = \frac{OC}{OF} = \frac{AB}{f} = \frac{f}{f\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3}$.

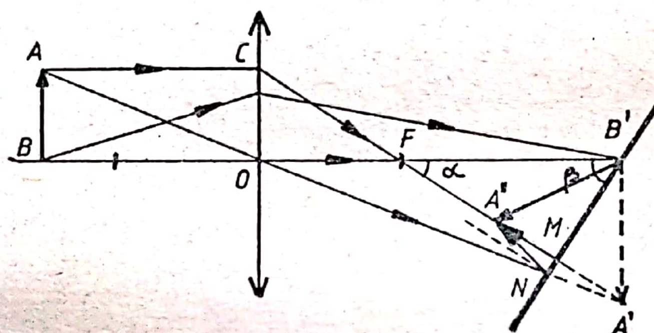


Fig. F.C.76

Înseamnă că raza ACF cade perpendicular pe oglindă, deci se va reflecta pe aceeași direcție. Raza AO, după reflexia pe oglindă, va intersecta raza ACF în punctul A''. Deci A'' este imaginea punctului A. Toate razele care pornesc din B vor fi adunate de lentilă în punctul B'. Întrucît acest punct aparține suprafeței oglinzii, imaginea lui va coincide cu el. Astfel, imaginea obiectului AB, dată de sistemul lentilă plus oglindă, va fi segmentul $B'A''$. Deoarece $\widehat{FA'B'} = 90° - \alpha = 60°$, iar A'' este simetric cu A' față de $B'MN$, rezultă că triunghiul $A''B'A'$ este echilateral, deci imaginea $A''B'$ formează un unghi de 30° cu axa optică și are lungimea $A''B' = A'B' \approx 0,13$ m.

57°. a) Mărirea dată de un sistem format din două lentile subțiri este egală produsul măririlor celor două lentile.

$$\beta = \beta_1 \beta_2. \qquad (1)$$

Notînd cu x_1 distanța de la prima lentilă la obiect și cu x_2 distanța de la lentilă la imaginea dată de ea, atunci mărirea dată de aceasta este $\beta_1 = \frac{x_2}{x_1}$. Analog, $\beta_2 = \frac{x_2'}{x_1'}$ și, cu notațiile din figura F.C.77, $\beta = \frac{X_2}{X_1}$. Ținînd seama de formula lentilelor subțiri putem scrie

$$\frac{1}{f} = \frac{1}{X_2} - \frac{1}{X_1}, \quad \frac{1}{f_1} = \frac{1}{x_2} - \frac{1}{x_1}, \quad \frac{1}{f_2} = \frac{1}{x_2'} - \frac{1}{x_1'},$$

de unde

$$X_2 = \frac{f X_1}{f + X_1}, \quad x_2 = \frac{f_1 x_1}{f_1 + x_1}, \quad x_2' = \frac{f_2 x_1'}{f_2 + x_1'}.$$

Înlocuind aceste relații în expresiile măririlor, ecuația (1) devine

$$\frac{f}{f+X_1}=\frac{f_1}{f_1+x_1}\cdot\frac{f_2}{f_2+x_1'}. \qquad (2)$$

Pe de altă parte, conform figurii F.C.77, există relațiile:

$$x_1 - X_1 = \varepsilon \quad \text{și} \quad x_2 + (-x_1') = d.$$

Eliminînd cu ajutorul lor mărimile X_1 și x_1', ecuația (2) capătă forma

$$\frac{f}{f+x_1-\varepsilon}=\frac{f_1f_2}{f_1f_2+x_1f_2+x_1f_1-f_1d-x_1d}$$

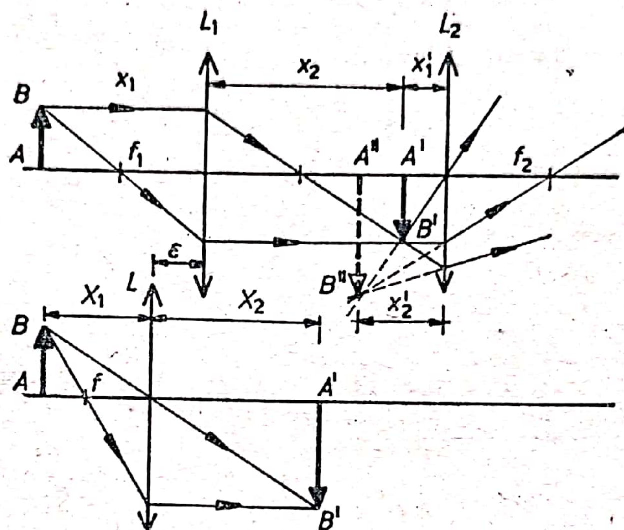


Fig. F.C.77

sau, inversînd cele două rapoarte,

$$1+\frac{x_1}{f}-\frac{\varepsilon}{f}=1+\frac{x_1}{f_1}+\frac{x_1}{f_2}-\frac{d}{f_2}-\frac{x_1d}{f_1f_2}. \qquad (3)$$

Condiția impusă de problemă este ca ecuația (3), echivalentă cu (1), să fie satisfăcută oricare ar fi poziția obiectului față de sistem, deci, pentru orice x_1. Aceasta poate fi satisfăcută numai dacă coeficientul lui x_1 din ecuația (3) este nul, adică

$$\frac{1}{f}-\frac{1}{f_1}-\frac{1}{f_2}+\frac{d}{f_1f_2}=0. \qquad (4)$$

Din ecuația (4) rezultă distanța focală f a lentilei

$$f=\frac{f_1f_2}{f_1+f_2-d}. \qquad (5)$$

b) Cu condiția (4) ecuația (3) devine

$$\frac{\varepsilon}{f}=\frac{d}{f_2},$$

de unde, ținînd seama de (5), se obține

$$\varepsilon=\frac{f_1d}{f_1+f_2-d}.$$

58°. a) Formula măririi $\frac{I}{O}=-\frac{x_2}{x_1}$ conduce la $-\frac{x_2}{x_1}=\frac{1}{4}$, rezultînd $x_1=-4x_2$. Imaginea fiind virtuală, $x_2=-0{,}12$ m și obiectul se află la $x_1=0{,}48$ m de oglindă.

b) Din formula de conjugare, $\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}=\frac{1}{f}$, se obține $\frac{1}{f}=-\frac{1}{0,16}$. Focarul fiind negativ, după convenție, oglinda este convexă.

c) $f=-0,16$ m, deci oglinda are distanța focală de 0,16 m.

59°. a) $f=\frac{R}{2}=\frac{0,75}{2}=0,375$ m; $x_1=1$ m.

Din expresia

$$\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}=\frac{1}{f}, \tag{1}$$

se deduce $\frac{1}{x_2}=\frac{8}{3}-\frac{3}{3}=\frac{1}{0,6}$, adică $x_2=0,6$ m (fig. F.C.78).

b) Cuva cu apă joacă rolul unei lame cu fețe paralele și lumina ajunge la oglindă părînd să vină de la un obiect apropiat cu (în cazul fasciculelor paraxiale)

$$e\left(1-\frac{1}{n}\right)=0,32\left(1-\frac{3}{4}\right)=0,08 \text{ m}. \tag{2}$$

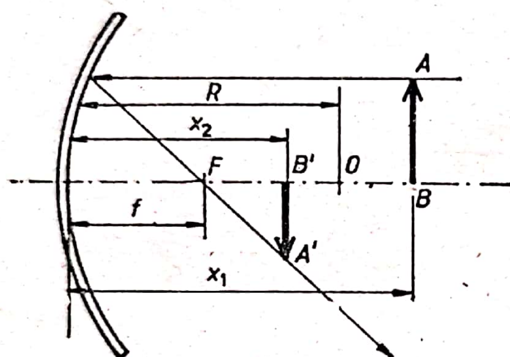


Fig. F.C.78

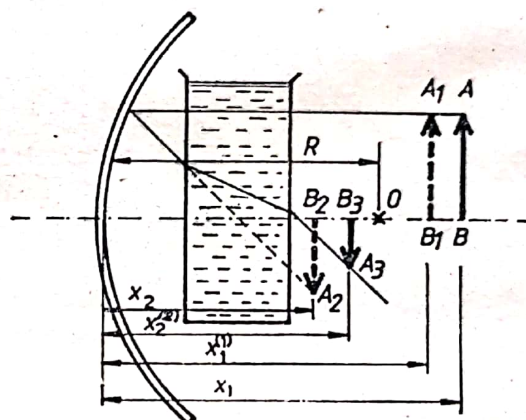


Fig. F.C.79

Noua valoare a lui x_1 va fi $x_1^{(1)}=x_1-e\left(1-\frac{1}{n}\right)=1-0,08=0,92$ m (fig. F.C.79). Dacă razele reflectate pe oglindă n-ar mai trece prin cuvă, noul obiect (aparent) A_1B_1 ar da o imagine A_2B_2, astfel încît

$$\frac{1}{0,92}+\frac{1}{x_2}=\frac{1}{0,375}, \tag{3}$$

rezultînd $x_2=\frac{69}{109}\approx 0,633$ m.

Însă trebuie să remarcăm că razele trec tot prin cuvă după reflexie. Deci ele întîlnesc din nou o lamă cu fețe paralele și nu se formează imaginea A_2B_2. Noua refracție care are loc va da o nouă imagine reală A_3B_2, deplasată cu aceeași cantitate — ca la prima refracție — față de A_2B_2. Deci

$$x_2^{(1)}=x_2+e\left(1-\frac{1}{n}\right)=0,633+0,08=0,713 \text{ m} \tag{4}$$

față de oglindă.

Pentru a determina mărimea imaginii este suficient să se facă să intervină mărirea dată de oglindă, deoarece lama cu fețe paralele dă imagini egale cu mărime ale obiectelor. Această mărire trebuie să se calculeze plecînd de la un obiect situat la $x_1^{(1)}=0,92$ m de oglindă, și nu la $x_1=1$ m. Astfel,

$$\frac{I}{O}=-\frac{x_2}{x_1^{(1)}}=-\frac{0,633}{0,92}=-0,688, \tag{5}$$

semnul minus arătînd că imaginea este inversată.

60°. a) Se ştie că focarul unei lentile în funcţie de indicele de refracţie n şi razele de curbură ale feţelor, este dat de:

$$\frac{1}{f} = (n-1)\left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2}\right). \tag{1}$$

Lentila fiind echiconvexă, $-R_1 = R_2$. Imaginile obiectelor la infinit trebuie să se formeze pe retină, deci

$$\frac{1}{1{,}5} = (1{,}5 - 1)\,\frac{2}{R_1}, \tag{2}$$

obţinîndu-se $R_1 = -R_2 = 1{,}5$ cm.

b) În acest caz, formula de conjugare, asociată cu formula precedentă, va da valoarea lui R_2. Deci, din relaţia

$$\frac{1}{20} + \frac{1}{1{,}5} = (1{,}5 - 1)\left(\frac{1}{1{,}5} - \frac{1}{R_2}\right), \tag{3}$$

rezultă

$$R_2 = -\frac{1{,}5}{1{,}15} = -1{,}304 \text{ cm}.$$

61°. a) Pentru maxime de interferenţă, diferenţa de drum optic trebuie să îndeplinească condiţia $\delta = k\lambda$. Diferenţa de drum optic dintre două raze din fasciculul incident (fig. F.C.80) sub un unghi α (pe film) es te $\delta = d \sin \alpha$.

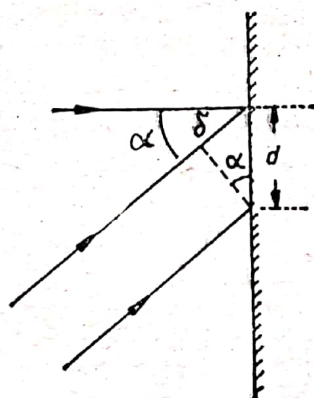


Fig. F.C.80

Rezultă că interfranja i satisface relaţia:

$$\delta = d \sin \alpha = i \sin \alpha = \lambda, \text{ adică } i = \frac{\lambda}{\sin \alpha}. \tag{1}$$

b)
$$N = \frac{10^{-3} \text{ m}}{i} = 10^{-3} \cdot \frac{\sin \alpha}{\lambda}. \tag{2}$$

Pentru $\alpha = 90°$, $\rightarrow N = N_{max} = \frac{10^{-3}}{\lambda} = \frac{10^{-3}}{5 \cdot 10^{-7}} = 2\,000.$ (3)

c) Perioada reţelei de difracţie este egală cu interfranja, $d = i$.

Diferenţa de drum optic dintre două raze difractate sub unghiul θ faţă de normală, de la marginile unor trăsături succesive este

$$\delta = d \sin \theta. \tag{4}$$

Condiţia pentru observarea maximului de difracţie de ordinul k este:

$$d \sin \theta = k\lambda_1. \tag{5}$$

Rezultă

$$k = \frac{i \sin \theta}{\lambda_1} = \frac{\lambda \sin \theta}{\lambda_1 \sin \alpha}, \qquad (6)$$

$$k_{max} = \left[\frac{\lambda}{\lambda_1 \sin \alpha}\right], \text{ unde } [x] \text{ este partea întreagă a numărului real } x; \qquad (7)$$

se obţine $k_{max} = \left[\frac{0,65}{0,5 \cdot 0,195}\right] = 6.$

Condiţia de suprapunere a maximului de ordinul k pentru λ' cu maximul de ordinul $k + 1$ pentru λ_1, este

$$k\lambda' = (k + 1)\lambda_1, \qquad (8)$$

rezultînd $\lambda' = \left(1 + \frac{1}{k}\right)\lambda_1$. Deci

$$\lambda_{min} < \lambda' < \lambda_{max}, \quad \frac{\lambda_{min}}{\lambda_1} < 1 + \frac{1}{k} < \frac{\lambda_{max}}{\lambda_1},$$

$$\frac{0,4}{0,5} = 0,8 < 1 + \frac{1}{k} < \frac{0,7}{0,5} = 1,4 \quad \text{şi } k \leqslant k_{max} = 6,$$

obţinînd $k = 3 \left(\text{de unde } \lambda' = \frac{4}{3}\lambda_1 \approx 0,667\,\mu\text{m}\right)$, $k = 4 \left(\lambda' = \frac{5}{4}\lambda_1 = 0,625\,\mu\text{m}\right)$, $k = 5\left(\lambda' = \frac{6}{5}\lambda_1 = 0,6\,\mu\text{m}\right)$ şi $k = 6\left(\lambda' = \frac{7}{6}\lambda_1 \approx 0,583\,\mu\text{m}\right)$.

62. a) În condiţiile specificate în enunţ, unghiul de incidenţă al fasciculului de lumină pe faţa de intrare a prismei este egal cu unghiul θ (fig. F.C.81) al prismei. Notăm prin r şi r' unghiurile formate de fasciculul transmis în prismă cu normalele

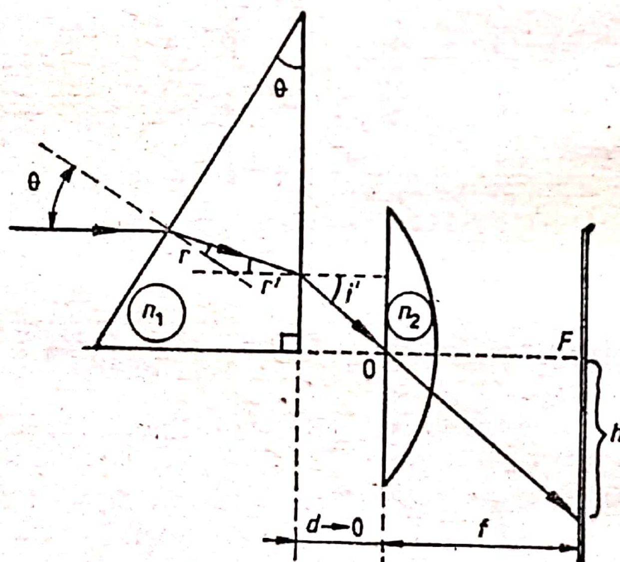


Fig. F.C.81

la faţa de intrare, respectiv la faţa de ieşire a prismei, iar prin i' unghiul format de normala la faţa de ieşire a prismei cu fasciculul emergent din prismă în stratul de aer foarte subţire ($d \to 0$) care separă prisma de lentilă (cele două componente optice sînt „alipite", dar nu „sudate"!). În conformitate cu proprietăţile lentilelor subţiri, imaginea fasciculului paralel incident pe lentila (subţire) L sub unghiul i' se va găsi în punctul în care prelungirea razei incidente în centrul optic O al lentilei sub unghiul i' taie planul focal al lentilei (planul perpendicular pe axa optică a lentilei, trecînd prin focarul F al acesteia).

Pornind de la expresia cunoscută a convergenței unei lentile subțiri, $\frac{1}{f} = (n-1)\left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2}\right)$, și ținînd seama că în condițiile problemei de față, $n = n_2$, $R_1 \to \infty$ (fața de intrare a lentilei este plană), iar $R_2 = -R$, găsim că:

$$f = \frac{R}{n_2 - 1}.$$

În conformitate cu legea Snellius-Descartes a refracției,

$$\frac{\sin i'}{\sin r'} = \frac{n_1}{n_{aer}}, \text{ iar } \frac{\sin \theta}{\sin r} = \frac{n_1}{n_{aer}},$$

unghiul r' fiind determinat în funcție de unghiul r prin relația: $r' = \theta - r$ (v. fig. F.C. 81).

Ținînd seamă de constatările de mai sus, distanța h de la imaginea fasciculului considerat pînă la axa optică a lentilei este $h = f \operatorname{tg} i' \approx f \sin i'$ (ținînd seamă de aproximația unghiurilor mici).

Înlocuind în ultima relație expresiile obținute pentru f și i', găsim că

$$h \approx \frac{R}{n_2-1} \cdot \frac{n_1}{n_{aer}} \sin(\theta - r) = \frac{R}{n_2-1} \cdot \frac{n_1}{n_{aer}} \left[\sin\theta \sqrt{1-\sin^2 r} - \cos\theta \cdot \sin r\right] =$$

$$= \frac{R}{n_2-1} \cdot \frac{n_1}{n_{aer}} \left[\sin\theta \sqrt{1 - \frac{n_{aer}^2}{n_1^2}\sin^2\theta} - \cos\theta \cdot \frac{n_{aer}}{n_1} \cdot \sin\theta\right] =$$

$$= \frac{R \sin\theta}{n_2 - 1}\left[\sqrt{\frac{n_1^2}{n_{aer}^2} - \sin^2\theta} - \cos\theta\right].$$

Efectuînd calculele, se obțin valorile $f = 12{,}5$ cm și $h \approx 1{,}6$ cm (se ține seamă că $n_{aer} \approx 1$).

b) Fasciculul luminos îngust emergent din prismă atinge lentila numai dacă distanța d de la prismă la lentilă, diametrul D al lentilei și coordonatele x_{V_1}, x_{V_2} ale vîrfurilor prismei îndeplinesc condiția (fig. F.C.82):

$$x_{V_1} - d \cdot \operatorname{tg} i' \text{ sau (și) } x_{V_2} - d \cdot \operatorname{tg} i' \in \left(-\frac{D}{2}, \frac{D}{2}\right).$$

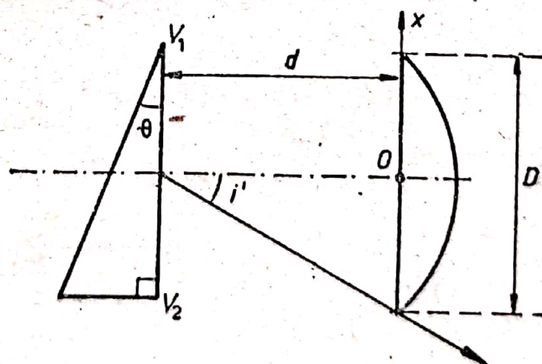


Fig. F.C.82

În acest caz, distanța h de la imagine la axa optică a lentilei va fi dată de expresia:

$h = f \cdot \operatorname{tg} i' \simeq f \cdot \sin i'$, imaginea rămînînd în planul focal al lentilei considerate. Pentru $x_{V_{1,2}} - d \cdot \operatorname{tg} i' \notin \left(-\frac{D}{2}, \frac{D}{2}\right)$, sistemul considerat dă un fascicul emergent paralel și îngust, fără a mai da o imagine.

În cazul în care $n_1 \sin r' > n_{aer}$, pe suprafaţa a doua a prismei se produce fenomenul de reflexie totală, ceea ce face ca în acest caz din prismă să nu iasă un fascicul emergent spre lentilă.

63°. a) $\frac{1}{p'} = \frac{1}{f} - \frac{1}{p} = \frac{1}{0{,}12} - \frac{1}{0{,}72} = -\frac{1}{0{,}18}$, deci $p' = -0{,}18$ m (fig. F.C.83);

$$\frac{S_1S_2}{a} = -\frac{p'}{f}, \text{ deci } S_1S_2 = -\frac{p'}{f}a = 6 \cdot 10^{-3} \text{ m};$$

$$\frac{r - a/2}{d_0} = \frac{S_1S_2}{d_0 - p'} = \frac{r - a/2 - S_1S_2}{p'}, \text{ deci}$$

$$d_0 = p' \frac{r - a/2}{r - a/2 - S_1S_2} = 0{,}36 \text{ m}.$$

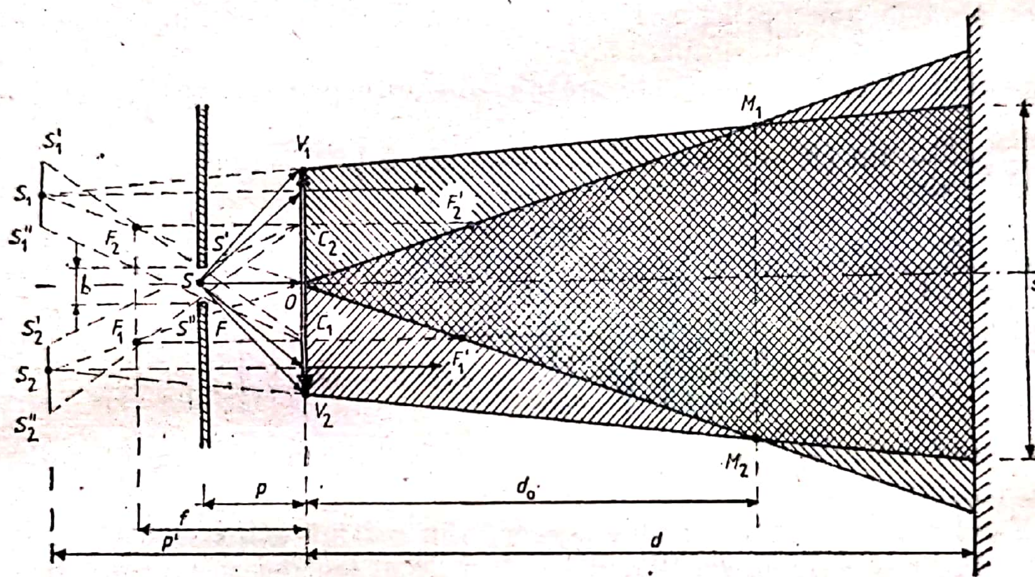


Fig. F.C.83

Deoarece $d = 0{,}82$ m $> d_0 = 0{,}36$ m, rezultă că ecranul se găseşte în zona de interferenţă delimitată de direcţiile S_1M_1 şi S_2M_2. Lărgimea s a zonei de interferenţă pe ecran va fi

$$s = S_1S_2 - \frac{d - p'}{p'}\left(2r - a - S_1S_2\right) \approx 1{,}71 \cdot 10^{-3} \text{ m}.$$

Deoarece interfranja

$$i(\lambda) = \frac{\lambda D}{S_1S_2} = \frac{\lambda(d - p')}{S_1S_2} = 10^{-4} \text{ m},$$

rezultă că numărul franjelor observabile este

$$N = 1 + 2\left[\frac{1{,}71 \cdot 10^{-3}}{2 \cdot 10^{-4}}\right] = 17 \text{ franje}.$$

b) $k\left[\frac{(\lambda + \delta\lambda)D}{S_1S_2} - \frac{\lambda D}{S_1S_2}\right] \leqslant \frac{1}{2} i(\lambda) = \frac{\lambda D}{2S_1S_2}$, deci $k \leqslant \frac{\lambda}{2\delta\lambda} = 3$.

Rezultă că numărul franjelor observabile va fi

$$N_{obs.} = 1 + 2k_{max} = 1 + 2 \cdot 3 = 7 \text{ franje}.$$

c) Imaginile $S_1'S_1S_1''$, $S_2'S_2S_2''$ ale fantei prin cele două jumătăți ale lentilei au dimensiunea $i = -b\frac{p'}{p} = \frac{5}{2}b$ și sînt distanțate între ele cu $S_1S_2 = 1{,}5$ mm.

Luînd în considerație diferențele de drum suplimentare $S'V_2 - V_2S_2' - S'V_1 + V_1S_1'$, $S''V_2 - V_2S_2'' - S''V_1 + V_1S_1''$ etc., intervenind în expresiile diferențelor de drum ale radiațiilor care interferă pe ecran venind prin S_1' și S_2', respectiv S_1'' și S_2'' etc., rezultă că pe ecran se va obține un sistem de figuri de interferență elementare deplasate între ele cu $\frac{bd}{p}$ (fig. F.C.84). Rezultă că pentru ca franjele să poată fi observate:

$$\frac{bd}{p} \leqslant \frac{1}{2}i(\lambda), \text{ deci } b_{max} = \frac{p \cdot i(\lambda)}{2d} \approx 4{,}4 \ \mu\text{m}.$$

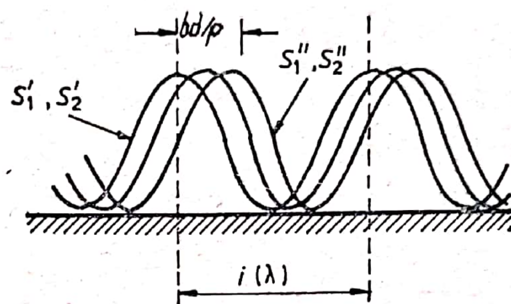


Fig. F.C.84

64°. a) Datorită simetriei dispozitivului față de axa „orizontală“ trecînd prin sursă, dispozitivul este de tipul Young, interfranja observată fiind dată de expresia $i = \frac{\lambda D}{2l}$. Deoarece D crește cu b, singura posibilitate ca valoarea interfranjei să rămînă constantă, indiferent de valoarea distanței b, este ca $\frac{D}{l}$ = constant, în condițiile în care D este mult mai mare decît dimensiunile instalației. Pentru ca sursele virtuale să fie situate la infinit este necesar ca fasciculul incident pe biprismă să fie paralel (fig. F.C.85). Rezultă că $f = p = 0{,}2$ m.

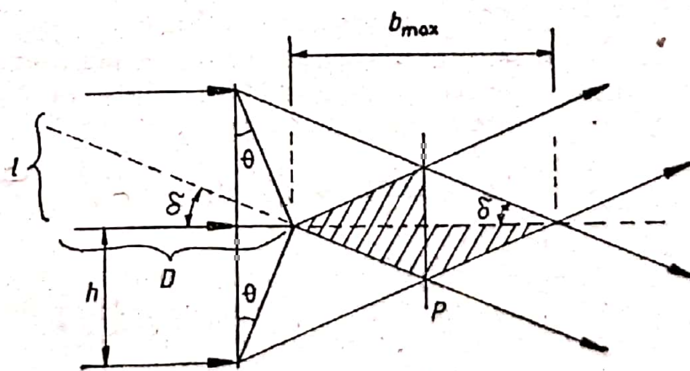


Fig. F.C.85

b) Din figura F.C. 86 reiese că $i_1 = \alpha = \text{arc tg}\frac{y}{q} < \text{arctg}\frac{h}{q} \ll 1$ rad, deci

$$r_1 = \arcsin\left(\frac{\sin i_1}{n}\right) \approx \frac{\alpha}{n}, \text{ iar}$$

$$r_2 = \theta - r_1 = \theta - \frac{\alpha}{n} (\ll 1 \text{ rad}) \text{ și } i_2 = \arcsin(n \sin r_2) \approx n\theta - \alpha.$$

Rezultă că unghiul de deviație (față de direcția de incidență) al fasciculului emergent dintr-una din prisme este $\delta = i_1 + i_2 - \theta \approx (n-1)\,\theta$. Pe de altă parte, din figura F.C.85, rezultă că $\frac{l}{D} = \operatorname{tg}\delta \approx (n-1)\,\theta$, deci interfranja are expresia $i = \frac{\lambda D}{2l} \cong = \frac{\lambda}{2(n-1)\,\theta}$ ($2l$ este distanța dintre sursele virtuale, de la care par a proveni fasciculele emergente din cele două prisme). În final $\theta \approx \frac{\lambda}{2i(n-1)} = 10^{-3}$ rad.

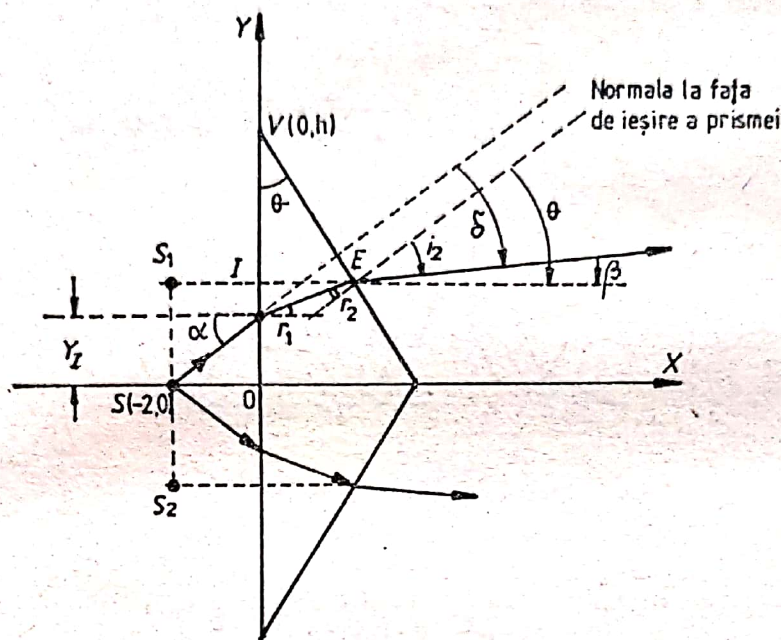


Fig. F.C.86

c) Din figura F.C.85 reiese de asemenea, că $2h \cong 2b_{max}\,\operatorname{tg}\,\delta \approx 2b_{max}\,\theta(n-1)$, unde b_{max} ($= 11{,}5$ m) este lungimea maximă a zonei de interferență (hașurată în figura F.C. 85). Efectuînd calculele, se obține $2h = 1{,}15$ cm.

d) De fiecare parte a axei de simetrie avem — în planul P în care zona de interferență are o lățime maximă (fig. F.C.85) — cîte $\frac{h}{2}\cdot\frac{1}{i} = 5{,}75$ interfranje. Deoarece franjele întunecate se găsesc la cotele $y = -5{,}5i;\ -4{,}5i;\ \ldots +5{,}5i$, rezultă că numărul maxim al franjelor întunecate care vor putea fi observate este $N_{max} = 12$. Poziția ecranului pentru care numărul franjelor care pot fi observate este maxim, este dată de distanța (fig. F.C. 85):

$$b = \frac{b_{max}}{2} = 5{,}75 \text{ m}$$

(care poate fi eventual variată cu $\pm 0{,}25$ m, ținînd seamă că semilățimea maximă a zonei de interferență este egală cu 5,75 interfranje, în timp ce franjele întunecate extreme se situează la 5,5 interfranje de axa de simetrie a dispozitivului).

e) Coordonatele punctului E de emergență a razelor din prisma de sus (v. fig. F.C.86) rezultă din ecuațiile:

$Y - q\alpha = Y - Y_I = \operatorname{tg} r_1 \cdot X \cong \frac{\alpha}{n} \cdot X$ (raza transmisă în prisma de sus) și

$Y - h = -\operatorname{ctg}\theta \cdot X \approx -\frac{X}{\theta}$ (muchia prismei de sus).

Se obține: $X_E = \frac{\theta n(h - q\alpha)}{n + \theta\alpha}$, $Y_E \cong \frac{(h\theta + nq)}{n + \theta\alpha}\alpha$.

Cum $n \gg \theta\,\alpha$, iar $nq \gg h\theta$, rezultă că $X_E \simeq \theta(h - q\alpha)$, $Y_E \simeq q\alpha$.

Ecuația fasciculului emergent este:

$$Y - Y_E = Y - q\alpha = \mathrm{tg}\beta(X - X_E) \approx (\theta - i_2)(X - X_E) \approx [\alpha - (n-1)\theta](X - X_E)$$

Pentru distanțe uzuale în dispozitiv: $X \gg X_E = \theta(h - q\alpha)$, avem:

$Y - q(n-1)\theta = [\alpha - (n-1)\theta](X + q)$, care reprezintă ecuația unui fascicul de drepte care trec prin sursa virtuală S_1 de coordonate $X_{S_1} = -q$, $Y_{S_1} = q(n-1)\theta$.

Repetînd raționamentele de mai sus pentru fasciculele emergente din prisma de jos, rezultă că acestea par a proveni din sursa virtuală S_2 de coordonate $X_{S_2} = -q$, $Y_{S_2} = -q(n-1)\theta$. Efectuînd calculele, se obține:

$$X_{S_1} = X_{S_2} = -p - a = -0{,}5 \text{ m},$$

$$Y_{S_1} = -Y_{S_2} = (p + a)(n-1)\theta = 0{,}25 \text{ mm}.$$

65°. a) Diferența de drum geometric între fasciculele difractat sub unghiul θ, respectiv incident sub unghiul θ_0 față de planul rețelei (fig. F.C. 87) este: $\Delta d = AA' - B'B = d(\cos\theta - \cos\theta_0)$. Pentru maximul de ordinul k: $\Delta d = k\lambda$, deci unghiul θ corespunzînd maximului de difracție de ordinul k este dat de relația: $\cos\theta = \cos\theta_0 + \frac{k\lambda}{d} = \cos\theta_0 + nk\lambda$. Efectuînd calculele, obținem:

$$\cos\theta \approx 0{,}7071, \text{ deci } \theta \approx 45°.$$

b) Impunînd condiția de suprapunere a maximului de ordinul k al componentei $\lambda + G$ cu maximul de ordinul $(k+1)$ al componentei λ, obținem: $k(\lambda + G) = (k+1)\lambda$, de unde:

$$G = \frac{\lambda}{k} \approx 51{,}1 \text{ nm}.$$

c) Reprezentînd fazorial oscilațiile intensităților cîmpurilor electrice E_1, E_2, ... E_N ale fasciculelor difractate de porțiunile transparente succesive ale rețelei, se constată că primul minim nul care urmează maximului de ordinul k va corespunde (fig. F.C.88) unui defazaj suplimentar între oscilațiile cîmpului electric în 2 fascicule

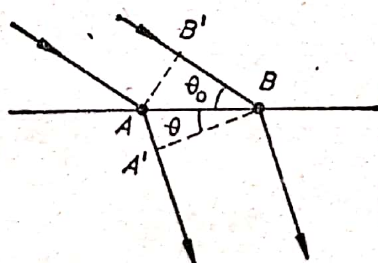


Fig. F.C.87

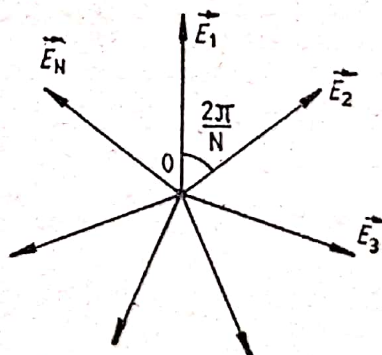


Fig. F.C.88

succesive egal cu $\Delta\varphi = \frac{2\pi}{N}$ radiani. Deoarece: $\Delta\varphi = \omega\Delta t = \omega \cdot \frac{\Delta\delta}{c} = \frac{2\pi}{\lambda}\Delta\delta$, diferența suplimentară de drum optiv va fi: $\Delta\delta = \frac{\lambda}{2\pi}\Delta\varphi = \frac{\lambda}{2\pi} \cdot \frac{2\pi}{N} = \frac{\lambda}{N}$, deci diferența de drum optic pentru primul minim nul care urmează maximului principal de ordinul k este: $\delta = k\lambda + \frac{\lambda}{N}$.

Punînd condiția de suprapunere cu maximul de ordinul k al componentei $\lambda + \delta\lambda$, obținem:

$$\delta = k\lambda + \frac{\lambda}{N} = k(\lambda + \delta\lambda),$$

de unde:

$$\delta\lambda = \frac{\lambda}{kN} = \frac{\lambda}{knL} \cong 0{,}511 \cdot 10^{-10}\ \text{m}\ (= 0{,}511\ \text{Å}).$$

66°. a) $C_1 = \frac{1}{f_1} = (n_1 - 1)\left[\frac{1}{\infty} - \frac{1}{R}\right]$;

deci

$$f_1 = -\frac{R}{n_1 - 1},$$

$$C_2 = \frac{1}{f_2} = (n_2 - 1)\left[\frac{1}{R} + \frac{1}{R'}\right].$$

Astfel

$$f_2 = \frac{R R'}{(n_2 - 1)(R' + R)}.$$

b)

$$C = C_1 + C_2,$$

rezultînd

$$\frac{1}{F} = \frac{1}{f_1} + \frac{1}{f_2},$$

$$\frac{1}{F} = \frac{R'(n_2 - n_1) + R(n_2 - 1)}{RR'},$$

$$F' = \frac{1}{\frac{n_2 - n_1}{R} + \frac{n_2 - 1}{R'}}.$$

c) F (galben) $= F$ (albastru) $= 12$ cm,

$$\frac{1}{F} = \frac{n_2 - n_1}{R} + \frac{n_2 - 1}{R'}.$$

În lumină galbenă: $\frac{1}{12} = -\frac{0{,}105}{R} + \frac{0{,}512}{R'}$.

În lumină albastră: $\frac{1}{12} = -\frac{0{,}111}{R} + \frac{0{,}518}{R'}$.

Scăzînd membru cu membru aceste ecuații, rezultă

$$R = R',$$

astfel încît $R = R' = 4{,}88$ cm.

67°. a) Distanța focală a lentilei C_1 este:

$$f_1 = \frac{1}{5} = 0{,}2\ \text{m} = 20\ \text{cm}.$$

Imaginea punctului A în raport cu lentila C_1 este poziționată în punctul A_1, astfel încît:

$$O_1A_1 = p_1' = \frac{p_1 f_1}{p_1 - f_1}.$$

Numeric: $p'_1 = 1$ m $= 100$ cm.

În raport cu lentila C_2 imaginea A_1 joacă rol de obiect și este situat la distanța $p_2 = 30$ cm de O_2.

Distanța focală a lentilei C_2 este:

$$f_2 = \frac{1}{4} = 0{,}25 \text{ m} = 25 \text{ cm}.$$

Imaginea finală a lui A este poziționată în punctul A_2 astfel încît:

$$O_2A_2 = p'_2 = \frac{p_2 f_2}{p_2 - f_2} = 1{,}5 \text{ m} = 150 \text{ cm}.$$

b) În apă, datorită refracției, imaginea A_2 se va situa mai departe (în A_3), astfel încît deplasarea A_2A_3 se calculează direct,

$$A_2A_3 = d_2 = d_1 \frac{n-1}{n} = \frac{n-1}{n}(d_2 + O_2A_2 - O_2B) = \frac{n-1}{n}(d_2 + 0{,}75).$$

Din această ecuație rezultă:

$$d_2 = 0{,}75(n-1) = 0{,}25 \text{ m} = 25 \text{ cm}.$$

c) Fie p_3 și p'_3 distanțele obiect lentilă și lentilă imagine care satisfac condiția impusă

$$A_1A_3 = p_3 + p'_3 = p_2 + p'_2 + d_2 = 30 \text{ cm} + 150 \text{ cm} + 25 \text{ cm} = 205 \text{ cm},$$

deci

$$p'_3 = 205 - p_3.$$

Din ecuația:

$$\frac{1}{f_2} = \frac{}{p_3} + \frac{1}{p'_3} \text{ sau } \frac{1}{p_3} + \frac{1}{205 - p_3} = \frac{1}{25},$$

rezultă ecuația de gradul doi:

$$p_3^2 - 205\,p_3 + 5\,125 = 0,$$

care admite soluțiile:

$$p_{3,1} \approx 29{,}15 \text{ cm și } p_{3,2} \approx 175{,}85 \text{ cm}.$$

Pentru a aduce lentila C_2 în cea mai apropiată poziție $(p_2 - p_{3,1} \ll p_{3,2} - p_2)$, care satisface cerința specificată, lentila trebuie apropiată de A_1 cu 0,85 cm.

68°. a) Diferența de drum optic între razele 1′ și 1″ care interferă în planul focal al lentilei are expresia:

$$\delta = 2\,nd \cos r + \frac{\lambda}{2}.$$

Termenul $\lambda/2$ se datorește reflexiei pe suprafața de sus aer-sticlă care se face cu un salt de fază de π.

Diferența de drum optic pentru razele care interferă în centrul planului focal al lentilei este

$$\delta_0 = 2\,nd + \frac{\lambda}{2}.$$

Diferența de drum corespunzătoare inelului de ordinul k este:

$$\delta_k = \delta_0 - k\lambda = 2\,nd + \frac{\lambda}{2} - k\lambda.$$

Numeric:

$$\delta_k = 6 \cdot 10^8 \text{ Å} - 1{,}17 \cdot 10^5 \text{ Å}.$$

b) Dacă $\delta_0 = 2nd + \frac{\lambda}{2}$ este un număr par de $\frac{\lambda}{2}$, în centrul figurii de interferență se obține maxim, iar dacă este un număr impar de $\frac{\lambda}{2}$ se obține minim.

Numeric:

$$\delta_0 = 2 \cdot 1{,}5 \cdot 2 \cdot 10^8 + \frac{6\,000}{2} = \frac{\lambda}{2}(2 \cdot 10^5 + 1).$$

Întrucît δ este un număr impar de $\frac{\lambda}{2}$, centrul figurii de interferență va fi întunecat (minim).

c) Fie R raza inelului:

$R = f \operatorname{tg} i \cong f \sin i \simeq f \cdot i$ (pentru unghiuri de incidență mici).

$$2\,nd \cos r + \frac{\lambda}{2} = 2\,nd + \frac{\lambda}{2} - k\lambda,$$

$$k\lambda = 2\,nd(1 - \cos r) = 2\,nd \cdot 2 \sin^2 \frac{r}{2} \simeq ndr^2,$$

deci

$$r = \sqrt{\frac{k\lambda}{nd}},$$

$$n = \frac{\sin i}{\sin r} \simeq \frac{i}{r},$$

$$i = \sqrt{\frac{nk\lambda}{d}},$$

$$R = f\sqrt{\frac{nk\lambda}{d}} \simeq 0{,}212 \text{ cm}.$$

5. FIZICĂ ATOMICĂ ȘI NUCLEARĂ

69°. a) $L_e = h\frac{c}{\lambda} \cong \frac{6{,}625 \cdot 10^{-34} \cdot 3 \cdot 10^8}{3{,}2 \cdot 10^{-7}} \cong 6{,}21 \cdot 10^{-19}\ \text{J} = 3{,}88\ \text{eV}.$

b) $|V_0| = \frac{1}{e}\left(h\frac{c}{\lambda} - L_e\right) \cong$

$$\cong \frac{1}{1{,}6 \cdot 10^{-19}} \cdot \left(6{,}625 \cdot 10^{-34}\frac{3 \cdot 10^8}{2{,}4 \cdot 10^{-7}} - 6{,}21 \cdot 10^{-19}\right) \cong 1{,}3\ \text{V}.$$

c) $\frac{1}{2}mv^2 = e|V_0| = E_c,$

$$v = \sqrt{\frac{2e|V_0|}{m}} = \sqrt{\frac{2 \cdot 1{,}6 \cdot 10^{-19} \cdot 1{,}3}{9{,}1 \cdot 10^{-31}}} \cong 6{,}8 \cdot 10^5\ m \cdot s^{-1}$$

$$\lambda = \frac{h}{p} = \frac{h}{\sqrt{2mE_c}} = \frac{h}{\sqrt{2me|V_0|}} = \frac{6{,}625 \cdot 10^{-34}}{\sqrt{2 \cdot 9{,}1 \cdot 10^{-31} \cdot 1{,}6 \cdot 10^{-19} \cdot 1{,}3}} \cong 10{,}8\ \text{Å}.$$

70°. Procesul care are loc este reprezentat în figura F.C.89.

a)
$$\lambda_f - \lambda_0 = \Lambda(1 - \cos\theta), \qquad (1)$$
$$\lambda_0 - \lambda_i = -\Lambda(1 - \cos\theta), \qquad (2)$$

unde $\Lambda = \dfrac{h}{m_0 c} = \dfrac{6{,}625 \cdot 10^{-34}}{9{,}1 \cdot 10^{-31} \cdot 3 \cdot 10^8} \simeq 2{,}42 \cdot 10^{-12}$ m.

Se observă că:

$$\lambda_i = \lambda_f = 1{,}25 \cdot 10^{-10} \text{ m},$$
$$\lambda_0 = 1{,}25 \cdot 10^{-10} - 2{,}42 \cdot 10^{-12}(1 - \cos 60°) = 1{,}2379 \cdot 10^{-10} \text{ m},$$
$$E_{c_e} = h\nu_0 - h\nu_i = hc\left(\frac{1}{\lambda_0} - \frac{1}{\lambda_i}\right) =$$
$$= 6{,}625 \cdot 10^{-34} \cdot 3 \cdot 10^8 \cdot \frac{1{,}21 \cdot 10^{-12}}{1{,}2379 \cdot 1{,}25 \cdot 10^{-20}} = 1{,}554 \cdot 10^{-17} \text{ J},$$
$$\lambda_e = \frac{h}{p_e} = \frac{h}{\sqrt{2m_0 E_{c_e}}} = \frac{6{,}625 \cdot 10^{-34}}{\sqrt{2 \cdot 9{,}1 \cdot 10^{-31} \cdot 1{,}554 \cdot 10^{-17}}} \cong 1{,}24573 \cdot 10^{-10} \text{ m},$$
$$\lambda_{e_r} = \frac{hc}{\sqrt{E_{c_e}(E_{c_e} + 2m_0c^2)}} =$$
$$= \frac{6{,}625 \cdot 10^{-34} \cdot 3 \cdot 10^8}{\sqrt{1{,}554 \cdot 10^{-17}(1{,}554 \cdot 10^{-17} + 2 \cdot 9{,}1 \cdot 10^{-31} \cdot 9 \cdot 10^{16})}} \cong 1{,}24567 \cdot 10^{-10} \text{ m}.$$

b) $E_{c_1} = E_{c_2} = h\nu_0 - h\nu_f = h\nu_0 - h\nu_i = 1{,}554 \cdot 10^{-17}$ J $\cong 97{,}1$ eV,

$$\sin\varphi = -\frac{1}{mv}\frac{h\nu_f}{c}\sin\theta \simeq -\frac{c}{2h\nu_0 \sin\frac{\theta}{2}}\frac{h\nu_f}{c}2\sin\frac{\theta}{2}\cos\frac{\theta}{2} \cong -\cos\frac{\theta}{2},$$

în aproximația $\nu_f \simeq \nu_0$. Deci:

$$\sin\varphi = -\cos\frac{60}{2} = -\frac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow \varphi = -60°.$$

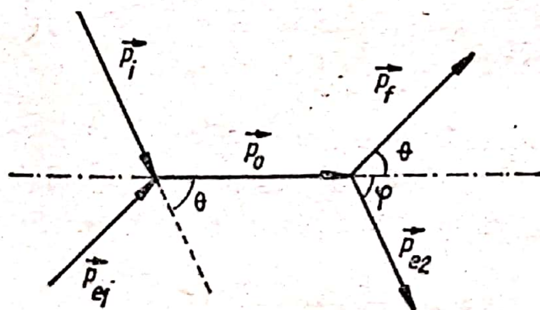


Fig. F.C.89

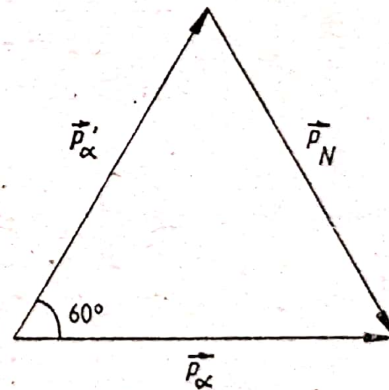


Fig. F.C.90

71°. În cazul bombardamentului cu electroni, din energia electronilor de 6 eV, atomul absoarbe 4,86 eV (energia nivelului mai jos, însă cel mai apropiat de 6 eV), energia electronilor nefiind cuantificată.

În cazul bombardamentului cu fotoni, atomul nu absoarbe energie de la aceștia, deoarece $E_n - E_1 = \hbar\omega \neq 6$ eV.

72°. a) $\bar{p}_{\text{inițial}} = \bar{p}_{\text{final}}$,

$$\bar{p}_\alpha = \bar{p}'_\alpha + \bar{p}_N \text{ (v. figura F.C.90).}$$

Deoarece $|\bar{v}_\alpha| = |\bar{v}'_\alpha|$, avem $|\bar{p}'_\alpha| = |\bar{p}_\alpha|$.

În figura F.C.90 se observă că avem un triunghi isoscel cu unghiul de la vîrf de 60°, adică, avem un triunghi echilateral. Rezultă:

$$p_N = p_\alpha = m_\alpha \cdot v_\alpha = 6{,}62 \cdot 10^{-27}\ \text{kg} \cdot 10^7\ \text{m} \cdot \text{s}^{-1} = 6{,}62 \cdot 10^{-20}\ \text{kg} \cdot \text{m} \cdot \text{s}^{-1}.$$

b) $p_N = m_N v_N$,

$$v_N = \frac{p_N}{m_N} = \frac{6{,}62 \cdot 10^{-20}}{3{,}3 \cdot 10^{-25}} \cong 2 \cdot 10^5\ \text{m} \cdot \text{s}^{-1}.$$

c) $E_{c_N} = \frac{1}{2} m_n v_N^2 = \frac{1}{2} \cdot 3{,}3 \cdot 10^{-25} \cdot (2.10^5)^2 = 6{,}6 \cdot 10^{-15}$ J.

Observație

$$\frac{E_{c_N}}{E_{c_\alpha}} = \frac{\frac{1}{2} m_N v_N^2}{\frac{1}{2} m_\alpha v_\alpha^2} = \frac{3{,}3 \cdot 10^{-25}}{6{,}62 \cdot 10^{-27}} \left(\frac{2 \cdot 10^5}{10^7}\right)^2 = 0{,}02.$$

Rezultă că presupunerea inițială a fost justificată.

73°. a) Energia particulelor alfa este energie cinetică. Schema experienței este dată în figura F.C.91.

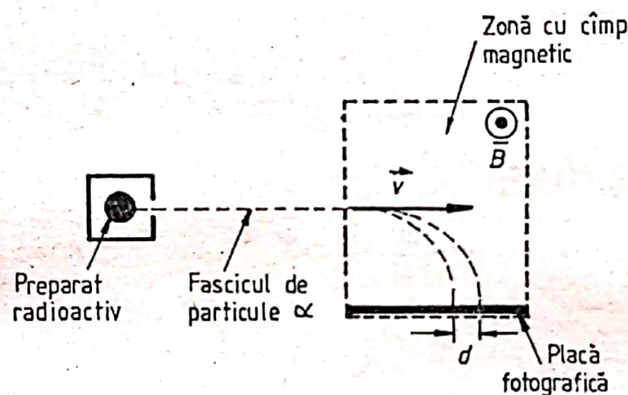


Fig. F.C.91

Întrucît nu avem nici o indicație despre mărimea vitezei va trebui să facem o tratare relativistă. Energia cinetică E_c se scrie ca diferența dintre energia relativistă totală, mc^2 și energia relativistă de repaus, m_0c^2: $E_c = mc^2 - m_0c^2$. Întrucît

$$m = \frac{m_0}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}},\ \text{rezultă}\ \frac{E_c}{m_0c^2} = \left(\frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} - 1\right),$$

de unde

$$\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} = \frac{m_0c^2}{E_c + m_0c^2}.$$

Ridicînd la pătrat și separînd viteza, se obține

$$v = c\sqrt{1 - \left(\frac{m_0c^2}{E_c + m_0c^2}\right)^2}.$$

Pentru cele două tipuri de particule alfa vom avea:

$$v_1 = c\sqrt{1-\left(\frac{m_0c^2}{E_{c_1}+m_0c^2}\right)^2} = 3\cdot 10^8\sqrt{1-\left(\frac{4\cdot 1,67\cdot 10^{-27}\cdot 9\cdot 10^{16}}{6,25\cdot 1,6\cdot 10^{-13}+4\cdot 1,67\cdot 10^{-27}\cdot 9\cdot 10^{16}}\right)^2} =$$
$$= 0,0576\cdot 3\cdot 10^8 = 1,728\cdot 10^7\ \mathrm{m\cdot s^{-1}},$$

$$v_2 = c\sqrt{1-\left(\frac{m_0c^2}{E_{c_2}+m_0c^2}\right)^2} = 10^8\sqrt{1-\left(\frac{4\cdot 1,67\cdot 10^{-27}\cdot 9\cdot 10^{16}}{9\cdot 1,6\cdot 10^{-13}+4\cdot 1,67\cdot 10^{-27}\cdot 9\cdot 10^{16}}\right)^2} =$$
$$= 0,069\cdot 10^8 = 2,07\cdot 10^7\ \mathrm{m\cdot s^{-1}}.$$

Se observă că în ambele cazuri v este mai mic decît $c/10$, astfel încît aproximația nerelativistă ar fi fost suficient de bună. Într-adevăr, scriind $\frac{m_0v^2}{2} = E_c$, rezultă

$$v_1 = \sqrt{\frac{2E_{c_1}}{m_0}} = \sqrt{\frac{2\cdot 6,25\cdot 1,6\cdot 10^{-13}}{4\cdot 1,67\cdot 10^{-27}}} = 1,73\cdot 10^7\ \mathrm{m\cdot s^{-1}},$$

deci, în concordanță foarte bună cu valoarea obținută prin tratarea relativistă.

b) Razele traiectoriilor se obțin din condiția de echilibru între forța Lorentz și forța centrifugă de inerție:

$$qvB = \frac{m_0v^2}{r} \text{ sau } r = \frac{m_0v}{qB}.$$

În cele două cazuri avem:

$$r_1 = \frac{m_0v_1}{qB} = \frac{4\cdot 1,67\cdot 10^{-27}\cdot 1,73\cdot 10^7}{2\cdot 1,6\cdot 10^{-19}\cdot 1} = 0,361\ \mathrm{m},$$

$$r_2 = \frac{m_0v_2}{qB} = \frac{4\cdot 1,67\cdot 10^{-27}\cdot 2,07\cdot 10^7}{2\cdot 1,6\cdot 10^{-19}\cdot 1} = 0,432\ \mathrm{m}.$$

c) Ambele particule vor parcurge aproximativ un sfert de cerc de la intrarea în zona cu cîmp magnetic pînă la placa fotografică, așa cum se vede din figura F.C. 91, deci, distanța pe placă între punctele de incidență ale celor două tipuri de particule alfa va fi

$$d = r_2 - r_1 = 0,432 - 0,361 = 0,071\ \mathrm{m} = 7,1\ \mathrm{cm}.$$

74°. În procesul de interacțiune se conservă energia și impulsul. Conservarea energiei se scrie

$$E_\alpha + Q = E_c + E_n. \tag{1}$$

Ecuația conservării impulsului se obține aplicînd teorema cosinusului în triunghiul format de impulsurile celor 3 particule $\overline{p}_\alpha$, $\overline{p}_c$ și $\overline{p}_n$ (figura F.C.92):

$$p_c^2 = p_\alpha^2 + p_n^2 - 2p_\alpha p_n \cos\theta. \tag{2}$$

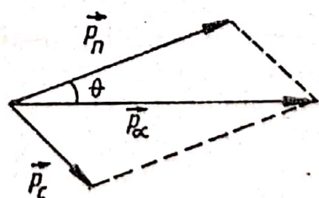


Fig. F.C.92

Ținînd seama de relația dintre energia cinetică a unei particule și impulsul ei avem:

$$p_c^2 = 2E_cm_c, \quad p_\alpha^2 = 2E_\alpha m_\alpha, \quad p_n^2 = 2E_nm_n. \tag{3}$$

Introducînd în ecuația (2) și eliminînd E_c cu ajutorul ecuației (1) se obține:

$$E_n(m_c+m_n) - 2\sqrt{m_n m_\alpha E_\alpha E_n}\cos\theta - E_\alpha(m_c - m_\alpha) - Qm_c = 0. \qquad (4)$$

Introducînd notația $E_n = \varepsilon^2$ se observă că ecuația (4) este de gradul doi deci soluția ei are forma:

$$\varepsilon = \frac{\sqrt{m_n m_\alpha E_\alpha}\cos\theta + \sqrt{m_n m_\alpha E_\alpha\cos^2\theta + E_\alpha(m_c - m_\alpha)(m_c + m_n) + Qm_c(m_n + m_c)}}{m_n + m_c}. \qquad (5)$$

Pătratul acestei expresii dă energia cinetică a neutronului ca funcție de unghiul θ.

Pentru $\theta = \frac{\pi}{2}$, $\cos\theta = 0$, deci

$$\varepsilon = \frac{\sqrt{E_\alpha(m_c - m_\alpha)(m_c + m_n) + Qm_c(m_n + m_c)}}{m_n + m_c},$$

astfel încît

$$E_n = \varepsilon^2 = \frac{m_c}{m_c + m_n}\left(Q + \frac{m_c - m_\alpha}{m_c}E_\alpha\right) = 8{,}46\ \text{MeV}.$$

75°. a) Lungimile de undă ale radiațiilor rezultate în urma tranzițiilor între stările atomilor de hidrogen sînt date de expresia: $\frac{1}{\lambda} = R\left(\frac{1}{n^2} - \frac{1}{k^2}\right)$, unde $R = \frac{m_e e^4}{8ch^3\varepsilon_0^2}$ este constanta lui Rydberg, a cărei valoare ($\approx 1{,}097 \cdot 10^7\ \text{m}^{-1}$) poate fi calculată în baza datelor enunțului. Deoarece n și k sînt numere naturale, se constată ușor că radiația de lungime de undă $\lambda_0 = 4861$ Å nu aparține nici seriei Lyman, $n = 1$ $\left(\text{pentru care lungimea de undă cea mai mare — corespunzînd valorii } k = 2 \text{ — este: } \lambda_{L,\max} = \frac{4}{3R} \simeq 1\,215\ \text{Å}\right)$ și nici seriilor Paschen, Brackett, ... cu $n \geqslant 3$ $\left(\text{pentru care lungimea de undă cea mai mică — corespunzînd valorilor } n = 3, k \to \infty \text{ — este: } \lambda_{P,\min} = \frac{9}{R} \approx 8\,204\ \text{Å}\right)$. Rezultă că radiația de lungime de undă $\lambda_0 = 4\,861$ Å aparține seriei Balmer ($n = 2$). În ceea ce privește valoarea numărului cuantic k, aceasta se poate determina din relația: $\frac{1}{k^2} = \frac{1}{2^2} - \frac{1}{R\lambda_0}$, obținînd $k = 4$.

b) (i) Deoarece energia cinetică imprimată ionilor H_2^+ de tensiunea acceleratoare, U : $W_c = eU = 43$ keV este mult mai mică decît energia corespunzătoare masei de repaus a acestor ioni: $W_0 = mc^2 = 3 \cdot 10^{-11}$ J $= 1{,}9 \cdot 10^8$ eV, energia cinetică a ionilor H_2^+ poate fi dată de expresia nerelativistă, deci:

$$\frac{mv^2}{2} = eU, \text{ de unde: } v = \frac{2eU}{m} 2{,}04 \cdot 10^6 \frac{\text{m}}{\text{s}}.$$

(ii) În figura F.C.93 sînt reprezentate pozițiile observatorului O și sursei (atomilor H ai ionilor H_2^+) în momentele în care sursa emite fa ele O (S_0), respectiv 2π ($S_{2\pi}$) ale unor oscilații (toate pozițiile sînt date de sistemul de referință al observatorului). Deoarece: $S_0S_{2\pi} = v \cdot T < c \cdot T = \lambda_0 \ll OS_0$ (dimensiunile instalației

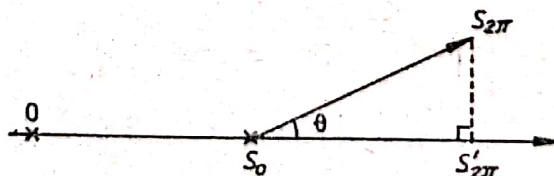


Fig. F.C.93

fiind de ordinul decimetrilor), avem: $OS_{2\pi} \cong OS'_{2\pi} = OS_0 + v \cdot T \cdot \cos\theta$, unde θ este unghiul format de direcţia mişcării sursei cu direcţia OS_0 de observaţie. Deoarece T este perioada oscilaţiilor sursei în sistemul de referinţă al sursei, care se deplasează cu viteza $\vec{v}$ faţă de sistemul de referinţă al observatorului, în acest ultim sistem de referinţă — conform relaţiilor relativităţii restrînse — perioada oscilaţiilor apare ca fiind „dilatată" la valoarea $\frac{T}{\sqrt{1-\beta^2}}$, unde $\beta = \frac{v}{c}$.

În tabelul care urmează sînt indicate momentele de emisie de către sursă, respectiv de recepţie de către observator, ale fazelor O şi 2π ale oscilaţiei considerate.

Faza	Momentul emisiei la sursă	Momentul recepţiei de către observator
O	t_e	$t_e + \frac{OS_e}{c}$
2π	$t_e + \frac{T}{\sqrt{1-\beta^2}}$	$t_e + \frac{T}{\sqrt{1-\beta^2}} + \frac{1}{c}\left(OS_0 + v \cdot \frac{T}{\sqrt{1-\beta^2}} \cdot \cos\theta\right)$

Rezultă expresia perioadei oscilaţiilor, aşa cum o constată observatorul:

$$T_{obs} = t_{\text{recepţie faza } 2\pi} - t_{\text{recepţie faza } 0} = \frac{1+\beta\cos\theta}{\sqrt{1-\beta^2}} \cdot T.$$

Deoarece viteza luminii este aceeaşi în raport cu orice sistem de referinţă inerţial, lungimea de undă observată este:

$$\lambda_{obs} = c \cdot T_{obs} = \frac{1+\beta\cos\theta}{\sqrt{1-\beta^2}} \cdot \lambda.$$

În cazul experienţei Ives-Stilwell, radiaţiile care ajung la spectroscop în urma reflexiei pe oglinda O par a proveni de la un fascicul virtual, a cărui direcţie (simetrică faţă de oglinda O cu direcţia fasciculului real) formează cu direcţia de observaţie (care coincide aici cu axa spectroscopului şi normala la suprafaţa oglinzii) unghiul $\theta_r = \pi - \theta$ (fig.F.C.94). În consecinţă, lungimile de undă λ_1, λ_2 observate

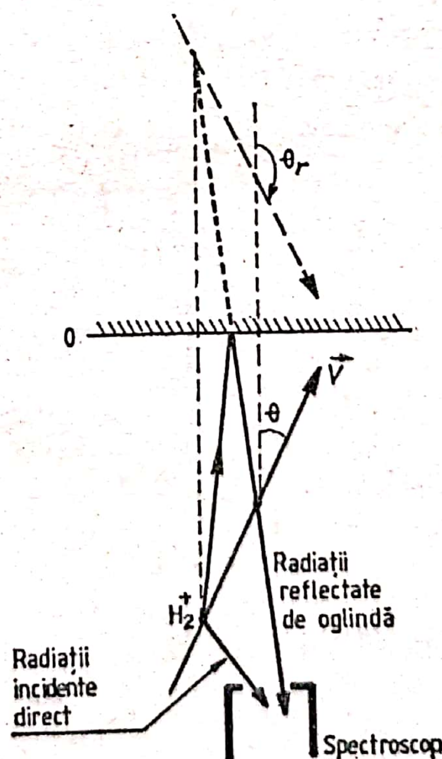


Fig. F.C.94

cu ajutorul spectroscopului pentru radiațiile de lungime de undă (proprie) λ_0 emise de ionii H_2^+ și incidente la spectroscop direct, respectiv după reflexia pe oglindă, sînt date de expresiile:

$$\lambda_1 = \frac{1 + \beta \cos \theta}{\sqrt{1 - \beta^2}} \cdot \lambda_0, \quad \lambda_2 = \frac{1 + \beta \cos \theta_r}{\sqrt{1 - \beta^2}} \cdot \lambda_0 = \frac{1 - \beta \cos \theta}{\sqrt{1 - \beta^2}} \cdot \lambda_0.$$

Deoarece viteza v a ionilor este mult mai mică decît viteza c a luminii în vid (v. rezultatele punctului precedent), avem $\beta = \frac{v}{c} \ll 1$, deci $\frac{1}{\sqrt{1 - \beta^2}} \approx \left(1 + \frac{\beta^2}{2}\right)$.

Rezultă că:

$$\lambda_1 \approx \lambda_0(1 + \beta \cos \theta)\left(1 + \frac{\beta^2}{2}\right) \cong \lambda_0 + \lambda_0\beta \cos \theta + \lambda_0 \frac{\beta^2}{2}, \text{ iar:}$$

$$\lambda_2 \cong \lambda_0(1 - \beta \cos \theta)\left(1 + \frac{\beta^2}{2}\right) \approx \lambda_0 - \lambda_0\beta \cos \theta + \lambda_0 \frac{\beta^2}{2},$$

de unde — prin comparație cu enunțul:

$$\Delta\lambda = \lambda_0\beta \cos \theta, \; \Delta\lambda' = \lambda_0 \cdot \frac{\beta^2}{2}.$$

Din expresia componentei nerelativiste ($\Delta\lambda$) a efectului Doppler, rezultă că:

$$v = c \cdot \beta = \frac{c \cdot \Delta\lambda}{\lambda_0 \cos \theta} \approx \frac{3 \cdot 10^8 \cdot 35}{4861 \cdot 0{,}993} \simeq 2{,}175 \cdot 10^6 \frac{\text{m}}{\text{s}},$$

iar din expresia componentei relativiste ($\Delta\lambda'$) a efectului Doppler obținem:

$$v = c \cdot \beta = c\sqrt{\frac{2 \cdot \Delta\lambda'}{\lambda_0}} = \sqrt{\frac{2 \cdot 0{,}12}{4861}} \cdot 3 \cdot 10^8 = 2{,}108 \cdot 10^6 \frac{\text{m}}{\text{s}}.$$

Se constată buna concordanță a valorilor obținute pentru viteza ionilor H_2^+ în baza considerentelor energetice $\left(v = \sqrt{\frac{2\,eU}{m}} \simeq 2{,}04 \cdot 10^6 \frac{\text{m}}{\text{s}}\right)$, respectiv a componentelor nerelativiste, respectiv relativistă a efectului Doppler. Această concordanță constituie una dintre verificările experimentale a efectului relativist al „dilatării“ duratelor.

76°. Rezultatele analizei efectuate sînt prezentate în figura F.C.95.

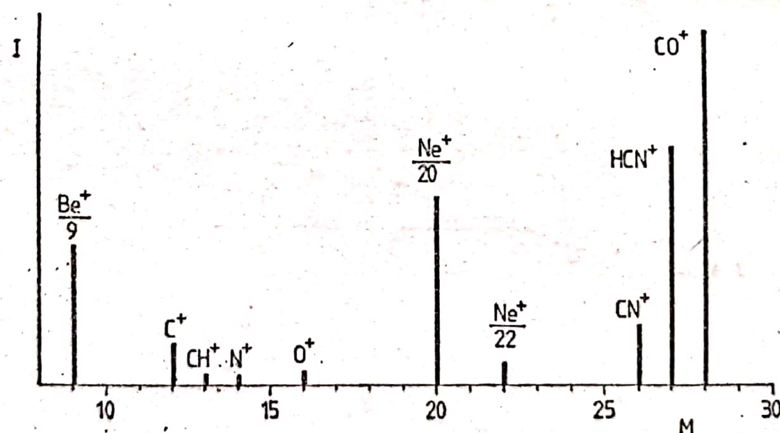
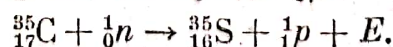


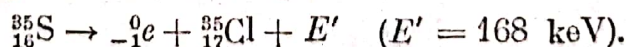
Fig. F.C.95

77°. a) Reacția dezintegrării izotopului $^{35}_{17}C$:



$$^{35}_{17}C + ^{1}_{0}n \rightarrow ^{35}_{16}S + ^{1}_{1}p + E.$$

Reacția dezintegrării radiosulfului:



$$^{35}_{16}S \rightarrow ^{0}_{-1}e + ^{35}_{17}Cl + E' \quad (E' = 168 \text{ keV}).$$

b) $m_{Cl} + m_n = 34{,}98007 + 1{,}00898 = 35{,}98905\ u,$

$$m_S + m_p = 34{,}98022 + 1{,}00759 = 35{,}98781\ u,$$

$$\Delta m = 0{,}00124\ u,$$

$$E = c^2 \cdot \Delta m = 1{,}155\ \text{MeV},$$

$E > 0$; deci, reacţia este exoenergetică.

c) Scriind legea dezintegrării radioactive sub forma:

$$\Delta N = -N_0 \lambda \cdot \Delta t,$$

unde N_0 este numărul iniţial de nuclee de radiosulf, se obţine

$$N_0 = -\frac{\Delta N}{\lambda \Delta t}.$$

Numărul de nuclee dezintegrate $(-\Delta N)$ se obţine din relaţia:

$$-\Delta N = \frac{Q}{E'}.$$

Numeric:

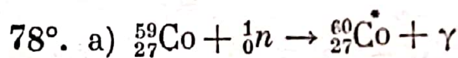
$$-\Delta N = \frac{20}{0{,}168 \cdot 10^6 \cdot 1{,}6 \cdot 10^{-19}} = 7{,}44 \cdot 10^{14}\ \text{dezintegrări}$$

$$N_0 = -\frac{\Delta N}{\lambda \Delta t} = -\frac{\Delta N \cdot T_{1/2}}{\ln 2 \cdot \Delta t}.$$

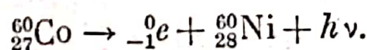
Numeric:

$$T_{1/2} = 87 \cdot 86\,400\ \text{s},$$

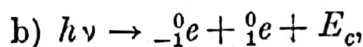
$$N_0 \simeq 8 \cdot 10^{21}\ \text{nuclee}.$$



78°. a) ${}^{59}_{27}Co + {}^{1}_{0}n \rightarrow {}^{60}_{27}\overset{*}{Co} + \gamma$



$${}^{60}_{27}Co \rightarrow {}_{-1}^{0}e + {}^{60}_{28}Ni + h\nu.$$



b) $h\nu \rightarrow {}_{-1}^{0}e + {}_{1}^{0}e + E_c,$

$$h\nu = 2m_0c^2 + m_0v^2,$$

$$v = \sqrt{\frac{h\nu}{m_0} - 2c^2}.$$

Numeric:

$$v = \sqrt{\frac{1{,}15 \cdot 10^6 \cdot 1{,}6 \cdot 10^{-19}}{9{,}1 \cdot 10^{-31}} - 2 \cdot 9 \cdot 10^{16}} = \sqrt{(20{,}2 - 18) \cdot 10^{16}} =$$

$$= \sqrt{2{,}2 \cdot 10^{16}} = 1{,}48 \cdot 10^8\ \text{m/s}.$$

c) $-\Delta N = N_0 \lambda \Delta t = \frac{N_0 \ln 2 \cdot \Delta t}{T_{1/2}} = \frac{10^{22} \cdot 0{,}693}{5{,}3 \cdot 365 \cdot 24} = = 1{,}49 \cdot 10^{17}$ nuclee.

Energia produsă într-o dezintegrare este:

$$E = 0{,}4 + 1{,}5 = 1{,}9\ \text{MeV} = 1{,}9 \cdot 1{,}6 \cdot 10^{-13} = 3{,}04 \cdot 10^{-13}\ \text{J},$$

$$Q = -\Delta N \cdot E.$$

Numeric:

$$Q = 1{,}49 \cdot 10^{17} \cdot 3{,}04 \cdot 10^{-13} = 4{,}53 \cdot 10^4\ \text{J}.$$

79°. a) $h\nu_1 - h\nu_0 = eU_{f1}$,

$$h\nu_2 - h\nu_0 = eU_{f2},$$

$$hc\left(\frac{1}{\lambda_1} - \frac{1}{\lambda_2}\right) = e(U_{f1} - U_{f2}),$$

$$h = e\,\frac{(U_{f1} - U_{f2})\,\lambda_1\lambda_2}{c(\lambda_2 - \lambda_1)}.$$

Numeric:

$$h = 6{,}62 \cdot 10^{-34}\ \text{J.s},$$

$$\nu_0 = \frac{h\nu_1 + eU_{f1}}{h} = \nu_1 + \frac{eU_{f1}}{h}$$

și

$$\lambda_0 = \frac{c}{\nu_0}.$$

Numeric:

$$\lambda_0 = 0{,}68\ \mu m.$$

b) Pentru λ_1 se obține:

$$E_c = h\nu_1 - h\nu_0 + eU = 2(h\nu_1 - h\nu_0) = 2eU_{f1},$$

$$U = U_{f1} = 0{,}709\ \text{V}.$$

Analog, pentru λ_2 rezultă

$$U = U_{f2} = 1{,}258\ \text{V}.$$

c) $\lambda = \dfrac{h}{p} = \dfrac{h}{m_0 v} = \dfrac{h}{\sqrt{2m_0E_c}} = \dfrac{h}{\sqrt{4m_0eU_{f1}}}$.

Numeric:

$$\lambda = \frac{6{,}62 \cdot 10^{-34}}{\sqrt{4 \cdot 9{,}1 \cdot 10^{-31} \cdot 1{,}6 \cdot 10^{-19} \cdot 0{,}709}} = 10{,}302\ \text{Å}.$$

80°. Legea conservării impulsului are forma:

$$mv = mv' + MV'.$$

Fiind ciocnire neelastică, conservarea energiei se scrie astfel:

$$\frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}mv'^2 + \frac{1}{2}MV'^2 + \Delta E.$$

Eliminînd pe V' între ecuațiile de mai sus, rezultă ecuația de gradul doi în v':

$$(m + M)v'^2 - 2mvv' - v^2(M - m) + \frac{2M \cdot \Delta E}{m} = 0.$$

Din condiția ca discriminantul acestei ecuații să fie pozitiv sau nul

$$v^2 \geqslant 2 \cdot \Delta E\,\frac{M + m}{Mm},$$

rezultă

$$v \geqslant \sqrt{\frac{2 \cdot \Delta E}{m}\left(1 + \frac{m}{M}\right)},$$

în concordanță cu condiția limitativă:

$$\frac{1}{2}\mu v^2 > \Delta E,$$

unde $\mu = \dfrac{mM}{m + M}$ este masa redusă e sistemului electron-atom.

CHIMIE

A. BREVIAR

Manualele de chimie după care se studiază în clasele IX—XII stau la baza programei pentru admitere în facultate și conțin noțiuni de bază din domeniul chimiei anorganice, chimiei organice, chimiei fizice, precum și unele noțiuni de tehnologie chimică.

Problematica este complexă, materialul este prezentat într-o succesiune care ține seama și se bazează pe noțiunile de chimie care au fost predate în clasele a VII-a și a VIII-a, a căror cunoaștere este indispensabilă în înțelegerea noilor cunoștințe.

Examenul de admitere în învățămîntul superior are ca scop selectarea celor mai buni candidați și, prin probele care se dau, testează nivelul de cunoștințe și modul de gîndire, capacitatea de a opera cu noțiunile însușite.

De aceea, atragem atenția ca, în perioada de pregătire, de recapitulare, să se acorde o atenție deosebită următoarelor probleme:

1. modul de a învăța, acesta fiind determinant în pregătirea profesională;
2. conținutul programei de admitere;
3. necesitatea corelării cunoștințelor, a fenomenelor.

Luînd în considerație aceste trei puncte, vom insista în continuare asupra principalelor aspecte, făcînd totodată și unele aprecieri generale asupra unor tipuri de subiecte, de probleme și asupra rezolvării lor.

1. MODUL DE ÎNVĂȚARE

Această problemă prezintă o importanță deosebită și subliniem în primul rînd necesitatea însușirii raționale și integrale a materialului prevăzut în programă.

Termenul de învățare rațională este folosit în sensul înțelegerii cunoștințelor predate și reținerii noțiunilor tratate în manuale și nu a memorizării lor automate.

Pentru elementele chimice, substanțele anorganice sau organice, pentru interacțiile care pot avea loc între diferiți compuși în anumite condiții, cînd se pot produce reacții chimice, ș.a., se folosesc anumite denumiri și modalități de reprezentare grafică, abstracții convenționale la nivel internațional, cu care operăm în mod curent în domeniul chimiei.

Încă de la începutul studiului chimiei, elevul își însușește o serie de noțiuni, pe parcursul anilor acestea se înmulțesc, unele se completează, altele se amplifică, iar pentru redarea acestora este folosit un limbaj specific chimiei, în cadrul căruia înglobăm și *nomenclatura chimică*, problemă de mare importanță și complexitate, asupra căreia atragem în mod special atenția. În sens restrîns prin *nomenclatura chimică* înțelegem denumirile care se dau substanțelor anorganice sau organice.

Cu cît chimia s-a dezvoltat ca știință, s-a impus necesitatea unor sistematizări pe această linie, a stabilirii unor reguli, a realizării unei concordanțe între structura și formula chimică a unui compus, pe de o parte, și între structura reprezentată prin

formula chimică şi denumirea care se atribuie compusului — *denumire raţională* —, pe de altă parte.

Menţionăm că pentru unele substanţe, alături de denumirile raţionale, se utilizează şi în prezent denumiri uzuale (comune, empirice, triviale) care le-au fost atribuite iniţial, fără ca acestea să aibă vreo legătură cu structura compusului respectiv.

În această succintă prezentare nu ne propunem să tratăm sau să exemplificăm unele probleme de nomenclatură chimică, ci atenţionăm candidaţii la admitere în învăţămîntul superior, asupra importanţei cunoaşterii ei (atît a celei raţionale, cît şi a celei uzuale) deoarece fiecărei *specii moleculare* i se atribuie o formulă chimică şi o denumire proprie.

Recomandăm ca în cursul învăţării să se dea atenţie însuşirii corecte a nomenclaturii, a unor reguli generale care au fost indicate în manuale, în special în clasa a X-a, respectiv la chimie organică. Pe baza cunoaşterii acestor reguli, dîndu-se o formulă de structură oarecare, se poate solicita aplicarea regulilor şi deci deduce denumirea raţională a compusului corespunzător, sau, dîndu-se denumirea, se poate cere atribuirea formulei de structură, denumirea sugerînd în mod firesc şi unele aspecte ale proprietăţilor.

Se impune, în mod special, acordarea unei atenţii deosebite concordanţei dintre formă şi fond, simbolistica utilizată în chimie, la care ne-am referit, reprezentînd pe de o parte modalităţi de a reprezenta realităţi obiective, „materia" (proprietăţile şi posibilităţile de transformare a acesteia), iar pe de altă parte, prin această simbolistică specifică „Chimiei", candidatul evidenţiază în tratarea subiectelor la examene, bagajul de cunoştinţe acumulat şi nivelul de înţelegere a fenomenelor chimice studiate.

Problema formei de redare a cunoştinţelor de chimie la examenul scris nu elimină modul clar de exprimare, de scriere corectă şi descifrabilă (uneori greşeli de redare grafică afectează fondul), de înlănţuire logică a ideilor în tratarea unui subiect teoretic, de ordonare a ecuaţiilor chimice, a calculelor, a prezentării rezultatului, dacă ne referim la probleme cu calcule.

Subliniem, în mod special, atenţia ce trebuie acordată modului în care se operează cu abstracţiile în chimie (întreaga simbolistică utilizată) pentru a reda aspecte calitative, cantitative sau exprimări matematice ale unor regularităţi.

Un aspect deosebit de important în procesul de învăţare a chimiei îl constituie însuşirea corectă a noţiunilor şi reflectarea gradului de cunoaştere prin modul de prezentare a cunoştinţelor dobîndite.

După parcurgerea întregului material prezentat în manuale, subliniem necesitatea de a reflecta (utilizînd toate cunoştinţele acumulate) asupra semnificaţiei simbolurilor elementelor, a formulelor moleculare, a ecuaţiilor chimice, a relaţiilor matematice pe baza cărora, pentru o anumită transformare chimică, se pot calcula o serie de mărimi caracteristice procesului respectiv.

Pentru fixarea cunoştinţelor, etapă importantă a procesului de învăţare, să se facă apel la lucrările practice (multe fiind realizate în laboratorul şcolii) sau la aspectele experimentale descrise în manual, rezultatul activităţii practice fiind punctul de plecare a generalizărilor teoretice.

Corelarea cunoştinţelor teoretice, cu aplicarea acestora la rezolvarea de probleme, să se facă după ce primele au fost însuşite temeinic. Rezolvarea automată a unor probleme, introducerea unor date numerice în relaţii matematice memorate (fără a li se fi înţeles semnificaţia), învăţarea mecanică de a rezolva tipuri de probleme, nu reprezintă decît o stocare de cunoştinţe pentru scurtă durată, consum de energie intelectuală fără randament, îndepărtarea de scopul deosebit de important — *de a învăţa cu plăcere* — şi a găsi satisfacţie în rezolvări corecte, prin manipularea bagajului de cunoştinţe teoretice acumulate şi aplicarea lor cu discernămînt în *n* cazuri, diferite de cele rezolvate anterior.

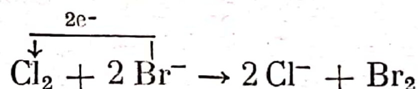
Învăţarea, bazată inevitabil în fiecare etapă pe cunoştinţele anterioare, şi recapitularea trebuie să conducă în mod firesc la corelarea noţiunilor, fapt care asigură posibilitatea tratării unor subiecte de sinteză, a rezolvării problemelor care fac apel la cunoştinţe din capitole diferite, din ani diferiţi de studiu.

Pentru a exemplifica acest aspect al corelării cunoştinţelor, ne vom referi în cele ce urmează la elementul clor, care a fost prezentat în linii generale în clasa a VIII-a, din punct de vedere al poziţiei în sistemul periodic al elementelor, apoi obţinerea, reactivitatea, prezentarea succintă a cîtorva combinaţii chimice ale clorului.

$Z = 17$		— hidracidul corespunzător (HCl); săruri ale acidului — cloruri — (NaCl); oxizi; acizi oxigenaţi; săruri ale unor acizi oxigenaţi ai clorului.
Cl	M 7	
	L 8	
$A = 35$	K 2	

În manualele din clasele a IX-a — XII-a se prezintă noi noţiuni, care definesc mai clar, cu explicaţii bazate pe experiment, conceptele de clor molecular (Cl_2), atomic ($Cl^{\bullet}$), ionic (Cl^- şi Cl^+).

a) Caracterul nemetalic al clorului, mai accentuat decît al bromului, este evidenţiat prin reacţia dintre clor molecular şi ioni de brom, reacţia putînd fi efectuată în laborator.

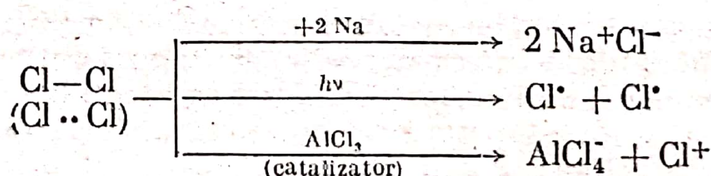


De la o proprietate dovedită experimental, se trece la generalizarea:

Caracterul nemetalic scade în grupă de sus în jos. (În grupa a VII-a iodul are deci caracterul nemetalic cel mai slab).

b) Modul de scindare a moleculei de clor (Cl_2; Cl—Cl) în funcţie de condiţiile de lucru, problemă abordată în diferite capitole ale manualelor, evidenţiază posibilitatea formării de legături ionice sau covalente polare între clor şi atomi ai altor elemente.

La această generalizare, bazată de asemenea pe date experimentale, se ajunge în mod firesc după parcurgerea tuturor manualelor, aceasta dînd candidatului la admitere capacitatea de a trata subiecte de sinteză.



În primul caz se formează ioni Cl^- şi, respectiv, clorura de sodiu (legătură ionică); *în al doilea caz* se formează atomi de clor care pot reacţiona, de exemplu, cu un substrat organic (CH_4 sau alte hidrocarburi) cu eliminare de acid clorhidric — se formează o legătură covalentă polară carbon-clor prin punerea în comun a cîte unui electron de către cei doi atomi, clor şi carbon; *în al treilea caz*, prin interacţia Cl_2 cu catalizatorul ($AlCl_3$) se formează în mediul de reacţie ionul Cl^+, care reacţionează cu substratul organic formîndu-se de asemenea o legătură covalentă carbon-clor, de data aceasta dubletul de electroni necesar legăturii covalente fiind furnizat de substratul hidrocarbonat (reacţia Friedel-Crafts).

Reacţia dintre clor şi sodiu este exemplificată în cîteva rînduri în manuale, subliniindu-se modul de formare a ionilor, reacţie cu transfer de electroni, capacitatea celor doi ioni (Cl^- şi Na^+) de a forma un compus ionic.

Reacția clorului atomic cu hidrocarburile alifatice sau aromatice cu catenă laterală — reacție de *substituție homolitică*, sau reacția ionului Cl^{+} cu hidrocarburile aromatice — *substituție heterolitică electrofilă* de asemenea sînt exemplificate în mai multe moduri; pot fi luate în considerație și reacțiile de adiție a clorului la legăturile multiple carbon-carbon, în anumite condiții de lucru, care condiționează mecanismul de reacție.

Speciile Cl_2; Cl^-; $Cl^{\bullet}$; Cl^+ se întîlnesc într-o serie de reacții principale sau secundare, vezi: electroliza NaCl, halogenarea directă a hidrocarburilor alifatice sau a celor aromatice, diferite procese redox.

c) Alte aspecte importante tratate în manuale și în care este implicat elementul clor se referă la explicarea complexității unor procese; sînt abordate unele reacții cu aplicații industriale (ca, de exemplu, reacția dintre clor și hidrogen utilizată pentru obținerea industrială a acidului clorhidric) prin prisma influenței condițiilor de lucru care determină mecanismul reacției, desfășurarea ei în timp (aspectele cinetice), probleme privind echilibrul chimic.

d) Clorul fiind o substanță gazoasă prezentă în multe procese chimice, reamintim necesitatea corelării cunoștințelor generale cu noțiunile însușite la studierea legilor gazelor, legea lui Avogadro, ecuația de stare a gazelor perfecte ș.a. în vederea completării ansamblului de cunoștințe și a rezolvării unor probleme.

Candidatul la examenul de admitere poate găsi foarte multe exemple asemănătoare cu cel la care ne-am referit. De asemenea, recomandăm să se dea o atenție mai mare în etapa de fixare a cunoștințelor, problemelor de complexitate mai mare, cu grad apreciabil de abstractizare, sau aspectelor aparent diferite, care formează totuși un tot unitar caracterizînd un anumit proces chimic, precum și legăturii dintre metodele de obținere, de sinteză și proprietățile chimice ale unor elemente, ale unor compuși.

Se impune totodată realizarea în scris, în timpul învățării, a unor sistematizări proprii, în care formulele chimice și relațiile matematice să fie scrise clar, aceste conspecte reprezentînd rezultatul unui studiu individual sistematic și totodată un ghid în recapitularea cunoștințelor de bază.

2. CONȚINUTUL PROGRAMEI DE ADMITERE

În cele ce urmează ne-am putea opri asupra unor probleme de conținut, cu scopul de a face unele recomandări, ținînd seama de ordinea în care sînt tratate acestea în clasele a IX-a — XII-a, sau s-ar putea face referiri pe domenii ale chimiei, respectiv chimie anorganică, chimie organică, chimie fizică. Deși această clasificare este utilă din punct de vedere didactic și, totodată, din punctul de vedere al însușirii generalizărilor pe baza studierii anterioare a compușilor anorganici și organici sub aspectul structurii lor, a obținerii, a proprietăților fizice și chimice condiționate de structură, vom urmări totuși din aproape în aproape tematica manualelor referindu-ne doar la unele probleme de conținut însoțite de recomandări.

a) CHIMIA PENTRU CLASA A IX-a

— *Capitolul 1. Structura învelișului electronic al atomului* prezintă o importanță deosebită. Este necesar să fie învățat cu multă atenție, cu sistemul periodic al elementelor în față, cu revederea cunoștințelor anterioare, în special la studiul noțiunii de valență și studiul proprietăților chimice.

Sugerăm să se revadă principalele substanțe chimice studiate anterior, formulele chimice ale acestora, semnificația lor în lumina noilor cunoștințe.

— *Capitolul 2. Proprietăți ale substanțelor solide, lichide și gazoase, determinate de tipul de legătură.* Capitolul conține noțiuni teoretice și explicații care fac posibilă înțelegerea celor mai importante proprietăți fizice și chimice ale unor substanțe în special anorganice. Se corelează problemele privind legăturile chimice cu starea de agregare și unele proprietăți caracteristice.

Subcapitolul 2.4. *Starea gazoasă* prezintă noțiuni care au fost tratate mai amplu la Fizică. Recomandăm revederea legilor gazelor, a legii lui Avogadro, ș.a., exprimate prin relațiile care sînt date în manual, și a căror semnificație este necesar să fie foarte clară, să fie înțeles sensul lor fizic.

Relațiile matematice, indicate în manual, sînt utilizate curent în rezolvarea unor probleme, în cazul în care se lucrează cu substanțe în stare gazoasă (reactanți sau produși de reacție anorganici sau organici), și dau posibilitatea să se calculeze volumul unui gaz în anumite condiții, presiunea, temperatura, volumul molar, densitatea, fracția molară, presiunea parțială a unui gaz din amestec, volumul total al unui amestec de gaze ș.a., mărimi a căror valoare prezintă importanță deosebită în practica chimică.

Recomandăm revederea noțiunilor cu foarte mult discernămînt, înțelegerea condiționării reciproce a parametrilor menționați, importanța lor cînd ne referim la anumite procese chimice în condiții bine determinate de laborator sau la nivel industrial.

— *Capitolul 3. Sisteme disperse* tratează probleme cu aspect de generalitate, care vizează interacții între substanțe de diverse tipuri insistîndu-se în special asupra soluțiilor, asupra fenomenului de dizolvare și a efectelor care se produc, corelate cu o proprietate fizică importantă a substanțelor chimice, *solubilitatea*, și factorii care o influențează.

Dizolvarea substanțelor în diferiți solvenți conduce la soluții care, în mod firesc, conțin o anumită cantitate de substanță dizolvată într-o anumită cantitate de solvent — spunem deci că are o concentrație bine determinată —, iar importanța acesteia în practica chimică este foarte mare.

Un număr mare de reacții chimice se produc cînd se lucrează cu substanțe în soluție, fie că reacțiile respective se realizează în scop analitic sau în scop sintetic.

De aceea, cunoașterea factorilor care influențează solubilitatea, proprietățile soluțiilor, obținerea unor soluții de anumite concentrații, precum și determinarea concentrației necunoscute a unor soluții, sînt probleme cu implicații directe în practica de laborator și industrială, a căror efectuare corectă se bazează pe cunoașterea problemelor teoretice și aplicarea acestora cu rigurozitate în practică.

Dintre problemele tratate în acest capitol, insistăm asupra subcapitolului 3.6. *Concentrația soluțiilor*, în care se subliniază posibilitatea de exprimare a concentrației soluțiilor, respectiv concentrație procentuală, concentrație molară sau molaritatea, concentrație normală (normalitatea sau concentrație valară).

Recomandăm ca după însușirea acestor cunoștințe să se compare între ele diferite moduri de exprimare a concentrației, pentru a rămîne cu o imagine clară referitoare la faptul că în toate cazurile o anumită masă de substanță luată în grame, dizolvată într-o anumită cantitate de solvent formează o anumită cantitate de soluție, a cărei concentrație poate fi exprimată fie în procente, fie în moli sau echivalenți la litru.

Din punct de vedere cantitativ între *solvit* și *solvat* există o anumită relație, iar această relație poate fi exprimată în diferite moduri, după cum se ia în considerație de exemplu: masa soluției exprimată în g (masă solvit + masă solvent) și masa de substanță (solvitul) exprimată în g, existentă în 100 g de soluție; sau

pornind de la masa substanței dizolvate, se calculează numărul de moli care corespund acesteia, cantitatea de soluție în care se găsește numărul de moli la care ne-am referit fiind exprimată în litri ş.a.m.d.

Pentru fiecare caz în parte este necesar să se încerce deducerea formulelor utilizate pentru calculul concentrației, care se bazează, de altfel, pe regula de trei simplă, nefiind necesară memorarea lor.

Exprimarea concentrației pentru o anumită soluție în procente și trecerea de la aceasta la exprimarea în concentrație molară sau normală, și invers, se cere frecvent în unele probleme; de asemenea, utilizarea unor soluții de concentrații diferite pentru obținerea unei soluții de o concentrație intermediară se utilizează adesea în practica de laborator; acestea sînt probleme cu care se confruntă în mod obișnuit candidații la examene.

— *Capitolele 4, 5 și 6* abordează succint unele probleme generale ale reacțiilor chimice exemplificate la transformările chimice pe care le suferă unele substanțe chimice anorganice studiate anterior, insistînd asupra efectelor termice, asupra echilibrului chimic și a factorilor care îl influențează, asupra desfășurării reacțiilor chimice în timp și a factorilor care influențează viteza de reacție. Se insistă de asemenea asupra acizilor și bazelor, asupra proceselor redox, asupra mecanismului și legilor electrolizei.

Problematica abordată permite rezolvarea unor probleme care implică calcule stoechiometrice, respectiv calcularea randamentului (η) unor reacții exprimat procentual, calculul gradului de ionizare (α), calculul, de exemplu, al masei compușilor obținuți în baia de electroliză, al intensității curentului folosit, al volumului soluției inițiale supusă electrolizei ş.a., pe baza legilor electrolizei.

Menționăm că rezolvarea unor astfel de probleme *nu este posibilă fără cunoașterea fenomenelor chimice* care stau la bază și a celorlalte cunoștințe acumulate (concentrația soluțiilor, legile gazelor etc.).

Recomandăm să se revadă cu atenție experiențele de laborator, acestea constituind argumentarea directă care condiționează înțelegerea și reținerea cunoștințelor.

Unele probleme tratate succint sau enunțate în manualul pentru clasa a IX-a sînt redate mai amplu în manualul pentru clasa a XI-a.

b) CHIMIA PENTRU CLASA A X-a

Manualul prezintă cele mai importante probleme ale chimiei organice, dînd o imagine de ansamblu asupra acestui domeniu important al chimiei. Compușii organici naturali au o răspîndire universală în organismele vii, joacă un rol important în procesele vieții și ca materii prime, iar compușii organici de sinteză, care nu își au corespondent în natură, realizați în laboratoare într-un număr impresionant și mulți dintre ei la nivel industrial, își găsesc cele mai diverse aplicații.

Capitolul I. Introducere în chimia organică conține noțiuni generale a căror însușire stă la baza înțelegerii raționale a problemelor care se tratează în continuare.

Vom insista puțin asupra noțiunilor de *formulă brută*, *formulă moleculară*, *formulă de structură* care prezintă o importanță deosebită ca instrumente de lucru; toate redau caracteristici ale unei specii moleculare organice *pure*, dar fiecare evidențiază anumite particularități ale unei substanțe, formulele de structură fiind mult mai bogate în conținutul lor informativ.

Rezultatele analizei chimice, stabilirea masei moleculare, determinarea unor proprietăţi fizice şi chimice dau posibilitatea stabilirii formulelor menţionate, pentru o substanţă organică oarecare.

Analiza chimică calitativă şi cantitativă conduce la stabilirea *formulei brute*, care indică felul atomilor şi raportul în care se găsesc aceştia în masa substanţei.

Masa moleculară şi rezultatele anterioare dau posibilitatea stabilirii *formulei moleculare*, care redă felul şi numărul atomilor ce constituie molecula.

Proprietăţile fizice şi chimice dau o imagine asupra modului în care sînt legaţi atomii în moleculă, tipurile de legături chimice covalente existente, deci succesiunea atomilor, modul de legare între ei şi, eventual, influenţele reciproce care se pot stabili între atomii legaţi sau nelegaţi direct; toate acestea conduc la formula de structură.

Cunoştinţele privind hibridizarea atomului de carbon (clasa a IX-a) aplicate în cazul compuşilor organici cu legături simple şi multiple, completează aspecte importante ale structurii, dacă se face legătura între tipul de hibridizare şi efectul steric al acesteia, cu alte cuvinte orientarea în spaţiu bine determinată a legăturilor covalente, a atomilor care formează o anumită moleculă.

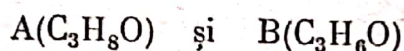
Studiul chimiei organice porneşte inevitabil de la concepţia argumentată experimental, că moleculele compuşilor organici au o structură bine determinată, care poate fi stabilită şi pe care o putem reprezenta sub aspectele ei cele mai generale prin formulele de structură.

Elevul, candidatul la admitere în învăţămîntul superior, trebuie să aibă permanent în minte imaginea cît mai apropiată de realitate a abstracţiilor pe care le utilizează.

Este o realitate faptul că moleculele compuşilor organici au o structură spaţială, dar nu întotdeauna folosim formulele corespunzătoare pentru a sugera particularităţile sterice, pe care le subînţelegem în mod convenţional şi atunci cînd lucrăm în mod curent cu formule plane sau formule restrînse.

Chimia organică nu reprezintă doar o multitudine de formule (fiecare corespunzînd unui compus chimic), pe care mulţi se străduiesc să le reproducă, şi o multitudine de metode de sinteză şi de proprietăţi atribuite acestor compuşi, pe care se străduiesc să le memorizeze.

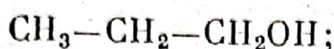
Pentru a exemplifica posibilitatea de a interpreta corect unele date, de a trece pe baza noţiunilor fundamentale însuşite corect la abordarea unor probleme care nu au fost tratate în manual, dar cărora, pe baza cunoştinţelor generale, a corelării lor, li se poate da un răspuns corect, vom lua în consideraţie două formule moleculare:

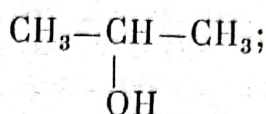

$$A(C_3H_8O) \quad \text{şi} \quad B(C_3H_6O)$$

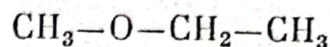
Mai mulţi compuşi organici pot avea aceeaşi formulă moleculară, deosebirea între ei datorîndu-se modului diferit de legare şi de orientare spaţială a atomilor care formează molecula. Pornind de la valenţa elementelor formatoare, din formula moleculară A se poate deduce faptul că toţi atomii de carbon prezintă hibridizare sp^3, deci în molecula fiecărui izomer posibil vor exista numai legături covalente simple. Formula moleculară B evidenţiază posibilitatea prezenţei atomilor de carbon cu hibridizare sp^2, în moleculă poate exista o legătură dublă sau, ca şi în primul caz, cei trei atomi de carbon pot prezenta hibridizare sp^3, dar modul de legare al acestora este diferit, respectiv pot forma un ciclu.

De la caz la caz, pot fi folosite formule de structură restrînse, plane sau tridimensionale (în funcţie de solicitarea examinatorului).

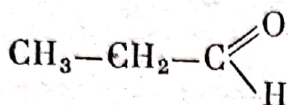
A (C_3H_8O)

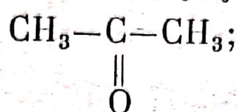

1

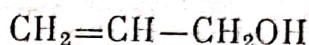

2

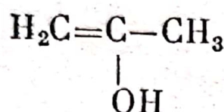

3

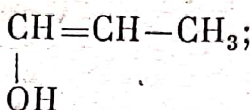
B (C_3H_6O)

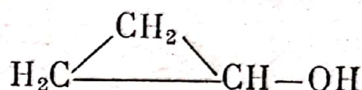

1

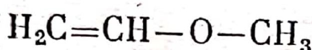

2

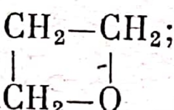

3

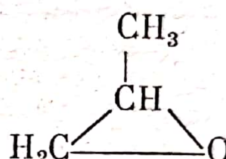

4


5


6

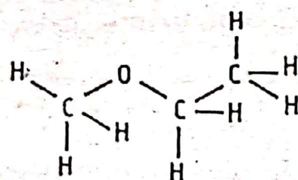

7

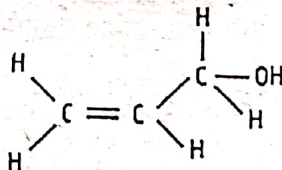

8

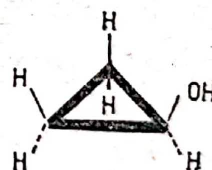

9

Menţionăm că nu toate aceste posibilităţi de legare a atomilor conduc la structuri stabile (ex. B_4, B_5 ş.a). De aceea pentru unele substanţe nu se cunosc toţi izomerii teoretic posibili.

Dacă pentru unii dintre izomerii substanţei A sau B s-ar cere să se indice orientarea atomilor în spaţiu, de exemplu pentru: A_3; B_3; B_6, pe baza cunoştinţelor generale se pot reprezenta cu uşurinţă formulele de structură care evidenţiază unele particularităţi sterice.


A_3


B_3


B_6

Considerăm că trecerea de la formula de structură plană la cea tridimensională este foarte simplă. Un asemenea subiect dat la examen ar fi considerat de unii candidaţi ca nefiind în programă. Este o concepţie complet greşită şi în mod intenţionat am dat acest exemplu, pentru a sugera şi a recomanda ca pe parcursul studiului să nu se treacă mai departe dacă nu s-au înţeles cunoştinţele în înlănţuirea lor logică firească.

Cu exemplul dat am abordat şi problema izomeriei, care reprezintă cheia înţelegerii diversităţii compuşilor organici şi a relaţiilor dintre structură şi proprietăţi.

Dacă am lua în consideraţie din exemplul dat anterior doar compuşii A_1 şi A_2 care sînt izomeri de poziţie şi compuşii B_1 şi B_2 care sînt izomeri de funcţiune şi am solicita candidatului să aducă pe baza proprietăţilor chimice argumente pentru

formulele de structură ale izomerilor menționați, să indice metode de sinteză, modul în care ar putea reacționa aceștia cu anumiți compuși indicați, tipul de reacții pe care le pot da, mecanismul acestora ș.a. — de asemenea ar fi o problemă simplă pentru cel care a parcurs toată chimia organică; unele probleme sînt tratate în manual, unele răspunsuri ar trebui deduse. Răspunsul nu ar fi nimic altceva decît evidențierea modului de gîndire, de utilizare corectă a cunoștințelor însușite.

Manualul tratează hidrocarburile, apoi principalele clase de compuși organici cu funcțiuni simple — compuși halogenați, hidroxilici, amine, compuși carbonilici, compuși carboxilici, precum și derivații funcționali ai acizilor carboxilici. Toate subcapitolele prezintă importante probleme privind reprezentanții de bază ai acestor clase, posibilități de sinteză, proprietăți fizice și chimice, precum și exerciții și probleme; unele probleme, în mod firesc, necesită și utilizarea cunoștințelor dobîndite în clasa a IX-a.

Însușirea temeinică a cunoștințelor de chimie organică necesită încă de la început, și aceasta este valabil pentru fiecare capitol, în etapa de descifrare a cunoștințelor, scrierea corectă și cît mai detaliată a formulelor chimice, pentru a înțelege bine care sînt legăturile chimice implicate în transformarea unui compus (a unui substrat), cum se formează noile legături care condiționează structura produsului de reacție.

În capitolele 5 și 6 sînt prezentate succint unele clase de compuși naturali — amino-acizi, proteine, zaharide —, precum și compuși macromoleculari.

Studiul acestor clase de substanțe evidențiază aplicarea cunoștințelor generale privind reactivitatea specifică a diverselor grupe funcționale, în cazurile tratate, reactivitatea grupelor — amino, carboxil, amidă, carbonil (aldehidic sau cetonic), alcool, eter — și, în mod deosebit, evidențiază interacțiile reciproce intramoleculare (caracterul de amfion al amino-acizilor, formele ciclice ale monozaharidelor ș.a.), care prezintă o importanță deosebită în înțelegerea particularităților acestor compuși, precum și unele interacții intermoleculare (la celuloză, proteine etc.).

Complexitatea mai mare a formulelor de structură, corespunzătoare compușilor naturali, a celor macromoleculari (naturali sau de sinteză), poate fi depășită și formulele pot fi reținute corect, cu ușurință, dacă așa cum am subliniat, se ține seama permanent de principiile de bază.

O vedere de ansamblu asupra noțiunilor cuprinse în manualul de clasa a X-a face posibilă înțelegerea relațiilor dintre diferite clase de compuși organici, rolul proprietăților chimice în sinteza organică, pe care se bazează de fapt industrializarea unor produse chimice, pentru care baza de materii prime este accesibilă.

c) CHIMIA PENTRU CLASA A XI-a

În manual sînt prezentate procesele redox cu implicații în diverse domenii ale chimiei, noțiuni de electrochimie, noțiuni privind energia chimică și energia termică, reacțiile chimice ca procese ce se petrec în timp, echilibrul chimic.

Recomandăm efectuarea sau revederea tuturor experiențelor indicate în manual pentru înțelegerea acestor aspecte, dintre care unele au fost doar enunțate sau prezentate succint în clasa a IX-a.

O serie de reacții chimice ale compușilor anorganici sau organici sînt reluate și abordate din alte puncte de vedere, care vin să completeze noțiunile de bază asimilate pînă în clasa a XI-a, referitoare la procesele chimice, și să evidențieze complexitatea acestora.

În toate capitolele, tratarea pornește de la un anumit fenomen chimic ales astfel încît, prin desfășurarea lui, să se pună în evidență în mod direct diversele aspecte care caracterizează și condiționează fenomenul, ca de exemplu: *potențialul de oxido-reducere*, care determină sensul unor reacții chimice; *entalpia de reacție*, pe baza căreia se pot determina căldurile absorbite sau degajate în cursul reacțiilor;

entalpia liberă de reacţie, care determină sensul de evoluţie spontană a sistemelor chimice; *energia de activare*, pe baza căreia se pot stabili condiţiile de lucru în care procesul să se desfăşoare în condiţii optime etc.

În manual sînt abordate o serie de probleme care vizează procese ca, de exemplu, electroliza, legile şi aplicaţiile ei, unele procese chimice practicate la nivel industrial, care sînt condiţionate în desfăşurarea lor de unii parametri ce influenţează viteza de reacţie, starea de echilibru şi deplasarea acestuia în sensul dorit. De asemenea, sînt prezentate noţiunile de bază referitoare la mecanismele de reacţie, importanţa cunoaşterii acestora în diferite condiţii de lucru pentru dirijarea procesului în condiţii de maximă eficienţă, rolul şi importanţa catalizatorilor, precum şi mecanismul de acţiune al acestora.

După parcurgerea întregului material prezentat în clasa a XI-a elevul se confruntă cu necesitatea de a face o legătură între noţiunile însuşite, care reprezintă un tot unitar în caracterizarea unui proces chimic oarecare. În egală măsură trebuie să înveţe astfel, încît să capete deprinderea de a calcula pe baza relaţiilor matematice însuşite (şi al căror sens fizic a fost înţeles), valori numerice ale unor mărimi caracteristice sistemelor studiate.

Din rezultatele obţinute de candidaţi la concursurile de admitere desfăşurate pe parcursul anilor, se desprinde un aspect general şi anume, lipsa capacităţii multora de a aprecia orientativ ordinul de mărime al rezultatului numeric obţinut — raportat la valorile iniţiale utilizate, fapt care denotă un mod de aplicare mecanică a relaţiilor şi formulelor învăţate.

d) CHIMIA PENTRU CLASA A XII-a

În capitolul 1 — *Structura compuşilor organici* —, este abordată noţiunea de structură, punîndu-se accent pe aspectele electronice şi sterice. Efectele inductiv şi electromer dau posibilitatea înţelegerii reactivităţii compuşilor organici şi a mecanismelor de reacţie într-o mai mare măsură. Izomeria geometrică şi izomeria optică, ca tipuri de izomerie sterică, evidenţiază alte aspecte, de mai mare fineţe pe care le ridică structura unor compuşi organici. Este recomandabil ca pentru înţelegerea noţiunilor date să se utilizeze cu atenţie modelele moleculare, pentru a sesiza corect diferenţele structurale dintre izomerii *cis* şi *trans*, dintre *enantiomeri*, *diastereoizomeri* şi *mezoforme*. Studiul capitolului menţionat necesită multă atenţie şi revederea unor noţiuni ca, de exemplu, diferenţa de electronegativitate, caracteristicile legăturilor multiple, corelarea tipului de hibridizare a atomilor de carbon (în special) cu structura spaţială a compuşilor respectivi, ş.a.

În capitolul 2. *Reactivitatea compuşilor organici*, pornind de la posibilităţile de scindare a legăturilor chimice întîlnite în compuşii organici, problemă care necesită corelarea cu sensul deplasării norului electronilor de valenţă sub influenţa efectelor inductiv, electromer şi sub influenţa factorilor externi, se exemplifică reactivitatea compuşilor organici prin tipurile de reacţii de: *substituţie*, *adiţie*, *eliminare* şi *reacţii care decurg cu transpoziţie*. Pentru fiecare se evidenţiază posibilitatea ca din punct de vedere al mecanismului electronic, condiţionat de modul de scindare a legăturilor chimice, să se deosebească *reacţii heterolitice — nucleofile sau electrofile* — şi *homolitice (radicalice)*. O serie de reacţii chimice studiate în clasa a X-a pot fi revăzute prin prisma noilor noţiuni, fapt care, de altfel, este amplu evidenţiat în capitolul 5, în care sînt tratate unele reacţii chimice ale compuşilor organici, cu aplicaţii tehnologice.

În manualul pentru clasa a XII-a se completează şi se aprofundează noţiunile de chimie organică din clasa a X-a şi, totodată, se dă şi o imagine succintă asupra problemelor complexe pe care le ridică transpunerea unor procese chimice la nivel industrial. Acestea pot fi înţelese într-un alt mod după însuşirea cunoştinţelor din clasa a XI-a, care dau o imagine mai clară asupra complexităţii proceselor chimice.

Calculul conversiei utile, al conversiei totale, al randamentului, ş.a. se bazează pe folosirea unor noţiuni anterioare; este bine să se deducă relaţiile indicate pentru calcul şi să se gîndească asupra semnificaţiei lor.

Tratarea capitolului *scheme de chimizare* a unor materii prime sugerează multiple posibilităţi de transformare chimică, importante din punct de vedere industrial, şi recomandăm ca pentru toate căile de chimizare indicate, acolo unde este posibil (ţinînd seama de cunoştinţele existente în manual), să se folosească (sub formă de exerciţii individuale) formule chimice, ecuaţii chimice.

În afara celor menţionate, recomandăm rezolvarea cu atenţie a tuturor întrebărilor, exerciţiilor şi problemelor existente în manuale, indiferent dacă acestea sînt incluse în textul general al lecţiilor sau la sfîrşitul capitolelor.

Confruntarea programei pentru admitere cu manualul, nu trebuie să se facă mecanic, deoarece cunoştinţele se condiţionează reciproc, iar acolo unde este cazul, trebuie să se revadă unele chestiuni din capitolele existente în manuale, dar care nu sînt prevăzute în programă, dacă acele noţiuni pot fi utile înţelegerii sau aprofundării unor cunoştinţe inserate în alte capitole (desigur, aprecierea rămîne la latitudinea candidatului, care trebuie să fie conştient de nivelul pregătirii sale).

3. NECESITATEA CORELĂRII CUNOŞTINŢELOR, A FENOMENELOR

Acest aspect a fost abordat anterior în mod tangenţial, dar în cele ce urmează ne vom referi, în special, la unele tipuri de subiecte, dintre acestea marea lor majoritate necesitînd pentru o tratare corectă şi completă corelarea cunoştinţelor şi înţelegerea fenomenelor chimice, sub multiplele lor aspecte.

Programa de admitere permite formularea unui mare număr de subiecte pentru diversele profile cărora se adresează, acestea putînd fi structurate astfel încît să se verifice cunoştinţele dobîndite, gradul în care au fost înţelese şi reţinute.

De obicei, fiecare probă reprezintă de fapt un set de subiecte (conţine mai multe puncte), iar pentru acestea menţionăm următoarele posibilităţi.

a) Subiectul poate fi formulat astfel încît, să corespundă unui titlu care are o anumită pondere în manual. În acest caz tratarea subiectului necesită uneori redarea în scris a noţiunilor tratate la titlul sau subtitlul din manualul respectiv, sau necesită unele completări, noţiuni ce fac parte din acelaşi subiect fiind tratate într-un alt manual care a fost studiat în timpul liceului.

b) Subiectul poate avea o formulare care ea însăşi evidenţiază faptul că este un subiect de sinteză (bineînţeles formularea nu corespunde vreunui titlu din manuale), ca de exemplu: „*Reacţii de adiţie ale compuşilor organici*", „*Reacţii de reducere ale compuşilor organici*", „*Tipuri de legături chimice şi posibilităţi de scindare a acestora în procesele chimice*", „*Reacţii mai importante ale unor compuşi anorganici care stau la baza proceselor industriale cunoscute*" etc., se poate formula un număr foarte mare de subiecte de sinteză.

Subiectele de sinteză pot fi de o complexitate mai mare sau mai mică, tratarea lor necesitînd o bună sistematizare, ordine de prezentare şi, bineînţeles, să cuprindă toate problemele care au fost studiate şi fac parte din subiect, indiferent dacă acestea au fost prezentate într-un anumit an de studiu sau în ani diferiţi. Cele menţionate subliniază clar necesitatea corelării cunoştinţelor.

c) Subiectul poate fi un exerciţiu care are ca scop, de exemplu, testarea cunoştinţelor în domeniul sintezei şi al proprietăţilor unor compuşi chimici, solicitînd candidatul să treacă de la o clasă de compuşi la alta, trebuind totodată să precizeze unele materii prime de la care se poate porni pentru a se obţine anumiţi compuşi care sînt indicaţi, să precizeze care sînt produşii de reacţie dacă se porneşte de la anumiţi reactanţi. Desigur, exemplele care se cer au fost studiate, fac parte

din programă, dar o astfel de formulare testează capacitatea candidatului de a utiliza cunoştinţele.

d) Subiectul poate fi formulat tip schemă de reacţii, mai simplă sau mai complexă, în care se indică produsul iniţial care, în anumite condiţii de lucru (acestea fiind precizate), conduce în urma transformărilor chimice suferite la un număr mai mare sau mai mic de compuşi chimici a căror structură trebuie să fie dedusă de la etapă la etapă. Schema poate indica structura unor compuşi, care se obţin în diferite etape, şi solicită stabilirea structurii compusului iniţial, a unor compuşi intermediari ş.a. Uneori se pot indica pentru unii compuşi formulele moleculare, în alte cazuri indicîndu-se formula de structură a compuşilor care se obţin, se cere să se precizeze reactivii necesari etc. Astfel de scheme de reacţii pot fi de o mare diversitate.

e) Subiectul poate fi formulat tip problemă, care necesită calcule numerice. Problemele, ca şi celelalte tipuri de subiecte menţionate, pot fi diferite, cu grad de complexitate variabil, de obicei gradul de complexitate al subiectelor de celălalt tip (denumite teoretice) şi al problemelor se echilibrează în proba dată la examen astfel încît prin setul de subiecte dat să se poată trece prin programa tuturor anilor de studiu. Rezolvarea problemelor cu calcule numerice, în funcţie de conţinutul enunţului, poate solicita candidatul în mod diferenţiat. În marea majoritate a cazurilor (cu excepţia, în special, a problemelor de la subcapitolul *Soluţii)*, pentru a fi corect rezolvate, trebuie să fie cunoscută reacţia, sau reacţiile chimice, la care se referă enunţul.

Problemele cu un grad relativ mai mare de dificultate necesită o foarte bună corelare a cunoştinţelor teoretice, o cunoaştere a relaţiilor matematice necesare calculării valorii unor mărimi solicitate de problemă, o prezentare logică a etapelor rezolvării.

Mărimile care se cer a fi determinate, începînd eventual de la numărul particulelor existente în nucleele unor elemente, pentru care se indică Z şi A şi pînă la determinarea cantităţilor unor compuşi formaţi în urma unei reacţii (sau dintr-un amestec dat), în condiţii bine determinate, utilizînd o metodă indicată sau alegînd o cale pe baza cunoştinţelor acumulate, sînt cele care au fost indicate în manuale. Acestea se pot condiţiona, se pot corela în diferite moduri şi utiliza în cadrul unor probleme în cele mai variate feluri testînd prin ele cunoştinţe din toate capitolele.

Desigur, de la profil la profil, subiectele din setul probei de examen se asamblează în concordanţă cu programa şi cu cerinţele concursului de admitere.

Din cele menţionate apare clar faptul că elevul, viitorul candidat la examenul de admitere în învăţămîntul superior trebuie să ştie să înveţe, să cunoască toată materia prevăzută de programă, să fie capabil să utilizeze cunoştinţele, şi nu doar să le reproducă compartimentat, să poată reda clar prin scris ceea ce ştie pentru a se putea aprecia corect ceea ce ştie.

În încheierea acestui breviar dorim să atenţionăm cititorii asupra faptului că pentru mulţi tineri din ţara noastră şi din lumea întreagă, chimia nu este doar un oarecare obiect care se studiază în şcoală, care devine important atunci cînd reprezintă una dintre disciplinele obligatorii la examenul de admitere în facultate, ci este o cale de cunoaştere, de înţelegere „a vieţii", o cale de a concretiza condiţiile de trai cu trăsăturile lor specifice în anumite etape.

Calea care conduce la cele menţionate este de fapt o îmbinare de muncă sistematică şi dăruire. Cu cît un tînăr care înţelege bine de la început ceea ce oferă primele manuale de chimie şi reflectează la *definiţia chimiei* ca *„ştiinţă a materiei"*, materie fiind tot ceea ce ne înconjoară, şi realizează care sînt posibilităţile pe care le

oferă chimia de a descifra compoziţia materiei şi schimbările pe care le suferă aceasta, cu atît va căuta să cunoască mai mult.

Această dorinţă vie, stimulată şi orientată de profesori, îi conduce în final pe cei dotaţi, perseverenţi şi pasionaţi la cucerirea treaptă cu treaptă a unor binemeritate recunoaşteri a calităţii pregătirii lor profesionale în domeniul chimiei, în cadrul concursurilor, olimpiadelor, care se organizează în ţară la diferite nivele, inclusiv la olimpiadele internaţionale de chimie, în cadrul cărora reprezentanţii ţării noastre au obţinut de-a lungul anilor frumoase rezultate.

Deoarece prin subiectele care se dau la examenele de admitere ne ridicăm în cadrul unei programe doar pînă la un anumit nivel, am selectat şi introdus în această lucrare şi unele probleme date la olimpiade, la etapa naţională, pentru a atenţiona asupra multiplelor posibilităţi şi grade de dificultate ale unor probleme care nu depăşesc prin conţinutul lor actualele programe.

Pentru că viaţa este de fapt un concurs continuu cu nespus de multe faţete şi implicaţii, iar uneori nu ne cunoaştem suficient sau deloc concurenţii, pentru că este strict necesar să ştim ce ni se cere, la ce nivel sîntem, unde trebuie să ajungem, am selectat şi cîteva exemple de probleme care s-au dat în ultimii ani la olimpiadele internaţionale de chimie.

Parcurgerea rezolvărilor acestor probleme va evidenţia faptul că absolvenţii de liceu, participanţi la concursurile internaţionale orientaţi spre chimie, pasionaţii, probabil viitorii deschizători de noi drumuri în chimie au un nivel de pregătire ridicat. Aceste concursuri impun aprofundarea unor domenii moderne care nu sînt studiate în şcoală.

Modul de a pune problemele, legarea lor de viaţă, de aspecte concrete, atenţia care se dă biochimiei, apoi corelarea cunoştinţelor de chimie anorganică, organică, chimie-fizică, biochimie, sugerează necesitatea unui anumit mod de a învăţa, necesitatea realizării conexiunilor după cunoaşterea temeinică a problemelor de bază.

Într-o carte recentă se afirma: „*Toate ştiinţele se întrepătrund puternic cu chimia, ele depind de ea şi se bazează în mare măsură pe ea. Se poate considera că într-adevăr chimia reprezintă o parte din fiecare dintre ştiinţele naturii şi nimeni nu poate ajunge departe într-un domeniu dat fără cunoştinţe din domeniul chimiei*".

Să reflectăm asupra acestei realităţi şi singuri vom găsi multe argumente care vin în sprijinul studiului chimiei.

Afirmăm adesea, şi nu greşim, că *chimia este o ştiinţă experimentală*; dar aceasta nu exclude teoria, aspectele teoretice ale modificării compoziţiei chimice trebuie cunoscute, respectiv în ce condiţii au loc sau nu transformările chimice, de ce au loc, ce compus se va forma? Toate acestea sînt aspecte teoretice, iar teoria devine subiectul experimentului.

Dacă absolvenţii liceelor noastre sînt familiarizaţi cu unele probleme generale ale domeniilor chimiei — chimie anorganică, chimie organică, chimie analitică, chimie fizică —, care s-au dezvoltat în mod impresionant în ultimele decenii, aceasta şi datorită matematicii şi fizicii, să aruncăm totuşi, măcar un gînd fugar — pentru ceea ce există azi în vastul domeniu al acestei ştiinţe — *chimia* —, respectiv atîtea alte direcţii, ca întrepătrunderi ale domeniilor de bază, ale acestora cu alte ştiinţe, sau noi dezvoltări ca de exemplu: *biochimie*, *chimia polimerilor*, *chimie bioanorganică*, *chimie bioorganică*, *chimie-fizică organică*, *chimie farmaceutică*, *chimie clinică*, *chimie agricolă*, *chimia solului*, *geochimie*, *oceanochimie*, *cosmochimie*, *chimia mediului ambiant* şi enumerarea poate continua.

Cunoașterea compoziției materiei și a transformărilor ei, necesitățile societății umane, a condus inventivitatea omului mai departe și prin ingineria chimică, care oferă posibilitatea de a aplica realizări de laborator la nivel industrial prin proiectarea și exploatarea uzinelor chimice, chimia a intrat adînc în viața oamenilor, este strîns legată de toate aspectele ei.

Frumusețea acestei științe, „*chimia*", care poate fi înțeleasă cu mintea și care uimește prin ceea ce oferă, face posibilă înțelegerea unei lumi fascinante, a *atomilor*, *ionilor*, *moleculelor* care au o dinamică extraordinară și specifică.

Generații de pasionați s-au străduit de-a lungul deceniilor, în laboratoare create din ingeniozitate și pe baza unor noi date acumulate și metode de lucru inventate, să cunoască și să aprofundeze cunoașterea, să enunțe legile chimiei, să pătrundă cît mai adînc în complexitatea fenomenelor chimice pe care să le stăpînească, să le modeleze și să le pună cinstit în slujba omului.

Mai subliniem în acest context doar faptul că datoria fiecăruia este să înțeleagă că știe încă foarte puțin și că trebuie să lupte pentru a ști cît mai mult.

B. PROBLEME DATE LA CONCURSURILE DE ADMITERE ÎN ÎNVĂŢĂMÎNTUL SUPERIOR

ENUNŢURI
1984

1. ÎNVĂŢĂMÎNTUL TEHNIC ŞI UNIVERSITAR

α. PROFILURILE CHIMIE, BIOCHIMIE, CHIMIE FIZICĂ

I.1°. Indicaţi care dintre sărurile
Na_2S, K_2SO_4, $FeCl_3$, $AgBr$, $Al(NO_3)_3$, $NaCl$, KCN şi $CuSO_4$
hidrolizează în soluţie apoasă şi ce caracter acido-bazic are soluţia. În cazul KCN scrieţi expresia constantei de hidroliză.

2°. Se prepară 1,5 kg soluţie H_2SO_4 40% prin amestecarea unei soluţii de H_2SO_4 80% cu o soluţie de H_2SO_4 20%. Presupunînd că volumul nu variază la amestecare, se cere:

a) cantităţile de soluţie 80% şi, respectiv 20% (exprimate în g), ce trebuie amestecate;

b) volumul de hidrogen (măsurat în condiţii normale) ce se poate obţine teoretic prin reacţia soluţiei obţinute cu 0,52 kg zinc pur;

c) cantitatea de zinc (kg) care nu a reacţionat;

d) scrieţi ecuaţiile reacţiilor acidului sulfuric cu următoarele substanţe:


$CaCO_3$, Cu, $BaCl_2$

Mase atomice: H—1, O—16; S—32, Zn—65.

3°. Scrieţi reacţiile posibile cu acidul clorhidric şi, respectiv, clorul la următoarele hidrocarburi: a) propenă; b) acetilenă; c) benzen; d) toluen. Pentru toluen se vor scrie şi mecanismele de reacţie.

4°. Un monoester provenit de la un acid alifatic saturat şi un alcool alifatic saturat are compoziţia exprimată prin raportul de masă: C:H:O = 6:1:4. Se cere:

a) formula brută şi moleculară a esterului;

b) scrieţi toţi esterii izomeri posibili;

c) scrieţi mecanismul reacţiei de esterificare directă;

d) preparaţi unul din izomerii de la punctul b) folosind acetilena ca materie primă.

Mase atomice: C—12; H—1; O—16.

5°. Cum se prepară:

a) acid clorhidric din NaCl;

b) carbonat de sodiu (procedeul amoniacal);

c) propilamină din etanol;

d) ε—caprolactamă din fenol.

II.1°. Reacţiile de obţinere (fără mecanism şi tehnologie):

a) H_2SO_4 din pirită (FeS_2);

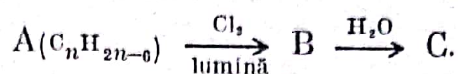
b) H_2 din reacţia fierului înroşit cu apa.

2°. Cîte grame de $CuSO_4 \cdot 5H_2O$ sînt necesare pentru a prepara 1 kg soluţie 10% de $CuSO_4$? Ce volum de apă este necesar pentru prepararea acestei cantităţi de soluţie? Densitatea apei se consideră 1 g/cm^3.

Mase atomice: Cu—64; S—32; O—16; H—1.

3°. Reacţia benzenului cu etena şi propena: produşi, mecanism de reacţie, importanţa compuşilor obţinuţi.

4°. Se dă succesiunea de reacţii:



$$A(C_nH_{2n-6}) \xrightarrow[\text{lumină}]{Cl_2} B \xrightarrow{H_2O} C.$$

Ştiind că s-a pornit de la 3,68 kg hidrocarbură A cu masa moleculară 92 şi s-au consumat 1,792 m^3 (condiţii normale) de clor, se cere:

a) formula moleculară şi de structură a compuşilor A şi B ştiind că tot clorul introdus se consumă şi reacţia decurge cantitativ;

b) cantitatea de compus B care rezultă (moli şi g);

c) cantitatea (moli şi g) de compus C care se formează, ştiind că hidroliza decurge cu randament de 75%;

d) scrieţi 3 reacţii ale compusului C.

Mase atomice: H—1; C—12; O—16; Cl—35,5.

III.1°. Scrieţi ecuaţiile reacţiilor care stau la baza obţinerii:

a) $Ca(OH)_2$ din $CaCO_3$; b) Cl_2 din NaCl.

2°. 4 l soluţie H_2SO_4 de concentraţie 63% cu densitatea $\rho_1 = 1,53$ g/cm^3 se amestecă cu 6 l soluţie H_2SO_4 de concentraţie 2 M cu densitatea $\rho_2 = 1,14$ g/cm^3. Se cere concentraţia procentuală şi molară a soluţiei rezultate. (Se consideră că amestecarea celor două soluţii are loc fără variaţie de volum.)

Mase atomice: H—1; O—16; S—32.

3°. Esterii acizilor organici: preparare. Reprezentanţi: acetatul de vinil, terom (polietilentereftalat) — obţinere.

4°. Un alcan A conţine 17,24% hidrogen (procente de masă); prin dehidrogenare se obţine hidrocarbura B a cărei compoziţie este exprimată prin raportul de masă carbon/hidrogen = 6/1.

Se cere:

a) formulele celor două hidrocarburi;

b) scrieţi toţi izomerii hidrocarburilor A şi B;

c) scrieţi reacţia de adiţie a apei la toţi izomerii hidrocarburii B;

d) calculaţi cantitatea (kmoli, kg) de produs B care se obţine cu randament 80% din 14 m^3 (condiţii normale) de alcan A.

β. PROFILUL MECANO-CHIMIC

IV.1°. Care din următoarele reacţii sînt posibile şi care nu? Pentru reacţiile posibile discutaţi condiţiile în care se produc şi stabiliţi coeficienţii:

a) $NaCl + H_2CO_3 \rightarrow$

b) $K_2Cr_2O_7 + H_2SO_4 + KI \rightarrow$

c) $MgCO_3 + H_2SO_4 \rightarrow$

d) $AgCl + HNO_3 \rightarrow$

e) $KMnO_4 + HCl \rightarrow$

2°. Tratînd cu apă un amestec de oxid de calciu şi carbură de calciu (CaC_2) se obţin 296 g hidroxid de calciu şi se consumă 108 g apă. Considerînd substanţele pure şi reacţiile totale, se cere:

a) scrierea ecuaţiilor reacţiilor chimice;

b) masa amestecului iniţial în g;

c) compoziţia amestecului iniţial în moli şi procente de masă.

Mase atomice: H—1; C—12; O—16; Ca—40.

3°. Sulfonarea benzenului, toluenului şi naftalinei. Mecanismul reacţiei de sulfonare în seria aromatică. Utilizarea industrială a acizilor sulfonici aromatici.

4°. Hidrocarbura A cu formula C_nH_{2n} decolorează apa de brom. Ştiind că prin ardere din 0,1 moli A se obţin 9 g apă, se cere:

a) formula moleculară a hidrocarburii A;

b) scrieţi alchenele izomere pentru formula de la punctul a);

c) ce dă fiecare izomer de la punctul b) la tratare cu HCl;

d) scrieţi pentru fiecare alchenă de la punctul b) reacţia cu $K_2Cr_2O_7 + H_2SO_4$.

Mase atomice: C—12; H—1; O—16.

5°. Preparaţi: a) acid azotic din amoniac; b) hidroxid de sodiu din NaCl; c) acetonă din propenă; d) *p*-toluidină (*p*-aminotoluen) din benzen.

γ. PROFILUL CHIMIE ALIMENTARĂ

V.1°. Reacţii de adiţie ale acetilenei.

2°. Amidonul.

3°. Mecanismul reacţiei de polimerizare a alchenelor în prezenţa acizilor tari.

4°. Să se calculeze cantitatea, în g, de acrilonitril necesară pentru a prepara 295 g propilamină, ştiind că randamentul reacţiei este de 92%.

Mase atomice: C—12; H—1; N—14.

2. ÎNVĂŢĂMÎNTUL MEDICO-FARMACEUTIC ŞI UNIVERSITAR (biologie)

VI.1°. Cloruri de acizi.

2°. Reacţii de substituţie electrofilă. Exemple. Mecanism.

3°. Care din xileni (dimetil-benzeni) conduce la un monobromderivat, la doi monobromderivaţi şi la trei monobromderivaţi izomeri.

4°. Un compus cu masa moleculară M = 56, dă la analiza elementară cantitativă 85,15% C şi 14,2% H. Se cer:

a) formula moleculară;

b) formulele de structură ale izomerilor posibili şi denumirile lor;

c) tipul de izomerie.

Mase atomice: C—12; H—1.

VII.1°. Glicerina.

2°. Proprietăţile aminoacizilor.

3°. Să se scrie ecuaţiile reacţiilor chimice de transformare a etenei în: polietilenă, etanol, oxid de etilenă şi etilbenzen.

4°. Din carbura de calciu de puritate 85% se obţin 134,4 l acetilenă măsurată la 0°C şi 1 atm.

Se cer:

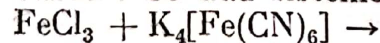
a) ecuaţiile reacţiilor chimice care au loc şi reactivii necesari;

b) cantitatea de carbură de calciu necesară, exprimată în g.

c) cantitatea de metan, în l, necesară pentru obţinerea aceleiaşi cantităţi de acetilenă folosind procedeul cracării în arc electric prin care se realizează un randament de 60%.

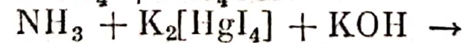
Mase atomice: H—1; C—12; Ca—40.

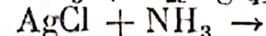
VIII.1°. Se dau sistemele chimice:


$FeCl_3 + K_4[Fe(CN)_6] \rightarrow$


$AlCl_3 + NaOH$ (exces) $\rightarrow$


$CoSO_4 + NH_4SCN \rightarrow$


$NH_3 + K_2[HgI_4] + KOH \rightarrow$


$AgCl + NH_3 \rightarrow$

Se cere:

a) să se scrie ecuaţiile reacţiilor chimice;

b) să se denumească produşii de reacţie.

2°. Electroliza sulfatului de cupru în soluţie apoasă. Variante. Aplicaţii.

3°. Influenţa presiunii asupra echilibrului chimic. Exemple.

4°. Pentru oxidarea ionilor Fe^{2+}, conținuți în 50 ml soluție $FeSO_4$ de concentrație 0,3 N, în prezență de acid sulfuric, se folosește un volum de 30 ml soluție $KMnO_4$.

Se cere:

a) ecuația reacției chimice;

b) normalitatea soluției de $KMnO_4$.

ENUNȚURI
1985

1. ÎNVĂȚĂMÎNTUL TEHNIC ȘI UNIVERSITAR

α. PROFILURILE CHIMIE, BIOCHIMIE, CHIMIE FIZICĂ

IX.1°. Indicați elementele chimice (metale și nemetale) care se obțin industrial prin electroliză și precizați:

a) substanța supusă electrolizei;

b) condițiile (soluție sau topitură).

2°. Se diluează 42 ml soluție de acid clorhidric 37% ($\rho = 1,19$ g/cm^3) pînă la un volum de 500 ml. La neutralizarea a 250 ml din această soluție cu o soluție diluată de hidroxid de potasiu se degajă o cantitate de căldură de 14,51 kJ. La neutralizarea a 250 ml de soluție de hidroxid de sodiu 2 M cu o soluție diluată de acid bromhidric se degajă o cantitate de căldură de 28,63 kJ.

Să se determine căldurile de neutralizare și să se interpreteze rezultatele obținute în cele două cazuri (Mase atomice: H—1; Cl—35,5).

3°. Peptide.

4°. Un alcool aciclic monohidroxilic saturat conține 60% carbon.

Se cere:

a) formula alcoolului;

b) izomeri posibili;

c) indicați metoda de obținere a izomerilor de la punctul b) pornind de la o alchenă conținînd același număr de atomi de carbon în moleculă.

Mase atomice: H—1; C—12; O—16.

5°. Scrieți succesiunea reacțiilor (fără mecanisme de reacție) necesare pentru obținerea:

a) carbonatului de sodiu, prin procedeul sodei amoniacale;

b) ciclohexanonoximei din fenol;

c) 1-butanolului din acetilenă;

d) acetatului de etil, din glucoză.

X.1°. Produsul ionic al apei și *p*H-ul soluțiilor apoase.

2°. Ce cantități de zinc și acid clorhidric 10% (în procente de masă) sînt necesare pentru a obține 15 l hidrogen (măsurați în condiții normale).

Mase atomice: H—1; Cl—35,5; Zn—65,4.

3° Cicloalcani.

4°. a) Cîte g de anilină se pot obține dintr-un mol de benzen, dacă randamentul global al transformărilor este de 80%.

b) Calculați formula procentuală a anilinei.

Mase atomice: H—1; C—12; N—14.

β. PROFILUL CHIMIE ALIMENTARĂ

XI.1°. Acetiluri metalice.
2°. Definiția, nomenclatura și metodele de preparare ale aminelor.
3°. Să se scrie succesiunea reacțiilor în cazul următoarelor transformări:
a) amidon → acetat de etil;
b) clorură de alil → glicerină;
c) benzen → benzoat de fenil.
4°. Calculați cantitatea de fenol, exprimată în kg, obținută din 10 kmoli cumen (izopropilbenzen) dacă randamentul global al reacțiilor este 70%.
Mase atomice: H—1; C—12; O—16.

2. ÎNVĂȚĂMÎNTUL MEDICO-FARMACEUTIC ȘI UNIVERSITAR (biologic)

XII.1°. Compuși organici cu legături ionice
2°. Reacții de substituție radicalică.
3°. Compuși tensioactivi.
4°. O hidrocarbură A, rezultată în urma reacției de cracare, conține 85,7%C și are masa moleculară 28. Printr-o reacție Friedel-Crafts, A reacționează cu o altă hidrocarbură B, care conține 7,6% H, cu masa moleculară 78, dînd compusul C. Acesta prin dehidrogenare conduce la compusul D care prin polimerizare trece în compusul macromolecular E.
Dacă se fabrică 520 kg de compus D să se afle:
a) volumul necesar de compus A;
b) volumul și cantitatea de compus B intrată în reacție, știind că densitatea acesteia este de 0,9 g/cm^3;
c) masa moleculară a polimerului E dacă gradul de plimerizare este de 10 000.
Mase atomice: C—12, H—1.
XIII.1°. Aminoacizi. Proprietăți.
2°. Reacții ale compușilor organici cu acidul sulfuric.
3° Pornind de la 1-butanol să se indice o cale de obținere a 3-clor-2-butanolului folosind reactivi anorganici.
Se cere:
a) condițiile de reacție;
b) precizarea tipului de mecanism de reacție al fiecărei etape;
c) numărul de enantiomeri ai compusului final.
4°. Știind că masa moleculară medie a produsului obținut prin policondensarea acidului tereftalic cu etilenglicolul este 2942, să se determine gradul de policondensare al produsului și cantitatea de *p*-xilen necesară pentru obținerea a 1920 kg produs, dacă randamentul global este 75%.
Mase atomice: C—12, H—1, O—16.
XIV.1°. Hibridizarea de tip *sp*^{3}. Dați exemple de molecule și ioni poliatomici care prezintă o astfel de hibridizare.
2°. Explicați de ce entropia grafitului este mai mare decît aceea a diamantului.
3°. Dați exemple de reacții de oxido-reducere în care drept agent oxidant să funcționeze permanganatul de potasiu, respectiv dioxidul de mangan. Scrieți ecuațiile reacțiilor chimice.
4°. Se consideră două soluții apoase de acid clorhidric și acid bromhidric, ambele cu concentrație 1% (procente de masă) și densitate 1 g/cm^3. Considerînd ambii acizi complet ionizați, se cere să se precizeze în care din cele două soluții concentrația ionilor de hidrogen este mai mare.
Mase atomice: H—1; Cl—35,5; Br—80.

ENUNȚURI
1986

1. ÎNVĂȚĂMÎNTUL TEHNIC ȘI UNIVERSITAR

α. PROFILURILE CHIMIE, BIOCHIMIE, CHIMIE FIZICĂ

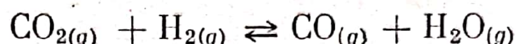
XV.1°. 1.1. Deduceți relația generală de calcul a masei de substanță separată la electrod în procesele de electroliză.

Aplicațiile electrolizei cu anod solubil. Dați două exemple.

1.2. Scrieți ecuațiile reacțiilor chimice pentru obținerea industrială a acidului sulfuric pornind de la pirită (FeS_2). Scrieți expresia constantei de aciditate pentru acidul sulfuric în treapta a doua de ionizare.

Scrieți ecuația reacției acidului sulfuric cu azotatul de plumb și arătați de ce are loc această reacție.

2°. La temperatura de 850°C, constanta de echilibru a reacției:



$$CO_{2(g)} + H_{2(g)} \rightleftarrows CO_{(g)} + H_2O_{(g)}$$

are valoarea $K_c = 1$. Presupunînd că inițial, în vasul de reacție avînd capacitatea de 1 l se găsesc 0,2 moli de CO_2 și 0,8 moli de H_2, să se calculeze:

a) concentrațiile de echilibru ale celor patru componenți;

b) volumul soluției de $Ca(OH)_2$ de concentrație 0,01 N care absoarbe dioxidul de carbon aflat în sistem la stabilirea echilibrului (se formează sare neutră).

Mase atomice: Ca—40; C—12; O—16; H—1.

3°. Nitrarea compușilor aromatici. Exemplificați la: benzen, toluen, naftalină, fenol și anilină (pentru benzen și toluen se cer ecuațiile mono-, di- și trinitrării). Mecanismul nitrării.

4°. Un volum de 67,2 m^3 (condiții normale) metan se supune pirolizei, amestecul gazos rezultat fiind format din acetilenă și hidrogen. Cu acetilena formată se pot prepara 13 kg benzen (randament cantitativ).

Se cere:

a) scrieți reacțiile chimice;

b) calculați randamentul de obținere a acetilenei;

c) preparați aldehida crotonică pornind de la acetilenă; ce cantitate de aldehidă crotonică se poate hidrogena (catalizator Ni) cu hidrogenul obținut la piroliză;

d) ce monomeri vinilici se obțin din acetilenă? Scrieți reacțiile.

Mase atomice: C—12; H—1; O—16.

5°. 5.1. Se dau următoarele transformări:



$$Al \rightarrow AlCl_3 \rightarrow A \rightarrow Na[Al(OH)_4]$$

Stabiliți formula substanței A; scrieți ecuațiile corespunzătoare transformărilor cerute; precizați comportarea acido-bazică a compusului A.

5.2. Obțineți din etenă acid acetic și, respectiv, acid propionic, iar din toluen acid fenilacetic ($C_6H_5—CH_2COOH$). Aranjați cei trei acizi carboxilici în ordinea creșterii constantei lor de aciditate.

XVI.1°. 1.1. Definiți noțiunile: oxidare, agent oxidant, proces redox.

1.2. Scrieți ecuațiile chimice ale următoarelor procese de oxido-reducere:

a) obținerea SO_2 din pirită (FeS_2);

b) obținerea clorului din HCl și $KMnO_4$.

2°. Ce volum de soluție 0,3 N de HNO_3 este necesar pentru neutralizarea a 30 cm^3 soluție 0,1 M $Ca(OH)_2$.

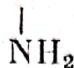
Mase atomice: Ca—40; O—16; N—14; H—1.

3°. 3.1. Reacția benzenului cu clorul în prezența $AlCl_3$. Produși, mecanism de reacție.

3.2. Scrieți ecuația 2-butenei cu $KMnO_4$ în soluție bazică. Scrieți stereoizomerii produsului de reacție.

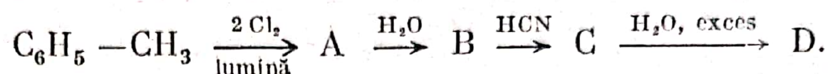
3.3. Obțineți acetona din propenă și substanțe anorganice.

3.4. $(CH_3)_2CH-CH-COOH$, denumire și reacții chimice cu: a) CH_3COCl;



b) NaOH; c) HCl.

3.5. Completați succesiunea de reacții:



Pentru formarea lui A scrieți și mecanismul.

4°. Esterul etilic saturat $R-COOC_2H_5$ are raportul de masă $H/O = 1/4$.

Se cere:

a) formula moleculară a esterului;

b) scrieți izomerii (acizi carboxilici și esteri) corespunzători formulei moleculare de la punctul a);

c) calculați cantitățile de acid și alcool etilic necesare obținerii a 61,6 g ester etilic știind că amestecul supus esterificării este echimolecular, randamentul de reacție fiind 70%.

Mase atomice: C—12; H—1; O—16.

2. ÎNVĂȚĂMÎNTUL MEDICO-FARMACEUTIC UNIVERSITAR (biologie)

XVII.1°. Reacții catalizate de săruri.

2°. Compuși halogenați nesaturați.

3°. Să se scrie formulele tetrapeptidelor izomere care rezultă din reacțiile alanil-glicinei cu valina și serina.

4°. La obținerea CH_3Cl din metan și clor se supun clorurării 168 l de metan, clorul consumîndu-se integral. Din reacție rezultă un amestec de CH_3Cl, CH_2Cl_2, $CHCl_3$, CCl_4 și CH_4 nereacționat în rapoarte molare de 5:3:2:1,5:1.

Se cere:

a) conversia utilă și randamentul;

b) volumul de clor măsurat în condiții normale;

c) volumul de acetilenă ce se poate obține prin cracarea metanului nereacționat, cu o conversie utilă de 60%.

XVIII.1°. Reacții cu formarea unei noi legături C—C.

2°. Adiția electrofilă.

3°. Un compus A dă la analiza elementară cantitativă 85,71% C, 14,29% H și are masa moleculară 84.

Se cere:

a) formula brută și formula moleculară a compusului A;

b) izomerii posibili cu catenă normală;

c) indicarea izomerilor etenici și precizarea tipului de izomerie;

d) formula de structură a compusului A, știind că prin oxidare conduce la acid 2,2-dimetilpropanoic și acid formic.

4°. 560 ml dintr-un amestec de propan și propenă, măsurat în condiții normale, consumă 800 mg brom.

Se cere:

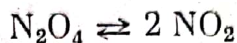
a) compoziția amestecului de hidrocarburi în procente;

b) volumul de dioxid de carbon (ml în condiții normale) și cantitatea de apă (în g) ce rezultă prin arderea amestecului.

Mase atomice: H—1; C—12; O—16; Br—80.

XIX.I°. 1. Enunțați legea lui Hess și dați exemple de aplicație. Enunțați legea Laplace-Lavoisier și dați un exemplu de aplicație.

2. Scrieți expresia pentru K_p a reacției



$$N_2O_4 \rightleftarrows 2\ NO_2$$

în funcție de presiunile parțiale și în funcție de numărul de moli. Scrieți ecuația de viteză pentru reacția $N_2O_4 \rightarrow 2\ NO_2$ și precizați ordinul de reacție. Indicați unitățile de măsură în care se exprimă fiecare termen al ecuației de viteză.

2°. 1. Scrieți ecuațiile chimice pentru reacția acidului azotic cu cuprul și pentru reacția acidului azotic cu hidroxidul de magneziu. Precizați ce caracter chimic manifestă HNO_3 în fiecare reacție.

2. Scrieți ecuațiile reacțiilor principale care au loc la obținerea sodei calcinate, prin procedeul amoniacal. Scrieți ecuația reacției chimice care are loc la dizolvarea în apă a carbonatului de sodiu.

3°. Într-un litru de soluție 0,1 N sulfat de cupru se cufundă o plăcuță de zinc. După un anumit timp, plăcuța se scoate din soluție și se constată că masa acesteia a scăzut cu 45 mg.

Se cere:

a) calculați cantitatea de metal depusă pe plăcuță și normalitatea soluției de sulfat de cupru în momentul scoaterii plăcuței;

b) reprezentați celula galvanică care are la bază reacția dintre plăcuță și soluție.

Mase atomice: Cu—63,5; Zn—65.

4°. Așezați următorii oxoacizi: H_2SO_4; $HClO_4$; H_4SiO_4; H_3PO_4 în ordinea crescătoare a tăriei acizilor și indicați factorul de care depinde variația tăriei acestor oxoacizi.

ENUNȚURI 1987

1. ÎNVĂȚĂMÎNTUL TEHNIC ȘI UNIVERSITAR

α. PROFILURILE CHIMIE, BIOCHIMIE, CHIMIE FIZICĂ

XX. 1°. Se consideră grupa metalelor alcaline. Se cere:

1. precizați variația caracterului metalic și a energiei de ionizare a elementelor în grupă;

2. metoda industrială de obținere a sodiului;

3. scrieți ecuațiile reacțiilor chimice ale hidroxidului de sodiu cu clorul, clorura de amoniu și, respectiv, sulfat de aluminiu (fără și cu exces de hidroxid de sodiu);

4. precizați natura legăturii care apare în compusul format de potasiu cu elementul cu numărul atomic $Z = 9$ și indicați proprietățile fizice ale compusului.

2°. 50 ml soluție 0,1 N de $K_2Cr_2O_7$ se acidulează cu H_2SO_4 și se tratează cu 1 g KI pur. Se cere:

1. ecuația reacției chimice dintre $K_2Cr_2O_7$, KI și H_2SO_4;

2. masa teoretică (în g) de iod eliberată în reacție și masa (în g) de KI în exces;

3. masa (în g) de H_2SO_4 consumată în reacție;

4. întreaga cantitate de iod formată în reacția de mai sus este separată și introdusă într-un vas de reacție împreună cu cantitatea stoechiometrică de hidrogen.

Vasul se încălzește pînă la temperatura de 350°C cînd se stabilește echilibrul chimic în fază gazoasă (constantă de echilibru $K_c = 64$). Calculați masa de HI formată(g). Mase atomice: H — 1; O — 16; S — 32; K — 39; Cr — 52; I — 127.

3°. Monomeri vinilici. Obținere. Mecanismul general al polimerizării vinilice.

4°. Cifra de iod a unei gliceride, considerată compus unitar, este 57,33. Știind că prin hidroliza acesteia se obține glicerină, acid oleic și acid stearic, se cere:

1. formula de structură a gliceridei cu moleculă simetrică;
2. masa de săpun obținută prin hidroliza cu NaOH în exces a 1 772 kg gliceridă, știind că săpunul mai conține 10% apă (randament cantitativ);
3. volumul de hidrogen (măsurat la 27°C și 10 atm) necesar hidrogenării a 443 kg gliceridă.

Mase atomice: H — 1; C — 12; O — 16; Na — 23; I — 127.

XXI. 1°. Se consideră grupa halogenilor.

Se cere:

1. precizați variația afinității pentru electroni și a razelor ionice în grupă; aranjați halogenii în ordinea crescătoare a entropiei lor în stare gazoasă (fără precizarea valorilor numerice);
2. metoda industrială de obținere a clorului; scrieți ecuațiile a două reacții de obținere a clorului în laborator;
3. scrieți expresiile constantelor K_c și K_p pentru sistemul în echilibru: $I_2 + H_2 \rightleftarrows 2\ HI$; deduceți relația dintre cele două constante;
4. scrieți ecuațiile reacțiilor clorului cu: NaOH; Fe; H_2O; KBr.

2°. Se supune descompunerii termice cu randament 100%, 2 g dolomită impură. Se obțin 1,12 g reziduu solid (impuritățile nu se descompun termic și nu se volatilizează). O cantitate egală din aceeași dolomită tratată cu 100 ml soluție de HCl 2 N, lasă un reziduu solid de 0,16 g (impuritățile nu reacționează cu HCl). Se cere:

1. compoziția procentuală (procente de masă) în $CaCO_3$, $MgCO_3$ și în impurități a dolomitei;
2. volumul de CO_2 (condiții normale) format în urma descompunerii termice a dolomitei și, respectiv, în reacția cu HCl;
3. cantitățile exprimate în g, de $CaCl_2$ și $MgCl_2$ (săruri anhidre) rezultate în urma reacției cu acidul clorhidric;
4. concentrația normală a HCl nereacționat în soluția finală (se neglijează variația de volum a soluției).

Mase atomice: O—16; Mg—24; Cl—35,5; Ca—40; C—12.

3°. Reacțiile compușilor organici cu acidul azotic. Mecanismul reacției de nitrare a naftalinei.

4°. Un copolimer A, butadien—α-metilstirenic, conține 90,00% (procente de masă) carbon.

Se cere:

1. raportul molar butadienă—α-metilstiren;
2. masa moleculară medie, știind că gradul de polimerizare mediu este 100;
3. cantitatea de cumen (izopropilbenzen), în kg și în kmoli, necesară obținerii α-metilstirenului cu care se poate fabrica o cantitate de 560 kg copolimer A, știind că randamentul reacției de dehidrogenare este de 75%. Mase atomice: H—1; C—12.

XXII. 1°. Se consideră următoarele elemente din perioada a 3-a: Na, Mg, Al, Si, P, S, Cl.

Se cere:

1. arătați care sînt elementele cu caracter metalic și elementele cu caracter nemetalic; scrieți formulele chimice ale hidroxizilor formați de elementele cu caracter metalic și, respectiv, ale acizilor oxigenați superiori formați de elementele cu caracter nemetalic;

2. aranjați hidroxizii și, respectiv, acizii de la punctul 1 în ordinea creșterii tăriei acestora;

3. scrieți ecuațiile reacțiilor chimice care au loc la electrozi și reacția totală la obținerea industrială pe cale electrolitică a hidroxidului de sodiu;

4. calculați pH-ul unei soluții care conține 1,005 g $HClO_4$ în 100 ml soluție (se consideră acidul percloric total ionizat).

Mase atomice: H—1; O—16; Cl—35,5.

2°. La un volum de 500 ml soluție saturată la 25°C de clorură de argint se adaugă $2,775 \cdot 10^{-2}$ g clorură de calciu. Considerînd că prin aceasta volumul și temperatura soluției nu se modifică, se cere:

1. expresia produsului de solubilitate al clorurii de argint;
2. solubilitatea clorurii de argint la 25°C (mol/l) în apă pură;
3. concentrația ionilor de argint și, respectiv, de clor (g/l) în soluția de la punctul 2;
4. solubilitatea clorurii de argint (mol/l) în soluția obținută după adăugarea clorurii de calciu;
5. concentrația ionilor de argint și, respectiv, de clor (g/l) în soluția de la punctul 4. Se dă: $P_{S(AgCl)} = 1 \cdot 10^{-10}$ (mol^2/l^2).

Mase atomice: Cl—35,5; Ca—40; Ag—108.

3°. Proprietățile chimice ale alcoolilor monohidroxilici și ale fenolului (fără mecanisme de reacție).

4°. La tratarea a 10,8 g dintr-o alchină A (omolog al acetilenei) cu o soluție amoniacală de hidroxid de argint se obține o cantitate de 32,2 g precipitat. Se cere:

1. formula de structură a hidrocarburii A;
2. izomerii aciclici ai hidrocarburii A;
3. ecuațiile reacțiilor alchinei A cu: a) apă; b) acid clorhidric; c) acid cianhidric; d) brom;
4. mecanismul reacției de adiție a clorului la alchina A.

Mase atomice: H—1; C—12; Ag—108.

XXIII. 1°. Se consideră elementele: C, F, N, O.
Se cere:

1. aranjați elementele în ordinea creșterii caracterului nemetalic;
2. precizați care dintre elementele menționate prezintă forme alotropice și prin ce se deosebesc acestea în fiecare caz;
3. enunțați legea lui Hess; exemplificați legea pentru cazul reacțiilor de combinare ale carbonului cu oxigenul (fără date numerice).

2°. 17,8 g aliaj Zn-Mg se tratează cu o soluție diluată de acid sulfuric, obținîndu-se 8,96 l hidrogen (condiții normale).

Știind că ambele metale reacționează total, se cere:

1. compoziția aliajului în procente de masă;
2. cantitatea de acid sulfuric exprimată în g, consumată în reacție;
3. cantitățile de săruri anhidre, exprimate în g, ce rezultă din reacția de mai sus.

Mase atomice: H—1; O—16; Mg—24; S—32; Zn—65.

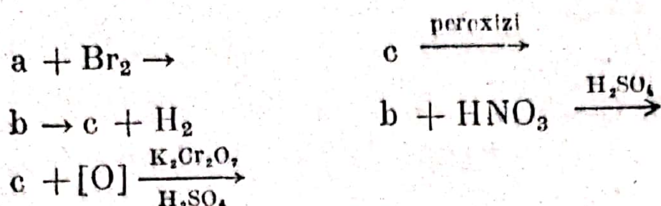
3°. Hidroliza derivaților halogenați. Mecanismul reacției de hidroliză a 2-clor-2-metil-propanului (clorura de *terț*-butil) știind că reacția decurge prin intermediul unui carbocation.

4°. Prin monoalchilarea benzenului cu o alchenă a se obține hidrocarbura b cu masa moleculară 106.

Se cere:

1. formulele de structură ale hidrocarburilor a și b.

2. să se completeze ecuațiile reacțiilor:



$a + Br_2 \rightarrow$ $\qquad$ $c \xrightarrow{\text{peroxizi}}$

$b \rightarrow c + H_2$ $\qquad$ $b + HNO_3 \xrightarrow{H_2SO_4}$

$c + [O] \xrightarrow[H_2SO_4]{K_2Cr_2O_7}$

3. Volumul de alchenă a (condiții normale) necesar obținerii a 2 kmoli de b, dacă alchena se transformă cu un randament de 75%.

Mase atomice: H—1; C—12.

XXIV. 1°. Se consideră următoarele elemente din grupa a II-a principală: Mg ($Z = 12$); Ca ($Z = 20$); Sr ($Z = 38$).

Se cere:

1. configurațiile electronice ale atomilor și, respectiv, ale ionilor stabili formați de aceste elemente;

2. variația caracterului bazic al hidroxizilor formați de elementele considerate;

3. scrieți ecuațiile reacțiilor: $CaCO_3 \xrightarrow{t°}$

$Ca + H_2O \rightarrow$

$Ca(OH)_2 + HNO_3 \rightarrow$

2°. Ce cantitate de apă (g) trebuie să se adauge la 400 ml soluție de acid clorhidric de concentrație 22% (masă) și densitate 1,11 g/l pentru a obține o soluție de concentrație 10% (masă).

— Ce volum de soluție (ml) hidroxid de sodiu 5 M neutralizează complet acidul clorhidric din cantitatea de soluție 10% care rezultă mai sus.

Mase atomice: H—1; O—16; Na—23; Cl—35,5.

3°. Reacții comune aldehidelor și cetonelor (fără mecanisme de reacție).

4°. Prin oxidarea unei alchene A, ce are masa moleculară 70, cu dicromat de potasiu și acid sulfuric, se obține o cetonă B și un acid C (care nu are caracter reducător).

Se cere:

1. ecuațiile reacției de oxidare și denumirile substanțelor A, B, C;

2. ecuațiile reacțiilor dintre acidul C și: a) Zn; b) NaOH; c) $NaHCO_3$; d) C_2H_5OH; e) PCl_5;

3. mecanismul reacției de adiție a acidului clorhidric la cetona B;

4. volumul de hidrogen (condiții normale) necesar hidrogenării a 5 kmoli de cetonă B.

Mase atomice: H—1; C—12; O—16.

β. PROFILUL CHIMIE ALIMENTARĂ (SUBINGINERI)

XXV. 1°. Reacțiile de adiție ale alchenelor. Mecanismul reacției de adiție a hidracizilor la alchene.

2°. Să se calculeze cantitatea, exprimată în g, de acetilparatoluidină necesară pentru a prepara 280 g acid *para*-aminobenzoic, știind că randamentul global al reacțiilor este de 95,25%. Stabiliți formula procentuală a acetil-*para*-toluidinei.

Mase atomice: C—12; H—1; O—16.

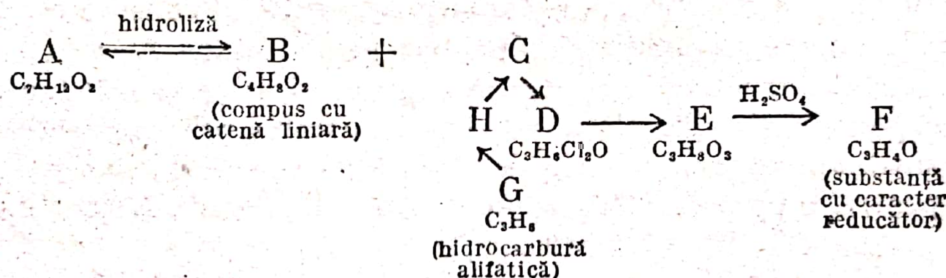
3°. Scrieți pentru amidon formula moleculară, iar pentru restul substanțelor formulele de structură și ecuațiile reacțiilor care au loc în transformările de mai jos, completînd de la caz la caz, reactanții și etapele omise.

1. bromură de etil → fluorură de etil
2. amidon → A → pentaacetilglucoză
3. izobutenă → A → izopropanol $\xrightarrow{HCl}$ B $\xrightarrow{C_6H_6}$ cumen → fenol
4. clorură de metil $\xrightarrow{C_6H_6}$ toluen $\xrightarrow[Cl_2]{h\nu}$ A $\xrightarrow{\text{sulfit de sodiu}}$ B
5. acetilenă → acetaldehidă → A → M → butanol $\xrightarrow[\text{acetică}]{\text{anhidridă}}$ B
6. acetilenă → cauciuc cloroprenic
7. benzensulfonat de sodiu → A → anisol
8. dioleostearină $\xrightarrow{2\,H_2}$ A $\xrightarrow{\text{hidroliză}}$ B + C
9. acetat de amoniu → acetonitril $\xrightarrow{2\,H_2}$ A $\xrightarrow[\text{exces}]{CH_3Cl}$ B.

2. ÎNVĂȚĂMÎNTUL MEDICO-FARMACEUTIC ȘI UNIVERSITAR (BIOLOGIE)

XXVI. 1°. Reacțiile de adiție la alchine și hidrocarburi aromatice. (Dintre mecanismele de reacție se va trata numai mecanismul de adiție a clorului la alchine.)

2°. Se dă schema:



Se cere:

1. Formulele de structură ale compușilor A → H; denumirile substanțelor, ecuațiile reacțiilor și reactanții necesari.

2. Cantitatea de hidrocarbură G, exprimată în l (condiții normale), necesară obținerii a 10 kg compus C (randamentul global al reacțiilor fiind 80%).

3. Precizați dacă vreunul dintre compușii A → H prezintă izomerie geometrică sau optică. Motivați răspunsul.

4. Să se calculeze formula procentuală a substanței G.

Mase atomice: C—12; H—1; O—16.

3°. O substanță A cu catenă liniară și masă moleculară 171, conținînd 70,2% C; 12,26% H; 8,24% N și 9,3% O, poate reacționa cu P_2O_5; H_2O; $2H_2$ ducînd la compușii organici B, C și, respectiv, D. Se precizează că:

— substanța D se poate obține și din compusul B;

— substanța C se poate prepara din compusul B sau din glicerida E (care la hidroliză dă un amestec de reacție ce conține un mol substanță C alături de doi moli acid oleic (notat cu F) — precizînd că substanța C esterifică grupa OH secundară).

— Substanța D prin tratare cu clorură de metil în exces, formează compusul G.

Se cere:

1. formula moleculară a substanței A; formulele de structură ale substanțelor A → G; ecuațiile reacțiilor respective și reactanții necesari;

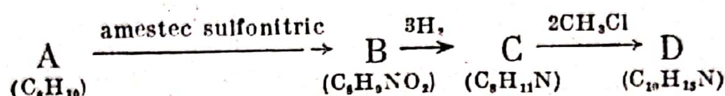
2. cantitatea de compus D, exprimată în moli, necesară pentru a prepara 21,666 kg substanță G, reacția decurgînd cu un randament global de 92%;

3. masa moleculară, formula moleculară și formula de structură a unui omolog inferior, notat cu H (termen cu număr mai mic de grupări CH_2), din seria compusului C știind că prin tratarea substanței H cu amoniac se obține substanța I care conține 10,48% H; 13,33% N; 30,45% O.

Mase atomice C—12; O—16; N—14; Cl—35,5.

XXVII. 1°. Reacții ale grupării funcționale $-C{\genfrac{}{}{0pt}{}{\diagup\!\!\diagup O}{\diagdown H}}$; exemplificări pe reprezentanți ai compușilor cu funcțiuni simple și cu funcțiuni mixte. (Dintre mecanismele de reacție se va trata numai mecanismul condensării aldolice, exemplificat pe acetaldehidă.)

2°. Se dă schema:



Se precizează că substanța A dă prin oxidare un compus avînd formula moleculară $C_8H_6O_4$, iar prin nitrare un singur mononitroderivat, notat B. Se cere:

1. formula procentuală a compusului A și formulele de structură ale izomerilor cu caracter aromatic ai substanței A; formula de structură a lui D;

2. formulele de structură ale izomerilor de poziție ai substanței B; mecanismul reacției de nitrare cu amestec sulfonitric pentru etapa A → B;

3. formula de structură corespunzătoare unui izomer al substanței C (notat cu E) care se poate obține din clorură de benzil și amina primară necesară; ecuația reacției și cantitatea exprimată în g de clorură de benzil (de puritate 90%) care se folosește pentru a prepara 200 g compus E, randamentul reacției fiind de 92%.

Mase atomice C—12; H—1; Cl—35,5; N—14.

3°. Un amestec de trei hidrocarburi izomere aciclice cu catenă ramificată notate A, B și C în raport molar 2:1:1 conținînd 85,72% C și 14,28% H, avînd masa moleculară 70, se oxidează cu $K_2Cr_2O_7/H_2SO_4$. Din amestecul de reacție rezultat, se separă compușii: D (provenit din A) și E (provenit din C). Prin hidrogenare D duce la F, iar din E se obține substanța G (numai compusul F poate fi separat în enantiomeri). Știind că substanța D se poate obține și din hidrocarburile izomere I sau H prin reacție Kucerov (precizînd că numai H reacționează cu sodiu la cald), se cere:

1. formula moleculară a hidrocarburilor A, B și C; formulele de structură ale compușilor A → I și ecuațiile reacțiilor la care s-au făcut referiri;

2. cantitatea de amestec (A + B + C), exprimată în g, necesară pentru a prepara 74 g substanță F, știind că randamentul global al reacțiilor (raportat la compusul A) este de 90%;

3. să se precizeze care dintre hidrocarburile din amestecul inițial (A + B + C) prin adiție de acid bromhidric, duce la un derivat halogenat separabil în enantiomeri? Formulele de structură ale enantiomerilor.

Mase atomice: C—12; H—1; O—16.

XXVIII. 1°. Reacții ale compușilor organici catalizate de clorura de aluminiu. (Dintre mecanismele de reacție se va trata numai mecanismul general al SE, cu exemplificarea acestuia la sinteza etilbenzenului.)

2°. O substanță organică aciclică A, conținînd 64,87% C; 13,51% H și 21,62% O, cu masa moleculară 74, poate prezenta șapte izomeri A → G. Luînd în considerare precizările din schemă și faptul că substanța M nu are caracter reducător

$$A \xrightarrow{-H_2O} H \xrightarrow[H_2SO_4]{K_2Cr_2O_7} (CH_3)_2CO + CO_2 + H_2O$$

$$B \xrightarrow{-H_2O} H$$

$$B \xrightarrow{-H_2} I \xrightarrow[\text{Tollens}]{\text{reactiv}} J$$

$$C \xrightarrow{-H_2} K \xrightarrow[\text{Tollens}]{\text{reactiv}} L$$

$$D \xrightarrow{-H_2} M \xrightarrow{NH_2OH} N$$

$$E \xleftarrow[-H_2O]{H_2SO_4} C_2H_5OH$$

F

G conține în moleculă 3 grupe $-CH_3$

Se cere:

1. formula moleculară și formulele de structură ale izomerilor A → G;
2. formulele de structură ale compușilor H → N și ecuațiile reacțiilor indicate în schemă;
3. ecuația reacției dintre substanța K și HCN; cantitatea (exprimată în g) de HCN necesară obținerii a 890 g produs de reacție, considerînd randamentul de 90% în raport cu HCN;
4. care dintre compușii din schemă prezintă izomerie optică? Formulele de structură ale enantiomerilor;
5. masa moleculară, formula moleculară și formula de structură a unui omolog superior, notat 0 (termen cu număr mai mare de grupe $-CH_2-$), din seria compusului N, știind că dă la analiza cantitativă 10,89% H; 13,86% N și 15,84% O.

3°. Se dau următorii compuși:

a) neopentan, acid benzoic, acid oxalic, fructoză, toluen;
b) alcool alilic, acetat de fenil, acetonitril, benzamidă.

Ținînd seama de proprietățile generale ale claselor de compuși din care fac parte substanțele menționate, se cere:

1. formulele de structură ale tuturor compușilor indicați; care dintre substanțele din prima grupă sînt solide?
2. care dintre compușii din ambele grupe pot da reacții de hidroliză? ecuațiile reacțiilor (fără mecanism de reacție);
3. care dintre compușii menționați se pot purifica prin sublimare? metodele de sinteză pentru substanța care sublimă (fără mecanism de reacție);
4. cantitatea de clorură de benzoil, exprimată în g, necesară pentru a prepara 10 moli de benzamidă, randamentul reacției fiind de 92% în raport cu clorura de benzoil;
5. care dintre compușii din ambele grupe pot forma asociații moleculare prin legături de hidrogen? Explicați asocierea prin formulele de structură numai pentru unul dintre compuși.

Mase atomice: C—12; H—1; Cl—35,5; N—14; O—16.

XXIX. 1°. 1. Indicați factorii de care depinde solubilitatea substanțelor și ilustrați prin cîte un exemplu modul în care aceștia influențează solubilitatea.

2. Indicați modurile de exprimare a concentrației soluțiilor. Scrieți relațiile prin care se calculează aceste concentrații, precizînd semnificația mărimilor care intervin.

3. Precizați ce efect termic are loc la dizolvarea azotatului de amoniu și, respectiv, a acidului sulfuric în apă. Justificați răspunsul.

4. Dați cinci exemple de cristalohidrați.

2°. 1. Indicați sensul în care crește polaritatea și tăria hidracizilor halogenilor.

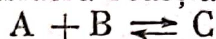
Explicați variația entropiei acestora (exprimată în J/kmol K) în stare gazoasă: HCl: 186,7; HBr: 198,7; HI: 206,3

Justificați răspunsul.

2. Indicați mecanismul reacțiilor dintre:
— hidrogen și iod;
— hidrogen și clor.

3. Scrieți ecuațiile a două reacții chimice de obținere a clorului pornind de la acid clorhidric.

3°. Se consideră reacția:



$$A + B \rightleftarrows C$$

care decurge în fază gazoasă, la temperatura de 127°C.

Știind că la echilibru concentrațiile substanțelor sînt:

[A] = 0,5 moli/l; [B] = 1 mol/l; [C] = 2,5 moli/l

și că inițial [C] = 0, se cere:

1. concentrațiile inițiale ale substanțelor A și B;
2. valoarea constantei de echilibru K_c;
3. valoarea constantei de echilibru K_p, la aceeași temperatură. Se dă constanta gazelor perfecte R = 0,082 l·atm/mol K.

REZOLVĂRI

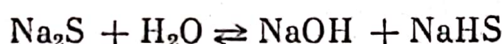
I. 1°. Subiectul se tratează conform manualului de liceu pentru clasa a XI-a avîndu-se în vedere următoarele probleme:

Definiția reacției de hidroliză a sărurilor. Tipuri de săruri care hidrolizează. Expresia generală a constantei de hidroliză. Expresii particulare cînd sarea provine de la un acid slab și o bază tare sau de la o bază slabă și un acid tare.

Cazul sărurilor date:

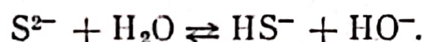
Dintre sărurile date nu hidrolizează K_2SO_4 și NaCl deoarece provin de la acizi tari și baze tari și deci soluțiile apoase ale acestora vor avea un caracter practic neutru (pH = 7). De asemenea, nu va hidroliza AgBr care este practic insolubilă în apă.

Na_2S și KCN sînt săruri care provin de la baze tari și acizi slabi, deci soluțiile acestora vor avea caracter bazic (pH > 7). În cazul Na_2S reacția de hidroliză este:



$$Na_2S + H_2O \rightleftharpoons NaOH + NaHS$$

sau ionic:



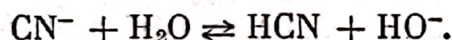
$$S^{2-} + H_2O \rightleftharpoons HS^- + HO^-.$$

Aceasta este reacția principală, cea de a doua treaptă de hidroliză, cu formare de H_2S, avînd o pondere mică la temperatura obișnuită. În cazul KCN reacția de hidroliză se va scrie:



$$KCN + H_2O \rightleftharpoons KOH + HCN$$

sau ionic:



$$CN^- + H_2O \rightleftharpoons HCN + HO^-.$$

Constanta de echilibru a acestei reacții va fi:

$$K = \frac{[HCN] \cdot [HO^-]}{[CN^-] \cdot [H_2O]}.$$

Considerînd că variația concentrației apei este foarte mică și deci $[H_2O]$ — const, ea se poate îngloba în valoarea constantei, obținîndu-se expresia constantei de hidroliză:

$$K_h = K[H_2O] = \frac{[HCN] \cdot [HO^-]}{[CN^-]}.$$

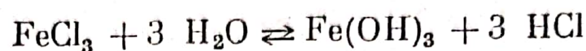
Această expresie se poate aduce la o altă formă înmulțind-o și împărțind-o cu $[H_3O^+]$:

$$K_h = \frac{[HCN][HO^-] \cdot [H_3O^+]}{[CN^-][H_3O^+]} = \frac{K_{H_2O}}{K_a}$$

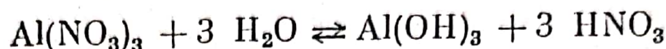
unde $K_{H_2O} = [HO^-][H_3O^+]$ este produsul ionic al apei, iar

$$K_a = \frac{[CN^-][H_3O^+]}{[HCN]}$$

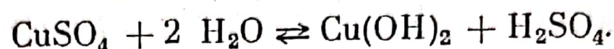
este constanta de aciditate a acidului cianhidric, HCN.
Celelalte săruri date, $FeCl_3$, $Al(NO_3)_3$ și $CuSO_4$ sînt săruri care provin de la baze slabe și acizi tari și ca atare ele hidrolizează în soluții apoase, soluțiile avînd un caracter acid ($pH < 7$).
Reacțiile de hidroliză totală a acestor săruri vor fi:



$$FeCl_3 + 3\ H_2O \rightleftarrows Fe(OH)_3 + 3\ HCl$$

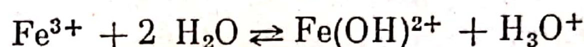


$$Al(NO_3)_3 + 3\ H_2O \rightleftarrows Al(OH)_3 + 3\ HNO_3$$



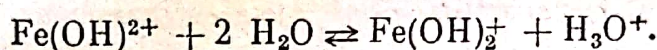
$$CuSO_4 + 2\ H_2O \rightleftarrows Cu(OH)_2 + H_2SO_4.$$

În realitate la dizolvarea acestor săruri în apă nu are loc hidroliza lor totală, ci numai parțială, în trepte, care se poate reprezenta prin următoarele reacții ionice:



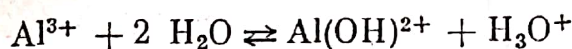
$$Fe^{3+} + 2\ H_2O \rightleftarrows Fe(OH)^{2+} + H_3O^+$$

și în mai mică măsură:



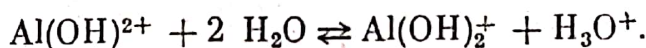
$$Fe(OH)^{2+} + 2\ H_2O \rightleftarrows Fe(OH)_2^+ + H_3O^+.$$

De asemenea:



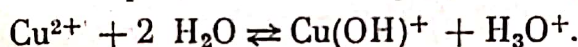
$$Al^{3+} + 2\ H_2O \rightleftarrows Al(OH)^{2+} + H_3O^+$$

și



$$Al(OH)^{2+} + 2\ H_2O \rightleftarrows Al(OH)_2^+ + H_3O^+.$$

In cazul sulfatului de cupru, hidroliza sa parțială se poate scrie ionic astfel:



$$Cu^{2+} + 2\ H_2O \rightleftarrows Cu(OH)^+ + H_3O^+.$$

La hidroliză totală se poate ajunge dacă din sistemele respective în echilibru se îndepărtează ionii H_3O^+ (de exemplu prin adăugare de baze tari) sau prin încălzire puternică.

2°. a) Fie X masa în g de soluție H_2SO_4 80% și, respectiv, Y masa în g de soluție de H_2SO_4 20%, care trebuie amestecate pentru a obține cele 1,5 kg soluție de H_2SO_4 40%. Evident că $X + Y = 1\,500$.
Cealaltă ecuație necesară se obține din bilanțul acidului sulfuric pur. Cantitatea de H_2SO_4 pur existent în cele două soluții care se amestecă se regăsește în soluția de concentrație 40% preparată. Deci:

$$\begin{cases} X + Y = 1\,500 \\ \frac{80\,X}{100} + \frac{20\,Y}{100} = 1\,500 \cdot \frac{40}{100}. \end{cases}$$

Rezolvînd sistemul se obține:

$$X = 500 \text{ g soluție } H_2SO_4\ 80\%$$

$$Y = 1\,000 \text{ g soluție } H_2SO_4\ 20\%.$$

Observație: Problema se poate rezolva și prin regula dreptunghiului (vezi manualul de clasa a IX-a).

b) Ecuația reacției este:



$$Zn + H_2SO_4 \rightarrow ZnSO_4 + H_2.$$

Conform punctului c) din enunț, zincul este în exces, deci volumul de hidrogen se va calcula în funcție de acidul sulfuric pur existent în soluția obținută (600 g):

98 g H_2SO_4 .... 22,4 l H_2
600 g H_2SO_4 .... X l H_2

$X = 137{,}14$ l H_2 (c.n.).

c) Se calculează, după aceeași ecuație, cantitatea de zinc ce reacționează:

98 g H_2SO_4 .... 65 g Zn
600 g H_2SO_4 .... Y

$Y = 397{,}96$ g Zn intrat în reacție.

Deci cantitatea de zinc care nu a reacționat este:

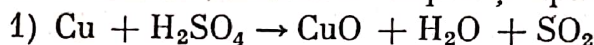
$$m = 520\text{ g} - 397{,}96\text{ g} = 122{,}04\text{ g} = 0{,}122\text{ kg Zn.}$$

d) $CaCO_3 + H_2SO_4 \rightarrow CaSO_4 + CO_2 + H_2O$.

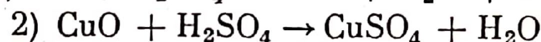
Carbonatul de calciu fiind sarea unui acid slab (acidul carbonic) este descompus de acidul sulfuric cu punerea în libertate a acidului carbonic, iar acesta fiind instabil se descompune în CO_2 și H_2O.

Cuprul nu reacționează cu acidul sulfuric diluat (în absența oxigenului). Cu acidul sulfuric concentrat însă reacționează la încălzire reacția putînd fi considerată ca avînd loc în două etape.

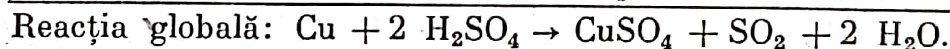
În prima, acidul sulfuric oxidează cuprul la CuO, sulful din acid reducîndu-se la SO_2 (trece de la starea de oxidare +6 la +4). În etapa următoare oxidul de cupru se dizolvă în acid sulfuric formînd sulfatul de cupru și apă:



$$1)\ Cu + H_2SO_4 \rightarrow CuO + H_2O + SO_2$$

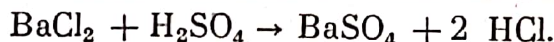


$$2)\ CuO + H_2SO_4 \rightarrow CuSO_4 + H_2O$$

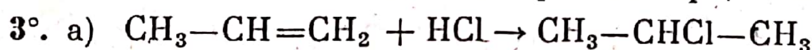


Reacția globală: $Cu + 2\ H_2SO_4 \rightarrow CuSO_4 + SO_2 + 2\ H_2O$.

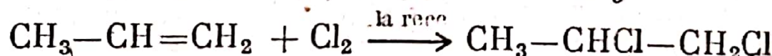
$BaCl_2$ formează cu acidul sulfuric sulfatul de bariu insolubil:



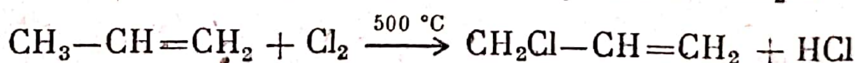
$$BaCl_2 + H_2SO_4 \rightarrow BaSO_4 + 2\ HCl.$$



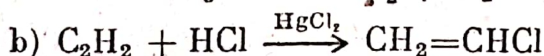
3°. a) $CH_3{-}CH{=}CH_2 + HCl \rightarrow CH_3{-}CHCl{-}CH_3$



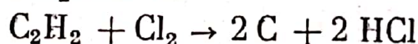
$$CH_3{-}CH{=}CH_2 + Cl_2 \xrightarrow{\text{la rece}} CH_3{-}CHCl{-}CH_2Cl$$



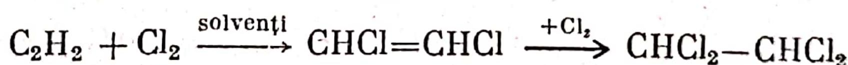
$$CH_3{-}CH{=}CH_2 + Cl_2 \xrightarrow{500\ ^\circ C} CH_2Cl{-}CH{=}CH_2 + HCl$$



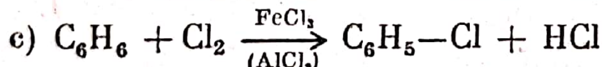
b) $C_2H_2 + HCl \xrightarrow{HgCl_2} CH_2{=}CHCl$



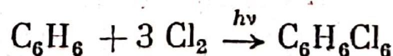
$$C_2H_2 + Cl_2 \rightarrow 2\ C + 2\ HCl$$



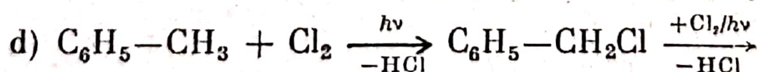
$$C_2H_2 + Cl_2 \xrightarrow{\text{solvenți}} CHCl{=}CHCl \xrightarrow{+Cl_2} CHCl_2{-}CHCl_2$$



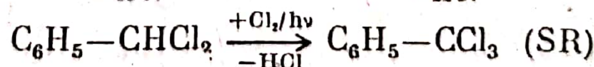
c) $C_6H_6 + Cl_2 \xrightarrow[(AlCl_3)]{FeCl_3} C_6H_5{-}Cl + HCl$



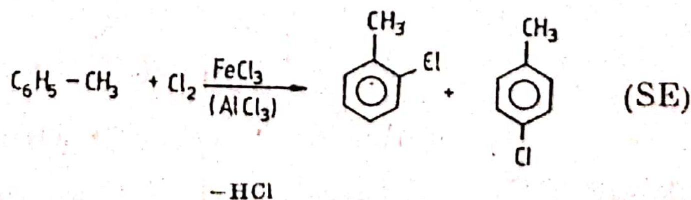
$$C_6H_6 + 3\ Cl_2 \xrightarrow{h\nu} C_6H_6Cl_6$$



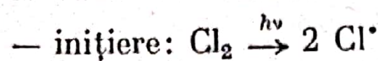
d) $C_6H_5{-}CH_3 + Cl_2 \xrightarrow[-HCl]{h\nu} C_6H_5{-}CH_2Cl \xrightarrow[-HCl]{+Cl_2/h\nu}$



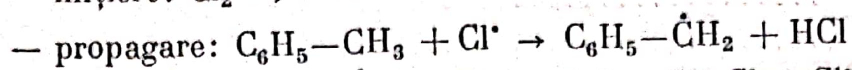
$$C_6H_5{-}CHCl_2 \xrightarrow[-HCl]{+Cl_2/h\nu} C_6H_5{-}CCl_3 \text{ (SR)}$$



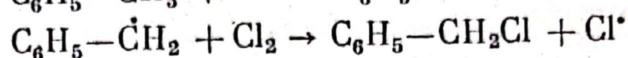
Mecanismul clorurării fotochimice a toluenului:



— inițiere: $Cl_2 \xrightarrow{h\nu} 2\,Cl^{\bullet}$

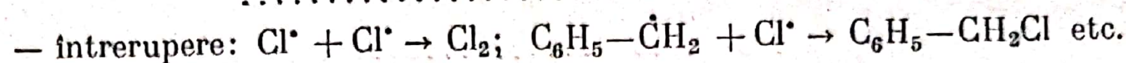


— propagare: $C_6H_5{-}CH_3 + Cl^{\bullet} \rightarrow C_6H_5{-}\dot{C}H_2 + HCl$



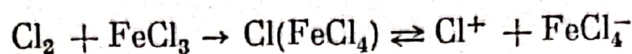
$C_6H_5{-}\dot{C}H_2 + Cl_2 \rightarrow C_6H_5{-}CH_2Cl + Cl^{\bullet}$

. . . .

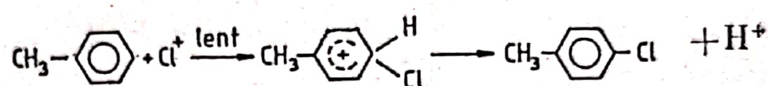


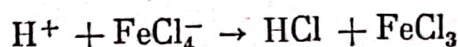
— întrerupere: $Cl^{\bullet} + Cl^{\bullet} \rightarrow Cl_2$; $C_6H_5{-}\dot{C}H_2 + Cl^{\bullet} \rightarrow C_6H_5{-}CH_2Cl$ etc.

Mecanismul clorurării catalitice a toluenului:



$$Cl_2 + FeCl_3 \rightarrow Cl(FeCl_4) \rightleftarrows Cl^+ + FeCl_4^-$$



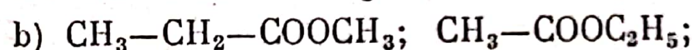


$$H^+ + FeCl_4^- \rightarrow HCl + FeCl_3$$

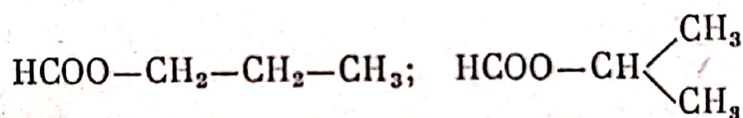
4°. a) Se calculează formula brută și moleculară:

$$C : \frac{6}{12} = 0{,}5;\; H : \frac{1}{1} = 1;\; O : \frac{4}{16} = 0{,}25.$$

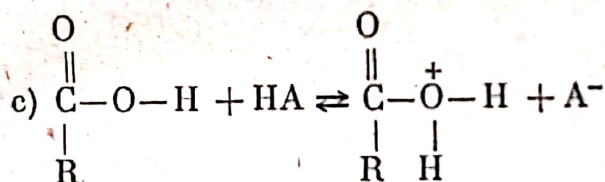
Deci formula brută este C_2H_4O, iar formula moleculară $C_4H_8O_2$ (fiind monoester are doi atomi de oxigen în moleculă).



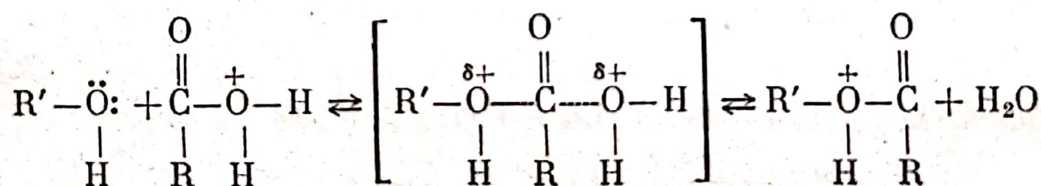
b) $CH_3{-}CH_2{-}COOCH_3$; $CH_3{-}COOC_2H_5$;



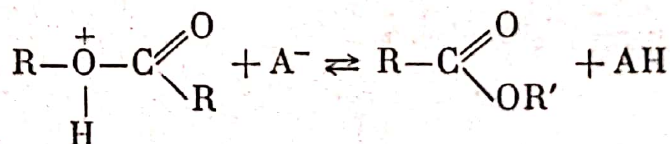
$$HCOO{-}CH_2{-}CH_2{-}CH_3;\quad HCOO{-}CH(CH_3)_2$$



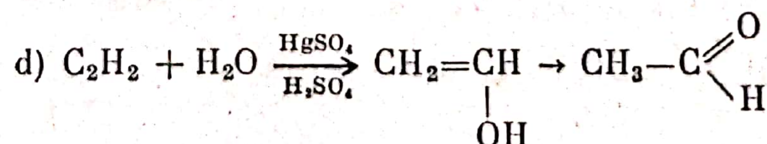
c) $R{-}C(=O){-}O{-}H + HA \rightleftarrows R{-}C(=O){-}\overset{+}{O}H{-}H + A^-$



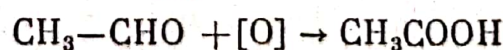
$$R'{-}\ddot{O}H{:} + R{-}C(=O){-}\overset{+}{O}H{-}H \rightleftarrows \left[R'{-}\overset{\delta+}{O}H{-}C(=O)(R){\cdots}\overset{\delta+}{O}H{-}H\right] \rightleftarrows R'{-}\overset{+}{O}H{-}C(=O){-}R + H_2O$$



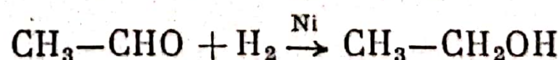
$$R{-}\overset{+}{O}H{-}C(=O){-}R + A^- \rightleftarrows R{-}C(=O){-}OR' + AH$$



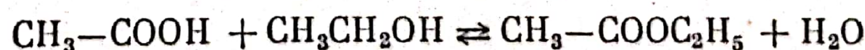
d) $C_2H_2 + H_2O \xrightarrow[H_2SO_4]{HgSO_4} CH_2{=}CH{-}OH \rightarrow CH_3{-}CHO$



$$CH_3{-}CHO + [O] \rightarrow CH_3COOH$$



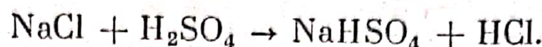
$$CH_3{-}CHO + H_2 \xrightarrow{Ni} CH_3{-}CH_2OH$$



$$CH_3{-}COOH + CH_3CH_2OH \rightleftarrows CH_3{-}COOC_2H_5 + H_2O$$

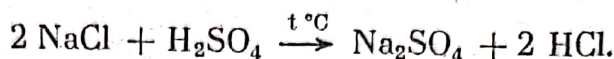
5°. a) Acidul clorhidric se poate obține din NaCl prin mai multe metode din care două prezintă interes practic.

1) Prin tratarea NaCl cu acid sulfuric:



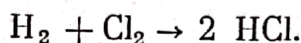
$$NaCl + H_2SO_4 \rightarrow NaHSO_4 + HCl.$$

Acidul clorhidric fiind volatil, reacția are loc în acest sens și de obicei se oprește la acest stadiu la temperatură obișnuită. La temperatură mai ridicată, reacția poate decurge pînă la formarea sulfatului neutru de sodiu:



$$2\ NaCl + H_2SO_4 \xrightarrow{t\ °C} Na_2SO_4 + 2\ HCl.$$

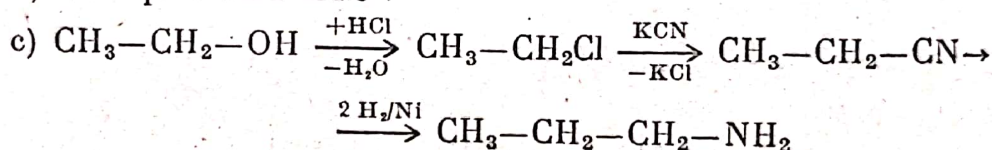
2) Prin electroliza soluției apoase de NaCl (utilizînd diverse procedee cum ar fi cel cu diafragmă sau cu catod de mercur) se obține clor gazos la anod, hidrogen gazos la catod și apoi se poate obține HCl prin sinteza din elemente:



$$H_2 + Cl_2 \rightarrow 2\ HCl.$$

b) Vezi problema IX.5°.

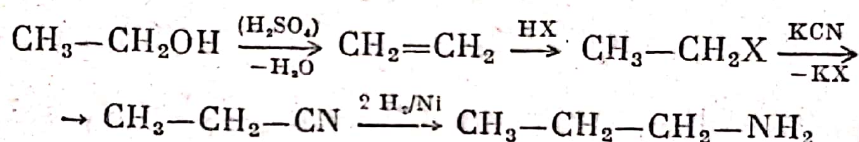
c)



$$CH_3{-}CH_2{-}OH \xrightarrow[-H_2O]{+HCl} CH_3{-}CH_2Cl \xrightarrow[-KCl]{KCN} CH_3{-}CH_2{-}CN \rightarrow$$

$$\xrightarrow{2\ H_2/Ni} CH_3{-}CH_2{-}CH_2{-}NH_2$$

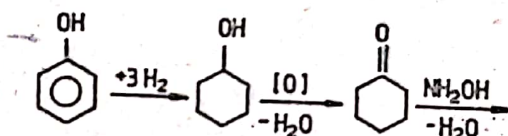
sau:

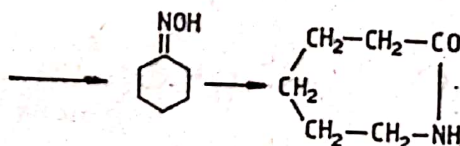


$$CH_3{-}CH_2OH \xrightarrow[-H_2O]{(H_2SO_4)} CH_2{=}CH_2 \xrightarrow{HX} CH_3{-}CH_2X \xrightarrow[-KX]{KCN}$$

$$\rightarrow CH_3{-}CH_2{-}CN \xrightarrow{2\ H_2/Ni} CH_3{-}CH_2{-}CH_2{-}NH_2$$

d)





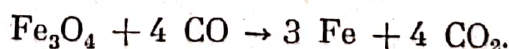
II. 1°. a) Vezi problema XV.1°.

b) Hidrogenul se poate obține prin trecerea vaporilor de apă peste fier înroșit (încălzit pînă la roșu). Reacția ce are loc este:



$$4\ H_2O + 3\ Fe \rightarrow Fe_3O_4 + 4\ H_2.$$

Din oxidul de fier format se poate obține din nou fierul, trecînd peste acesta un curent de oxid de carbon (din gaz de apă):



$$Fe_3O_4 + 4\ CO \rightarrow 3\ Fe + 4\ CO_2.$$

În acest fel aceeași cantitate de fier poate fi folosită de mai multe ori.

2°. Soluția ce trebuie preparată avînd concentrația procentuală 10% (procente de masă) într-un kg soluție vom avea:

100 g sol. .... 10 g $CuSO_4$

1000 g sol. .... X g $CuSO_4$

$$X = 100\ g\ CuSO_4.$$

Se calculează cantitatea de cristalohidrat $CuSO_4 \cdot 5\,H_2O$ care conține 100 g $CuSO_4$

Masa molară a $CuSO_4 \cdot 5\,H_2O = 250$.

Masa molară a $CuSO_4 = 160$.

Deci:

$$\frac{\begin{array}{l} 250 \text{ g } CuSO_4 \cdot 5\,H_2O \ \ldots\ldots\ldots\ldots \ 160 \text{ g } CuSO_4 \\ X \text{ g } CuSO_4 \cdot 5\,H_2O \ \ldots\ldots\ldots\ldots \ 100 \text{ g } CuSO_4 \end{array}}{X = 156{,}25 \text{ g } CuSO_4 \cdot 5H_2O.}$$

Deci pentru prepararea a 1 kg soluție 10% $CuSO_4$ sînt necesare:

$$156{,}25 \text{ g } CuSO_4 \cdot 5H_2O \quad \text{și}$$
$$1\,000 - 156{,}25 = 843{,}75 \text{ g apă.}$$

Densitatea apei fiind 1 g/cm³ volumul de apă necesar va fi

$$v = \frac{843{,}75 \text{ g}}{1 \text{ g/cm}^3} = 843{,}75 \text{ cm}^3.$$

3°. $C_6H_6 + CH_2{=}CH_2 \xrightarrow{AlCl_3} C_6H_5CH_2CH_3$.

Mecanismul reacției:

$$AlCl_3 + 3\,H_2O \rightleftarrows Al(OH)_3 + 3\,HCl$$

$$CH_2 = CH_2 + HCl \rightarrow CH_3{-}CH_2Cl \xrightarrow{AlCl_3} CH_3{-}CH_2AlCl_4 \rightarrow$$

$$\rightarrow CH_3{-}\overset{+}{C}H_2 + AlCl_4^- \text{ sau } CH_2{=}CH_2 \xrightarrow[(H_2SO_4)]{+H^+} CH_3{-}\overset{+}{C}H_2$$

$$C_6H_6 + CH_3\overset{+}{C}H_2 \xrightarrow{lent} \overset{+}{C_6H_5}\!\!<\!\begin{smallmatrix} H \\ CH_2CH_3 \end{smallmatrix} \xrightarrow{rapid} C_6H_5CH_2CH_3 + H^+$$

$$AlCl_4^- + H^+ \rightarrow HCl + AlCl_3.$$

Aplicații:

$$C_6H_5CH_2CH_3 \xrightarrow{cat.} \underset{\text{stiren}}{C_6H_5CH{=}CH_2} + H_2$$

$$C_6H_6 + CH_3{-}CH{=}CH_2 \xrightarrow[\text{sau } H^+]{AlCl_3} \underset{\substack{\text{izopropilbenzen} \\ \text{(cumen)}}}{C_6H_5CH\!<\!\begin{smallmatrix} CH_3 \\ CH_3 \end{smallmatrix}}$$

Mecanismul reacției:

$$CH_3{-}CH{=}CH_2{+}HCl \rightarrow CH_3{-}CHCl{-}CH_3 \xrightarrow{AlCl_3} \underset{\substack{| \\ CH_3}}{CH_3CH}(AlCl_4) \rightarrow$$

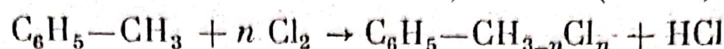
$$\rightarrow CH_3\overset{+}{C}HCH_3 + AlCl_4^- \text{ sau } CH_3{-}CH{=}CH_2 \xrightarrow[+H^+]{H_2SO_4} CH_3{-}\overset{+}{C}H{-}CH_3$$

$$C_6H_6 + \overset{+}{C}H\!<\!\begin{smallmatrix} CH_3 \\ CH_3 \end{smallmatrix} \xrightarrow{lent} \overset{+}{C_6H_5}\!\!<\!\begin{smallmatrix} H \\ CH(CH_3)_2 \end{smallmatrix} \xrightarrow{rapid} C_6H_5{-}CH\!<\!\begin{smallmatrix} CH_3 \\ CH_3 \end{smallmatrix} + H^+$$

$$AlCl_4^- + H^+ \rightarrow AlCl_3 + HCl$$

4°. a) Determinarea formulei moleculare a hidrocarburii A:

$$14n - 6 = 92; \quad n = 7 \ \text{(toluen)}$$



$$C_6H_5-CH_3 + n\,Cl_2 \rightarrow C_6H_5-CH_{3-n}Cl_n + HCl$$

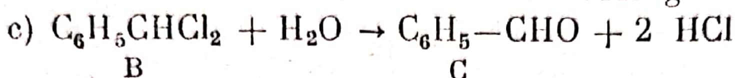
92 kg A .... $n \cdot 22{,}4\ m^3\ Cl_2$

3,68 kg .... $1{,}782\ m^3$

$$n = 2; \quad B = C_6H_5-CHCl_2.$$

b) — număr de moli A: 3680 : 92 = 40 moli;

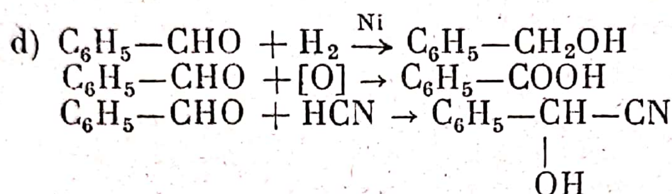
— număr de moli B: = 40 moli = 6440 g.



c) $\underset{B}{C_6H_5CHCl_2} + H_2O \rightarrow \underset{C}{C_6H_5-CHO} + 2\ HCl$

$$40 \text{ moli B} \rightarrow 40 \text{ moli C} = 4240 \text{ g};$$

$$4240 \cdot \frac{75}{100} = 3\,180 \text{ g aldehidă benzoică.}$$



d) $C_6H_5-CHO + H_2 \xrightarrow{Ni} C_6H_5-CH_2OH$

$C_6H_5-CHO + [O] \rightarrow C_6H_5-COOH$

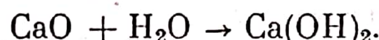
$C_6H_5-CHO + HCN \rightarrow C_6H_5-\underset{\displaystyle OH}{\underset{|}{CH}}-CN$

III. 1°. a) Prin încălzire la cca 1 000°C are loc descompunerea calcarului:



$$CaCO_{3(s)} \rightleftarrows CaO_{(s)} + CO_{2(g)}.$$

Reacția este reversibilă dar prin îndepărtarea CO_2 din sistem se obține CaO (varul). Prin tratare cu apă (stingerea varului) se obține hidroxidul de calciu:

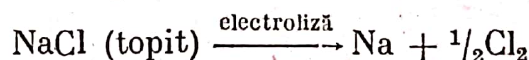


$$CaO + H_2O \rightarrow Ca(OH)_2.$$

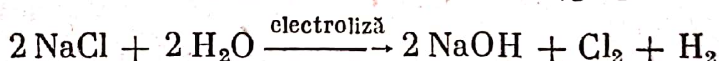
Această reacție este puternic exotermă.

b) Practic se obține numai prin electroliză.

Electroliza se poate face în topitură sau în soluție:



$$NaCl\ (\text{topit}) \xrightarrow{\text{electroliză}} Na + {}^1/_2Cl_2$$



$$2\,NaCl + 2\,H_2O \xrightarrow{\text{electroliză}} 2\,NaOH + Cl_2 + H_2$$

În principiu clorul se mai poate obține din NaCl prin acțiunea unui alt halogen cu caracter oxidant mai puternic decît clorul, adică prin acțiunea fluorului:



$$2\ NaCl + F_2 \rightarrow 2\ NaF + Cl_2$$

Reacția însă nu prezintă interes practic.

2°. Pentru a obține concentrația procentuală a soluției rezultate se calculează masele celor două soluții care se amestecă:

$m_1 = V_1\rho_1 = 4\,000\ cm^3 \cdot 1{,}53\ g/cm^3 = 6\,120$ g sol. de concentrație 63%.

$m_2 = V_2\rho_2 = 6\,000\ cm^3 \cdot 1{,}14\ g/cm^3 = 6\,840$ g sol. de concentrație 2 M.

Masa soluției obținute:

$$m = m_1 + m_2 = 12\,960 \text{ g.}$$

Prima soluție conține:

$$m_1 \cdot \frac{63}{100} = 3\,855{,}6 \text{ g } H_2SO_4.$$

Cea de a doua soluție conține

$$6 \times 2 \times 98 = 1\,176 \text{ g } H_2SO_4.$$

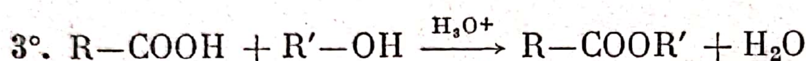
Total acid în soluția obținută 1 176 + 3 855,6 = 5 031,6 g H_2SO_4. Deci concentrația procentuală (în procente de masă) va fi:

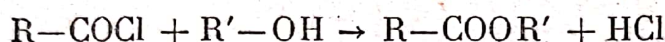
$$\begin{array}{ll} 12\,960 \text{ g sol.} \ldots\ldots\ldots\ldots & 5\,031,6 \text{ g } H_2SO_4 \\ 100 \text{ g sol.} \ldots\ldots\ldots\ldots & X \\ \hline \multicolumn{2}{c}{X = 38,82\%.} \end{array}$$

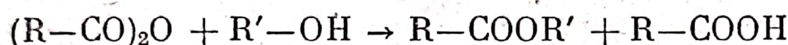
Pentru calculul concentrației molare se calculează volumul total al soluției obținute care este 10 l (căci amestecarea are loc fără variație de volum). Numărul de moli de acid sulfuric din această soluție este

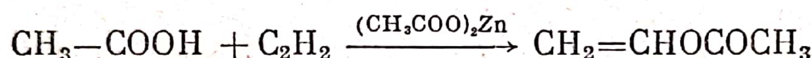
$$n = \frac{5\,031,6}{98} = 51,34 \text{ moli.}$$

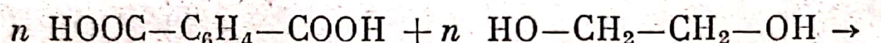
Deci la 1 l soluție revin 5,134 moli și concentrația molară a acestei soluții este 5,134 M.



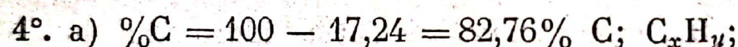












$$C : \frac{82,76}{12} = 6,896;$$

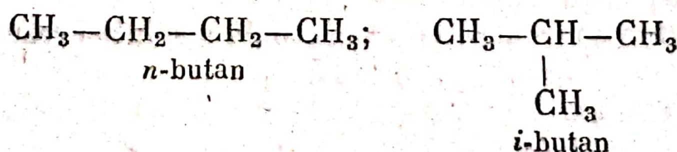
$$H : \frac{17,24}{1} = 17,24; \quad x = 1; \quad y = 2,5;$$

deci: $x = 2$; $y = 5$.

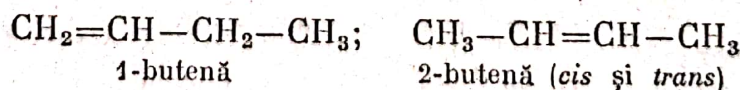
Formula brută: C_2H_5.

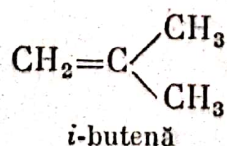
Nu există hidrocarburi cu număr impar de atomi de hidrogen, deci formula A este C_4H_{10}; această formulă moleculară se încadrează în formula generală a alcanilor. Hidrocarbura B rezultată prin dehidrogenare are formula $(CH_2)_n$ și este deci o alchenă cu formula moleculară C_4H_8.

b) Hidrocarbura A are următorii izomeri:

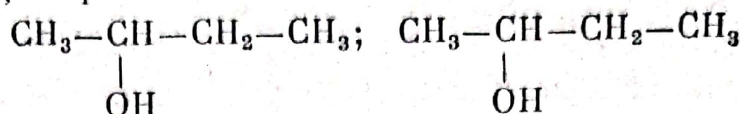


Hidrocarbura B are următorii izomeri:

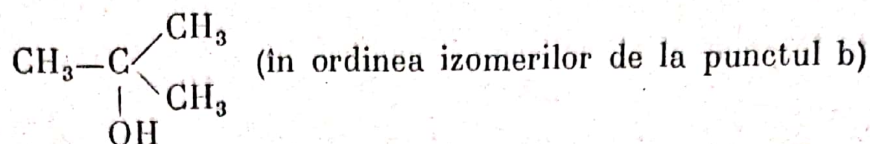




c) Prin adiția apei rezultă:



$$CH_3-\underset{\displaystyle OH}{\underset{|}{CH}}-CH_2-CH_3; \quad CH_3-\underset{\displaystyle OH}{\underset{|}{CH}}-CH_2-CH_3$$



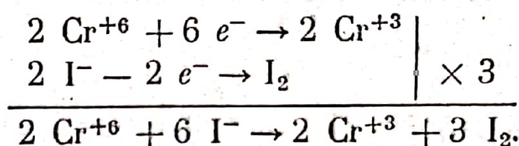
$$CH_3-\underset{\displaystyle OH}{\underset{|}{C}}(CH_3)_2$$ (în ordinea izomerilor de la punctul b)

d) $\nu_B = \frac{14}{22,4} = 0,625$ kmoli B; la un randament de 80% rezultă $0,625 \cdot \frac{80}{100} =$ $= 0,5$ kmoli B.

Cantitatea de butenă este egală cu $0,5 \cdot 56 = 28$ kg.

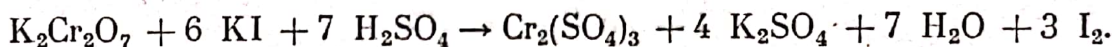
IV. 1°. a) Reacția nu este posibilă fiind vorba de acțiunea unui acid slab (acidul carbonic) asupra sării unui acid tare (acidul clorhidric).

b) Este o reacție de oxido-reducere în care dicromatul de potasiu oxidează iodura de potasiu. Cromul se reduce trecînd de la starea de oxidare +6, în dicromat, la starea de oxidare +3, în sulfatul de crom, pe cînd iodul se oxidează de la starea de oxidare −1, în iodura de potasiu, la starea de oxidare zero, în iodul elementar:



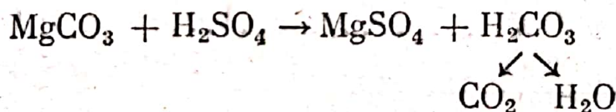
$$\begin{array}{l|l} 2\ Cr^{+6} + 6\ e^- \rightarrow 2\ Cr^{+3} & \\ 2\ I^- - 2\ e^- \rightarrow I_2 & \times 3 \\ \hline 2\ Cr^{+6} + 6\ I^- \rightarrow 2\ Cr^{+3} + 3\ I_2. & \end{array}$$

Reacția completă va fi:



$$K_2Cr_2O_7 + 6\ KI + 7\ H_2SO_4 \rightarrow Cr_2(SO_4)_3 + 4\ K_2SO_4 + 7\ H_2O + 3\ I_2.$$

c) Reacția este posibilă deoarece acidul sulfuric (acid tare) acționează asupra sării unui acid slab (acidul carbonic) pe care îl scoate din sarea sa. Acidul carbonic fiind instabil se descompune în CO_2 și H_2O. Ecuația reacției este următoarea:



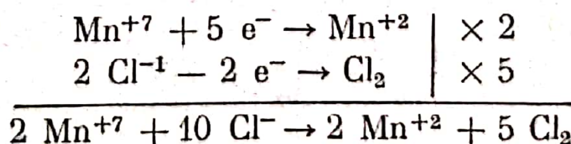
$$MgCO_3 + H_2SO_4 \rightarrow MgSO_4 + H_2CO_3 \quad (H_2CO_3 \rightarrow CO_2 + H_2O)$$

d) Reacția nu este posibilă deoarece clorura de argint este insolubilă în acid azotic.

e) Este o reacție de oxido-reducere în care permanganatul de potasiu oxidează acidul clorhidric la clor elementar.

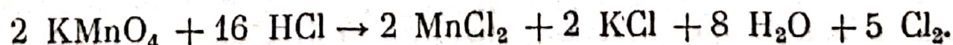
Manganul se reduce de la starea de oxidare +7, în permanganat, la starea de oxidare +2, în clorura de mangan, iar clorul se oxidează de la starea de oxidare −1, în acidul clorhidric, la starea de oxidare zero, în clorul elementar.

Reacția constituie o metodă de preparare a clorului în laborator.



$$\begin{array}{l|l} Mn^{+7} + 5\ e^- \rightarrow Mn^{+2} & \times 2 \\ 2\ Cl^{-1} - 2\ e^- \rightarrow Cl_2 & \times 5 \\ \hline 2\ Mn^{+7} + 10\ Cl^- \rightarrow 2\ Mn^{+2} + 5\ Cl_2 & \end{array}$$

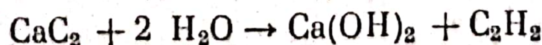
Reacția completă este:



$$2\ KMnO_4 + 16\ HCl \rightarrow 2\ MnCl_2 + 2\ KCl + 8\ H_2O + 5\ Cl_2.$$



2°. a) $CaO + H_2O \rightarrow Ca(OH)_2$



$CaC_2 + 2\ H_2O \rightarrow Ca(OH)_2 + C_2H_2$

În prima reacție oxidul de calciu (varul nestins) prin reacția cu apa trece în hidroxid de calciu (var stins). În cea de a doua reacție carbura de calciu, numită și carbid, prin reacție cu apa formează acetilena și hidroxid de calciu.

b) Fie X masa oxidului de calciu exprimată în g și Y masa carburii de calciu exprimată de asemenea în g.

Se calculează masele moleculare:

$$M_{CaO} = 56; \qquad M_{CaC_2} = 64$$
$$M_{Ca(OH)_2} = 74 \qquad M_{H_2O} = 18.$$

Pe baza ecuațiilor reacțiilor chimice se calculează în funcție de X și Y cantitățile de $Ca(OH)_2$ care rezultă din cele două reacții:

56 g CaO .... 74 g $Ca(OH)_2$
X g CaO .... m_1 g $Ca(OH)_2$

$$m_1 = \frac{74\ X}{56} \text{ g } Ca(OH)_2.$$

64 g CaC_2 .... 74 g $Ca(OH)_2$
Y g CaC_2 .... m_2 g $Ca(OH)_2$

$$m_2 = \frac{74\ Y}{64} \text{ g } Ca(OH)_2.$$

Cantitatea totală de $Ca(OH)_2$ obținută dă prima ecuație care leagă cele două necunoscute:

$$\frac{74\ X}{56} + \frac{74\ Y}{64} = 296.$$

În mod analog se calculează cantitatea de apă care reacționează cu cele X g de CaO și, respectiv, Y g de CaC_2:

56 g CaO .... 18 g H_2O
X g CaO .... m_3 g H_2O

$$m_3 = \frac{18\ X}{56} \text{ g } H_2O.$$

64 g CaC_2 .... $2 \cdot 18$ g H_2O
Y g CaC_2 .... m_4 g H_2O

$$m_4 = \frac{36\ Y}{64} \text{ g } H_2O.$$

Cantitatea totală de apă ce rezultă din cele două reacții reprezintă cea de a doua ecuație necesară pentru rezolvarea sistemului:

$$\frac{18\ X}{56} + \frac{36\ Y}{64} = 108.$$

Simplificînd prima ecuație cu 74 și cea de a doua cu 18 rezultă:

$$\frac{X}{56} + \frac{Y}{64} = 4$$

$$\frac{X}{56} + \frac{2Y}{64} = 6.$$

Rezolvînd şi sistemul se obţine:

$$X = 112 \text{ g CaO}; \qquad Y = 128 \text{ g } CaC_2.$$

Deci sistemul iniţial are masa

$$m = X + Y = 240 \text{ g}.$$

c) Numărul de moli de CaO din amestec este $n_1 = \frac{112}{56} = 2$ moli, iar cel de CaC_2 este $n_2 = \frac{128}{64} = 2$ moli.

Deci amestecul este echimolecular.

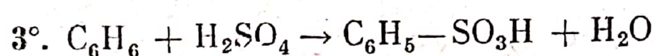
Compoziţia în procente de masă va fi:

240 g amestec .... 112 g CaO
100 g amestec X

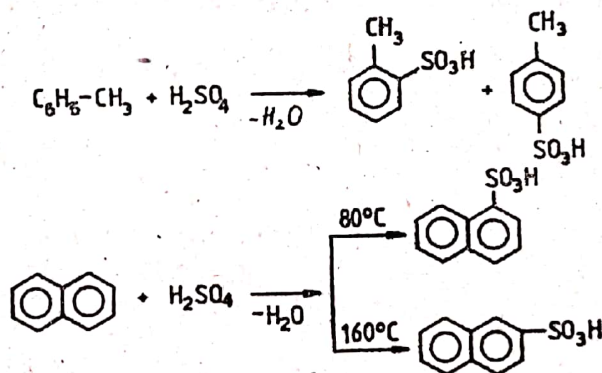
$$X = 46{,}67\% \text{ CaO}$$

240 g amestec .... 128 g CaO
100 g amestec .... Y

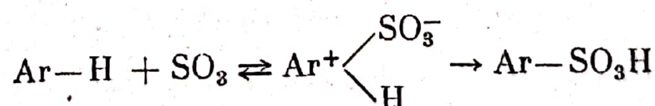
$$Y = 53{,}33\% \; CaC_2.$$



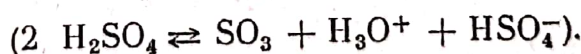
3°. $C_6H_6 + H_2SO_4 \rightarrow C_6H_5{-}SO_3H + H_2O$



Mecanismul reacţiei de sulfonare a arenelor:

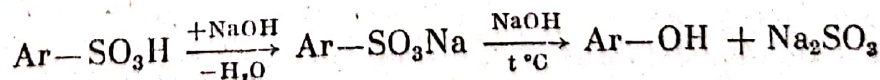


$$Ar{-}H + SO_3 \rightleftarrows Ar^{+}\!\left\langle\begin{matrix} SO_3^- \\ H \end{matrix}\right. \rightarrow Ar{-}SO_3H$$

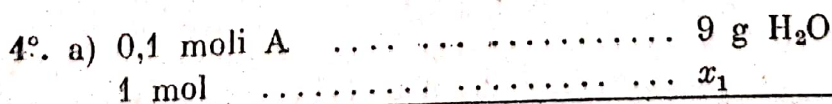


$$(2\ H_2SO_4 \rightleftarrows SO_3 + H_3O^+ + HSO_4^-).$$

Obţinerea fenolilor din acizi sulfonici aromatici:



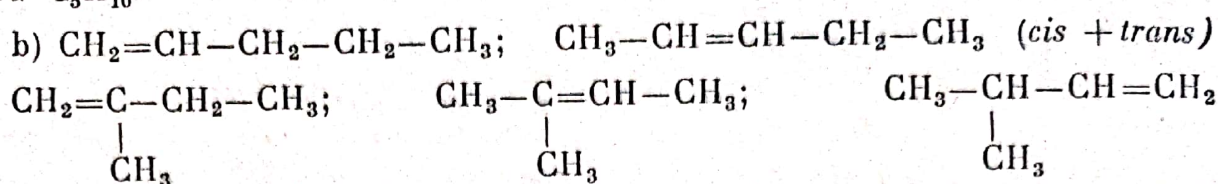
$$Ar{-}SO_3H \xrightarrow[-H_2O]{+NaOH} Ar{-}SO_3Na \xrightarrow[t\,°C]{NaOH} Ar{-}OH + Na_2SO_3$$



4°. a) 0,1 moli A .... 9 g H_2O
1 mol .... x_1

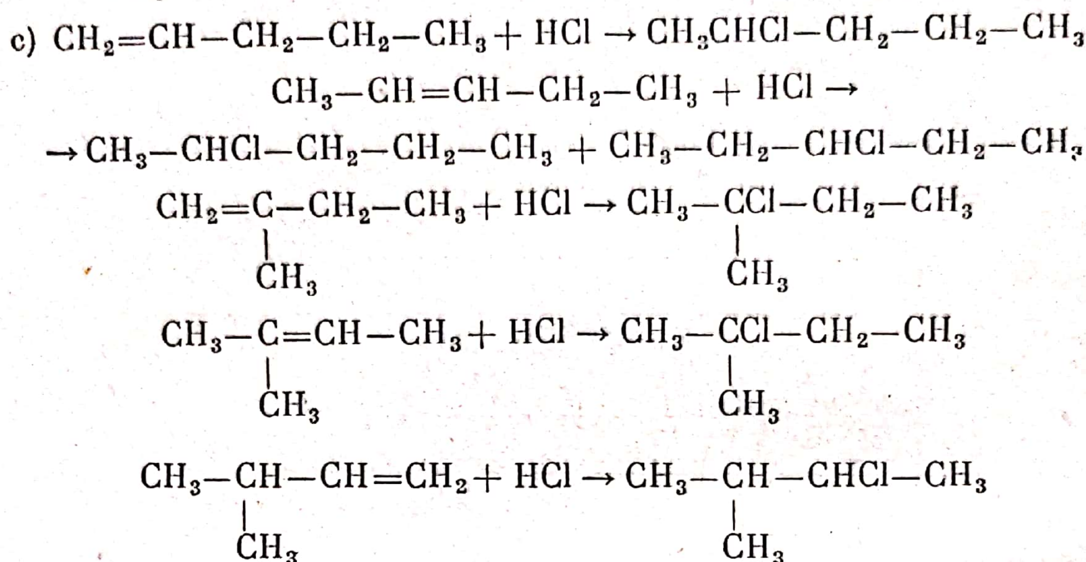
$$x_1 = 90 \text{ g } H_2O$$
$$90 : 18 = 5 \text{ moli } H_2O.$$

Deci A are 10 atomi de hidrogen în moleculă şi-i corespunde formula moleculară C_5H_{10}.



b) $CH_2{=}CH{-}CH_2{-}CH_2{-}CH_3$; $CH_3{-}CH{=}CH{-}CH_2{-}CH_3$ (*cis* + *trans*)

$CH_2{=}\underset{\substack{|\\ CH_3}}{C}{-}CH_2{-}CH_3$; $CH_3{-}\underset{\substack{|\\ CH_3}}{C}{=}CH{-}CH_3$; $CH_3{-}\underset{\substack{|\\ CH_3}}{CH}{-}CH{=}CH_2$



c) $CH_2{=}CH{-}CH_2{-}CH_2{-}CH_3 + HCl \rightarrow CH_3CHCl{-}CH_2{-}CH_2{-}CH_3$

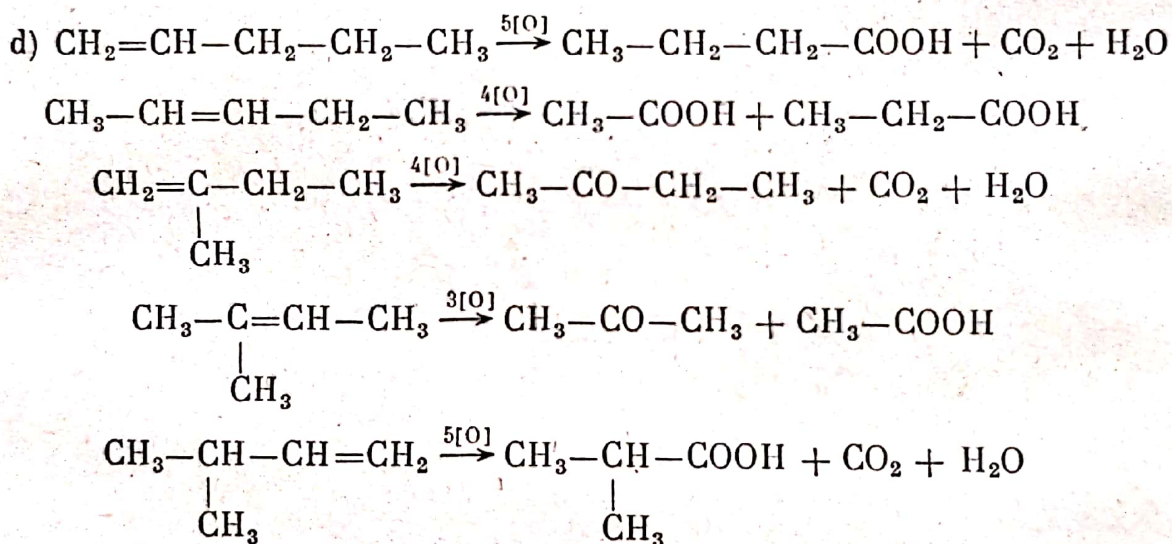
$$CH_3{-}CH{=}CH{-}CH_2{-}CH_3 + HCl \rightarrow$$

$$\rightarrow CH_3{-}CHCl{-}CH_2{-}CH_2{-}CH_3 + CH_3{-}CH_2{-}CHCl{-}CH_2{-}CH_3$$

$$CH_2{=}\underset{\substack{|\\ CH_3}}{C}{-}CH_2{-}CH_3 + HCl \rightarrow CH_3{-}\underset{\substack{|\\ CH_3}}{CCl}{-}CH_2{-}CH_3$$

$$CH_3{-}\underset{\substack{|\\ CH_3}}{C}{=}CH{-}CH_3 + HCl \rightarrow CH_3{-}\underset{\substack{|\\ CH_3}}{CCl}{-}CH_2{-}CH_3$$

$$CH_3{-}\underset{\substack{|\\ CH_3}}{CH}{-}CH{=}CH_2 + HCl \rightarrow CH_3{-}\underset{\substack{|\\ CH_3}}{CH}{-}CHCl{-}CH_3$$



d) $CH_2{=}CH{-}CH_2{-}CH_2{-}CH_3 \xrightarrow{5[O]} CH_3{-}CH_2{-}CH_2{-}COOH + CO_2 + H_2O$

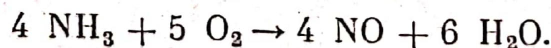
$$CH_3{-}CH{=}CH{-}CH_2{-}CH_3 \xrightarrow{4[O]} CH_3{-}COOH + CH_3{-}CH_2{-}COOH$$

$$CH_2{=}\underset{\substack{|\\ CH_3}}{C}{-}CH_2{-}CH_3 \xrightarrow{4[O]} CH_3{-}CO{-}CH_2{-}CH_3 + CO_2 + H_2O$$

$$CH_3{-}\underset{\substack{|\\ CH_3}}{C}{=}CH{-}CH_3 \xrightarrow{3[O]} CH_3{-}CO{-}CH_3 + CH_3{-}COOH$$

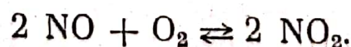
$$CH_3{-}\underset{\substack{|\\ CH_3}}{CH}{-}CH{=}CH_2 \xrightarrow{5[O]} CH_3{-}\underset{\substack{|\\ CH_3}}{CH}{-}COOH + CO_2 + H_2O$$

5°. a) Acidul azotic se obţine industrial prin oxidarea catalitică a amoniacului, proces în care rezultă oxizi de azot care apoi sînt absorbiţi în apă. Principala reacţie de oxidare a amoniacului este:



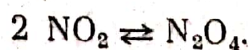
$$4\ NH_3 + 5\ O_2 \rightarrow 4\ NO + 6\ H_2O.$$

Reacţia este catalizată de un aliaj de platină cu 3—5% rodiu.
Urmează oxidarea oxidului de azot la dioxid:



$$2\ NO + O_2 \rightleftarrows 2\ NO_2.$$

Reacţia avînd loc cu contracţie de volum va fi favorizată de creşterea presiunii. La temperaturi joase dioxidul de azot dimerizează:

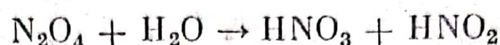


$$2\ NO_2 \rightleftarrows N_2O_4.$$

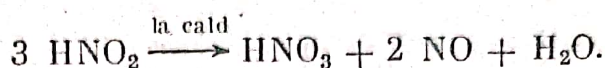
Amestecul de gaze nitroase ce conţine NO_2, N_2O_4 şi NO este supus absorbţiei în apă. Reacţiile principale ce au loc sînt:



$$2\ NO_2 + H_2O \rightarrow 2\ HNO_3 + NO$$



$$N_2O_4 + H_2O \rightarrow HNO_3 + HNO_2$$

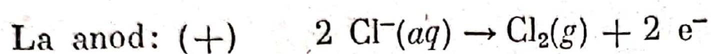


$$3\ HNO_2 \xrightarrow{\text{la cald}} HNO_3 + 2\ NO + H_2O.$$

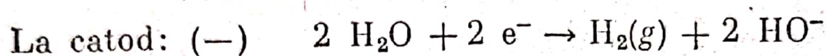
Oxidul de azot este reintrodus în proces. Procesele de absorbţie sînt favorizate de temperatură scăzută şi presiune ridicată.

b) Hidroxidul de sodiu se poate obţine din clorura de sodiu prin electroliza acesteia în soluţii apoase concentrate.

Reacţiile care au loc sînt:

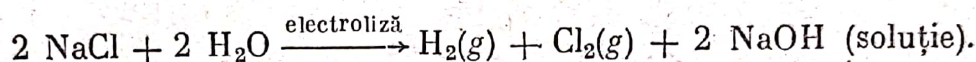


La anod: (+) $2\ Cl^-(aq) \rightarrow Cl_2(g) + 2\ e^-$



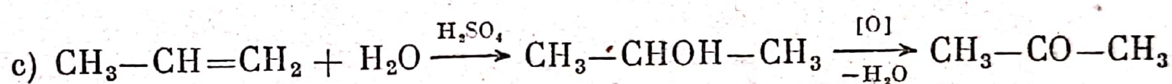
La catod: (—) $2\ H_2O + 2\ e^- \rightarrow H_2(g) + 2\ HO^-$

Reacţia totală:

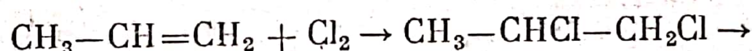


$$2\ NaCl + 2\ H_2O \xrightarrow{\text{electroliză}} H_2(g) + Cl_2(g) + 2\ NaOH\ \text{(soluţie)}.$$

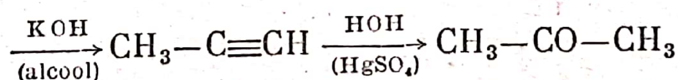
În practica industrială se folosesc în principal două procedee şi anume procedeul cu catod de mercur şi procedeul cu diafragmă (vezi manualul pentru clasa a XI-a).



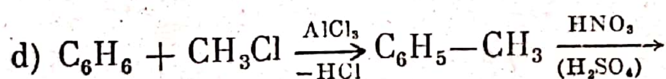
c) $CH_3{-}CH{=}CH_2 + H_2O \xrightarrow{H_2SO_4} CH_3{-}CHOH{-}CH_3 \xrightarrow[-H_2O]{[O]} CH_3{-}CO{-}CH_3$



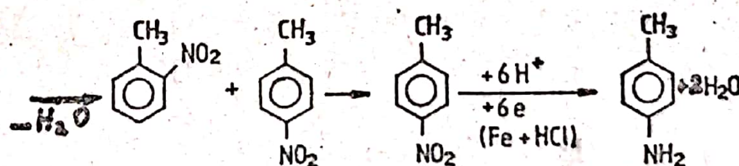
$$CH_3{-}CH{=}CH_2 + Cl_2 \rightarrow CH_3{-}CHCl{-}CH_2Cl \rightarrow$$



$$\xrightarrow[\text{(alcool)}]{KOH} CH_3{-}C{\equiv}CH \xrightarrow[(HgSO_4)]{HOH} CH_3{-}CO{-}CH_3$$



d) $C_6H_6 + CH_3Cl \xrightarrow[-HCl]{AlCl_3} C_6H_5{-}CH_3 \xrightarrow[(H_2SO_4)]{HNO_3}$

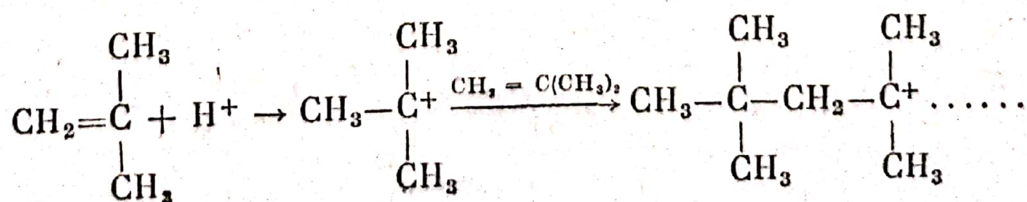


V.1°. Reacţiile acetilenei cu hidrogenul, acidul clorhidric, apa, acidul cianhidric şi acidul acetic. Mecanismul adiţiei electrofile. Dimerizarea şi trimerizarea acetilenei.

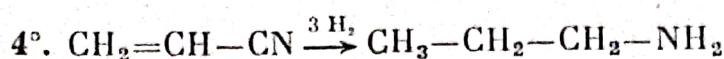
2°. Amidon. Stare naturală. Compoziţie.

Formulă moleculară. Proprietăţi. Utilizări.

3°. $HA \rightleftarrows H^+ + A^-$



$$CH_2{=}C(CH_3)_2 + H^+ \rightarrow CH_3{-}C^+(CH_3)_2 \xrightarrow{CH_2=C(CH_3)_2} CH_3{-}C(CH_3)_2{-}CH_2{-}C^+(CH_3)_2 \ldots\ldots$$



4°. $CH_2{=}CH{-}CN \xrightarrow{3\,H_2} CH_3{-}CH_2{-}CH_2{-}NH_2$

53 g acrilonitril .... 59 g propilamină

X .... 295 g

$X = 265$ g (pentru $\eta = 100\%$)

$265 \cdot \frac{100}{92} = 288$ g (pentru $\eta = 92\%$).

VI. 1°. Subiectul se poate trata după următorul plan:

Definiţia clorurilor acide. Formulă generală. Metode de obţinere. Proprietăţi chimice (reacţiile cu arene, alcooli, fenoli, amoniac, amine; reacţia de hidroliză).

2°. Planul orientativ de tratare a acestui subiect este următorul:

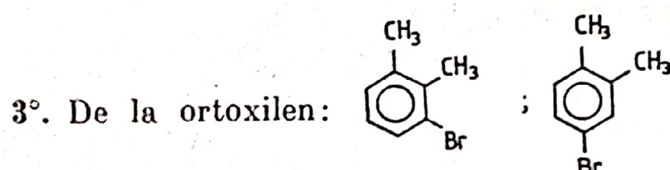
Definiţia reacţiei de substituţie electrofilă. Mecanismul general al reacţiei de substituţie electrofilă la arene.

Exemple de reacţii de substituţie electrofilă la arene (halogenarea, nitrarea, sulfonarea, alchilarea, acilarea).

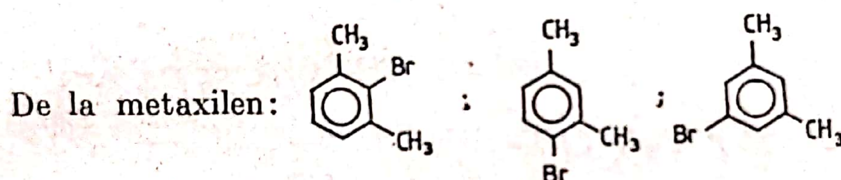
Orientarea substituţiei electrofile la arene.

Hidroliza derivaţilor organomagnezieni.

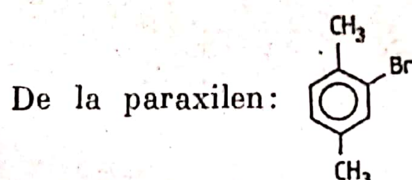
3°. De la ortoxilen:



De la metaxilen:



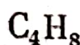
De la paraxilen:



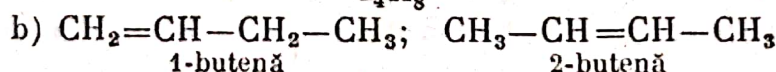
4°. a) Stabilirea formulei moleculare:

$$C : \frac{85{,}15 \cdot 56}{12 \cdot 100} = 4 \text{ at. de C}$$

$$H : \frac{14{,}2 \cdot 56}{1 \cdot 100} = 8 \text{ at. de H}$$

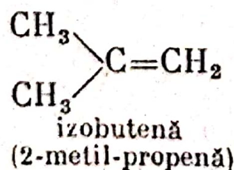


C_4H_8

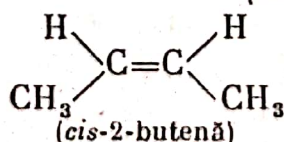


b) $CH_2{=}CH{-}CH_2{-}CH_3$; $CH_3{-}CH{=}CH{-}CH_3$

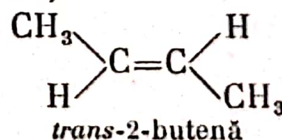
1-butenă; 2-butenă (*cis* + *trans*)



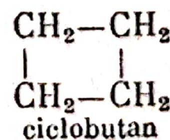
izobutenă (2-metil-propenă)



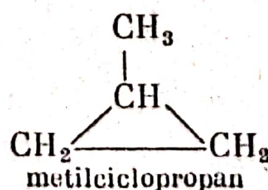
(*cis*-2-butenă)



trans-2-butenă



ciclobutan



metilciclopropan

c) 1-butenă cu 2-butenă — izomeri de poziţie,
izobutena cu 1-butena sau cu 2-butena — izomeri de catenă
cis- şi *trans*-2-butena — izomeri geometrici.

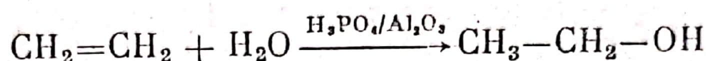
VII. 1°. Subiectul se poate trata după următorul plan orientativ:

Formula structurală şi denumirea raţională a glicerinei. Metode de obţinere. Proprietăţi fizice şi chimice. Utilizări.

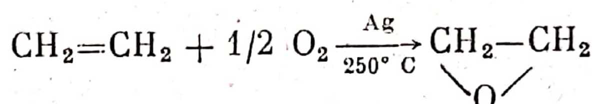
2°. Definiţia aminoacizilor. Formulă generală.

Proprietăţi fizice. Proprietăţi chimice (ionizarea, reacţii datorate grupei carboxil şi reacţii datorate grupei amino; condensarea aminoacizilor cu formarea de peptide simple şi mixte).

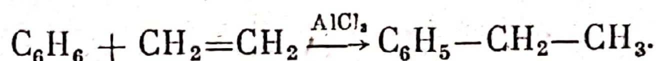
3°. $nCH_2{=}CH_2 \rightarrow (CH_2{-}CH_2)_n$



$$CH_2{=}CH_2 + H_2O \xrightarrow{H_3PO_4/Al_2O_3} CH_3{-}CH_2{-}OH$$



$$CH_2{=}CH_2 + 1/2\ O_2 \xrightarrow[250°\ C]{Ag} CH_2{-}CH_2 \text{ (ciclu cu O)}$$



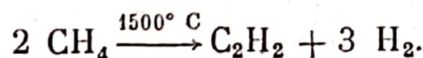
$$C_6H_6 + CH_2{=}CH_2 \xrightarrow{AlCl_3} C_6H_5{-}CH_2{-}CH_3.$$

4°. $CaC_2 + 2\ H_2O \rightarrow C_2H_2 + Ca(OH)_2$

64 g CaC_2 .... 22,4 l C_2H_2
x_1 .... 134,4 l

$x_1 = 384$ g CaC_2 pură

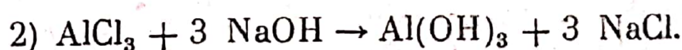
$384 \cdot \frac{100}{85} = 451{,}7$ g CaC_2 de puritate 85%



$$2\ CH_4 \xrightarrow{1500°\ C} C_2H_2 + 3\ H_2.$$

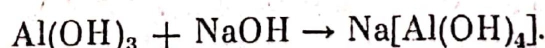
Volumul de metan: $2 \cdot 134{,}4 \cdot \frac{100}{60} = 448$ l.

VIII. 1°. a) 1) $4\ FeCl_3 + 3\ K_4[Fe(CN)_6] \rightarrow Fe_4[Fe(CN)_6]_3 + 12\ KCl$



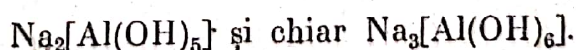
2) $AlCl_3 + 3\ NaOH \rightarrow Al(OH)_3 + 3\ NaCl.$

În exces de NaOH:

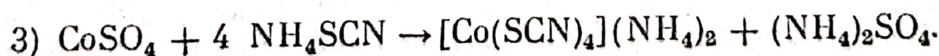


$$Al(OH)_3 + NaOH \rightarrow Na[Al(OH)_4].$$

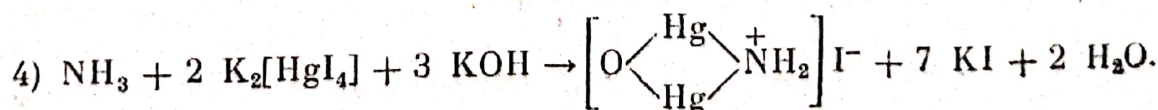
Se mai poate forma de asemenea:



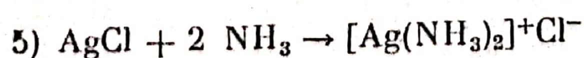
$Na_2[Al(OH)_5]$ şi chiar $Na_3[Al(OH)_6]$.



3) $CoSO_4 + 4\ NH_4SCN \rightarrow [Co(SCN)_4](NH_4)_2 + (NH_4)_2SO_4.$



4) $NH_3 + 2\ K_2[HgI_4] + 3\ KOH \rightarrow \left[O\begin{smallmatrix}Hg\\Hg\end{smallmatrix}\overset{+}{N}H_2\right]I^- + 7\ KI + 2\ H_2O.$



5) $AgCl + 2\ NH_3 \rightarrow [Ag(NH_3)_2]^+Cl^-$

b) 1) Se obţine un precipitat albastru (albastru de Berlin) şi clorură de potasiu. Denumirea chimică a albastrului de Berlin este hexacianoferat (II) de fier (III).

2) În prima etapă rezultă precipitatul de hidroxid de aluminiu şi clorură de sodiu. Într-un exces de hidroxid de sodiu precipitatul de hidroxid de aluminiu se dizolvă formînd combinaţia complexă al cărei nume este tetrahidroxoaluminat de sodiu. În exces mare de NaOH pot rezulta de asemenea pentahidroxoaluminat (III) de sodiu şi hexahidroxoaluminat (III) de sodiu.

3) Se formează o combinaţie complexă a cobaltului divalent de culoare albastră intensă, denumită tetrasulfocianocobaltiat (II) de amoniu. Rezultă de asemenea sulfat de amoniu.

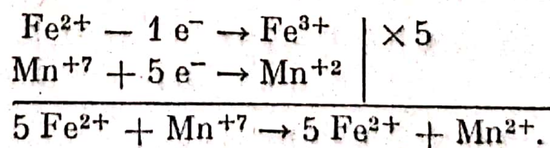
4) Prin acţiunea iodurii de potasiu asupra clorurii de mercur (II) se formează mai întîi un precipitat roşu de HgI_2 care se dizolvă în exces de KI formînd combinaţia complexă $K_2[HgI_4]$ — tetraiodomercuriat (II) de potasiu, denumită şi reactivul lui Nessler. Acesta în prezenţa hidroxidului de potasiu poate fi folosit pentru recunoaşterea amoniacului sau a ionilor amoniu cu care formează un precipitat roşu brun ce are structura $\left[O\begin{matrix}\diagup Hg \diagdown \\ \diagdown Hg \diagup\end{matrix}\overset{+}{N}H_2\right]I^-$. Rezultă de asemenea iodură de potasiu şi apă.

5) Un exces de amoniac dizolvă precipitatul de clorură de argint formînd combinaţia complexă numită clorură de diamino argint (I).

2°. Subiectul se tratează conform manualelor de liceu pentru clasele a IX-a şi a XI-a urmărindu-se următoarele probleme: Definiţia electrolizei. Fenomenele redox ce au loc la electrozi. Reacţii primare şi reacţii secundare la electrozi. Justificarea ordinei în care se descarcă ionii la electrozi în cazul electrolizei soluţiilor apoase. Supratensiunea. Electroliza soluţiei de sulfat de cupru cu electrozi inerţi (din platină sau cărbune). Reacţii la anod şi la catod. Reacţia globală. Electroliza soluţiei apoase de sulfat de cupru cu electrozi din cupru. Reacţii la electrozi, dizolvarea anodică a cuprului. Rafinarea electrolitică a cuprului. Acoperiri metalice prin depuneri electrolitice, procesul de cuprare.

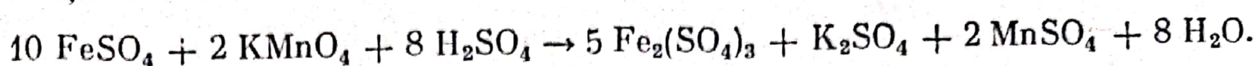
3°. Subiectul se tratează conform manualelor de liceu pentru clasele a IX-a şi a XI-a, avîndu-se în vedere următoarele probleme: Reacţii reversibile şi ireversibile. Exemple. Conceptul de echilibru chimic. Condiţia termodinamică de echilibru chimic. Factori care influenţează starea de echilibru. Principiul lui Le Chatelier. Influenţa presiunii asupra echilibrelor chimice în gaze. Cazul reacţiilor fără variaţia numărului de moli, cînd presiunea nu influenţează echilibrul chimic. Expresia constantei de echilibru K_p funcţie de gradul de avansare a reacţiei. Exemple de asemenea reacţii. Cazul reacţiilor chimice cu variaţia numărului de moli. Expresia constantei de echilibru în funcţie de gradul de avansare a reacţiei şi presiunea totală. Exemple de asemenea reacţii de echilibru. Aplicaţii practice ale deplasării echilibrelor chimice în sisteme gazoase prin intermediul presiunii. Sinteza amoniacului.

4°. a) Oxidarea ionilor Fe^{2+} la Fe^{3+} cu ajutorul permanganatului de potasiu în mediu de acid sulfuric este un proces redox în care fierul se oxidează de la starea de oxidare +2 la starea de oxidare +3, iar manganul din permanganat se reduce de la starea de oxidare +7 la starea de oxidare +2 (în sulfatul de mangan):



$$Fe^{2+} - 1\,e^- \rightarrow Fe^{3+} \quad | \times 5$$
$$Mn^{+7} + 5\,e^- \rightarrow Mn^{+2}$$
$$5\,Fe^{2+} + Mn^{+7} \rightarrow 5\,Fe^{3+} + Mn^{2+}.$$

Reacţia totală:



$$10\,FeSO_4 + 2\,KMnO_4 + 8\,H_2SO_4 \rightarrow 5\,Fe_2(SO_4)_3 + K_2SO_4 + 2\,MnSO_4 + 8\,H_2O.$$

În procesele redox echivalentul-gram este raportul dintre masa molară şi variaţia numărului de oxidare, deci:

$$E_{FeSO_4} = 1 \text{ mol} \text{ şi } E_{KMnO_4} = 1 \text{ mol}/5.$$

Se calculează numărul de moli de $FeSO_4$ existenţi în cei 50 ml soluţie utilizată:

$$\frac{\begin{array}{l} 1\,000 \text{ ml sol.} \ldots\ldots\ldots\, 0{,}3 \text{ Eg} = 0{,}3 \text{ moli } Fe^{2+} \\ 50 \text{ ml sol.} \ldots\ldots\ldots\, X \end{array}}{X = 0{,}015 \text{ moli } FeSO_4.}$$

Conform ecuaţiei reacţiei chimice:

$$\frac{\begin{array}{l} 10 \text{ moli } FeSO_4 \ldots\ldots\ldots\, 2 \text{ moli } KMnO_4 \\ 0{,}015 \text{ moli } FeSO_4 \ldots\ldots\ldots\, Y \end{array}}{Y = 0{,}003 \text{ moli } KMnO_4.}$$

Deci soluţia de permanganat de potasiu a conţinut 0,003 moli, adică 0,015 echivalenţi-gram, în 30 ml de soluţie. Deci normalitatea ei este:

$$\frac{\begin{array}{l} 30 \text{ ml sol.} \ldots\ldots\ldots\, 0{,}015 \text{ Eg} \\ 1\,000 \text{ ml sol.} \ldots\ldots\ldots\, Z \end{array}}{Z = 0{,}5 \text{ N.}}$$

Observaţie: Problema se poate rezolva şi mult mai simplu dacă se are în vedere că ţinînd cont de faptul că numărul de electroni cedaţi într-un proces redox trebuie să fie egal cu numărul de electroni acceptaţi în acelaşi proces, ceea ce conduce la relaţia:

$$N_{Ox} \cdot V_{Ox} = N_{red} \cdot V_{red}$$

unde N_{Ox} şi V_{Ox} sînt normalitatea şi, respectiv, volumul soluţiei de oxidant, iar N_{red} şi V_{red} normalitatea şi, respectiv, volumul soluţiei de reducător. Deci:

$$N_{KMnO_4} \cdot V_{KMnO_4} = N_{FeSO_4} \cdot V_{FeSO_4}$$

de unde:

$$N_{KMnO_4} = \frac{0{,}3 \times 50}{30} = 0{,}5 \text{ N.}$$

IX. 1°. Subiectul se tratează conform manualelor de liceu pentru clasele a IX-a şi a XI-a. Se va avea în vedere obţinerea prin electroliză a halogenilor (F_2, Cl_2, Br_2, I_2), a oxigenului şi hidrogenului dintre nemetale şi a metalelor din grupa I-a principală (Li, Na, K, Rb, Cs), grupa a II-a principală (Be, Mg, Ca), a aluminiului, cuprului şi argintului.

La obţinerea fluorului se supune electrolizei un amestec de HF şi CaF_2, pentru obţinerea clorului şi electrolizează atît topitura de NaCl, cît şi soluţia apoasă de NaCl (saramură), iar bromul şi iodul se pot obţine din soluţii sau topituri ale halogenurilor respective de potasiu.

Oxigenul şi hidrogenul se obţin prin electroliza apei acidulate cu acid sulfuric sau alcalinizate cu hidroxid de sodiu. Hidrogenul se mai obţine şi la electroliza soluţiei de NaCl. Metalele alcaline se obţin prin electroliza topiturilor halogenurilor sau hidroxizilor acestora.

Metalele grupei a doua principale (Be, Mg, Ca) se obțin prin electroliza topiturilor halogenurilor respective.

Aluminiul se obține prin electroliza unei topituri formate dintr-un amestec de Al_2O_3 (alumină) și $Na_3[AlF_6]$ (criolit). Cuprul se obține din electroliza unei soluții de sulfat de cupru, metoda fiind utilizată mai ales pentru purificarea cuprului obținut prin metode pirometalurgice. Cuprul impur se leagă la anodul instalației de electroliză unde se dizolvă și se depune la catod sub formă de cupru pur, concentrația soluției de $CuSO_4$ din baia de electroliză rămînînd practic neschimbată.

În mod analog se purifică și argintul folosind ca electrolit azotatul de argint.

2°. Prin definiție, căldura de neutralizare este cantitatea de căldură degajată la neutralizarea unui echivalent-gram de acid tare cu un echivalent-gram de bază tare, sau, ceea ce reprezintă același lucru, căldura degajată în reacția de formare a unui mol de apă dintr-un mol de ioni H^+ și un mol de ioni HO^-.

Se calculează cantitatea de HCl pur existent în soluția dată:

$$m_{\text{soluție}} = 42\ \text{cm}^3 \cdot 1{,}19\ \text{g/cm}^3 \simeq 50\ \text{g soluție KCl}$$

100 g soluție .... 37 g HCl pur
50 g soluție .... X g HCl pur

$$X = 18{,}5\ \text{g HCl} = \frac{18{,}5}{36{,}5} = 0{,}507\ \text{moli HCl.}$$

Din această cantitate de HCl se supun neutralizării numai jumătate adică:

$$\frac{250}{500} \cdot 0{,}507 = 0{,}253\ \text{moli HCl.}$$

Deoarece în cazul HCl, un mol este egal cu un echivalent gram, înseamnă că acea cantitate de căldură care se va degaja la neutralizarea unui mol de HCl va fi chiar căldura de neutralizare.

Deci:

0,253 moli HCl .... 14,51 kJ
1 mol HCl .... $Q_{\text{neutralizare}}$

$$Q_{\text{neutralizare}} = \frac{14{,}51}{0{,}253} = 57{,}24\ \text{kJ/mol.}$$

În al doilea caz, numărul de moli NaOH existenți în cei 250 cm³ soluție de concentrația 2 molar va fi:

1 000 cm³ sol. .... 2 moli NaOH
250 m³ sol. X

$$X = 0{,}5\ \text{moli NaOH} = 0{,}5\ \text{echivalenți-gram NaOH.}$$

Căldura de neutralizare va fi în acest caz căldura rezultată la neutralizarea unui mol (egal cu un echivalent-gram) de NaOH adică:

$$Q_{\text{neutralizare}} = \frac{28{,}63}{0{,}5} = 57{,}26\ \text{kJ/mol.}$$

Din cele două experimente rezultă că în cazul neutralizării unor acizi tari cu baze tari, căldura de neutralizare nu depinde de natura acidului sau bazei utilizate pentru neutralizare. Acest lucru se explică prin aceea că acizii tari și bazele tari

în soluţii apoase diluate sînt complet ionizaţi şi reacţia de neutralizare are practic loc între ionii H^+ şi ionii HO^-:



$$H^+A^- + B^+OH^- \rightarrow H_2O + A^- + B^+.$$

Cum ionii A^- şi B^+ există în soluţie şi înainte şi după neutralizare, se poate considera că reacţia de neutralizare cu formarea unui mol de apă se poate scrie, simplificat, în forma ionică:



$$H^+ + HO^- \rightarrow H_2O$$

ceea ce demonstrează independenţa căldurii de neutralizare de natura acidului şi bazei din care provin ionii H^+ şi HO^-.

3°. Subiectul se tratează după următorul plan orientativ:

Definiţia peptidelor. Clasificare. Obţinere. Exemple.

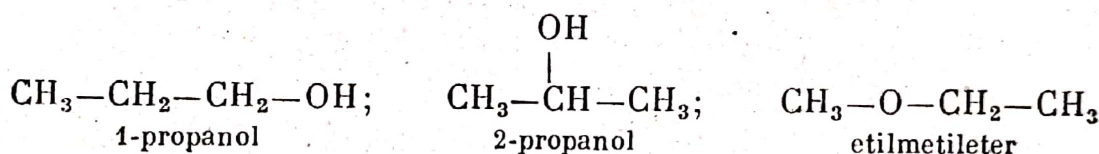
4°. a) Formula generală a unui alcool aciclic monohidroxilic saturat este $C_nH_{2n+2}O$.

Deci:

$$\frac{\begin{array}{l} 14n + 2 + 16 \text{ g alcool} \ldots\ldots\ldots\ldots 12n \text{ g C} \\ 100 \text{ g} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots 60 \text{ g C} \end{array}}{n = 3.}$$

Formula moleculară a alcoolului este C_3H_8O.

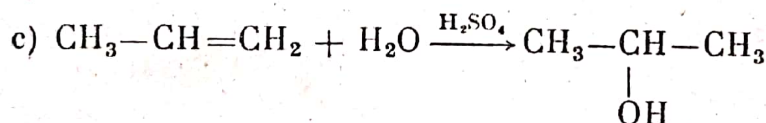
b) Izomeri posibili:



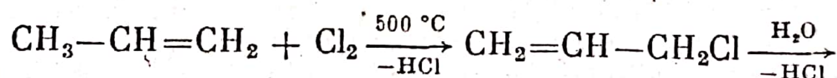
$CH_3-CH_2-CH_2-OH$; 1-propanol

$CH_3-CH(OH)-CH_3$; 2-propanol

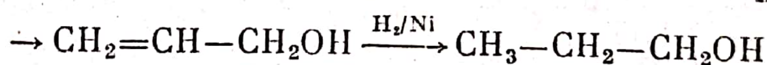
$CH_3-O-CH_2-CH_3$ etilmetileter



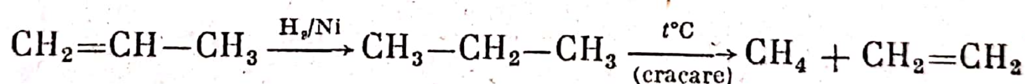
c) $CH_3-CH{=}CH_2 + H_2O \xrightarrow{H_2SO_4} CH_3-CH(OH)-CH_3$



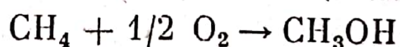
$$CH_3-CH{=}CH_2 + Cl_2 \xrightarrow[-HCl]{500\ °C} CH_2{=}CH-CH_2Cl \xrightarrow[-HCl]{H_2O}$$



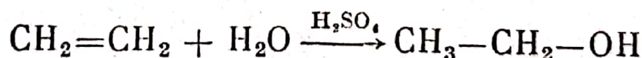
$$\rightarrow CH_2{=}CH-CH_2OH \xrightarrow{H_2/Ni} CH_3-CH_2-CH_2OH$$



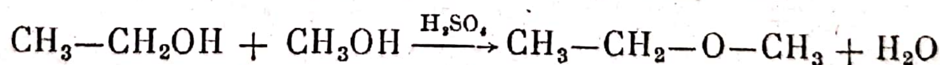
$$CH_2{=}CH-CH_3 \xrightarrow{H_2/Ni} CH_3-CH_2-CH_3 \xrightarrow[(cracare)]{t°C} CH_4 + CH_2{=}CH_2$$



$$CH_4 + 1/2\ O_2 \rightarrow CH_3OH$$

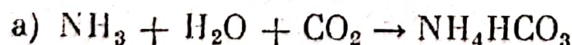


$$CH_2{=}CH_2 + H_2O \xrightarrow{H_2SO_4} CH_3-CH_2-OH$$



$$CH_3-CH_2OH + CH_3OH \xrightarrow{H_2SO_4} CH_3-CH_2-O-CH_3 + H_2O$$

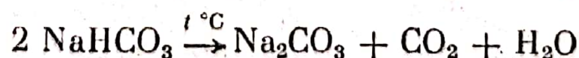
5°. Ecuaţiile reacţiilor sînt următoarele:



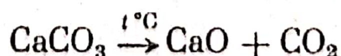
a) $NH_3 + H_2O + CO_2 \rightarrow NH_4HCO_3$



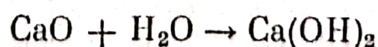
$$NH_4HCO_3 + NaCl \rightarrow NaHCO_3 + NH_4Cl$$



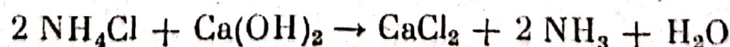
$$2\ NaHCO_3 \xrightarrow{t\ °C} Na_2CO_3 + CO_2 + H_2O$$



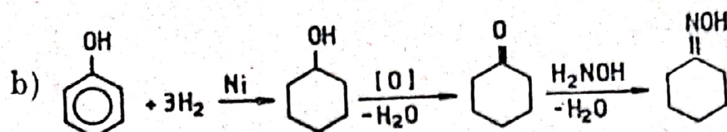
$$CaCO_3 \xrightarrow{t\ °C} CaO + CO_2$$

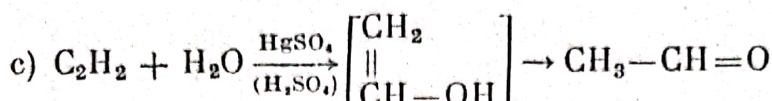


$$CaO + H_2O \rightarrow Ca(OH)_2$$

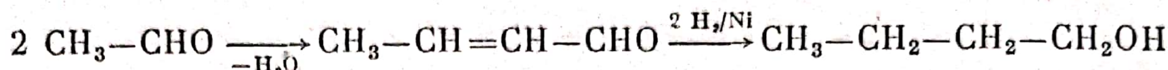


$$2\ NH_4Cl + Ca(OH)_2 \rightarrow CaCl_2 + 2\ NH_3 + H_2O$$

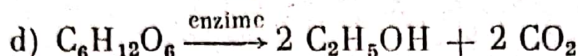
b) 

c) 

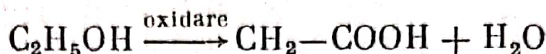
$$C_2H_2 + H_2O \xrightarrow[(H_2SO_4)]{HgSO_4} \left[\begin{array}{l} CH_2 \\ \| \\ CH-OH \end{array}\right] \rightarrow CH_3-CH=O$$



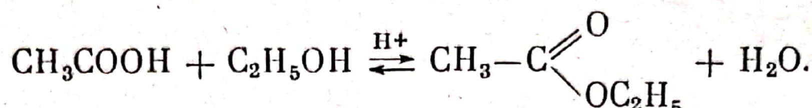
$$2\ CH_3-CHO \xrightarrow[-H_2O]{} CH_3-CH=CH-CHO \xrightarrow{2\ H_2/Ni} CH_3-CH_2-CH_2-CH_2OH$$

d) 

$$C_6H_{12}O_6 \xrightarrow{enzime} 2\ C_2H_5OH + 2\ CO_2$$



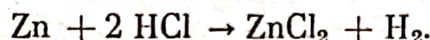
$$C_2H_5OH \xrightarrow{oxidare} CH_2-COOH + H_2O$$



$$CH_3COOH + C_2H_5OH \overset{H+}{\rightleftarrows} CH_3-C\begin{array}{l}{\nearrow}O \\ {\searrow}OC_2H_5\end{array} + H_2O.$$

X. 1°. Subiectul se tratează conform manualelor de liceu pentru clasele a IX-a și a XI-a avîndu-se în vedere următoarele probleme: Ionizarea apei, echilibrul respectiv de ionizare, apa ca amfolit. Expresia constantei de echilibru K_c și produsul ionic al apei. Valoarea numerică a produsului ionic al apei în condiții standard și valorile concentrațiilor ionilor H_3O^+ și HO^- în apa pură. Definiția noțiunii de pH ($pH = -\lg[H_3O^+]$. Valorile numerice ale pH-ului în mediu neutru, acid și bazic, precum și concentrațiile ionilor H_3O^+ și HO^- în mediile respective.

2°. Ecuația reacției chimice este:



$$Zn + 2\ HCl \rightarrow ZnCl_2 + H_2.$$

Zincul avînd un potențial standard de reducere mai negativ decît hidrogenul se oxidează mai ușor decît acesta și ca atare cedează 2 electroni trecînd în ioni Zn^{2+}, electronii fiind acceptați de ionii de hidrogen care se reduc trecînd în hidrogen molecular. Cu alte cuvinte, zincul fiind situat înaintea hidrogenului în seria activității a lui Beketov-Volta va scoate hidrogenul din acizi.

Numărul de moli de hidrogen degajat este egal cu numărul de moli de zinc consumat în reacție. Deci:

$$\frac{15}{22,4} = \frac{X}{65,4} \qquad X = \frac{15 \times 65,4}{22,4} = 43,8\ \text{g Zn}.$$

Numărul de moli de HCl consumat este dublul numărului de moli de hidrogen degajat, adică:

$$\frac{Y}{2 \cdot 36,5} = \frac{15}{22,4} \qquad Y = \frac{2 \cdot 36,5 \cdot 15}{22,4} = 48,9\ \text{g HCl}.$$

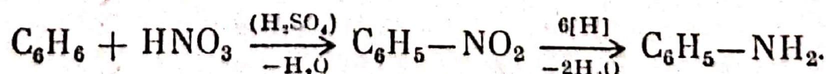
Masa soluției de HCl, de concentrație 10%, care este necesară va fi:

100 g sol. .... 10 g HCl pur
Z g sol. .... 48,9 g HCl pur

Z = 489 g soluție HCl necesară.

3°. Subiectul se tratează după următorul plan: Definiția cicloalcanilor. Nomenclatură. Exemple. Obținere. Proprietăți. Izomerie geometrică.

4°. a) Ecuațiile reacțiilor:



$$C_6H_6 + HNO_3 \xrightarrow[-H_2O]{(H_2SO_4)} C_6H_5-NO_2 \xrightarrow[-2H_2O]{6[H]} C_6H_5-NH_2.$$

Dintr-un mol de benzen se obțin 93 g anilină (1 mol) cu randament de 100%. La un randament global al reacțiilor de 80% se obțin

$$93 \cdot \frac{80}{100} = 74{,}4 \text{ g anilină.}$$

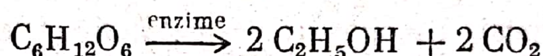
b) 93 g anilină conține 72 g C .... 14 g N .... 7 g H
100 g .... x_1 .... x_2 .... x_3

$$x_1 = 77{,}42\% \text{ C}$$
$$x_2 = 15{,}05\% \text{ N}$$
$$x_3 = 7{,}52\% \text{ H.}$$

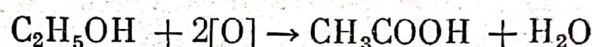
XI. 1°. Planul de tratare a subiectului este următorul: Definiția acetilurilor. Ecuațiile reacțiilor de obținere a acetilurilor de calciu, sodiu, argint și cupru. Proprietățile acetilurilor.

2°. Subiectul se tratează după următorul plan. Definiția aminelor. Nomenclatură. Clasificare. Obținere.

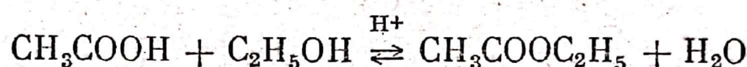
3°. a) amidon $\xrightarrow[\text{enzime}]{\text{hidroliză}}$ α-glucoză



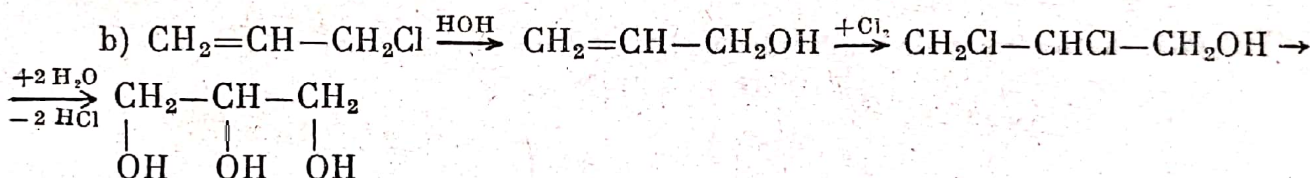
$$C_6H_{12}O_6 \xrightarrow{\text{enzime}} 2\,C_2H_5OH + 2\,CO_2$$



$$C_2H_5OH + 2[O] \rightarrow CH_3COOH + H_2O$$

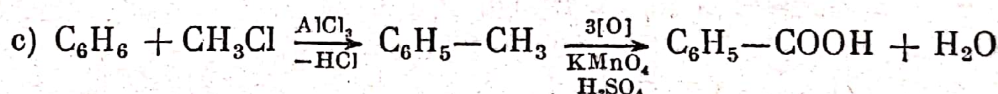


$$CH_3COOH + C_2H_5OH \overset{H+}{\rightleftarrows} CH_3COOC_2H_5 + H_2O$$

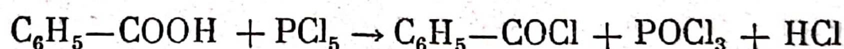


b) $CH_2{=}CH{-}CH_2Cl \xrightarrow{HOH} CH_2{=}CH{-}CH_2OH \xrightarrow{+Cl_2} CH_2Cl{-}CHCl{-}CH_2OH \rightarrow$

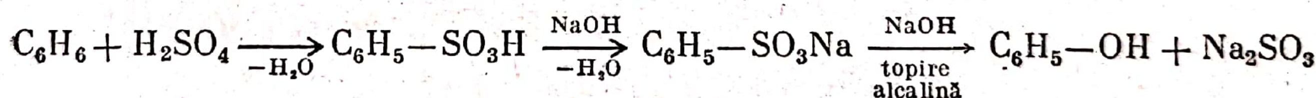
$\xrightarrow[-2\,HCl]{+2\,H_2O} CH_2{-}CH{-}CH_2$ (OH, OH, OH)



c) $C_6H_6 + CH_3Cl \xrightarrow[-HCl]{AlCl_3} C_6H_5{-}CH_3 \xrightarrow[KMnO_4,\ H_2SO_4]{3[O]} C_6H_5{-}COOH + H_2O$



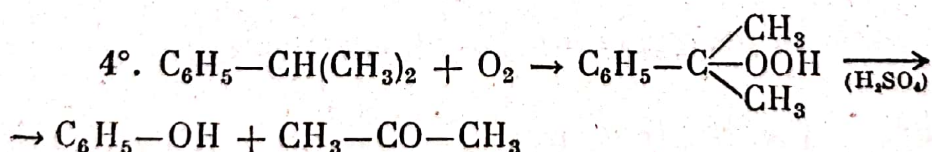
$$C_6H_5{-}COOH + PCl_5 \rightarrow C_6H_5{-}COCl + POCl_3 + HCl$$



$$C_6H_6 + H_2SO_4 \xrightarrow[-H_2O]{} C_6H_5{-}SO_3H \xrightarrow[-H_2O]{NaOH} C_6H_5{-}SO_3Na \xrightarrow[\text{topire alcalină}]{NaOH} C_6H_5{-}OH + Na_2SO_3$$



$$C_6H_5{-}COCl + C_6H_5OH \rightarrow C_6H_5{-}COOC_6H_5 + HCl.$$



4°. $C_6H_5{-}CH(CH_3)_2 + O_2 \rightarrow C_6H_5{-}C(CH_3)_2{-}OOH \xrightarrow{(H_2SO_4)}$

$\rightarrow C_6H_5{-}OH + CH_3{-}CO{-}CH_3$

1 kmol cumen .... 94 kg fenol (1 kmol)
10 kmoli .... x_1

$$x_1 = 940 \text{ kg fenol (teoretic)}$$

$$x_2 = 940\,\frac{70}{100} = 658 \text{ kg fenol obținut.}$$

XII. 1°. Subiectul se tratează în conformitate cu manualele școlare, urmînd următorul plan orientativ:

a) acetiluri (exemple, obținere, proprietăți);
b) alcoxizi și fenoxizi (definiție, exemple, obținere, proprietăți);
c) săruri de alchil (aril) amoniu (formule structurale, obținere exemple);
d) săruri de diazoniu (formulă generală, obținere, reacții);
e) săruri ale acizilor carboxilici (formulă generală, obținere, proprietăți);
f) săruri ale acizilor sulfonici (formulă generală, obținere, proprietăți);
g) săruri ale sulfaților acizi de alchil;
h) săruri ale aminoacizilor. Amfiioni.

2°. La tratarea subiectului se va avea în vedere următoarele puncte:

a) scurtă introducere (definiția reacției de substituție, formarea intermediarilor radicalici, exemple de reacții de substituție radicalică);
b) halogenarea metanului. Mecanism;
c) halogenarea toluenului. Mecanism;
d) halogenarea propenei în poziție alilică.

3°. Subiectul se va trata după următorul plan orientativ:

a) scurtă introducere (definiția compușilor tensioactivi, structura acestora);
b) săpunuri (definiție, obținere, proprietăți);
c) detergenți anionici (săruri ale acizilor alchilsulfonici și alchilaril-sulfonici, săruri ale sulfaților acizi de alchil);
d) detergenți cationici. Halogenuri de alchiltrimetilamoniu;
e) detergenți neionici (alcooli polietoxilați, fenoli polietoxilați, acizi carboxilici polietoxilați).

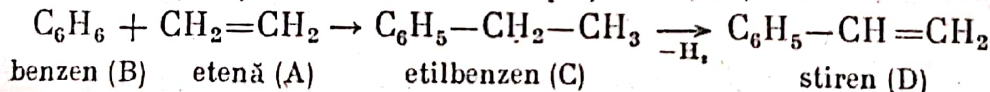
4°. Stabilirea formulei moleculare a hidrocarburii A:

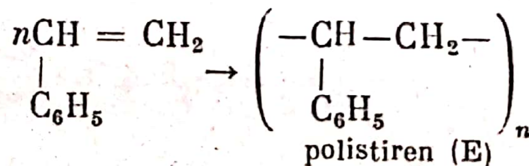
$$C: \frac{85,7 \cdot 28}{100 \cdot 12} = 2 \text{ at. de C}; \quad H: \frac{14,3 \cdot 28}{100 \cdot 1} = 4 \text{ at. de H}.$$

Deci A are formula moleculară C_2H_4 (etena).
Stabilirea formulei moleculare a hidrocarburii B:

$$C: \frac{92,4 \cdot 78}{100 \cdot 12} = 6 \text{ at. de C}; \quad H: \frac{7,6 \cdot 78}{100 \cdot 1} = 6 \text{ at. de H}.$$

Deci formula moleculară a hidrocarburii B este C_6H_6 (benzen).
Ecuațiile chimice și identificarea compușilor C, D, E:





a) 520 kg stiren = 5 kmoli; sînt necesari deci $5 \times 22,4\ m^3 = 112\ m^3$ etenă;

b) 5 kmoli stiren se obțin din 5×78 kg benzen = 390 kg; $V = \frac{390}{0,9} = 433,33$ l benzen;

c) $\overline{M} = (104)_n = 104 \times 10\,000 = 1\,040\,000$.

XIII. 1°. Subiectul se tratează conform manualelor și programei școlare, după următorul plan orientativ:

a) definiție. Exemple. Aminoacizi naturali;
b) proprietăți fizice;
c) proprietăți chimice. Caracter amfoter. Amfiioni. Soluții tampon. Reacții ale grupei carboxil. Reacții ale grupei amino. Formare de peptide simple și mixte;
d) izomerie optică.

2°. Planul orientativ de abordare a acestui subiect este următorul:

a) reacția alchenelor cu acidul sulfuric. Mecanism. Orientarea adiției;

b) reacția de sulfonare a compușilor aromatici. Sulfonarea benzenului, naftalinei, toluenului, anilinei;

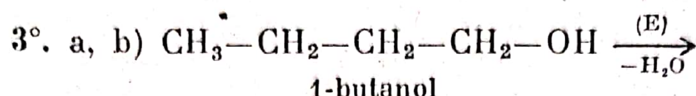
c) esterificarea alcoolilor cu acidul sulfuric,

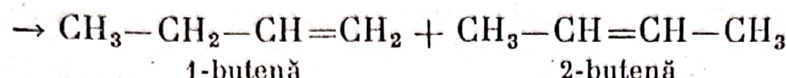
d) reacția aminelor cu acidul sulfuric;

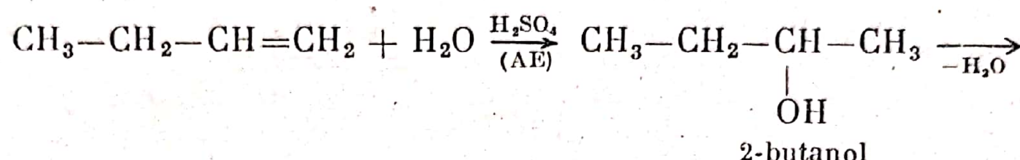
e) reacția fenoxizilor cu acidul sulfuric,

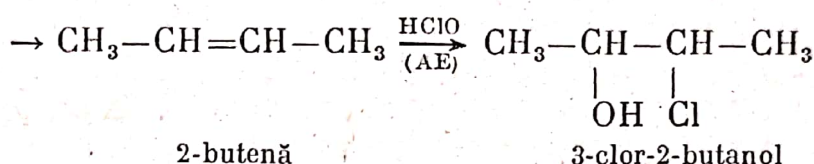
f) reacția acidului sulfuric cu săruri ale acizilor organici.

3°. a, b)



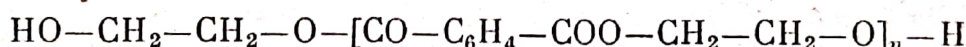






c) 3-Clor-2-butanolul conține în moleculă doi atomi de carbon asimetrici, deci prezintă două perechi de enantiomeri (patru izomeri optici).

4°. Formula produsului de policondensare:



Masa moleculară a acidului tereftalic = 166.

Masa moleculară a etilenglicolului = 62.

Masa unității structurale = 192.

Gradul de policondensare:

$$\frac{2\,942 - 62}{192} = 15$$

Cantitatea de paraxilen necesară:

$$\begin{array}{l} 192 \text{ kg} \quad \ldots\ldots\ldots \quad 106 \text{ kg paraxilen} \\ 1\,920 \text{ kg} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad X \\ \hline X = 1\,060 \text{ kg paraxilen (cu randament de } 100\%). \end{array}$$

La un randament de 75% sînt necesare

$$1\,060 \cdot \frac{100}{75} = 1\,413{,}33 \text{ kg paraxilen.}$$

XIV. 1°. Subiectul se tratează conform manualului de liceu pentru clasa a IX-a avîndu-se în vedere următoarele probleme. Justificarea necesității de a se introduce noțiunea de hibridizare pentru a putea explica legăturile covalente date de unele elemente cum ar fi carbonul, borul și beriliul pentru care structura electronică în starea lor fundamentală nu poate explica numărul de covalențe pe care îl formează în realitate (patru, trei și, respectiv, doi).

Trecerea acestor atomi în stare excitată și apoi procesul de hibridizare propriu-zisă. Forma și orientarea spațială a orbitalilor hibrizi sp^3. Întrepătrunderea mai accentuată a orbitalilor hibrizi cu formare de legături de tip sigma cu alți atomi. Forma geometrică a moleculelor ce conțin atomi hibridizați sp^3. Exemplificare în cazul metanului, amoniacului, apei, ionului amoniu, ionului hidroniu etc. Noțiunea de hibridizare parțială a atomului de oxigen în molecula de apă și a celui de azot în molecula de amoniac.

2°. Se va trata pe scurt noțiunea de entropie, conform manualului de clasa a XI-a, precum și structura rețelelor cristaline ale diamantului și grafitului, conform manualului de liceu pentru clasa a IX-a. Din structura acestor rețele cristaline rezultă că în cazul diamantului toți atomii de carbon hibridizați sp^3 sînt legați între ei prin legături covalente puternice, ei ocupînd poziții fixe în rețeaua cristalină, poziții de la care se pot abate numai foarte puțin efectuînd doar mișcări de vibrație în jurul pozițiilor de echilibru. Din această cauză sistemul format dintr-un cristal de diamant este aproape perfect ordonat și ca atare are entropia foarte mică. În cazul grafitului, care prezintă o rețea atomică stratificată (vezi manualul de clasa a IX-a), atomii de carbon sînt hibridizați sp^2 și fiecare atom de carbon este legat prin legături de tip sigma de alți trei atomi de carbon situați în același plan, alcătuind astfel plane în care atomii de carbon ocupă vîrfurile unor hexagoane regulate. La fiecare atom de carbon rămîne însă cîte un orbital p nehibridizat conținînd un singur electron. Acești electroni din orbitalii de tip p nehibridizați sînt mobili și comuni atomilor dintr-un plan. Între atomii din același plan se manifestă legături covalente puternice, însă între atomii situați în plane paralele, suprapuse, legăturile sînt mult mai slabe, ceea ce se reflectă în proprietățile specifice ale grafitului (vezi manualul). Rezultă deci că în rețeaua cristalină a grafitului, atomii ce alcătuiesc straturi diferite au libertate mult mai mare de mișcare, existînd în același timp electroni delocalizați, mobili, care asigură printre alte proprietăți, conductibilitatea electrică a grafitului, și din această cauză gradul de ordonare a particulelor ce alcătuiesc rețeaua atomică în grafit este mai mic ca în diamant. Aceasta se traduce prin valoarea mai mare a entropiei grafitului în comparație cu cea a diamantului (1,36 J/mol · K la grafit față de 0,58 J/mol · K la diamant).

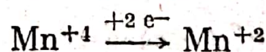
3°. La tratarea acestui subiect se vor prezenta mai întîi noțiunile de oxidare și reducere, agent oxidant și agent reducător, conform manualelor de liceu pentru clasele a IX-a și a XI-a. De asemenea, se vor prezenta și principiile pe baza cărora se stabilesc coeficienții în reacțiile de oxido-reducere (vezi manualul pentru clasa a XI-a).

Ca exemple, din reacțiile cerute, se pot da:

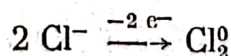
1. oxidarea acidului clorhidric cu MnO_2:



$$MnO_2 + 4\ HCl \rightarrow MnCl_2 + 2\ H_2O + Cl_2$$

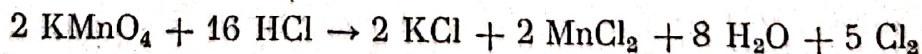


$$Mn^{+4} \xrightarrow{+2\ e^-} Mn^{+2}$$

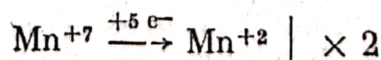


$$2\ Cl^- \xrightarrow{-2\ e^-} Cl_2^0$$

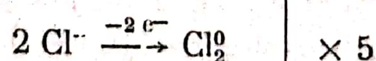
2. oxidarea acidului clorhidric cu permanganat de potasiu:



$$2\ KMnO_4 + 16\ HCl \rightarrow 2\ KCl + 2\ MnCl_2 + 8\ H_2O + 5\ Cl_2$$

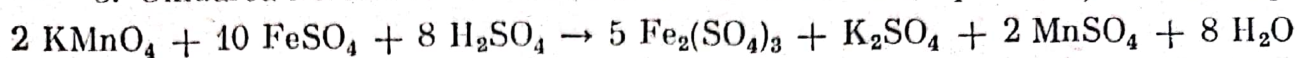


$$Mn^{+7} \xrightarrow{+5\ e^-} Mn^{+2} \quad \times 2$$

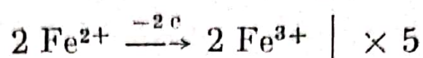


$$2\ Cl^- \xrightarrow{-2\ e^-} Cl_2^0 \quad \times 5$$

3. Oxidarea fierului divalent la fier trivalent cu $KMnO_4$ în soluție de H_2SO_4:



$$2\ KMnO_4 + 10\ FeSO_4 + 8\ H_2SO_4 \rightarrow 5\ Fe_2(SO_4)_3 + K_2SO_4 + 2\ MnSO_4 + 8\ H_2O$$

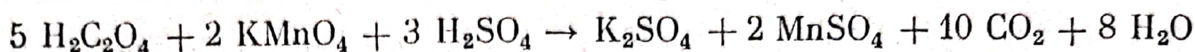


$$2\ Fe^{2+} \xrightarrow{-2e^-} 2\ Fe^{3+} \quad | \times 5$$

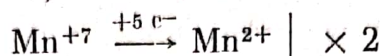


$$Mn^{+7} \xrightarrow{+5e^-} Mn^{+2} \quad | \times 2$$

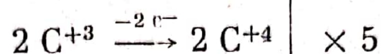
4. Oxidarea acidului oxalic cu permanganat de potasiu în mediu acid:



$$5\ H_2C_2O_4 + 2\ KMnO_4 + 3\ H_2SO_4 \rightarrow K_2SO_4 + 2\ MnSO_4 + 10\ CO_2 + 8\ H_2O$$

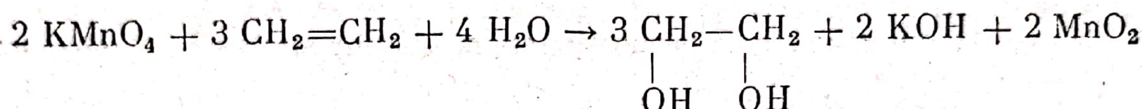


$$Mn^{+7} \xrightarrow{+5e^-} Mn^{2+} \quad | \times 2$$

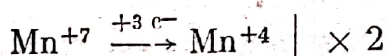


$$2\ C^{+3} \xrightarrow{-2e^-} 2\ C^{+4} \quad | \times 5$$

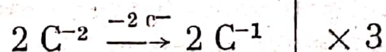
5. Oxidarea etenei cu permanganat de potasiu în soluție neutră sau slab bazică:



$$2\ KMnO_4 + 3\ CH_2{=}CH_2 + 4\ H_2O \rightarrow 3\ \underset{OH}{CH_2}-\underset{OH}{CH_2} + 2\ KOH + 2\ MnO_2$$

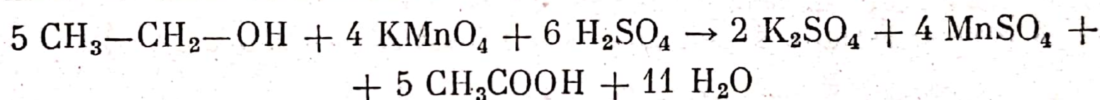


$$Mn^{+7} \xrightarrow{+3e^-} Mn^{+4} \quad | \times 2$$

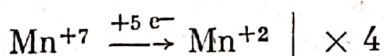


$$2\ C^{-2} \xrightarrow{-2e^-} 2\ C^{-1} \quad | \times 3$$

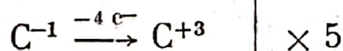
6. Oxidarea alcoolilor primari cu permanganat de potasiu în soluție acidă, cu formare de acizi carboxilici:



$$5\ CH_3-CH_2-OH + 4\ KMnO_4 + 6\ H_2SO_4 \rightarrow 2\ K_2SO_4 + 4\ MnSO_4 + 5\ CH_3COOH + 11\ H_2O$$



$$Mn^{+7} \xrightarrow{+5e^-} Mn^{+2} \quad | \times 4$$



$$C^{-1} \xrightarrow{-4e^-} C^{+3} \quad | \times 5$$

Se pot da numeroase asemenea exemple atît din chimia anorganică, cît și din chimia organică, permanganatul de potasiu fiind unul din cei mai utilizați agenți oxidanți. Menționăm că sarcinile electrice atribuite atomilor de mangan și celorlalți atomi care se oxidează nu sînt sarcini electrice reale, ci reprezintă numerele de oxidare respective!

4°. Avînd în vedere că acizii considerați sînt acizi tari, adică total ionizați în soluțiile diluate respective, concentrația ionilor de hidrogen va fi mai mare în soluția în care concentrația normală a acidului este mai mare. Dacă se consideră cîte un litru din fiecare din cele două soluții, avînd în vedere că densitatea ambelor soluții este 1 g/cm³, masa soluțiilor considerate va fi:

$$m = 1\ g/cm^3 \cdot 1\ 000\ cm^3 = 1\ 000\ g\ \text{soluție}.$$

Concentrația procentuală fiind 1% înseamnă că în fiecare din cele două soluții vor exista cîte 10 g din acidul respectiv. Avem deci 10 g HCl la litru de soluție și 10 g HBr la litru de soluție.

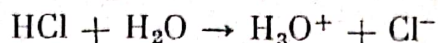
Numărul de moli de HCl este:

$$\nu_{HCl} = \frac{10}{36{,}5}$$

iar cel de HBr:

$$\nu_{HBr} = \frac{10}{81}.$$

Avînd în vedere reacțiile de ionizare, care sînt totale:



$$HCl + H_2O \rightarrow H_3O^+ + Cl^-$$



$$HBr + H_2O \rightarrow H_3O^+ + Br^-$$

rezultă că în fiecare soluție concentrația ionilor de hidroniu este egală cu concentrația acidului respectiv introdus în soluție. Deci în soluția de HCl vom avea $[H_3O^+] = \frac{10}{36,5}$ mol/l, iar în cea de HBr $= [H_3O^+] = \frac{10}{81}$ mol/l.

Rezultă că în soluția de HCl concentrația ionilor hidroniu este mai mare raportul concentrațiilor acestor ioni în cele două soluții fiind:

$$[H_3O^+]_{HCl}/[H_3O^+]_{HBr} = \frac{81}{36,5}.$$

XV. 1°. 1.1. Din studiul diferitelor procese de electroliză s-a dedus experimental că la trecerea unui curent electric continuu printr-un electrolit, cantitatea de substanță m separată din acesta este proporțională cu sarcina electrică transportată:

$$m = KQ.$$

Factorul de proporționalitate K se numește echivalent electrochimic al substanței separate și reprezintă acea cantitate de substanță care se separă la trecerea prin electrolit a unității de sarcină electrică, adică 1 C.

Tot experimental se constată că pentru separarea unui echivalent-gram de orice substanță este necesară aceeași cantitate de sarcină electrică egală cu 96 487 C (1 Faraday) sau cu o oarecare aproximație, 96 500 C.

În cazul în care substanța separată este o substanță simplă,

$$K = \frac{E_g}{F} \quad \text{și} \quad E_g = \frac{A}{n}$$

unde A este masa atomică a elementului separat, iar n numărul de electroni implicați la formarea unui atom din elementul respectiv. Deci:

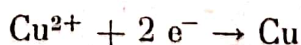
$$K = \frac{A}{nF}.$$

Introducînd această expresie a echivalentului electrochimic în expresia masei de substanță separată și avînd în vedere că sarcina transportată este produsul dintre intensitatea I a curentului (în amperi) și timpul t cît trece acest curent (în secunde) se obține:

$$m = \frac{A}{nF} It.$$

Electroliza cu anod solubil se aplică industrial la purificarea electrolitică a unor metale cum ar fi Cu, Ag, Au, Pb, Al etc. De exemplu, în cazul purificării cuprului, reacțiile ce au loc la electrozi sînt:

— la catod (format din metalul respectiv pur):



$$Cu^{2+} + 2\,e^- \rightarrow Cu$$

— la anod (format din metalul brut, impur):



$$Cu - 2e^- \rightarrow Cu^{2+}$$

Electrolitul folosit este soluția unei săruri solubile a metalului ce se purifică, de obicei $CuSO_4$.

În cazul purificării argintului:
— la catod: $Ag^+ + e^- \rightarrow Ag$
— la anod: $Ag - e^- \rightarrow Ag^+$.

Electrolitul folosit este $AgNO_3$ în soluţie apoasă. De asemenea, această electroliză cu anod solubil se mai aplică la depunerea unor straturi metalice (nichelare, argintare, cuprare etc.), fie în scopuri decorative, fie în scopul protecţiei anticorozive a unor obiecte.

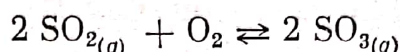
1.2. Ecuaţiile principalelor reacţii chimice care stau la baza obţinerii acidului sulfuric din pirită, sînt:

a) arderea sau prăjirea piritei, cu aer:



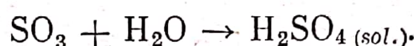
$$4\ FeS_2 + 11\ O_2 \rightarrow 2\ Fe_2O_3 + 8\ SO_2$$

b) oxidarea catalitică a dioxidului de sulf la trioxid, în prezenţa platinei sau a V_2O_5 (proces de echilibru):



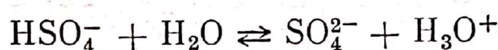
$$2\ SO_{2(g)} + O_2 \rightleftarrows 2\ SO_{3(g)}$$

c) absorbţia trioxidului de sulf în apă (în practică în soluţie de acid sulfuric):



$$SO_3 + H_2O \rightarrow H_2SO_{4\,(sol.)}.$$

În treapta a doua de ionizare, acidul sulfuric nu este complet ionizat, deci se poate scrie o constantă de echilibru (exprimată prin concentraţii molare):



$$HSO_4^- + H_2O \rightleftarrows SO_4^{2-} + H_3O^+$$

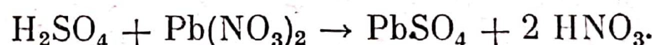
$$K_c = \frac{[SO_4^{2-}][H_3O^+]}{[HSO_4^-][H_2O]}.$$

Făcînd aproximaţia că apa are o concentraţie practic constantă se poate scrie:

$$K_a = K_c[H_2O] = \frac{[SO_4^{2-}][H_3O^+]}{[HSO_4^-]}.$$

Acidul sulfuric reacţionează cu azotatul de plumb, deoarece sulfatul de plumb care se formează este o substanţă practic insolubilă (valoarea produsului de solubilitate $2 \cdot 10^{-8}$ mol²/l²).

Ecuaţia reacţiei este:



$$H_2SO_4 + Pb(NO_3)_2 \rightarrow PbSO_4 + 2\ HNO_3.$$

2°. a) Se alcătuieşte tabelul:

Timp \ Substanţa	CO_2	H_2	CO	H_2O	Total
$t = 0$ (iniţial)	0,2	0,8	0	0	1
$t = t_{ech.}$ (la echilibru)	$0,2 - x$	$0,8 - x$	x	x	1

Reacţia are loc fără variaţia numărului de moli, iar volumul fiind 1 l, cantitatea (cantităţile) în moli, trecute în tabel, sînt chiar concentraţiile respective, deci:

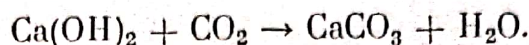
$$K_c = \frac{[CO][H_2O]}{[CO_2][H_2]}, \quad \text{adică: } 1 = \frac{x^2}{(0,2 - x)\ (0,8 - x)}.$$

Rezolvind ecuaţia se obţine: $x = 0{,}16$; deci la echilibru:

$$[CO_2] = 0{,}04 \ \text{mol/l}; \quad [H_2] = 0{,}64 \ \text{mol/l}$$

$$[CO] = 0{,}16 \ \text{mol/l}; \quad [H_2O] = 0{,}16 \ \text{mol/l}.$$

b) Ecuaţia reacţiei este:



$$Ca(OH)_2 + CO_2 \rightarrow CaCO_3 + H_2O.$$

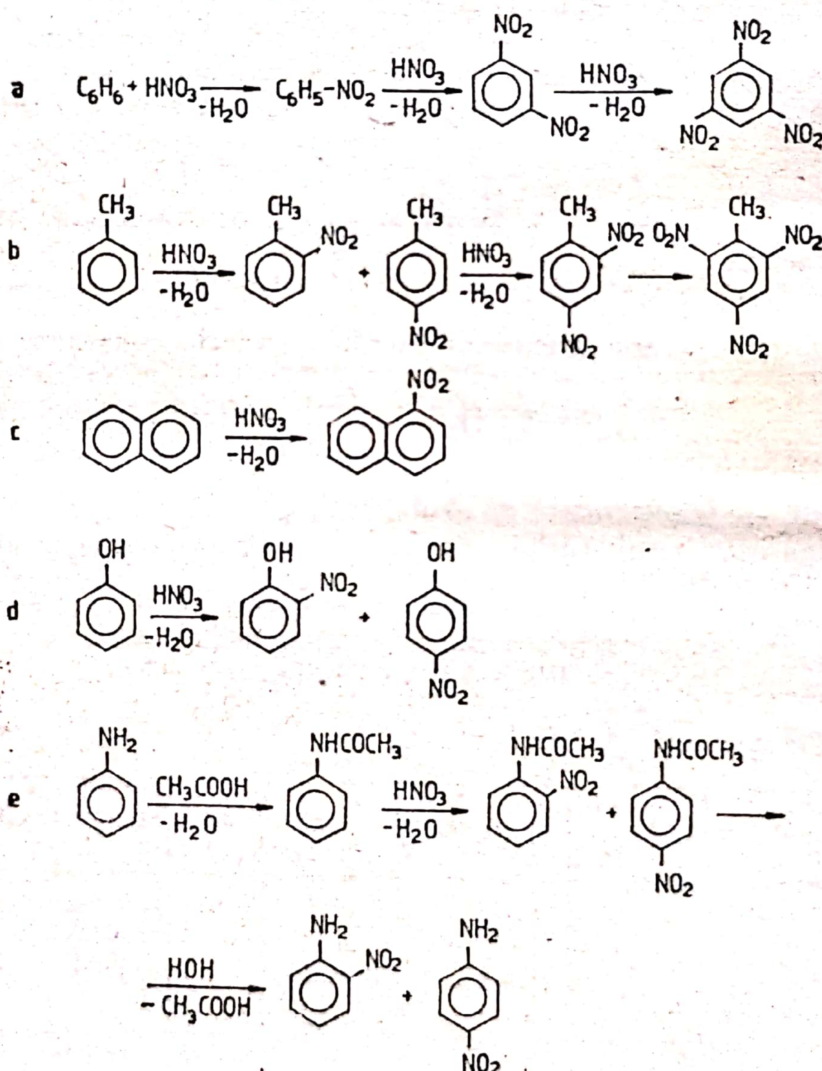
Numărul de moli de $Ca(OH)_2$ necesar este identic cu numărul de moli de CO_2 aflat în sistem la echilibru, adică 0,04 moli.

Concentraţia molară a hidroxidului de calciu este jumătate din concentraţia sa normală, deci 0,005 moli/l. Rezultă că:

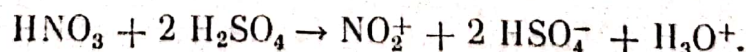
1 000 cm^3 sol. $Ca(OH)_2$ .... 0,005 moli $Ca(OH)_2$
X cm^3 sol. $Ca(OH)_2$ .... 0,04 moli $Ca(OH)_2$

$$X = \frac{0{,}04 \times 1\,000}{0{,}005} = 8000 \ cm^3 = 8 \ l \ \text{sol. } Ca(OH)_2 \ \text{de concentraţie } 0{,}01 \ N.$$

3°. Definiţia reacţiei de nitrare — nitrarea compuşilor aromatici. Condiţii. Exemple:

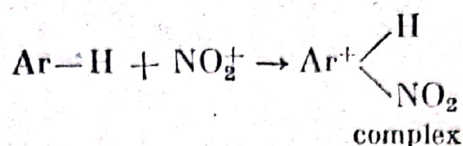


Mecanism (reacţie de substituţie electrofilă):
— Formarea reactantului electrofil:



$$HNO_3 + 2\,H_2SO_4 \rightarrow NO_2^+ + 2\,HSO_4^- + H_3O^+.$$

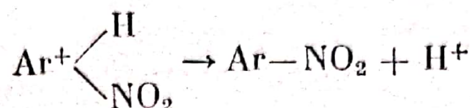
Atacul reactantului electrofil asupra moleculei compusului aromatic supus nitrării cu formarea compusului:



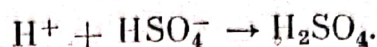
$$Ar{-}H + NO_2^+ \rightarrow Ar^+\!\left\langle\begin{matrix} H \\ NO_2 \end{matrix}\right.$$

complex

— Eliminarea protonului:



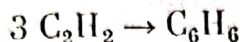
$$Ar^+\!\left\langle\begin{matrix} H \\ NO_2 \end{matrix}\right. \rightarrow Ar{-}NO_2 + H^+$$



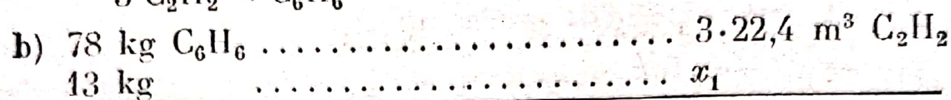
$$H^+ + HSO_4^- \rightarrow H_2SO_4.$$



4°. a) $2\ CH_4 \rightarrow C_2H_2 + 3\ H_2$



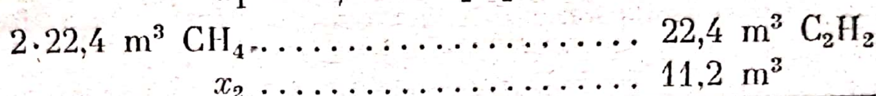
$3\ C_2H_2 \rightarrow C_6H_6$



b) 78 kg C_6H_6 .... $3 \cdot 22{,}4$ m³ C_2H_2

13 kg .... x_1

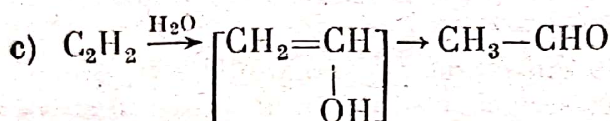
$x_1 = 11{,}2$ m³ C_2H_2



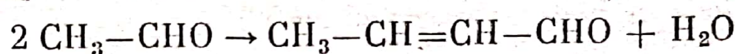
$2 \cdot 22{,}4$ m³ CH_4 .... $22{,}4$ m³ C_2H_2

x_2 .... $11{,}2$ m³

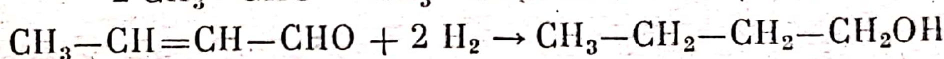
$x_2 = 22{,}4$ m³ CH_4; $\quad \eta = \frac{22{,}4}{67{,}2} \cdot 100 = 33{,}33\%$



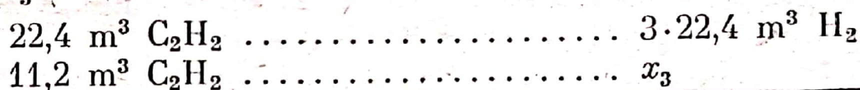
c) $C_2H_2 \xrightarrow{H_2O} \left[\begin{matrix} CH_2{=}CH \\ \quad\ \ | \\ \quad\ OH \end{matrix}\right] \rightarrow CH_3{-}CHO$



$$2\ CH_3{-}CHO \rightarrow CH_3{-}CH{=}CH{-}CHO + H_2O$$



$$CH_3{-}CH{=}CH{-}CHO + 2\ H_2 \rightarrow CH_3{-}CH_2{-}CH_2{-}CH_2OH$$

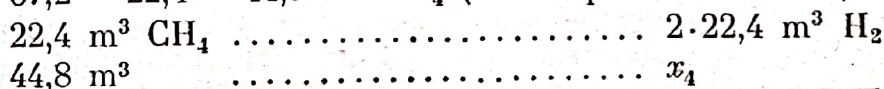


$22{,}4$ m³ C_2H_2 .... $3 \cdot 22{,}4$ m³ H_2

$11{,}2$ m³ C_2H_2 .... x_3

$x_3 = 33{,}6$ m³ H_2 (obținut alături de C_2H_2)

$67{,}2 - 22{,}4 = 44{,}8$ m³ CH_4 (descompus în elemente)



$22{,}4$ m³ CH_4 .... $2 \cdot 22{,}4$ m³ H_2

$44{,}8$ m³ .... x_4

$x_4 = 89{,}6$ m³ H_2.

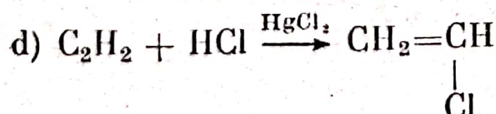
Total H_2: $89{,}6 + 33{,}6 = 123{,}2$ m³ H_2.



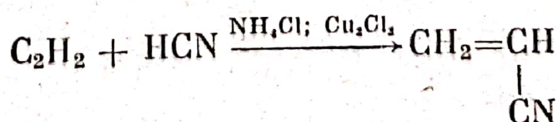
70 kg aldehidă crotonică .... $2 \cdot 22{,}4$ m³ H_2

x_5 .... $123{,}2$

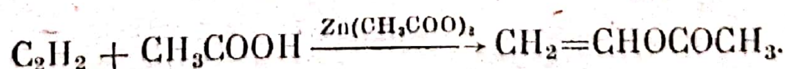
$x_5 = 192{,}5$ kg.



d) $C_2H_2 + HCl \xrightarrow{HgCl_2} \begin{matrix} CH_2{=}CH \\ \quad\ \ | \\ \quad\ Cl \end{matrix}$

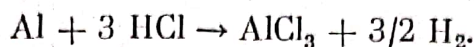


$$C_2H_2 + HCN \xrightarrow{NH_4Cl;\ Cu_2Cl_2} \begin{matrix} CH_2{=}CH \\ \quad\ \ | \\ \quad\ CN \end{matrix}$$



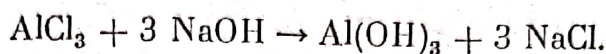
$$C_2H_2 + CH_3COOH \xrightarrow{Zn(CH_3COO)_2} CH_2{=}CHOCOCH_3.$$

5°. 5.1. Clorura de aluminiu se poate obține din aluminiu metalic prin tratare cu acid clorhidric, deoarece aluminiul este situat înaintea hidrogenului în seria activității metalelor a lui Beketov-Volta și ca atare poate înlocui hidrogenul din acizi:



$$Al + 3\ HCl \rightarrow AlCl_3 + 3/2\ H_2.$$

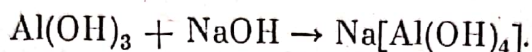
Clorura de aluminiu prin reacția cu o bază tare, de exemplu cu NaOH, formează hidroxidul de aluminiu, care este o bază slabă și este insolubil în apă:



$$AlCl_3 + 3\ NaOH \rightarrow Al(OH)_3 + 3\ NaCl.$$

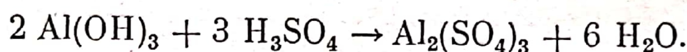
Deci, substanța A este hidroxidul de aluminiu $Al(OH)_3$.

Acesta are un caracter amfoter putînd reacționa cu un exces de NaOH formînd combinația complexă, tetrahidroxoaluminatul de sodiu:



$$Al(OH)_3 + NaOH \rightarrow Na[Al(OH)_4].$$

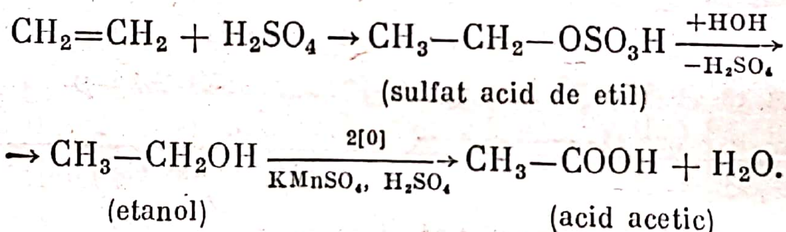
În această reacție hidroxidul de aluminiu se comportă ca un acid reacționînd cu o bază tare. Dar, în reacțiile cu acizii tari, se comportă ca o bază, formînd sărurile respective de aluminiu. De exemplu cu acidul sulfuric poate forma sulfatul de aluminiu:



$$2\ Al(OH)_3 + 3\ H_3SO_4 \rightarrow Al_2(SO_4)_3 + 6\ H_2O.$$

Aceste proprietăți demonstrează caracterul amfoter al hidroxidului de aluminiu.

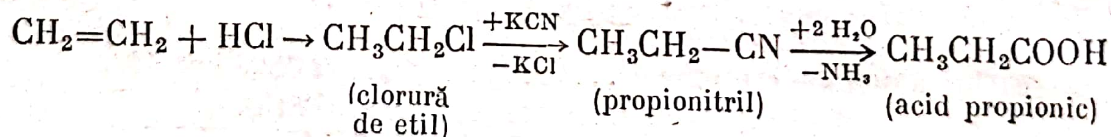
5.2. Acidul acetic poate fi obținut din etenă pe mai multe căi, dintre care menționăm, spre exemplu, transformarea etenei în etanol prin adiția apei în prezența acidului sulfuric și apoi oxidarea etanolului:



$$CH_2{=}CH_2 + H_2SO_4 \rightarrow \underset{\text{(sulfat acid de etil)}}{CH_3{-}CH_2{-}OSO_3H} \xrightarrow[-H_2SO_4]{+HOH}$$

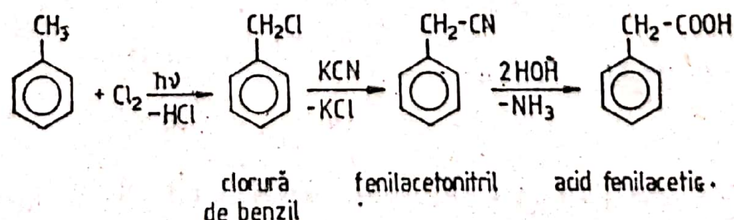
$$\rightarrow \underset{\text{(etanol)}}{CH_3{-}CH_2OH} \xrightarrow[KMnSO_4,\ H_2SO_4]{2[O]} \underset{\text{(acid acetic)}}{CH_3{-}COOH} + H_2O.$$

Pentru obținerea acidului propionic din etenă, trebuie introdus în moleculă un nou atom de carbon, ceea ce se poate face de exemplu prin transformarea etenei în derivat halogenat și apoi acesta, prin reacția cu KCN, în nitrilul respectiv, care, prin hidroliză conduce la acidul propionic:



$$CH_2{=}CH_2 + HCl \rightarrow \underset{\text{(clorură de etil)}}{CH_3CH_2Cl} \xrightarrow[-KCl]{+KCN} \underset{\text{(propionitril)}}{CH_3CH_2{-}CN} \xrightarrow[-NH_3]{+2\ H_2O} \underset{\text{(acid propionic)}}{CH_3CH_2COOH}$$

Toluenul poate fi transformat în acid fenilacetic prin clorurare fotochimică și transformare în clorură de benzil, aceasta prin reacția cu KCN, în nitrilul corespunzător și apoi hidroliza nitrilului:



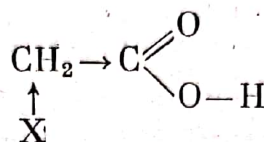
Constanta de aciditate a unui acid slab HA, a cărui ionizare în soluție apoasă este numai parțială, va avea expresia:



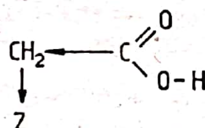
$$HA + H_2O \rightleftarrows H_3O^+ + A^-$$

$$K_a = \frac{[H_3O^+][A^-]}{[HA]}.$$

Deci, aceasta va fi cu atît mai mare cu cît acidul respectiv este mai tare, adică cedează mai ușor protoni moleculelor de apă. Ușurința cu care acidul cedează protoni, va depinde de efectele electronice ale substituienților existenți în molecula acidului. Substituenții ce au efect respingător de electroni vor determina amplificarea densității electronice pe legătura O—H a grupării carboxil:



și implicit micșorarea posibilității de cedare a hidrogenului sub formă de proton, adică vor determina micșorarea constantei de aciditate. Dimpotrivă, substituienții ce au efect atrăgător de electroni vor determina scăderea densității electronice pe legătura O—H din gruparea carboxil și deci creșterea caracterului acid, adică a constantei de aciditate:



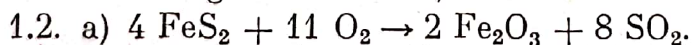
Avînd în vedere faptul că un radical metil manifestă efect electronic inductiv $+I_s$, adică respingător de electroni pe cînd radicalul fenil acționează în sens opus, rezultă că acidul propionic va fi un acid mai slab decît cel acetic, în timp ce acidul fenilacetic va fi mai tare decît acidul acetic.

Deci ordinea cerută este:

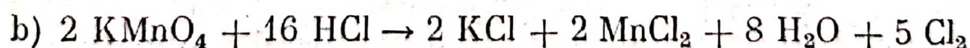


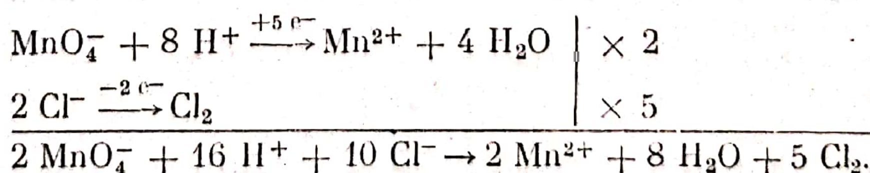
$$CH_3CH_2COOH < CH_3COOH < C_6H_5-CH_2COOH.$$

XVI. 1°. 1.1. Prin oxidare se înțelege procesul de cedare de electroni și ca urmare creșterea stării de oxidare a unui atom din specia chimică care s-a oxidat. Agentul oxidant este o specie chimică, moleculă, atom sau ion, care acceptă electronii cedați de particula ce se oxidează, și prin aceasta el însuși se reduce, adică unul din atomii componenți își micșorează starea de oxidare.
Prin proces redox (sau de oxido-reducere) se înțelege un proces ce constă dintr-o reacție de oxidare și una de reducere, reacții care au loc simultan. Substanța care se oxidează este agent reducător, iar cea care se reduce este agentul oxidant.

1.2. a)  $4\ FeS_2 + 11\ O_2 \rightarrow 2\ Fe_2O_3 + 8\ SO_2.$

În această reacție se oxidează disulfura de fier, atomul de fier trecînd de la starea de oxidare +2 la +3 (în Fe_2O_3), iar atomii de sulf de la starea de oxidare −1 la +4 (în SO_2).
Agentul oxidant este oxigenul molecular care se reduce de la starea de oxidare zero (în O_2) la −2 (în Fe_2O_3 și SO_2)

b)  $2\ KMnO_4 + 16\ HCl \rightarrow 2\ KCl + 2\ MnCl_2 + 8\ H_2O + 5\ Cl_2$



$$MnO_4^- + 8\ H^+ \xrightarrow{+5\,e^-} Mn^{2+} + 4\ H_2O \quad | \times 2$$

$$2\ Cl^- \xrightarrow{-2\,e^-} Cl_2 \quad | \times 5$$

$$2\ MnO_4^- + 16\ H^+ + 10\ Cl^- \rightarrow 2\ Mn^{2+} + 8\ H_2O + 5\ Cl_2.$$

În această reacție se oxidează ionul Cl^- la Cl_2, clorul trecînd de la starea de oxidare -1 la zero. Agentul oxidant este ionul permanganat, MnO_4^-, în prezența protonilor (mediu acid) manganul reducîndu-se de la starea de oxidare $+7$ (în $KMnO_4$) la $+2$ (în $MnCl_2$).
Coeficienții din ecuația reacției se obțin din condiția ca numărul electronilor cedați de substanța care se oxidează să fie egal cu cel al electronilor acceptați de substanța care se reduce. Trebuie observat însă că există un număr de 6 ioni Cl^- care nu se oxidează, ei regăsindu-se în produșii de reacție sub forma sărurilor KCl și $MnCl_2$. Deci ei trebuie adăugați la cei 10 ioni Cl^- care rezultă din condiția menționată și deci sînt necesare 16 molecule de HCl.

2°. Cea mai simplă cale de rezolvare este calculul numărului de echivalenți-gram de $Ca(OH)_2$ existenți în cei 30 cm³ de soluție ce se neutralizează și aplicarea condiției ca acest număr de echivalenți-gram de hidroxid trebuie să fie egal cu numărul de echivalenți-gram de acid azotic necesar pentru neutralizare. Această condiție conduce la relația:

$$n_{acid} \cdot V_{acid} = n_{bază} \cdot V_{bază}$$

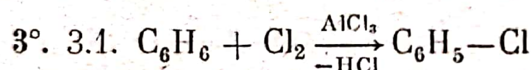
în care n_{acid} și $n_{bază}$ sînt respectiv concentrațiile normale ale soluției de acid și de bază, iar V_{acid} și $V_{bază}$, volumele corespunzătoare.
Soluția de $Ca(OH)_2$ avînd concentrația molară 0,1 m va avea normalitatea 0,2 n deoarece această substanță poate accepta 2 protoni.

Rezultă că:

$$0{,}3 \cdot V_{acid} = 0{,}2 \cdot 30 \text{ cm}^3$$

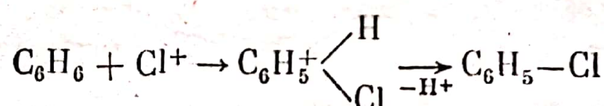
și

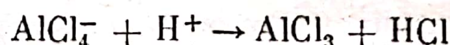
$$V_{acid} = \frac{0{,}2 \cdot 30}{0{,}3} = 20 \text{ cm}^3 \text{ soluție } HNO_3 \text{ 0,3 n.}$$

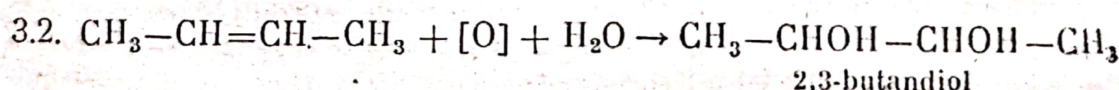


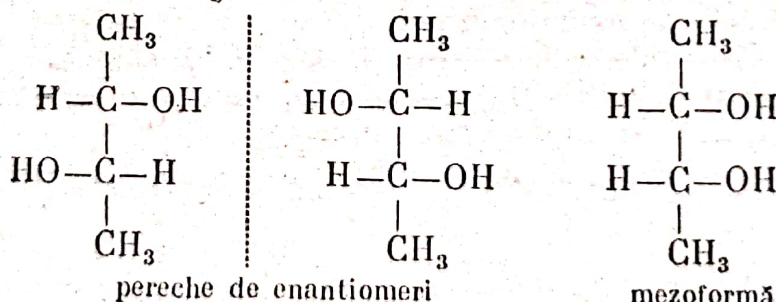
Mecanism de reacție:



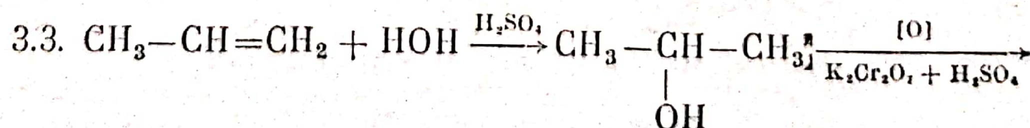


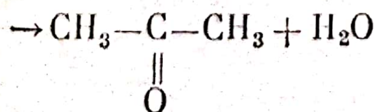


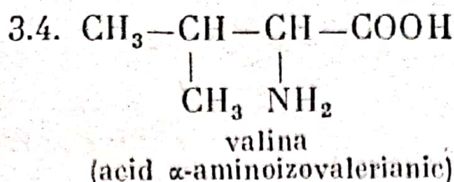




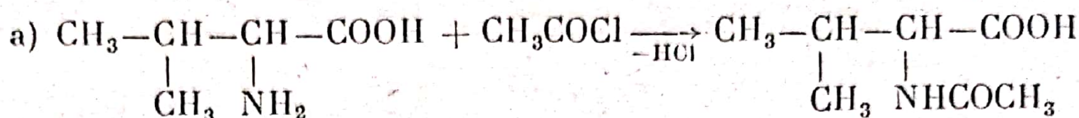
pereche de enantiomeri   mezoformă

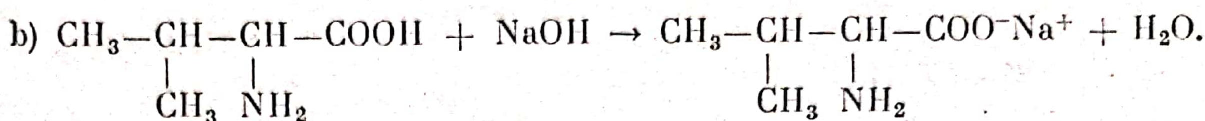


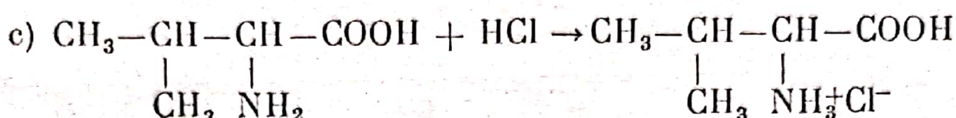


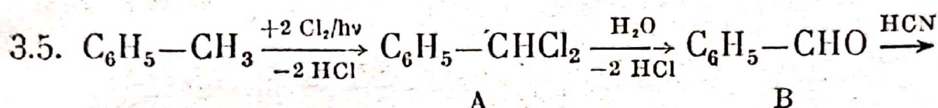
3.4. 

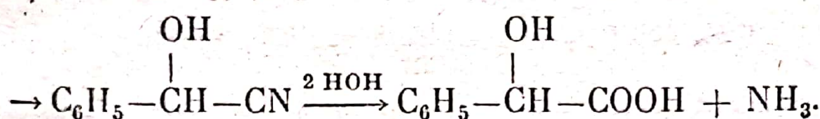
valina
(acid α-aminoizovalerianic)

a) 

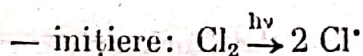
b) 

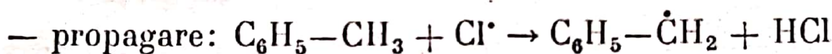
c) 

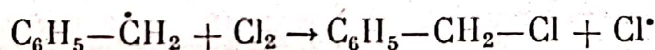
3.5. 

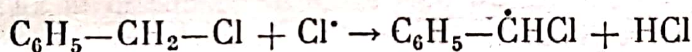


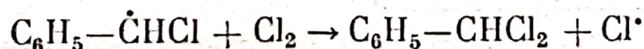
Mecanismul formării compusului A (S.R.):

— inițiere: 

— propagare: 



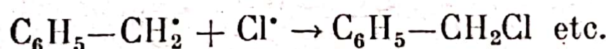






întrerupere:





4°. a) În molecula esterului $R-COOC_2H_5$ se găsesc doi atomi de oxigen, deci:

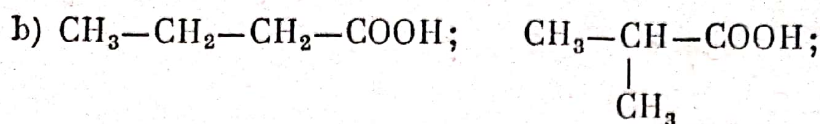
$$\frac{1}{1}\text{ at. gr. de H} \ldots\ldots\ldots \frac{4}{16}\text{ at. gr. de O}$$

$$x_1 \ldots\ldots\ldots 2\text{ at. gr. de O}$$

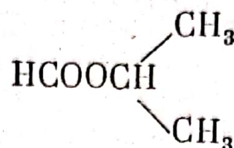
$x_1 = 8$ at. gr. de H se găsesc într-un mol de ester.

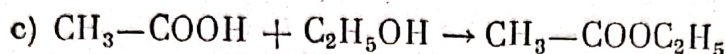
Din cei 8 atomi de hidrogen, cinci se găsesc în radicalul etil și deci trei în radicalul R, care nu poate fi decît $-CH_3$.

Deci esterul are formula $CH_3COOC_2H_5$ (acetat de etil).









88 g ester ....60 g acid acetic............. 46 g etanol
61,6 g ....x_1 .... x_2

$x_1 = 42$ g; $x_2 = 32{,}2$ g (la un randament cantitativ).

Pentru un randament de 70%:

$$42 \cdot \frac{100}{70} = 60 \text{ g acid acetic}; \quad 32{,}2 \cdot \frac{100}{70} = 46 \text{ etanol.}$$

XVII. 1°. Subiectul se tratează conform manualelor școlare, urmînd următorul plan orientativ:

Definiția sărurilor. Rolul catalitic al acestora. Exemple de reacții catalizate de săruri.

a) Reacția de izomerizare alcani-izoalcani.

b) Reacții de oxidare catalizate de săruri (oxidarea parafinei, oxidarea xilenilor).

c) Halogenarea alchenelor și arenelor în prezență de FeX_3 sau AlX_3. Rolul catalizatorilor în formarea reactantului electrofil.

d) Reacții de adiție (adiția parțială a hidrogenului la alchine, adiția acidului clorhidric la alchine, adiția HCN la acetilenă, adiția acidului acetic la acetilenă, adiția apei la alchine, dimerizarea acetilenei).

e) Alchilarea și acilarea arenelor. Rolul catalizatorului în formarea reactantului electrofil.

f) Reacția de transesterificare.

g) Polimerizarea stereospecifică.

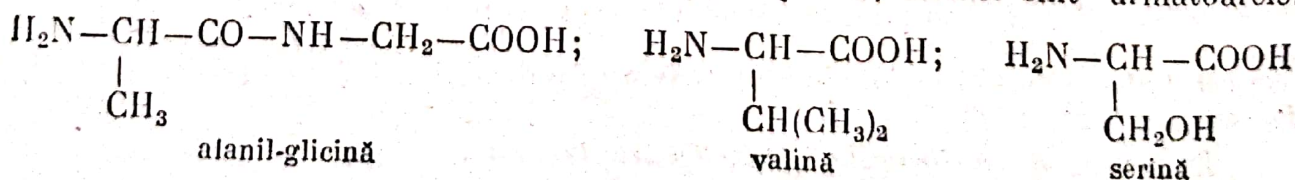
2°. Subiectul se tratează în conformitate cu manualele școlare, după următorul plan orientativ:

a) definiția compușilor halogenați nesaturați. Exemple;

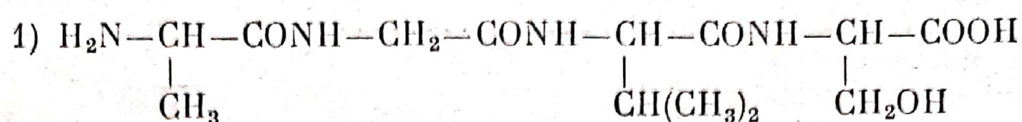
b) metode de obținere a derivaților halogenați nesaturați (clorură de vinil, clorură de alil, cloropren, 1, 2-diclor- și, respectiv, 1, 2-dibrometenă). Mecanismul adiției electrofile;

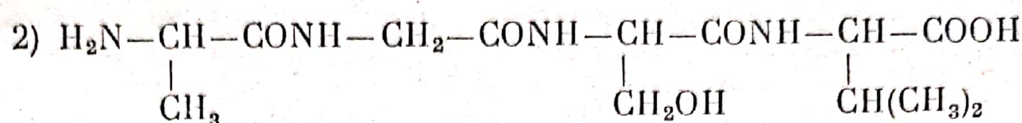
c) proprietățile compușilor halogenați nesaturați.

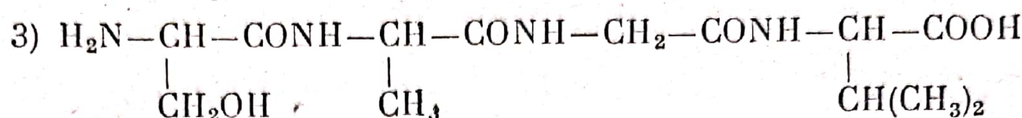
3°. Formulele alanil-glicinei, valinei și, respectiv, serinei sînt următoarele:

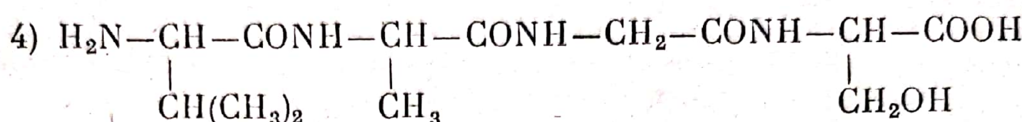


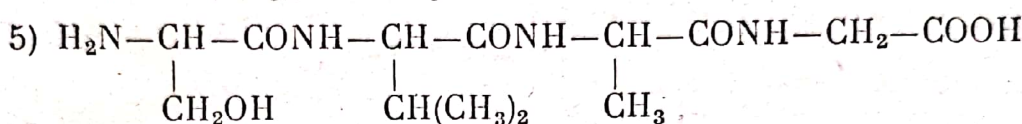
Formulele tetrapeptidelor izomere cerute în enunțul problemei sînt:

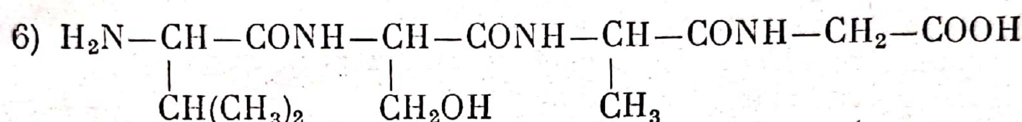




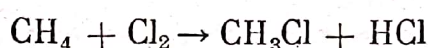


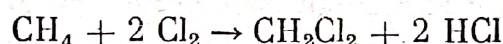


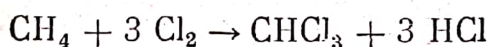


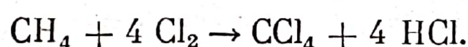


4°. a) Ecuațiile reacțiilor:









Calculul numărului de moli de metan supus clorurării: $\frac{168}{22,4} = 7,5$ moli. Ținînd seama de rapoartele molare date se calculează numărul de moli transformat în produși clorurați și de metan netransformat:

$$5\,x + 3\,x + 2\,x + 1,5\,x + x = 7,5$$

$$x = 0,6 \text{ moli } (CH_4 \text{ netransformat}).$$

$$C_u = \frac{3}{7,5} \cdot 100 = 40\%; \quad C_t = \frac{6,9}{7,5} \cdot 100 = 92\%; \quad \eta = \frac{C_u}{C_t} \cdot 100 = 43,4\%.$$

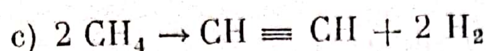
Conversia utilă, conversia totală și randamentul se pot calcula și din rapoartele molare date:

$$C_u = \frac{5}{12,5} \cdot 100 = 40\%; \quad C_t = \frac{11,5}{12,5} \cdot 100 = 92\%; \quad \eta = \frac{40}{92} \cdot 100 = 43,4\%.$$

b) Se calculează numărul de moli de Cl_2 utilizați în reacția de clorurare:

$$5 \cdot 0,6 + 2 \cdot 3 \cdot 0,6 + 3 \cdot 2 \cdot 0,6 + 4 \cdot 1,5 \cdot 0,6 = 13,8 \text{ moli } Cl_2.$$

volumul de clor: $13,8 \cdot 22,4 = 309,12$ l Cl_2 utilizat.


c) $2\ CH_4 \rightarrow CH \equiv CH + 2\ H_2$

$$\begin{array}{ll} 2 \text{ moli } CH_4 \ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots & 1 \text{ mol } C_2H_2 \\ 0{,}6 \text{ moli } CH_4 \ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots & X \\ \hline \end{array}$$

$X = 0{,}3$ moli C_2H_2 (teoretic).

Volumul practic de acetilenă se calculează astfel:

$$0{,}3 \cdot 22{,}4 \cdot \frac{60}{100} = 4{,}032 \text{ l.}$$

XVIII. 1°. Subiectul se tratează conform programei și manualelor școlare, după următorul plan orientativ:

a) alchilarea izobutanului cu izobutenă;
b) alchilarea arenelor cu derivați halogenați;
c) alchilarea arenelor cu alchene;
d) acilarea arenelor cu cloruri acide;
e) reacția derivaților halogenați cu cianuri alcaline;
f) adiția acidului cianhidric la acetilenă;
g) adiția acidului cianhidric la aldehide și cetone;
h) condensarea aldolică (cetolică);
i) condensarea formaldehidei cu fenol (în mediu bazic și acid);
j) reacții de polimerizare și copolimerizare.

2°. Subiectul se poate trata după următorul plan:

a) Adiția electrofilă: definiție, schemă generală. Heteroliza reactantului; definiție reactant electrofil.
Atacul substratului de către electrofil; formare carbocationi versus carbanioni. Reacția carbocationului cu fragmentul nucleofil.

b) Enumerarea reacțiilor AE: adiție de HX, H_2SO_4, H_2O, HCN, R—COOH, X_2, XOH, $NaHSO_3$, polimerizarea acidă.
RX, O_3, adiția conjugată la diene.

c) Adiția de halogeni la alchene și alchine.
Heteroliza X_2.
Atacul substratului (alchenă simetrică).
Stabilizarea carbocationului.
Atacul substratului la alchenă nesimetrică.

d) Adiția de hidracizi la alchene și alchine.
Heteroliza HX.
Atacul substratului la alchena simetrică.
Atacul substratului la alchena nesimetrică.
Formularea generală a regulii lui Markovnikov.

e) Adiția de H_2SO_4:
— la alchenă simetrică;
— la alchenă nesimetrică;
(Se va preciza reactantul electrofil.)

f) Adiția de HOCl:
— la alchenă simetrică;
— la alchenă nesimetrică;
(Se va preciza reactantul electrofil.)

g) Adiția de apă.
Adiția de apă la etenă.
Adiția de apă la acetilenă.
Adiția de apă la propină.

h) Adiția de acid acetic la alchine.

i) Adiția de HCN la alchine.
j) Adiția de $NaHSO_3$ la alchene.
k) Polimerizarea acidă a alchenelor.
Structura alchenei.
Transferul protonului la alchene și formarea carbocationului.
Atacul unei noi molecule de alchenă de către carbocation.

3°. a) Stabilirea formulei brute și moleculare:

$$C: \frac{85,71}{12} = 7,14; \quad H: \frac{14,29}{1} = 14,29$$

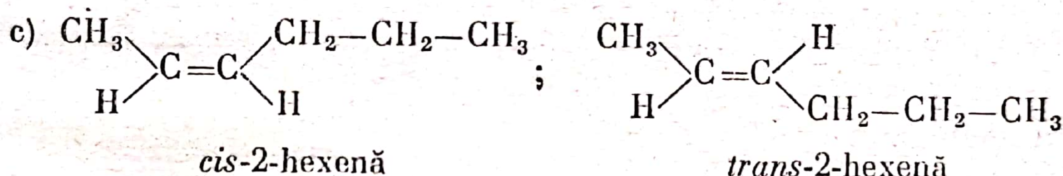
$$C: \frac{7,14}{7,14} = 1; \quad H: \frac{14,29}{7,14} = 2.$$

Formula brută: CH_2.
Formula moleculară: $(CH_2)_n = 84$; $n = 6$; C_6H_{12}.

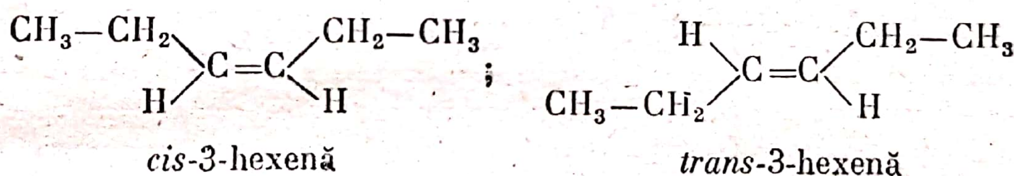
b) $CH_2{=}CH{-}CH_2{-}CH_2{-}CH_2{-}CH_3$
1-hexenă

$CH_3{-}CH{=}CH{-}CH_2{-}CH_2{-}CH_3$
2-hexenă

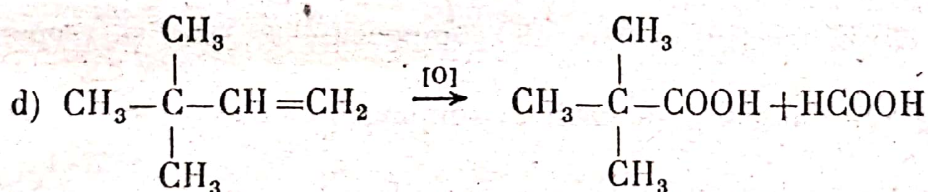
$CH_3{-}CH_2{-}CH{=}CH{-}CH_2{-}CH_3$
3-hexenă

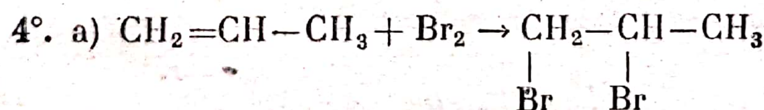


cis-2-hexenă ; *trans*-2-hexenă



cis-3-hexenă ; *trans*-3-hexenă





$22,4 \cdot 10^3$ ml propenă .... $160 \cdot 10^3$ mg Br_2
X .... 800 mg

$X = 112$ ml propenă.

560 ml amestec ....112 ml propenă
100 ml .... Y

$Y = 20\%$ propenă
$100 - 20 = 80\%$ propan.

b) $C_3H_8 + 5\ O_2 \rightarrow 3\ CO_2 + 4\ H_2O$
560 — 112 = 448 ml propan
$22,4 \cdot 10^3$ ml propan .... $3 \cdot 22,4 \cdot 10^3$ ml CO_2
448 ml X

$$X = 3 \cdot 448 = 1\,344 \text{ ml } CO_2.$$

$C_3H_6 + 9/2\ O_2 \rightarrow 3\ CO_2 + 3\ H_2O$
$22,4 \cdot 10^3$ ml propenă............ $3 \cdot 22,4$ ml CO_2
112 ml .... Y

$$Y = 336 \text{ ml } CO_2.$$

Total volum $CO_2 = 1\,344 + 336 = 1\,680$ ml
sau
560 ml × 3 = 1 680 ml CO_2.

Cantitatea de apă
$22,4 \cdot 10^3$ ml C_3H_8............ $4 \cdot 18$ g H_2O
448 ml X

$$X = 1,44 \text{ g } H_2O$$

$22,4 \cdot 10^3$ ml C_3H_6 .... $3 \cdot 18$ g H_2O
112 ml .... Y

$$Y = 0,27 \text{ g}.$$

Total $1,44 + 0,27 = 1,71$ g H_2O.

XIX. 1°. 1. Subiectul se tratează conform manualului de liceu pentru clasa a XI-a.

2. Prin definiție:

$$K_p = \frac{p^2_{NO_2}}{p_{N_2O_4}}; \quad K_n = \frac{n^2_{NO_2}}{n_{N_2O_4}}; \quad K_x = \frac{X^2_{NO_2}}{X_{N_2O_4}}.$$

unde

K_p se exprimă prin presiunile parțiale ale celor două componente, p_{NO_2} și, respectiv, $p_{N_2O_4}$;

K_X se exprimă prin fracțiile molare ale componentelor X_{NO_2} și, respectiv, $X_{N_2O_4}$;

K_n se exprimă prin numărul de moli al componentelor, n_{NO_2} și, respectiv, $n_{N_2O_4}$.

Se pot ușor stabili relațiile dintre aceste constante. De exemplu, avînd în vedere că $X_i = p_i/p$, unde p este presiunea totală, se obține:

$$K_p = \frac{X^2_{NO_2} \cdot P^2}{X_{N_2O_4} P} = K_X \cdot P.$$

Analog, avînd în vedere că $X_i = n_i/n$ unde n este numărul total de moli din sistem, se obține:

$$K_n = \frac{X^2_{NO_2} \cdot n^2}{X_{N_2O_4} \cdot n} = K_X \cdot n.$$

Deci:

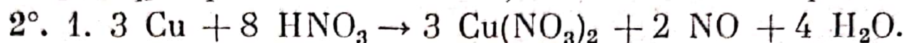
$$K_p = K_X \cdot P = \frac{K_n}{n} \cdot P.$$

Presupunînd că reacția de disociere a N_2O_4 este o reacție simplă expresia legii de viteză va fi:

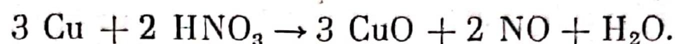
$$v = k[N_2O_4]$$

în care v este viteza reacției exprimată în mol/l.s;

— ordinul de reacție este 1 (egal cu molecularitatea);
— constanta de viteză k are ca dimensiuni inversul unui timp (s^{-1});
— $[N_2O_4]$ reprezintă concentrația reactantului exprimată în mol/l.

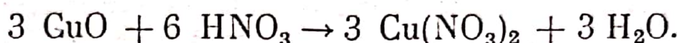

2°. 1. $3\ Cu + 8\ HNO_3 \rightarrow 3\ Cu(NO_3)_2 + 2\ NO + 4\ H_2O$.

În această reacție acidul azotic este oxidant, el oxidînd în primă etapă cuprul la oxid de cupru, azotul reducîndu-se la NO:



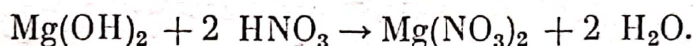
$$3\ Cu + 2\ HNO_3 \rightarrow 3\ CuO + 2\ NO + H_2O.$$

Ulterior oxidul de cupru se va dizolva în excesul de acid azotic:



$$3\ CuO + 6\ HNO_3 \rightarrow 3\ Cu(NO_3)_2 + 3\ H_2O.$$

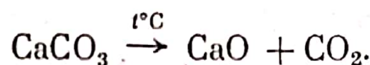
Prin însumarea acestor două reacții se obține ecuația reacției globale de dizolvare a cuprului în acid azotic. Este deci un proces redox:



$$Mg(OH)_2 + 2\ HNO_3 \rightarrow Mg(NO_3)_2 + 2\ H_2O.$$

În această reacție acidul azotic se manifestă numai ca un acid, reacția fiind o simplă reacție de neutralizare, între un acid (HNO_3) și o bază ($Mg(OH)_2$).

2. În procedeul amoniacal de obținere a carbonatului de sodiu (sodei calcinate) se folosesc ca materii prime: $CaCO_3$, NaCl, H_2O și se mai folosește amoniac, NH_3, dar acesta nu se consumă, ci se regenerează și reutilizează. Principalele reacții sînt:



$$CaCO_3 \xrightarrow{t°C} CaO + CO_2.$$

Reacția este reversibilă, dar prin îndepărtarea CO_2 din sistem ea poate fi deplasată complet spre dreapta. Dioxidul de carbon se barbotează în soluția de amoniac:



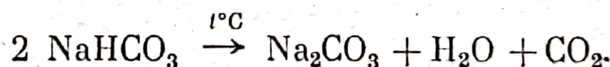
$$NH_3 + H_2O + CO_2 \rightarrow NH_4HCO_3$$

și soluția de carbonat acid de amoniu se tratează cu soluție de NaCl (saramură):



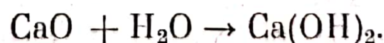
$$NaCl + NH_4HCO_3 \rightleftarrows NaHCO_3 + NH_4Cl.$$

Echilibrul este deplasat spre dreapta deoarece $NaHCO_3$ este mai puțin solubil în apă. Precipitatul de $NaHCO_3$ se calcinează:



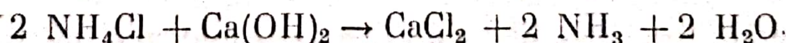
$$2\ NaHCO_3 \xrightarrow{t°C} Na_2CO_3 + H_2O + CO_2.$$

Dioxidul de carbon obținut în această etapă se reintroduce în procesul de fabricație. Pentru recuperarea amoniacului, oxidul de calciu, obținut la calcinarea calcarului, se tratează cu apă:



$$CaO + H_2O \rightarrow Ca(OH)_2.$$

Clorura de amoniu se tratează cu hidroxidul de calciu:

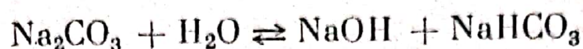


$$2\ NH_4Cl + Ca(OH)_2 \rightarrow CaCl_2 + 2\ NH_3 + 2\ H_2O$$

regenerîndu-se astfel soluția de amoniac. $CaCl_2$ constituie un produs secundar al procesului de fabricație a sodei calcinate.

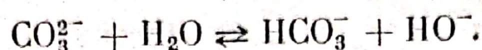
La dizolvarea în apă a carbonatului de sodiu are loc hidroliza acestei săruri, care provine de la un acid slab (H_2CO_3) și o bază tare ($NaOH$), astfel incît soluția obținută va avea un caracter bazic, avînd $pH > 7$.

Reacția de hidroliză are loc în trepte



$$Na_2CO_3 + H_2O \rightleftarrows NaOH + NaHCO_3$$

sau ionic:



$$CO_3^{2-} + H_2O \rightleftarrows HCO_3^- + HO^-.$$

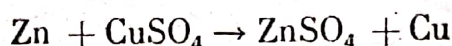
A doua treaptă a reacției de hidroliză este:



$$HCO_3^- + H_2O \rightleftarrows H_2CO_3 + HO^-,$$

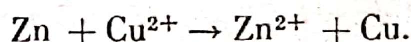
dar în mod obișnuit ea nu are loc (cu pondere importantă) în soluții apoase de Na_2CO_3. Ea se poate produce la încălzire sau prin adăugarea unui reactant care să consume ionii HO^- (de exemplu un acid mai tare) deplasînd astfel echilibrul de hidroliză spre dreapta.

3°.1. a) Deoarece zincul are un potențial de reducere mai negativ decît cuprul, va avea loc reacția:



$$Zn + CuSO_4 \rightarrow ZnSO_4 + Cu$$

sau



$$Zn + Cu^{2+} \rightarrow Zn^{2+} + Cu.$$

Fie x numărul de moli (atomi-gram) de zinc trecut în soluție și deci de cupru depus. Variația masei plăcuței o reprezintă diferența dintre masa zincului dizolvat și cea a cuprului depus:

$$65\,x - 63{,}5\,x = 0{,}045$$

de unde $x = 0{,}03$ moli.
Deci masa cuprului depus pe plăcuță:

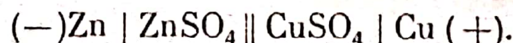
$$m_{Cu} = 0{,}03 \text{ moli} \cdot 63{,}5 \text{ g/mol} = 1{,}905 \text{ g Cu}.$$

Cei 0,03 moli de Cu depus reprezintă 0,06 echivalenți-gram de ioni Cu^{2+} și deci în soluție au mai rămas:

$$0{,}1 - 0{,}06 = 0{,}04 \text{ echivalenți-gram } Cu^{2+}.$$

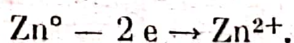
Presupunînd că volumul soluției nu s-a modificat, rămînînd tot 1 l, înseamnă că normalitatea acestei soluții a devenit 0,04 N în $CuSO_4$.

b) Celula galvanică se scrie convențional:



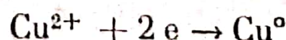
$$(-)Zn \mid ZnSO_4 \parallel CuSO_4 \mid Cu\,(+).$$

Prin dizolvarea sa, zincul metalic constituie anodul celulei și se încarcă negativ. Reacția anodică este:



$$Zn^{\circ} - 2\,e \rightarrow Zn^{2+}.$$

Procesul catodic este reducerea ionilor de cupru:



$$Cu^{2+} + 2\,e \rightarrow Cu^{\circ}$$

care conduce la depunerea cuprului metalic pe plăcuța de zinc.

4°. Se va defini noțiunea de acid după Brönsted, precum și tăria unui acid, conform manualului pentru clasa a IX-a. Se va preciza că tăria acizilor oxigenați superiori crește în perioadă odată cu creșterea caracterului nemetalic al atomului central.

Cum în perioadă caracterul nemetalic crește de la stînga la dreapta, rezultă că tăria acizilor menționați crește în ordinea:



$$H_4SiO_4 < H_3PO_4 < H_2SO_4 < HClO_4.$$

Siliciul, avînd patru electroni pe ultimul strat (este situat în grupa a IV-a), va avea caracterul nemetalic cel mai slab. Caracterul nemetalic se exprimă cantitativ prin afinitatea pentru electron, care reprezintă energia degajată în procesul de acceptare a unui electron de către un atom și transformarea acestuia în ion negativ. Deci siliciul avînd cea mai mică afinitate pentru electron va forma acidul cel mai slab, H_4SiO_4 fiind acid foarte slab.

Fosforul, avînd 5 electroni pe ultimul strat va avea un caracter nemetalic mai pronunțat, deci o afinitate pentru electron mai mare decît siliciul și va forma un acid mai tare decît cel silicic, H_3PO_4 fiind un acid de tărie medie.

Sulful, situat în grupa a VI-a principală are 6 electroni pe ultimul strat deci caracter nemetalic și mai pronunțat decît fosforul, va forma un acid și mai tare decît cel fosforic, H_2SO_4 fiind deja un acid tare (cel puțin în prima sa treaptă de ionizare).

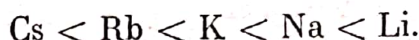
Clorul avînd 7 electroni pe ultimul strat va avea cea mai mare afinitate pentru electron, el avînd nevoie de un singur electron pentru a-și completa octetul electronic, deci și cel mai pronunțat caracter nemetalic și, ca urmare, acidul percloric $HClO_4$ va fi cel mai tare dintre acizii menționați, el fiind de fapt cel mai tare dintre acizii oxigenați anorganici.

XX. 1°. 1. Se va defini caracterul metalic și energia de ionizare, apoi se va analiza și explica variația acestor proprietăți în tabelul periodic conform manualului pentru clasa a IX-a. În concluzie, caracterul metalic crește în ordinea:



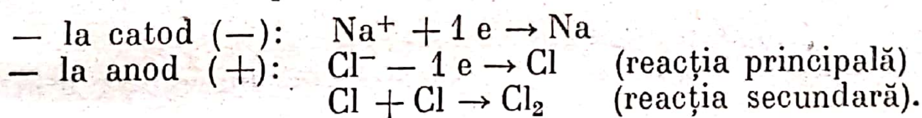
$$Li < Na < K < Rb < Cs.$$

Energia de ionizare variază în sens invers decît caracterul metalic adică crește în ordinea:



$$Cs < Rb < K < Na < Li.$$

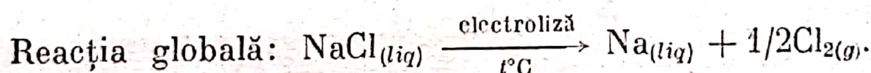
2. Sodiul se poate obține industrial numai prin electroliză în topitură, fie a clorurii de sodiu, fie a hidroxidului de sodiu (vezi manualul pentru clasa a XI-a). În cazul electrolizei topiturii de NaCl reacțiile la electrozi sînt:



— la catod (—): $Na^+ + 1\,e \rightarrow Na$

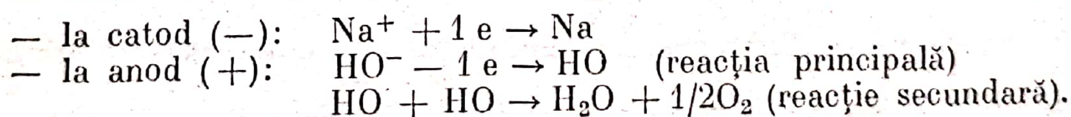
— la anod (+): $Cl^- - 1\,e \rightarrow Cl$ (reacția principală)

$Cl + Cl \rightarrow Cl_2$ (reacția secundară).



Reacția globală: $NaCl_{(liq)} \xrightarrow[t°C]{\text{electroliză}} Na_{(liq)} + 1/2Cl_{2(g)}.$

În cazul electrolizei topiturii de hidroxid de sodiu reacțiile la electrozi sînt:

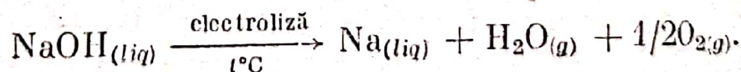


— la catod (—): $Na^+ + 1\,e \rightarrow Na$

— la anod (+): $HO^- - 1\,e \rightarrow HO$ (reacția principală)

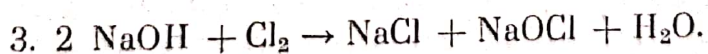
$HO + HO \rightarrow H_2O + 1/2O_2$ (reacție secundară).

Reacția globală:



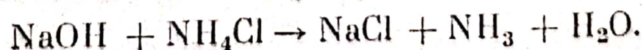
$$NaOH_{(liq)} \xrightarrow[t°C]{\text{electroliză}} Na_{(liq)} + H_2O_{(g)} + 1/2O_{2(g)}.$$

Electroliza topiturii hidroxidului de sodiu prezintă avantajul că se realizează la temperaturi mai joase decît în cazul NaCl.



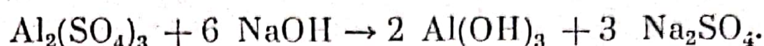
3. $2\ NaOH + Cl_2 \rightarrow NaCl + NaOCl + H_2O.$

Rezultă un amestec de clorură de sodiu și hipoclorit de sodiu:



$$NaOH + NH_4Cl \rightarrow NaCl + NH_3 + H_2O.$$

Hidroxidul de sodiu fiind o bază mai tare decît amoniacul, îl scoate pe acesta din sărurile lui.



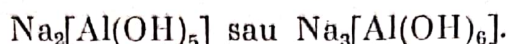
$$Al_2(SO_4)_3 + 6\ NaOH \rightarrow 2\ Al(OH)_3 + 3\ Na_2SO_4.$$

În prima etapă, cînd NaOH nu este în exces, precipită hidroxidul de aluminiu deoarece acesta este scos din sarea sa de către hidroxidul de sodiu care este o bază mult mai tare decît $Al(OH)_3$. În exces de NaOH, hidroxidul de aluminiu se redizolvă manifestînd caracterul său amfoter, adică reacționînd ca un acid:



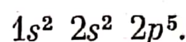
$$Al(OH)_3 + NaOH \rightarrow Na[Al(OH)_4].$$

Rezultă tetrahidroxoaluminatul de sodiu care este solubil în apă. În exces mai mare de NaOH se pot forma și alți hidroxoaluminați, cum ar fi



$$Na_2[Al(OH)_5] \text{ sau } Na_3[Al(OH)_6].$$

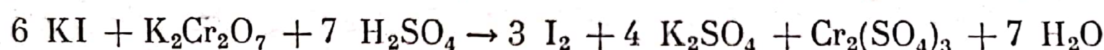
4. Elementul cu numărul atomic $Z = 9$ este fluorul și are configurația electronică:



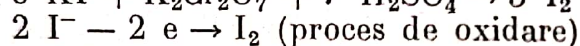
$$1s^2\ 2s^2\ 2p^5.$$

Fiind cel mai electronegativ element în reacția lui cu potasiul va avea loc un transfer de electron de la potasiu (avînd caracter metalic pronunțat) la fluor cu puternic caracter nemetalic, rezultînd astfel ionii K^+ și F^-. Deci în compusul format, KF, legătura va fi ionică sau electrovalentă.
Compusul va avea proprietățile generale ale substanțelor ionice (vezi manualul pentru clasa a IX-a).

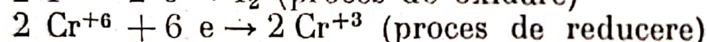
2°.1. Ecuația se echilibrează prin metoda redox:



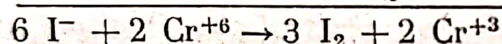
$$6\ KI + K_2Cr_2O_7 + 7\ H_2SO_4 \rightarrow 3\ I_2 + 4\ K_2SO_4 + Cr_2(SO_4)_3 + 7\ H_2O$$



$$2\ I^- - 2\ e \rightarrow I_2 \text{ (proces de oxidare)}$$



$$2\ Cr^{+6} + 6\ e \rightarrow 2\ Cr^{+3} \text{ (proces de reducere)}$$



$$6\ I^- + 2\ Cr^{+6} \rightarrow 3\ I_2 + 2\ Cr^{+3}$$

2. În această reacție echivalentul-gram al dicromatului de potasiu este $\frac{1}{6}$ moli deoarece o moleculă de dicromat transferă 6 electroni.
Se calculează numărul de echivalenți-gram (E_q) de $K_2Cr_2O_7$ din soluția utilizată:

1000 ml sol. .... 0,1 E_q
50 ml sol. x

$$x = 5 \cdot 10^{-3}\ E_q \text{ de } K_2Cr_2O_7 = \frac{5}{6} \cdot 10^{-3} \text{ moli } K_2Cr_2O_7.$$

Numărul de moli de KI ce reacționează se obține din ecuația reacției:

6 moli KI .... 1 mol $K_2Cr_2O_7$

Y moli KI .... $\frac{5}{6} \cdot 10^{-3}$ moli $K_2Cr_2O_7$

$Y = 5 \cdot 10^{-3}$ moli de KI care a reacționat.

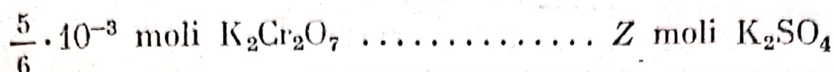
Numărul de moli de iod molecular format este evident jumătate din numărul de moli de KI reacționat, adică rezultă

$$2{,}5 \cdot 10^{-3} \text{ moli } I_2 = 2{,}5 \cdot 10^{-3} \text{ moli} \cdot 254 \text{ g/mol} = 0{,}635 \text{ g } I_2.$$

Masa de KI reacționat este $5 \cdot 10^{-3}$ moli $\cdot$ 166 g/mol $= 0{,}83$ g KI.
Deci masa KI în exces este $1 - 0{,}83 = 0{,}17$ g KI exces.

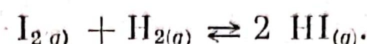
3. Masa de acid sulfuric consumată în reacție se obține tot din ecuația reacției:


1 mol $K_2Cr_2O_7$ .... 7 moli H_2SO_4


$\frac{5}{6} \cdot 10^{-3}$ moli $K_2Cr_2O_7$ .... Z moli K_2SO_4

$$Z = \frac{35}{6} \cdot 10^{-3} \text{ moli } H_2SO_4 = \frac{35}{6} \cdot 10^{-3} \text{ moli} \cdot 98 \text{ g/mol} = 0{,}572 \text{ g } H_2SO_4 \text{ consumat}$$

4. Iodul format în reacția de oxidare a iodurii de potasiu este $2{,}5 \cdot 10^{-3}$ moli I_2 și este încălzit deci tot cu $2{,}5 \cdot 10^{-3}$ moli de H_2 pînă la stabilirea echilibrului:


$$I_{2(g)} + H_{2(g)} \rightleftarrows 2\ HI_{(g)}.$$

Fie x numărul de moli de I_2 (sau de H_2) care reacționează și deci se formează, la echilibru $2x$ moli de HI.
Avem următorul tabel:

Timp \ Component	I_2	H_2	HI	Total
$t = 0$	$2{,}5 \cdot 10^{-3}$	$2{,}5 \cdot 10^{-3}$	0	$5 \cdot 10^{-3}$
$t = t_{ech}$	$2{,}5 \cdot 10^{-3} - x$	$2{,}5 \cdot 10^{-3} - x$	$2x$	$5 \cdot 10^{-3}$

Expresia constantei de echilibru exprimată prin concentrații molare va fi:

$$K_c = \frac{[HI]^2}{[H_2] \cdot [I_2]}$$

Dacă volumul sistemului este V, avem:

$$64 = \frac{\frac{4x^2}{V^2}}{\frac{(2{,}5 \cdot 10^{-3} - x)^2}{V^2}} = \frac{4x^2}{(2{,}5 \cdot 10^{-3} - x)^2}$$

sau:

$$\frac{2x}{2{,}5 \cdot 10^{-3} - x} = \pm 8, \text{ de unde rezultă: } x = 2 \cdot 10^{-3}.$$

Cealaltă soluție a ecuației nu are sens fizic.
Deci se formează la echilibru:

$$2x = 4 \cdot 10^{-3} \text{ moli HI} = 4 \cdot 10^{-3} \text{ moli} \cdot 128 \text{ g/mol} = 0{,}512 \text{ g HI}.$$

3°. Subiectul va fi tratat conform manualului de liceu pentru clasa a X-a avîndu-se în vedere următoarele probleme: Definiția monomerilor vinilici. Principalii monomeri vinilici. Obținerea lor prin reacții de adiție la acetilenă, reacții de cracare și reacții de dehidrogenare.
Mecanismul general al polimerizării vinilice se va trata conform manualelor pentru clasele a X-a și a XII-a, punîndu-se în evidență mecanismul de adiție radicalică al polimerizării, fie pe un exemplu general, fie pe un caz concret.

4°. 1. Glicerida poate fi numai o distearooleină sau o dioleostearină. În primul caz, masa moleculară va fi 888 g/mol, iar în cel de al doilea 886 g/mol.

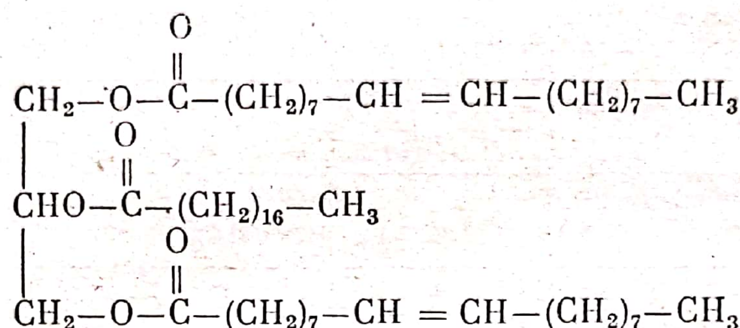
Un mol de distearooleină va adiționa 1 mol de I_2. Cifra de iod fiind numărul de grame de iod ce se adiționează la 100 g gliceridă rezultă că, în primul caz, s-ar obține o cifră de iod (C.I.):

888 g gliceridă .... 254 g I_2
100 g gliceridă .... C.I. = 28,60 g I_2.

Deci glicerida nu este distearooleină.
În al doilea caz, un mol de dioleostearină va adiționa doi moli de I_2 și va avea o cifră de iod:

886 g gliceridă .... 2 × 254 g I_2
100 g gliceridă .... C.I. = 57,33 g I_2

ceea ce corespunde enunțului, deci glicerida considerată este o dioleostearină. Formula de structură a gliceridei cu molecula simetrică va fi:



2. Săpunul obținut va fi format din oleat de sodiu și din stearat de sodiu în raport *molar 2:1

886 kg gliceridă .... (2·304 + 306) kg săpun
1772 kg gliceridă .... x kg săpun

$$x = \frac{1\,772 \cdot 914}{886} = 1828 \text{ kg săpun anhidru.}$$

Dacă săpunul mai conține 10% apă înseamnă că el conține 90% săpun anhidru. Deci:

100 kg săpun umed .... 90 kg săpun anhidru
x kg săpun umed .... 1828 kg săpun anhidru

x = 2031,11 kg săpun cu 10% apă.

3. 1 kmol gliceridă = 886 kg .... 2 kmoli H_2 = 44,8 m^3
443 kg .... Y m^3H_2

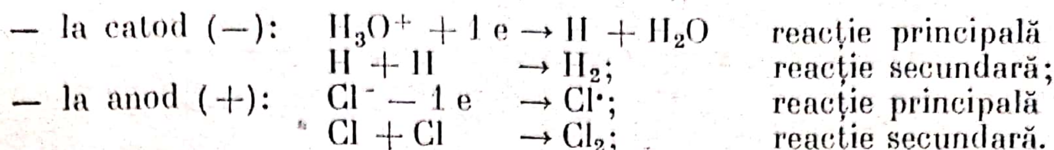
Y = 22,4 m^3H_2 (în condiții normale).

În condițiile problemei:

$$\frac{p_0V_0}{T_p} = \frac{pV}{T}\text{; de unde } V = \frac{p_0V_0T}{pT_0} = \frac{22{,}4 \cdot 1 \cdot 300}{10 \cdot 273} = 2{,}46 \text{ m}^3\text{H}_2$$

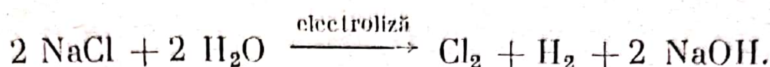
XXI. 1°. 1. Subiectul se va trata conform manualului de liceu pentru clasa a IX-a. Se va discuta variația în tabelul periodic a razelor ionice și afinității pentru electroni. În concluzie, se va preciza pentru grupa halogenilor: razele ionice cresc în ordinea: $F^- < Cl^- < Br^- < I^-$; afinitatea pentru electroni crește în ordinea: $I < Br < Cl < F$. Se vor preciza apoi factorii care influențează entropia substanțelor, conform manualului pentru clasa a XI-a și, în concluzie, ordinea în care crește entropia halogenilor în stare gazoasă va fi: $F_2 < Cl_2 < Br_2 < I_2$.

2. Metoda industrială de obținere a clorului este electroliza soluției apoase de NaCl (vezi manualul pentru clasa a XI-a). Reacțiile care au loc la electrozi vor fi:



— la catod (−): $H_3O^+ + 1\,e \rightarrow H + H_2O$ reacție principală
$H + H \rightarrow H_2$; reacție secundară;
— la anod (+): $Cl^- - 1\,e \rightarrow Cl^\bullet$; reacție principală
$Cl + Cl \rightarrow Cl_2$; reacție secundară.

În soluție rămîn ionii de Na^+ și HO^- care formează hidroxidul de sodiu. Reacția globală a procesului de electroliză este:



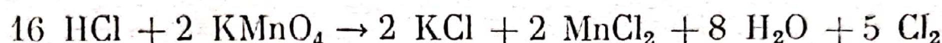
$$2\ NaCl + 2\ H_2O \xrightarrow{\text{electroliză}} Cl_2 + H_2 + 2\ NaOH.$$

Prin același proces se obține deci industrial și hidroxidul de sodiu (de exemplu, la combinatele chimice de la Rîmnicu Vîlcea, Giurgiu și Borzești).
În laborator clorul se obține de obicei prin oxidarea acidului clorhidric. De exemplu:



$$4\ HCl + MnO_2 \rightarrow MnCl_2 + 2\ H_2O + Cl_2$$

sau:



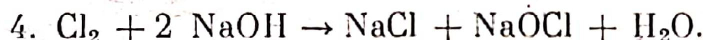
$$16\ HCl + 2\ KMnO_4 \rightarrow 2\ KCl + 2\ MnCl_2 + 8\ H_2O + 5\ Cl_2$$

3. Expresiile cerute sînt:

$$H_{2(g)} + I_{2(g)} \rightleftharpoons 2\ HI_{(g)}$$

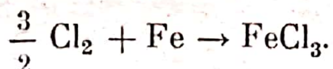
$$K_c = \frac{[HI]^2}{[H_2]\cdot[I_2]}; \qquad K_p = \frac{p^2_{HI}}{p_{H_2}\cdot p_{I_2}}$$

unde K_c se exprimă prin concentrațiile molare ale celor trei componente, iar K_p prin presiunile parțiale respective. Reacția avînd loc fără variația numărului de moli, adică $\Delta n = 0$, rezultă că cele două constante sînt egale între ele și ambele adimensionale, deci $K_c = K_p$. În caz general, $K_p = K_c(RT)^{\Delta n}$, presupunînd o comportare ideală a tuturor componentelor sistemului gazos.



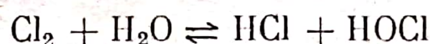
4. $Cl_2 + 2\ NaOH \rightarrow NaCl + NaOCl + H_2O$.

Rezultă deci un amestec de clorură de sodiu și hipoclorit de sodiu:



$$\frac{3}{2}\ Cl_2 + Fe \rightarrow FeCl_3.$$

Se va forma clorura de Fe(III), deoarece clorul are un puternic caracter oxidant și deci va oxida fierul pînă la treapta superioară de oxidare.



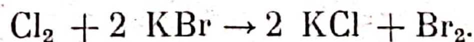
$$Cl_2 + H_2O \rightleftharpoons HCl + HOCl$$

sau



$$Cl_2 + 2\ H_2O \rightleftharpoons HOCl + Cl^- + H_3O^+.$$

Cea mai mare parte a clorului se va dizolva în apă, dar o anumită cantitate va reacționa cu apa formînd un amestec de acid clorhidric și acid hipocloros.

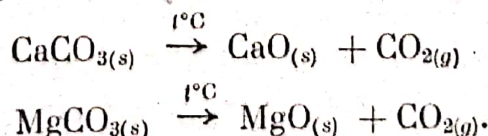


$$Cl_2 + 2\ KBr \rightarrow 2\ KCl + Br_2.$$

Clorul, avînd un caracter nemetalic mai pronunțat decît bromul, va oxida ionii Br^- la brom molecular, adică va pune în libertate bromul din sărurile acestuia (din bromuri).

2°. 1. Conform enunțului, dolomita va fi un amestec de $CaCO_3$, $MgCO_3$ și impurități.

Reacțiile de descompunere termică sînt:

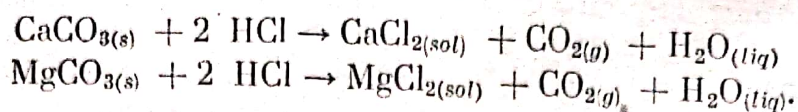


$$CaCO_{3(s)} \xrightarrow{t°C} CaO_{(s)} + CO_{2(g)}$$

$$MgCO_{3(s)} \xrightarrow{t°C} MgO_{(s)} + CO_{2(g)}.$$

Deci reziduul rămas este format din CaO, MgO și impurități, deoarece descompunerea carbonaților este totală ($\eta = 100\%$), iar impuritățile nu se volatilizează.

La tratarea dolomitei cu HCl au loc reacțiile:



$$CaCO_{3(s)} + 2\ HCl \rightarrow CaCl_{2(sol)} + CO_{2(g)} + H_2O_{(liq)}$$
$$MgCO_{3(s)} + 2\ HCl \rightarrow MgCl_{2(sol)} + CO_{2(g)} + H_2O_{(liq)}.$$

Deci reziduul care rămîne îl reprezintă numai impuritățile (care nu reacționează cu HCl). Diferența dintre masele reziduurilor rămase în cele două cazuri este deci masa celor doi oxizi CaO și MgO.

Fie x numărul de moli de $CaCO_3$ din probă;
y numărul de moli de $MgCO_3$ din probă.

Evident că rezultă x moli CaO și y moli MgO la calcinare.
Se obține deci sistemul:

$$\begin{cases} 100\,x + 84\,y = 1{,}84 \text{ (masa probei calcinate minus 0,16 g impurități);} \\ 56\,x + 40\,y = 0{,}96 \text{ (masa reziduului de la calcinare minus 0,16 g impurități).} \end{cases}$$

Rezolvînd sistemul se obține:

$$x = 0{,}01 \text{ moli } CaCO_3 = 1 \text{ g } CaCO_3$$
$$y = 0{,}01 \text{ moli } MgCO_3 = 0{,}84\ MgCO_3.$$

Deci proba supusă descompunerii conține:

$$1 \text{ g } CaCO_3;\ 0{,}84 \text{ g } MgCO_3 \text{ și } 0{,}16 \text{ g impurități}$$

adică: 50% $CaCO_3$; 42% $MgCO_3$ și 8% impurități în procente de masă.

2. Volumul de CO_2 rezultat la descompunerea termică va fi evident egal cu cel rezultat la tratarea cu HCl (neglijîndu-se solubilitatea CO_2 în apă) și va fi 0,02 moli · 22,4 l/mol = 0,448 l = 448 cm³ (c.n.)

3. În urma reacției cu HCl vor rezulta 0,01 moli de $CaCl_2$ și tot 0,01 moli $MgCl_2$ deci:

$$0{,}01 \text{ moli} \cdot 111 \text{ g/mol} = 1{,}11 \text{ g } CaCl_2$$
$$0{,}01 \text{ moli} \cdot 95 \text{ g/mol} = 0{,}95 \text{ g } MgCl_2.$$

4. Soluția de HCl utilizată conține:

$$0{,}1 \text{ l} \cdot 2 \text{ mol/l} = 0{,}2 \text{ moli HCl}$$

(pentru HCl concentrația normală este egală cu cea molară căci

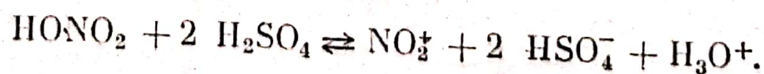
$$1\ Eq_{HCl} = 1 \text{ mol HCl}).$$

În reacție se consumă 0,04 moli HCl (cîte 0,02 moli cu fiecare component), deci mai rămîn 0,16 moli HCl neconsumat, în 0,1 l soluție. Concentrația molară (și cea normală) a HCl în această soluție va fi 1,6 mol/l, adică 1,6 N.

3°. Reacțiile compușilor organici cu acidul azotic, studiate conform programei de liceu, pot fi prezentate după următorul plan:

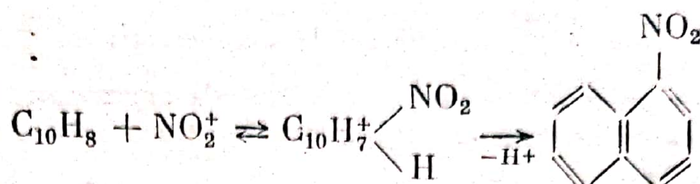
a) reacțiile acidului azotic cu hidrocarburile (alcani și arene);
b) reacția glicerinei cu acidul azotic;
c) reacțiile fenolului, clorbenzenului și nitrobenzenului cu acidul azotic (orientarea substituției);
d) reacțiile celulozei cu acidul azotic;
e) reacția xantoproteică pentru identificarea proteinelor.

Mecanismul reacției de nitrare a naftalinei:
— formarea reactantului electrofil:

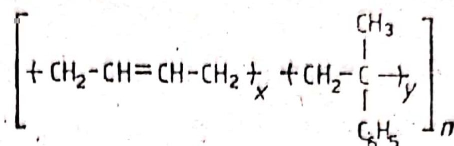


$$HONO_2 + 2\ H_2SO_4 \rightleftarrows NO_2^+ + 2\ HSO_4^- + H_3O^+.$$

— atacul reactantului electrofil, formarea complexului σ şi expulzarea protonului



4°. 1) Formula generală a unui copolimer butadien — α-metilstirenic este:



Se calculează procentul de carbon pe baza acestei formule

$n(54\,x + 118\,y)$ .... $n(4\cdot 12\cdot x + 9\cdot 12\cdot y)$
100 90

$90(54\,x + 118\,y) = 100(48\,x + 108\,y).$

Se notează $\frac{x}{y} = a.$

$4860\,a + 10\,620 = 4800\,a + 10\,800$
$a = 3$; (raportul molar = 3:1).

2) $\overline{M} = (54\cdot 3 + 118)\cdot 100 = 28\,000.$

3) 280 kg copolimer .... 1 kmol cumen
560 .... z

$z = 2$ kmoli $= 2\cdot 120 = 240$ kg cumen (randament 100%)

$240\cdot\frac{100}{75} = 320$ kg cumen (randament 75%).

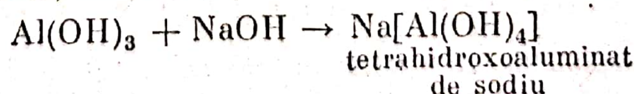
XXII. 1°. 1. Se va defini caracterul metalic şi caracterul nemetalic, conform manualului pentru clasa a IX-a.
Elemente cu caracter metalic sînt: Na, Mg şi Al.
Caracter nemetalic au: Si, P, S şi Cl, dar Si este considerat şi ca un semimetal avînd proprietăţi semiconductoare.
Hidroxizii elementelor cu caracter metalic sînt:

$NaOH$ — hidroxid de sodiu;
$Mg(OH)_2$ — hidroxid de magneziu;
$Al(OH)_3$ — hidroxid de aluminiu.

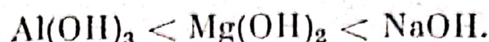
Acizii superiori ai elementelor cu caracter nemetalic sînt:

H_4SiO_4 — acid ortosilicic;
H_3PO_4 — acid ortofosforic;
H_2SO_4 — acid sulfuric;
$HClO_4$ — acid percloric.

2. Tăria hidroxizilor elementelor cu caracter metalic variază în acelaşi sens cu caracterul metalic, adică scade în perioadă de la stînga la dreapta. Caracterul metalic cel mai slab îl are aluminiul deci hidroxidul de aluminiu este cel mai slab, el avînd şi caracter amfoter, adică reacţionează cu bazele tari ca un acid:



Urmează hidroxidul de magneziu care este de tărie medie și apoi cel de sodiu care este cel mai tare. Deci ordinea cerută este:



$$Al(OH)_3 < Mg(OH)_2 < NaOH.$$

Analog, tăria acizilor oxigenați superiori ai elementelor cu caracter nemetalic crește odată cu creșterea caracterului nemetalic, adică de la stînga la dreapta în sistemul periodic al elementelor.

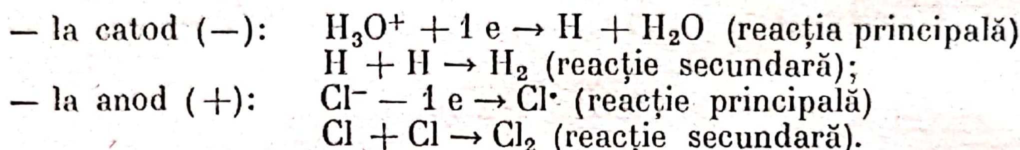
H_4SiO_4 este un acid foarte slab, H_3PO_4 este un acid de tărie medie, H_2SO_4 este un acid tare, iar $HClO_4$ este cel mai tare dintre acizii menționați. Deci ordinea cerută este:



$$H_4SiO_4 < H_3PO_4 < H_2SO_4 < HClO_4.$$

3. Hidroxidul de sodiu se obține industrial prin electroliza soluției apoase de clorură de sodiu.

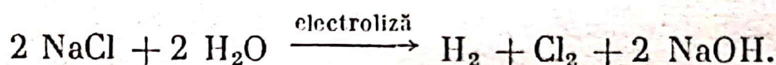
Reacțiile (simplificate) care au loc la electrozi sînt:



— la catod (—): $H_3O^+ + 1\,e \rightarrow H + H_2O$ (reacția principală)
$H + H \rightarrow H_2$ (reacție secundară);
— la anod (+): $Cl^- - 1\,e \rightarrow Cl^\cdot$ (reacție principală)
$Cl + Cl \rightarrow Cl_2$ (reacție secundară).

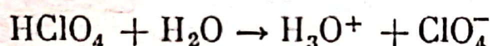
În soluție rămîn ionii Na^+ și HO^- deci se acumulează hidroxid de sodiu.

Reacția globală se poate scrie:



$$2\,NaCl + 2\,H_2O \xrightarrow{\text{electroliză}} H_2 + Cl_2 + 2\,NaOH.$$

4. Acidul percloric fiind total ionizat conform ecuației:



$$HClO_4 + H_2O \rightarrow H_3O^+ + ClO_4^-$$

rezultă că ionii H_3O^+ vor avea aceeași concentrație molară ca și $HClO_4$ în soluția dată. Masa molară a $HClO_4$ este 100,5 g/mol, deci în cei 100 ml soluție se găsesc $\frac{1{,}005\ g}{100{,}5\ g/mol} = 0{,}01$ mol.

La 1000 ml soluție există 0,1 mol $HClO_4$ deci

$$[H_3O^+] = 0{,}1\ mol/l.$$

$$pH = -\lg[H_3O^+] = -\lg 10^{-1} = 1.$$

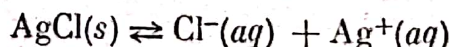
Soluția respectivă de acid percloric are deci $pH = 1$.

2°. 1. $$P_{s(AgCl)} = [Ag^+]\cdot[Cl^-].$$

2. Solubilitatea clorurii de argint în mol/l va fi:

$$S = \sqrt{P_s} = \sqrt{10^{-10}} = 10^{-5}\ mol/l.$$

3. Avînd în vedere faptul că clorura de argint care trece în soluție este complet ionizată avînd loc echilibrul eterogen:



$$AgCl(s) \rightleftarrows Cl^-(aq) + Ag^+(aq)$$

rezultă că cele două concentrații, $[Cl^-]$ și $[Ag^+]$, în soluție vor fi egale fiecare cu solubilitatea clorurii de argint, dacă se exprimă în mol/l.

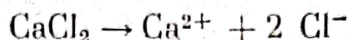
Așa dar:

$$[Ag^+] = 10^{-5}\ mol/l = 108\ g/mol \cdot 10^{-5}\ mol/l = 1{,}08 \cdot 10^{-3}\ g/l$$
$$[Cl^-] = 10^{-5}\ mol/l = 35{,}5\ g/mol \cdot 10^{-5}\ mol/l = 3{,}55 \cdot 10^{-4}\ g/l.$$

4. Numărul de moli de $CaCl_2$ adăugat va fi:

$$\frac{2{,}775 \cdot 10^{-2}}{111} = 2{,}5 \cdot 10^{-4}\ \text{moli în 500 ml soluție, deci}\ 5 \cdot 10^{-4}\ mol/l.$$

Clorura de calciu fiind total ionizată în soluție:



$$CaCl_2 \rightarrow Ca^{2+} + 2\ Cl^-$$

rezultă că ionii Cl^- introduși cu $CaCl_2$ vor avea o concentrație dublă, adică 10^{-3} mol/l. Dacă notăm cu x solubilitatea AgCl în prezența clorurii de calciu, atunci ionii din soluție vor avea concentrațiile:

$$[Ag^+] = x \text{ mol/l}$$
$$[Cl^-] = (x + 10^{-3}) \text{ mol/l.}$$

Produsul acestor concentrații în soluție nu poate depăși produsul de solubilitate. Rezultă:

$$x(x + 10^{-3}) = 10^{-10}.$$

Ținînd cont de faptul că solubilitatea clorurii de argint în prezența $CaCl_2$ va fi cu siguranță mai mică decît în apă pură (influența ionului comun) rezultă că $x < 10^{-5}$ și deci $x \ll 10^{-3}$; și neglijînd pe x din paranteză rezultă

$$x = 10^{-7} \text{ mol/l,}$$

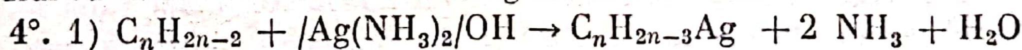
Așadar prin adăugarea clorurii de calciu solubilitatea clorurii de argint se reduce la 10^{-7} mol/l (față de 10^{-5} mol/l, în apă pură).

5. $[Ag^+] = 10^{-7}$ mol/l · 108 g/mol $= 1{,}08 \cdot 10^{-5}$ g/l
$[Cl^-] = 10^{-3}$ mol/l · 35,5 g/mol $= 3{,}55 \cdot 10^{-2}$ g/l.

3°. Planul de tratare a subiectului este următorul:

A. Proprietățile chimice ale alcoolilor. Definiția alcoolilor.
Reacția alcoolilor cu metale alcaline. Eliminarea apei intra- și intermolecular. Esterificarea alcoolilor cu acizi minerali și cu acizi carboxilici. Oxidarea alcoolilor. Reacțiile alcoolilor cu hidracizii și cu pentaclorura de fosfor. Esterificarea alcoolilor cu cloruri acide și cu anhidride acide.

B. Proprietățile chimice ale fenolului.
Formula și structurile limită ale fenolului. Aciditatea fenolului (reacția cu hidroxidul de sodiu). Eterificarea și esterificarea fenolului. Alchilarea cu oxid de etenă.
Substituția electrofilă aromatică în pozițiile *orto* și *para* (halogenarea, nitrare, sulfonare).
Condensarea fenolului cu formaldehidă (în mediu acid și în mediu bazic). Cuplarea fenolului cu săruri de diazoniu. Hidrogenarea fenolului.

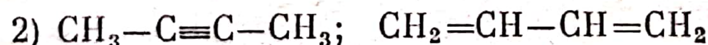


4°. 1) $C_nH_{2n-2} + /Ag(NH_3)_2/OH \rightarrow C_nH_{2n-3}Ag + 2\ NH_3 + H_2O$

14 n—2 g .... 14 n—3 + 108 g.

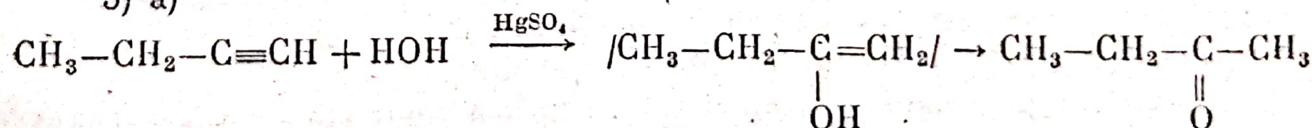
10,8 g .... 32,2 g.

$n = 4$; A: $CH_3—CH_2—C{\equiv}CH$



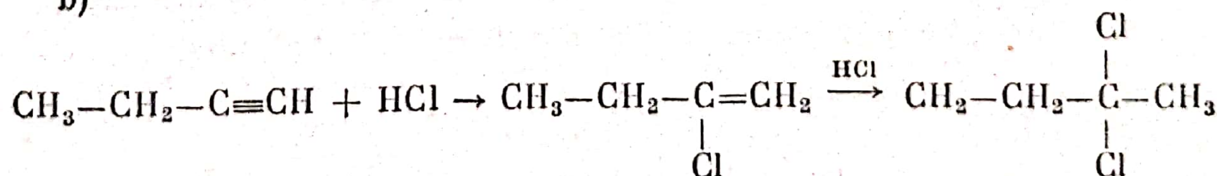
2) $CH_3—C{\equiv}C—CH_3$; $CH_2{=}CH—CH{=}CH_2$

3) a)

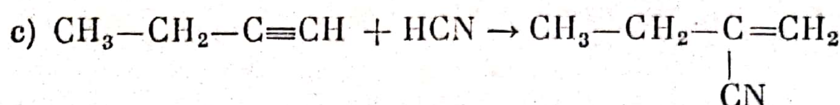


$$CH_3—CH_2—C{\equiv}CH + HOH \xrightarrow{HgSO_4} /CH_3—CH_2—\underset{\underset{OH}{|}}{C}{=}CH_2/ \rightarrow CH_3—CH_2—\underset{\underset{O}{||}}{C}—CH_3$$

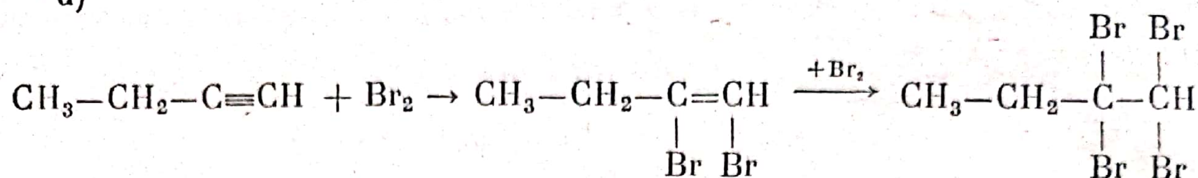
b)



$$CH_3—CH_2—C{\equiv}CH + HCl \rightarrow CH_3—CH_2—\underset{\underset{Cl}{|}}{C}{=}CH_2 \xrightarrow{HCl} CH_2—CH_2—\overset{\overset{Cl}{|}}{\underset{\underset{Cl}{|}}{C}}—CH_3$$

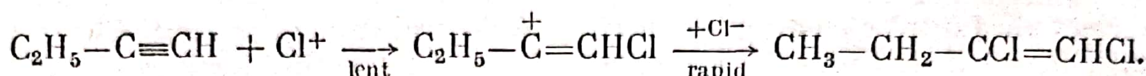
c) 

d)



4) Adiția clorului la 1-butenă decurge ca o adiție electrofilă:





XXIII. 1°. 1. Se va discuta variația caracterului nemetalic în sistemul periodic al elementelor, conform manualului de liceu pentru clasa a IX-a, și în concluzie ordinea cerută va fi: $C < N < O < F$.

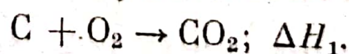
2. Se va defini fenomenul de alotropie (manualul pentru clasa a IX-a). Dintre elementele menționate prezintă alotropie carbonul și oxigenul. În cazul carbonului cele două forme alotropice, diamantul și grafitul, se deosebesc prin tipul de rețele cristaline pe care le formează. Diamantul, în care atomii de carbon sînt hibridizați sp^3, formează o rețea atomică cu legături covalente între atomi, iar grafitul, în care atomii de carbon sînt hibridizați sp^2, formează o rețea atomică stratificată, în care atomii de carbon din același strat al rețelei sînt legați covalent, dar distanțele dintre straturile rețelei sînt mult mai mari și deci și legăturile dintre aceste straturi sînt mult mai slabe, ceea ce conferă grafitului o duritate mult mai mică decît cea a diamantului (1 în scara Mohs, față de 10 a diamantului). În cazul oxigenului cele două forme alotropice, oxigenul obișnuit și ozonul, se deosebesc între ele prin numărul de atomi din moleculă, oxigenul obișnuit avînd molecula diatomică (O_2), iar ozonul triatomică (O_3). Aceasta conferă ozonului o reactivitate mai mare decît a oxigenului obișnuit.

3. Legea lui Hess derivă din proprietățile energiei interne și entalpiei care sînt funcții de stare și deci valorile lor nu depind decît de starea sistemului, iar variațiile lor depind de starea inițială și cea finală a sistemului și sînt independente de calea pe care se realizează trecerea sistemului din starea inițială în cea finală. Cum căldura de reacție (efectul termic) la volum constant $Q_v = \Delta U$, iar la presiune constantă $Q_p = \Delta H$, rezultă că și această căldură de reacție va depinde numai de starea inițială și cea finală a sistemului. Tocmai în aceasta constă legea lui Hess, care se poate deci enunța astfel: „Efectul termic al unei reacții chimice care se desfășoară în anumite condiții bine determinate, depinde numai de starea inițială a reactanților și de starea finală a produșilor de reacție, fiind independent de stările intermediare prin care sistemul trece de la starea inițială la cea finală“.

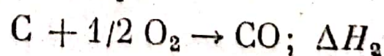
Această formulare este echivalentă cu următoarea:

„Dacă o reacție chimică se poate desfășura în mai multe etape, atunci efectul termic global este suma algebrică a efectelor termice ale etapelor intermediare“.

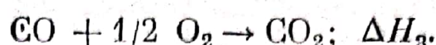
De exemplu, arderea carbonului poate avea loc cu formare de CO_2:



Dar arderea poate avea lor și în etape:

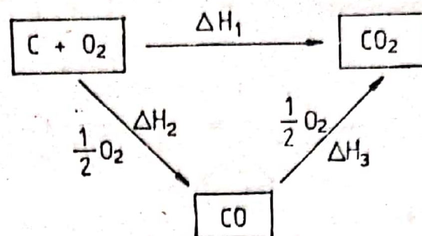


și apoi:

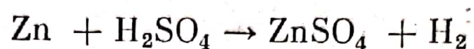


$$CO + 1/2\ O_2 \rightarrow CO_2;\ \Delta H_3.$$

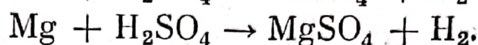
Conform legii lui Hess: $\Delta H_1 = \Delta H_2 + \Delta H_3$
sau sub forma unui ciclu:



2°.1. Ambele metale din aliaj reacționează cu H_2SO_4 degajînd hidrogen:



$$Zn + H_2SO_4 \rightarrow ZnSO_4 + H_2$$



$$Mg + H_2SO_4 \rightarrow MgSO_4 + H_2.$$

Fie x — numărul de moli (atomi gram) de Zn;
y — numărul de moli (atomi gram) de Mg.

Din prima reacție vor rezulta tot x moli de H_2, iar din a doua y moli de H_2.
Se poate alcătui sistemul:

$$\begin{cases} 65\ x + 24\ y = 17{,}8 \\ 22{,}4\ x + 22{,}4\ y = 8{,}96 \end{cases}$$

sau împărțind ecuația a doua prin 22,4:

$$\begin{cases} 65\ x + 24\ y = 17{,}8 \\ x + y = 0{,}4 \end{cases}$$

Rezolvînd sistemul se obține:

$$x = 0{,}2 \text{ moli Zn} = 13 \text{ g Zn}$$
$$y = 0{,}2 \text{ moli Mg} = 4{,}8 \text{ g Mg}.$$

Deci compoziția aliajului este:

$$\%\,Zn = \frac{13}{17{,}8} \cdot 100 = 73{,}03\%\ Zn\ (\text{masă})$$

$$\%\,Mg = \frac{4{,}8}{17{,}8} \cdot 100 = 26{,}97\%\ Mg\ (\text{masă}).$$

2. Cei x moli de Zn consumă tot x moli H_2SO_4, iar cei y moli de Mg consumă tot y moli H_2SO_4.

Se vor consuma deci în total

$$x + y = 0{,}4 \text{ moli } H_2SO_4$$

sau

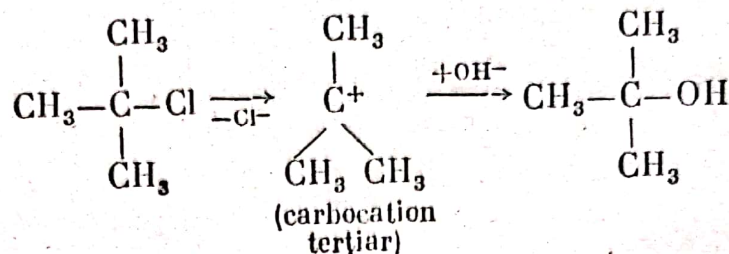
$$0{,}4 \text{ moli} \cdot 98 \text{ g/mol} = 39{,}2 \text{ g } H_2SO_4.$$

3. Din cele două reacții vor rezulta x moli de sulfat de zinc și respectiv y moli sulfat de magneziu. Se vor obține deci:

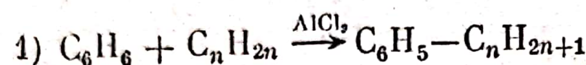
$$0{,}2 \text{ moli} \cdot 161 \text{ g/mol} = 32{,}2 \text{ g } ZnSO_4$$
$$0{,}2 \text{ moli} \cdot 120 \text{ g/mol} = 24{,}0 \text{ g } MgSO_4.$$

3°. Hidroliza derivaţilor halogenaţi este catalizată de baze şi decurge ca o reacţie de substituţie nucleofilă. Exemple: Hidroliza derivaţilor mono-, di- şi trihalogenaţi. Hidroliza clorurii de alil şi a diclorhidrinei glicerinei. Hidroliza clorurii de benziliden şi a feniltriclormetanului.

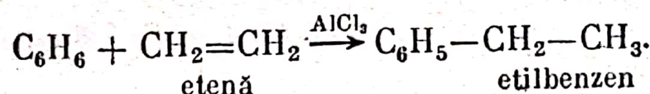
Mecanismul reacţiei de hidroliză a clorurii de terţ-butil (S_N1):

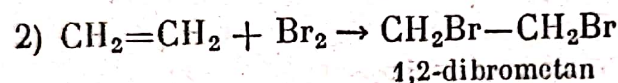


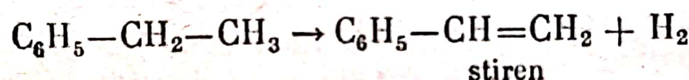
4°. Ecuaţia reacţiei:

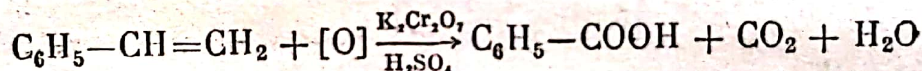


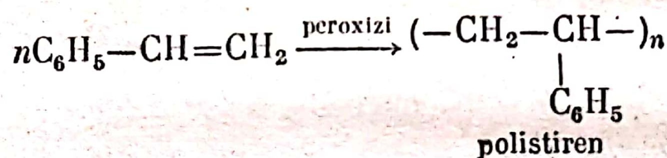
$$14n + 78 = 106;\ n = 2$$

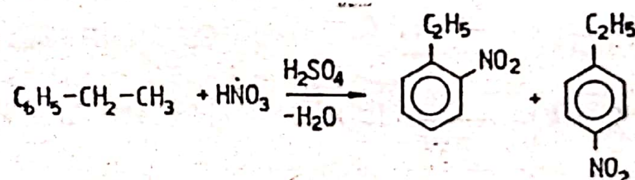














$X = 44{,}8\ m^3$ etenă (randament 100%)

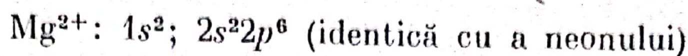
$$44{,}8 \cdot \frac{100}{75} = 59{,}73\ m^3$$

XXIV. 1°. 1. $Mg(Z = 12)$; $1s^2$; $2s^2 2p^6$; $3s^2$

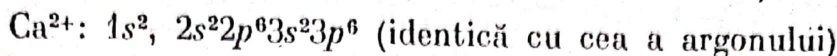
$Ca(Z = 20)$; $1s^2$; $2s^2 2p^6$; $3s^2 3p^6$; $4s^2$

$Sr(Z = 38)$: $1s^2$; $2s^2 2p^6$; $3s^2 3p^6$, $4s^2$; $3d^{10}$; $4p^6$; $5s^2$.

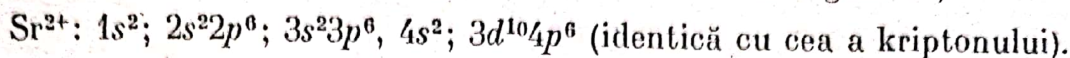
Toate aceste elemente formează ioni stabili divalenți, prin cedarea celor doi electroni de pe ultimul strat. Configurațiile electronice ale acestor ioni sînt:



Mg^{2+}: $1s^2$; $2s^22p^6$ (identică cu a neonului)

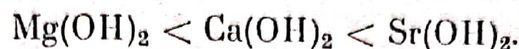


Ca^{2+}: $1s^2$, $2s^22p^63s^23p^6$ (identică cu cea a argonului)

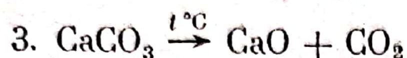


Sr^{2+}: $1s^2$; $2s^22p^6$; $3s^23p^6$, $4s^2$; $3d^{10}4p^6$ (identică cu cea a kriptonului).

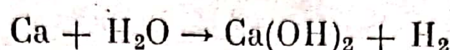
2. Caracterul bazic al hidroxizilor formați de aceste elemente variază în același sens cu caracterul metalic, adică va crește în grupă de sus în jos. Cel mai puțin tare va fi hidroxidul de magneziu, cel mai tare, hidroxidul de stronțiu. Deci ordinea creșterii tăriei hidroxizilor este:



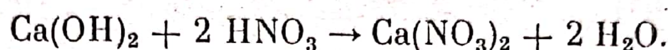
$$Mg(OH)_2 < Ca(OH)_2 < Sr(OH)_2.$$



3. $CaCO_3 \xrightarrow{t\,°C} CaO + CO_2$



$$Ca + H_2O \rightarrow Ca(OH)_2 + H_2$$



$$Ca(OH)_2 + 2\ HNO_3 \rightarrow Ca(NO_3)_2 + 2\ H_2O.$$

2°. Fie x numărul de grame de apă ce trebuie adăugată.
Masa soluției inițiale: $M_s = 400\ \text{ml} \cdot 1{,}11\ \text{g/ml} = 444\ \text{g}$.

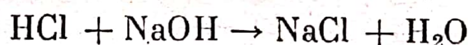
Ea conține: $444 \cdot \frac{22}{100} = 97{,}68\ \text{g/HCl}$.

Prin adăugarea celor x grame de apă masa soluției devine $(444 + x)$ grame și conține tot 97,68 g HCl. Se pune condiția ca această soluție să aibă concentrația 10%:

100 g soluție .... 10 g HCl
$(444 + x)$g soluție.......... 97,68 g HCl

Rezultă: $x = 532{,}8$ g apă.

Cantitatea de acid clorhidric din soluția 10% obținută este evident identică cu cea din soluția inițială, adică 97,68 g HCl. Ecuația reacției de neutralizare este:



$$HCl + NaOH \rightarrow NaCl + H_2O$$

36,5 g HCl (1 mol) .... 1 mol NaOH
97,68 g HCl .... x moli NaOH

$x = 2{,}676$ moli NaOH

1 l soluție NaOH .... 5 moli NaOH
y l soluție NaOH .... 2,676 moli NaOH

$y = 0{,}535$ l soluție de NaOH 5 m.

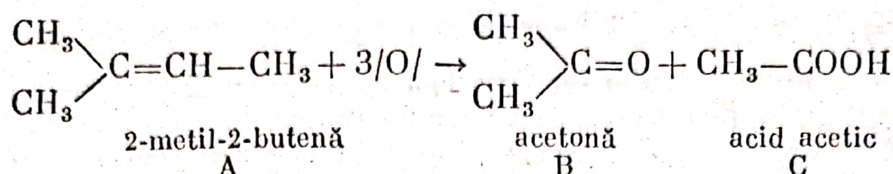
3°. Reacțiile comune aldehidelor și cetonelor, studiate conform programei de liceu, sînt următoarele:

A. Reacții de adiție (adiția hidrogenului, a acidului cianhidric, sulfitului acid de sodiu, amoniacului, hidroxilaminei, hidrazinei, aminelor primare și secundare. (În cazul adiției hidrogenului și acidului cianhidric se vor scrie și ecuațiile reacțiilor).

B. Reacții de condensare (condensarea aldolică și crotonică; condensarea fenolului cu formaldehida).

4°. 1. Formula generală a unei alchene este C_nH_{2n}. Formula alchenei A se determină astfel: $12\,n + 2\,n = 70$; $n = 5$.

Deci formula moleculară a lui A este C_5H_{10}.



$(CH_3)_2C{=}CH{-}CH_3$ este formula de structură a alchenei A.

$$(CH_3)_2C{=}CH{-}CH_3 + 3/O/ \rightarrow (CH_3)_2C{=}O + CH_3{-}COOH$$

2-metil-2-butenă A; acetonă B; acid acetic C

2) a) $CH_3{-}COOH + Zn \rightarrow (CH_3{-}COO)_2Zn + H_2$

b) $CH_3{-}COOH + NaOH \rightarrow CH_3{-}COONa + H_2O$

c) $CH_3{-}COOH + NaHCO_3 \rightarrow CH_3{-}COONa + CO_2 + H_2O$

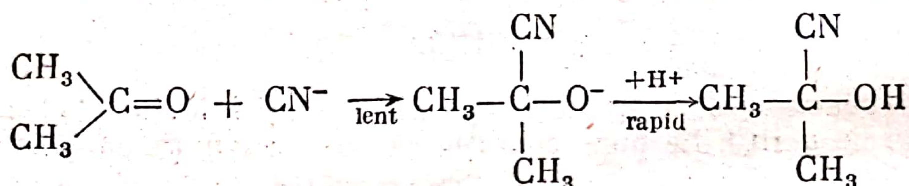
d) $CH_3{-}COOH + C_2H_5OH \rightleftarrows CH_3{-}COOC_2H_5 + H_2O$

e) $CH_3{-}COOH + PCl_5 \rightarrow CH_3{-}COCl + POCl_3 + HCl$

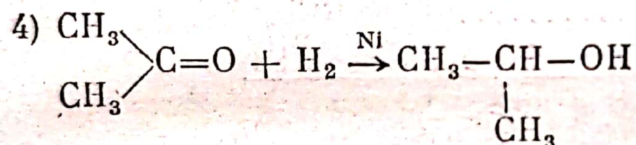
3) Adiția acidului cianhidric la acetonă decurge după un mecanism AN:



$$HCN \rightleftarrows H^+ + CN^-$$



$$(CH_3)_2C{=}O + CN^- \xrightarrow[\text{lent}]{} CH_3{-}C(CN)(CH_3){-}O^- \xrightarrow[\text{rapid}]{+H^+} CH_3{-}C(CN)(CH_3){-}OH$$



4) $(CH_3)_2C{=}O + H_2 \xrightarrow{Ni} CH_3{-}CH(CH_3){-}OH$

1 kmol acetonă .... 22,4 m^3H_2

5 kmoli X

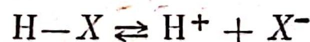
$X = 112\ m^3H_2$

XXV. 1°. Subiectul poate fi tratat după următorul plan:

Definiția alchenelor. Adiția hidrogenului (cataliză eterogenă), halogenilor, hidracizilor (regula lui Marcovnicov), acidului sulfuric (apei); polimerizarea (reacție de poliadiție).

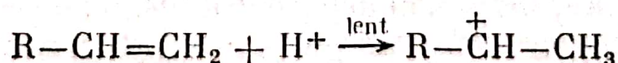
Mecanismul reacției de adiție a hidracizilor la alchene (adiție electrofilă):

— formarea reactantului electrofil:



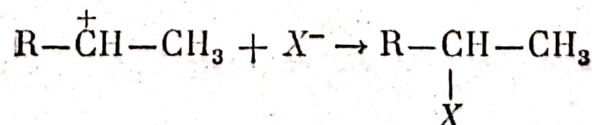
$$H{-}X \rightleftarrows H^+ + X^-$$

— atacul reactantului electrofil asupra moleculei de alchenă, cu formarea celui mai stabil carbocation:



$$R{-}CH{=}CH_2 + H^+ \xrightarrow{\text{lent}} R{-}\overset{+}{C}H{-}CH_3$$

— stabilizarea carbocationului:



$$R{-}\overset{+}{C}H{-}CH_3 + X^- \rightarrow R{-}CH(X){-}CH_3$$

2°. Ecuația reacției:

$$p\text{-}CH_3-C_6H_4-NHCOCH_3 + 3[O] \xrightarrow[-H_2O]{} p\text{-}HOOC-C_6H_4-NHCOCH_3 \xrightarrow{HOH} p\text{-}HOOC-C_6H_4-NH_2 + CH_3COOH$$

149 g acetilparatoluidină .... 137 acid paraaminobenzoic
X .... 280 g

$X = 304{,}52$ g (cantitatea practic transformată în acid p-aminobenzoic)

$304{,}52 \cdot \frac{100}{92{,}25} = 330$ g (cantitatea necesară ținînd cont de randament).

$C\%: \frac{9 \cdot 12}{149} \cdot 100 = 72{,}48$; $H\%: \frac{11}{149} \cdot 100 = 7{,}38$; $N\%: \frac{14}{149} \cdot 100 = 9{,}39$; $O\%: 10{,}75$.

3°. 1) $2\ CH_3-CH_2-Br + HgF_2 \rightarrow 2\ CH_3-CH_2-F + HgBr_2$

2) $(C_6H_{10}O_5)_n + n\ H_2O \xrightarrow{(enzime)} n\ C_6H_{12}O_6$ (glucoză)

$$CHO-(CHOH)_4-CH_2OH + 5(CH_3-CO)_2O \rightarrow CHO-(CHOCOCH_3)_4-CH_2OCOCH_3 + 5\ CH_3COOH$$

glucoză → pentaacetilglucoză

3) $CH_2{=}C(CH_3)-CH_3 \xrightarrow[(K_2Cr_2O_7,\ H_2SO_4)]{4[O]} CH_3-CO-CH_3 + CO_2 + H_2O$ (acetonă)

$$CH_3-CO-CH_3 \xrightarrow{H_2/Ni} CH_3-CH(OH)-CH_3 \xrightarrow[-H_2O]{+HCl} CH_3-CH(Cl)-CH_3 \rightarrow$$

izopropanol; 2-clorpropan

$$\xrightarrow[(AlCl_3)]{+C_6H_6} C_6H_5-CH(CH_3)_2 \xrightarrow{O_2} C_6H_5-C(CH_3)_2-O-OH \xrightarrow{(H_2SO_4)} C_6H_5-OH + CH_3-CO-CH_3.$$

cumen; hidroperoxid de cumen

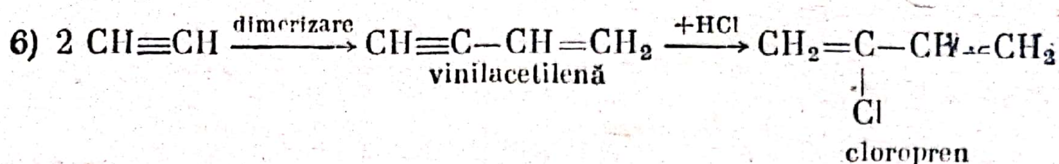
4) $CH_3Cl + C_6H_6 \xrightarrow{AlCl_3} C_6H_5-CH_3 \xrightarrow[(h\nu)]{+Cl_2} C_6H_5-CH_2Cl \xrightarrow{Na_2SO_3} C_6H_5-CH_2-SO_3Na.$

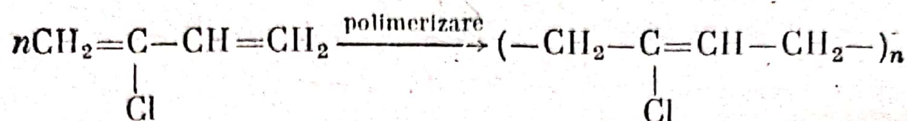
5) $2\ CH{\equiv}CH + 2\ HOH \xrightarrow[(H_2SO_4)]{(HgSO_4)} 2\ CH_3-CHO \xrightarrow[(condens.\ crotonică)]{-H_2O}$

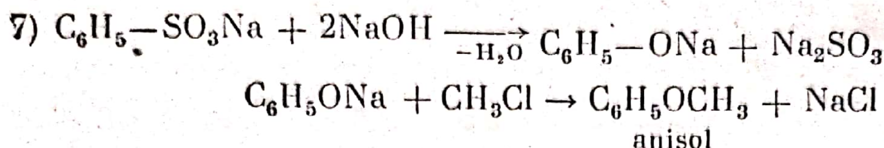
$\rightarrow CH_3-CH{=}CH-CHO \xrightarrow{+2\ H_2/Ni} CH_3-CH_2-CH_2-CH_2OH \xrightarrow[-CH_3COOH]{+(CH_3CO)_2O}$

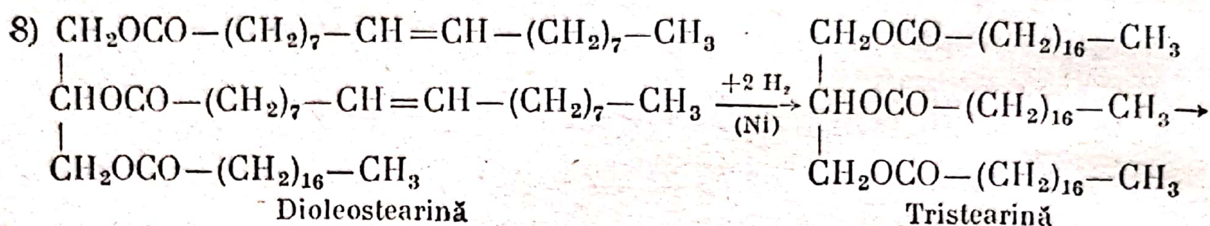
$\rightarrow CH_3-COO-CH_2-CH_2-CH_2-CH_3.$

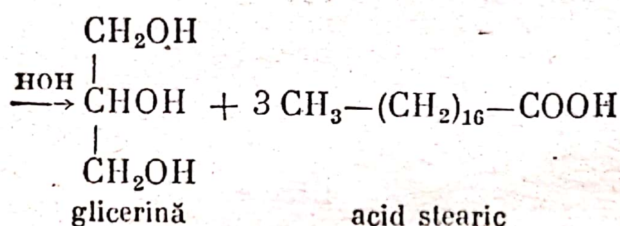
acetat de n-butil

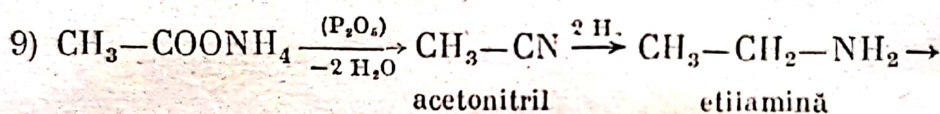


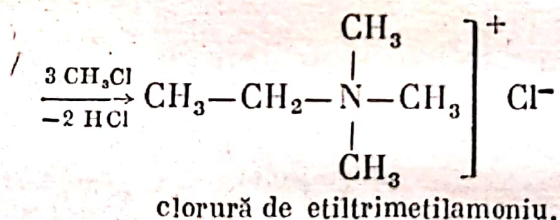












XXVI. 1°. Subiectul se poate trata după următorul plan:

a) Definiția alchinelor și respectiv arenelor.

Hibridizarea orbitalilor electronici ai atomilor de carbon din alchine și arene; tipuri de legături; caracterul nesaturat al alchinelor și aromatic al arenelor. Particularitățile reacțiilor de adiție în cazul celor două clase de hidrocarburi;

b) Reacții de adiție la alchine: adiția hidrogenului și halogenilor (în două trepte separabile sau nu); adiția hidracizilor; adiția acidului acetic; adiția acidului cianhidric; adiția apei; reacția de dimerizare și trimerizare a acetilenei; adiția HCl la vinilacetilenă;

c) Reacții de adiție la arene: adiția hidrogenului la benzen și naftalină; adiția clorului la benzen.

(Se vor preciza condițiile de reacție și se vor denumi substanțele.)

d) Mecanismul formării reactantului electrofil; atacul reactantului electrofil cu formarea cationului cel mai stabil; formarea produsului de reacție (dicloralchena cu atomii de clor vicinali).

2°. a) Ecuațiile reacțiilor din schemă, stabilite pe baza datelor problemei:

$$\underset{A}{CH_3-CH_2-CH_2-COOCH_2-CH=CH_2} \xrightarrow[H^+]{HOH}$$

$$\rightarrow \underset{C}{CH_3-CH_2-CH_2-COOH} + \underset{B}{CH_2=CH-CH_2OH}$$

$$CH_2=CH-CH_2OH \xrightarrow{+Cl_2} \underset{D}{\underset{Cl}{CH_2}-\underset{Cl}{CH}-\underset{OH}{CH_2}} \xrightarrow[-2\,HCl]{+2\,HOH} \underset{E}{\underset{OH}{CH_2}-\underset{OH}{CH}-\underset{OH}{CH_2}}$$

$$\underset{OH}{CH_2}-\underset{OH}{CH}-\underset{OH}{CH_2} \xrightarrow[-2\,H_2O]{H_2SO_4} \underset{F}{CH_2=CH-CHO}$$

$$\underset{G}{CH_2=CH-CH_3} \xrightarrow[-HCl]{+Cl_2/500\,^{\circ}C} \underset{H}{CH_2=CH-CH_2Cl} \xrightarrow[-HCl]{HOH} CH_2=CH-CH_2OH$$

b) Denumirea compușilor de la A la H:
A: butirat de alil
B: alcool alilic
C: acid butiric (butanoic)
D: 2,3-diclor-propanol
E: 1,2,3-propantriol (glicerină)
F: acroleină (aldehidă acrilică)
G: propenă
H: clorură de alil.

c) Prezintă izomerie optică compusul D (are un atom de carbon asimetric).

d) Formula (compoziția) procentuală a lui G:

$$\%\,C: \frac{36}{42} \cdot 100 = 85{,}71; \quad \%\,H: \frac{6}{42} \cdot 100 = 14{,}29.$$

3°. 1) Determinarea formulei moleculare a substanței A: $C_{10}H_{21}NO$.

— Determinarea formulei de structură a substanței A:

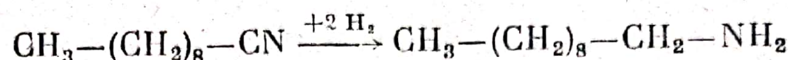
$$CH_3-(CH_2)_8-CONH_2$$

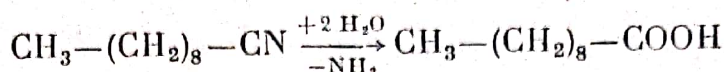
— Ecuațiile reacțiilor conform datelor problemei:

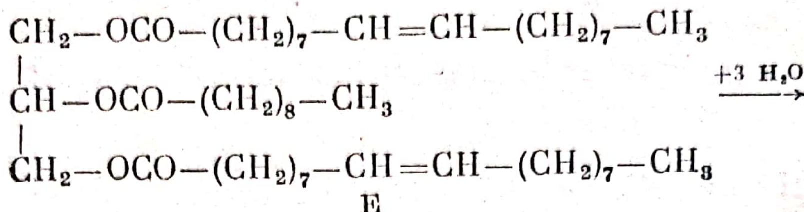
$$CH_3-(CH_2)_8-CONH_2 \xrightarrow[-H_2O]{P_2O_5} \underset{B}{CH_3-(CH_2)_8-CN}$$

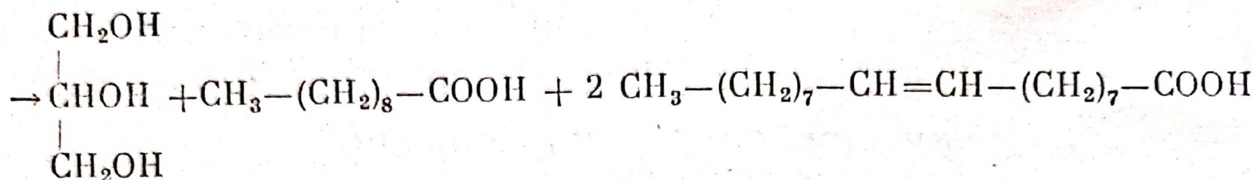
$$CH_3-(CH_2)_8-CONH_2 \xrightarrow[+NH_3]{+H_2O} \underset{C}{CH_3-(CH_2)_8-COOH}$$

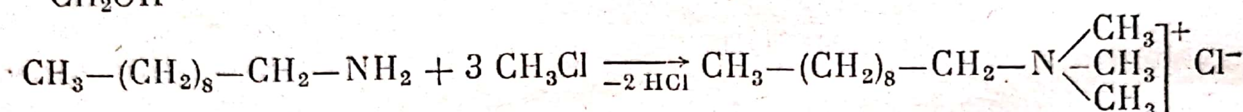
$$CH_3-(CH_2)_8-CONH_2 \xrightarrow[-H_2O]{+2\,H_2} \underset{D}{CH_3-(CH_2)_8-CH_2-NH_2}$$







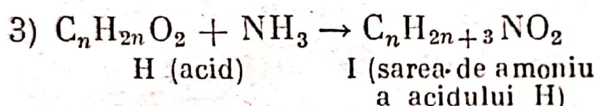




2) 1 kmol D .... 235,5 kg G

x kmoli .... $21{,}666 \cdot \frac{100}{92}$ kg G

$x = 0{,}1$ kmoli D = 100 moli D.



Determinarea formulei moleculare și structurale ale lui H:

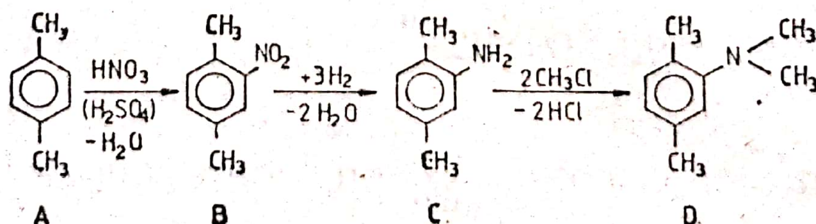
$$C: \frac{47{,}74}{12} = 3{,}97;\quad H: 10{,}48;\quad N: \frac{13{,}33}{14} = 0{,}95;\quad O: \frac{30{,}45}{16} = 1{,}90$$

C : H : N : O = 4 : 11 : 1 : 2; deci $C_4H_{11}NO_2$ este formula moleculară și $CH_3{-}CH_2{-}CH_2{-}COONH_4$ este formula structurală a lui I; pentru H: $C_4H_8O_2$ și, respectiv, $CH_3{-}CH_2{-}CH_2{-}COOH$ sînt formulele cerute. $M_H = 88$.

XXVII. 1°. Subiectul poate fi tratat după următorul plan:

Definiția compușilor carbonilici. Structura grupei funcționale —CHO. Reacții de adiție la dubla legătură >C=O (adiția hidrogenului și a acidului cianhidric, la aldehide alifatice și aromatice și la glucoză). Ciclizarea glucozei. Reacții de oxidare a aldehidelor. Oxidarea glucozei. Condensarea aldolică și crotonică. Condensarea aldehidei formice cu fenolul. Condensarea aldehidelor cu amoniac, amine, hidroxilamină, hidrazină, fenilhidrazină (AN). Mecanismul reacției de condensare aldolică.

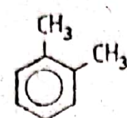
2°. Din datele problemei se deduce că A este p-xilen. Ecuațiile reacțiilor din schemă sînt:



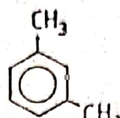
1) Formula procentuală a compusului A:

$$\%C = \frac{96}{106} \cdot 100 = 90{,}54; \quad \%H = \frac{10}{106} \cdot 100 = 9{,}44.$$

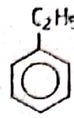
Formulele de structură ale izomerilor aromatici ai substanței A:



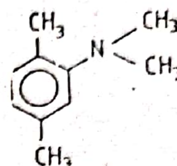
ortoxilen



metaxilen

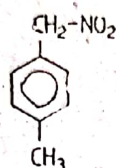


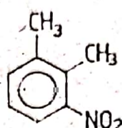
etilbenzen

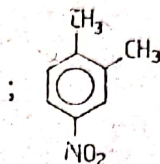


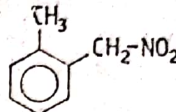
D

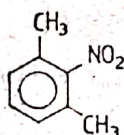
2) Formulele de structură ale izomerilor de poziție ai substanței B:

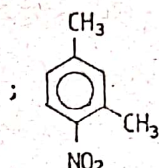


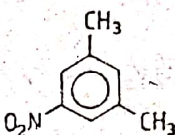


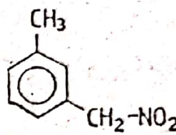
;




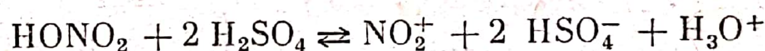


;




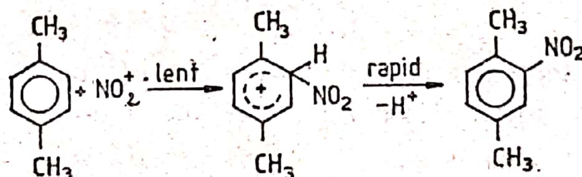


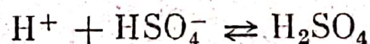
2) Mecanismul reacției de nitrare a *p*-xilenului.
— Formarea reactantului electrofil:



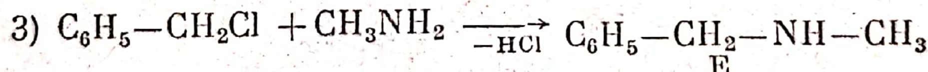
$$HONO_2 + 2\,H_2SO_4 \rightleftarrows NO_2^+ + 2\,HSO_4^- + H_3O^+$$

— Atacul reactantului electrofil, formarea complexului și expulzarea protonului:





$$H^+ + HSO_4^- \rightleftarrows H_2SO_4$$



3) $C_6H_5{-}CH_2Cl + CH_3NH_2 \xrightarrow[-HCl]{} C_6H_5{-}CH_2{-}NH{-}CH_3$ (E)

121 g E .... 126,5 g clorură de benzil
200 .... x_1

$$x_1 = 209{,}09 \text{ g}.$$

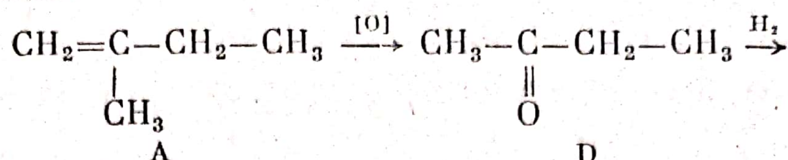
$$209{,}09 \cdot \frac{100}{90} \cdot \frac{100}{92} = 252{,}52 \text{ g } (90\%).$$

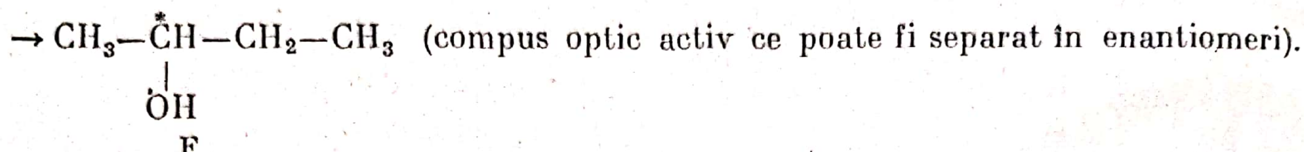
3°. 1) Determinarea formulei moleculare a compușilor A, B și C:

$$C: \frac{85{,}72}{12} = 7{,}14; \quad H: \frac{14{,}28}{1} = 14{,}28$$

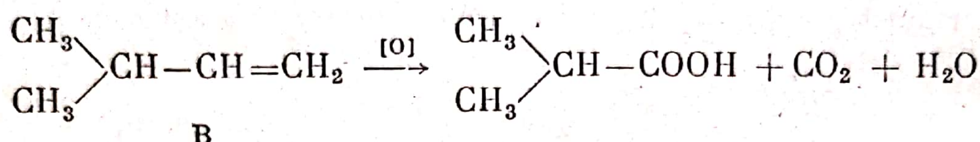
C: 7,14:7,14 = 1; H: 14,28:7,14 = 2; $(CH_2)_n = 70$.

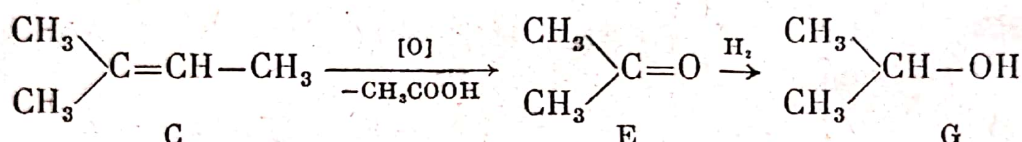
Formulele de structură ale compuşilor A → I şi ecuaţiile reacţiilor conform cerinţelor problemei:

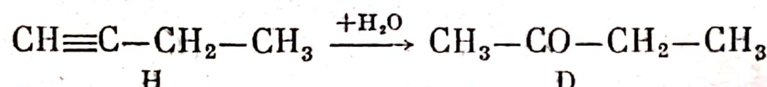


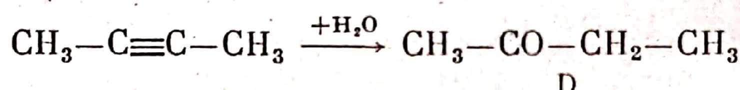


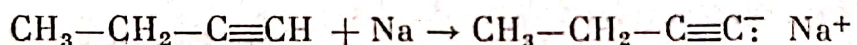
(compus optic activ ce poate fi separat în enantiomeri).









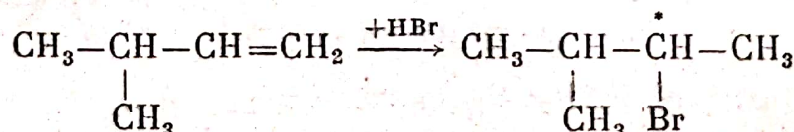


2) 74 g 2-butanol (F) → 70 g izopentenă (A) (pentru un $\eta = 100\ \%$).

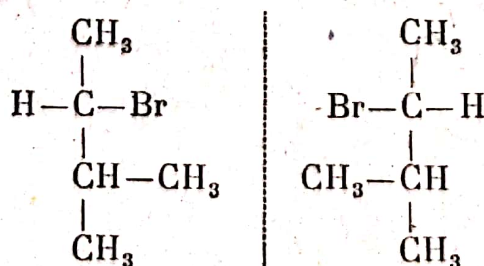
$$70 \cdot \frac{100}{90} = 77,7 \text{ g A}$$

A:B:C = 2:1:1 (raport molar), deci cantitatea de amestec $= 2 \cdot 77,7 = 155,4$ g.

3) Alchena B prin adiţia HBr formează un derivat halogenat separabil în enantiomeri:



Formulele de structură ale enantiomerilor:



XXVIII. 1°. Reacţiile compuşilor organici catalizate de clorura de aluminiu, studiate în liceu, sînt următoarele:

Reacţia de izomerizare a alcanilor. Adiţia halogenilor la alchene şi alchine.

Alchilarea arenelor cu derivați halogenați și cu alchene. Acilarea arenelor. Halogenarea arenelor în nucleu.

Mecanismul alchilării benzenului cu halogenură de etil sau cu etenă (formarea reactantului electrofil; atacul reactantului electrofil asupra nucleului benzenic cu formarea complexului σ; expulzarea protonului cu formarea etilbenzenului; refacerea catalizatorului).

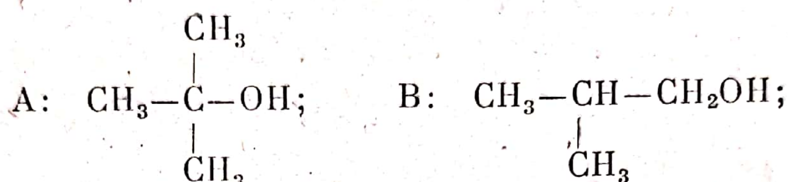
2°. 1) Determinarea formulei moleculare a substanței A:

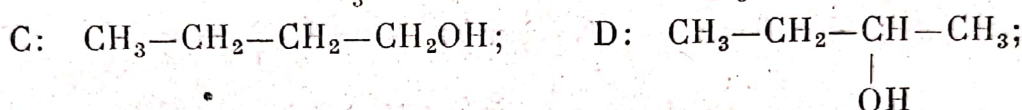
$$C: \frac{64,87}{12} = 5,40; \quad H: \frac{13,51}{1} = 13,51; \quad O: \frac{21,62}{16} = 1,35$$

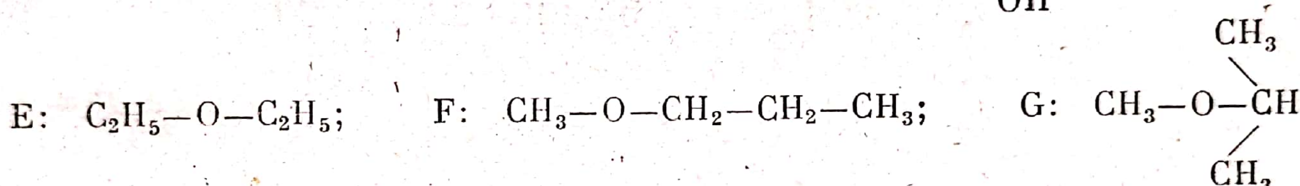
$$C : H : O = 4 : 10 : 1$$

$$(C_4H_{10}O)_n = 74 \quad n = 1.$$

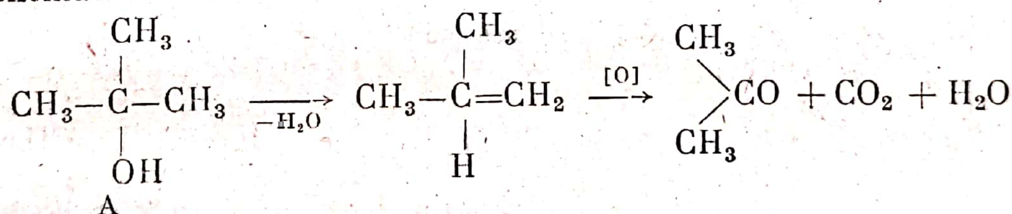
Formulele de structură ale izomerilor A → G (stabilite pe baza indicațiilor cuprinse în schemă):

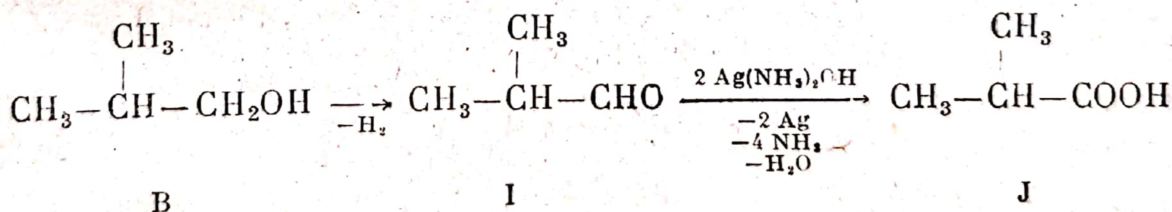


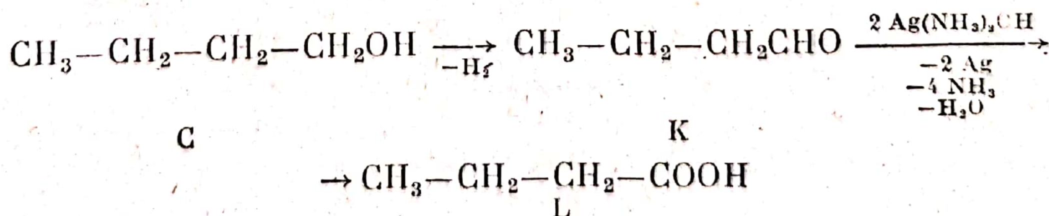


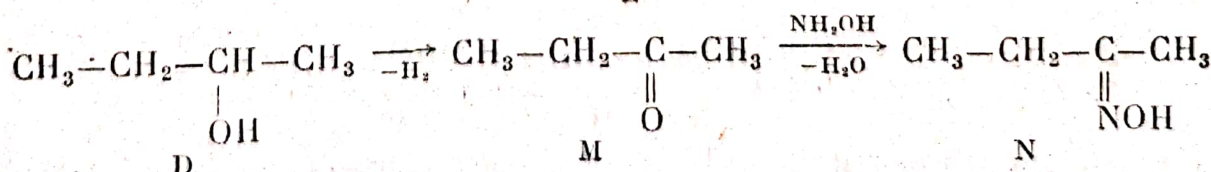


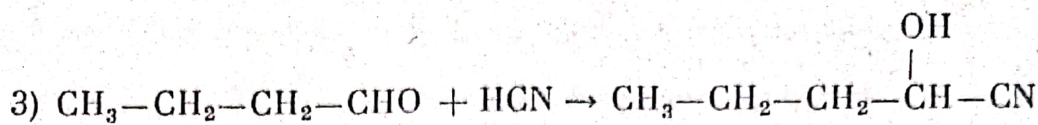
2) Formulele de structură ale compușilor H → N și ecuațiile reacțiilor indicate în schemă:







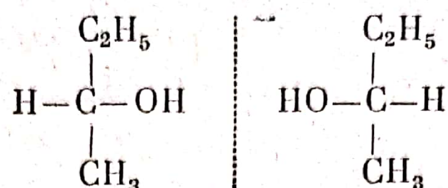




3) $CH_3-CH_2-CH_2-CHO + HCN \rightarrow CH_3-CH_2-CH_2-CH(OH)-CN$

$$\text{cantitatea de } HCN = \frac{27 \cdot 890}{99} \cdot \frac{100}{90} \approx 270 \text{ g.}$$

4) Compusul D (2-butanol) prezintă izomerie optică:



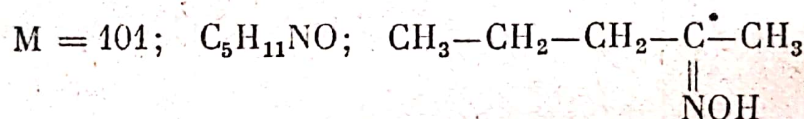
$$\begin{array}{c} C_2H_5 \\ | \\ H-C-OH \\ | \\ CH_3 \end{array} \quad \vdots \quad \begin{array}{c} C_2H_5 \\ | \\ HO-C-H \\ | \\ CH_3 \end{array}$$

5) 10,89 gH .....13,86 gN ....15,84 gO ....59,41 gC

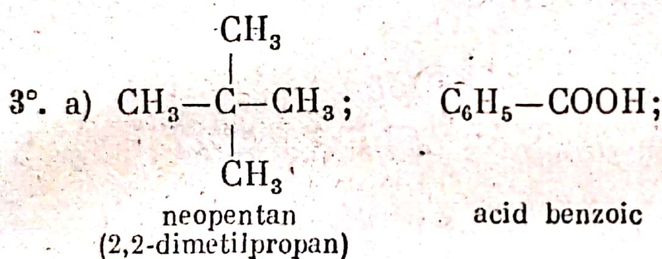
X gH ......14 gN ......16 gO ....Y gC

$X = 11$ g; H: $\frac{11}{1} = 11$; N: $\frac{14}{14} = 1$

$Y = 60$ g; C: $\frac{60}{12} = 5$; O: $\frac{16}{16} = 1$

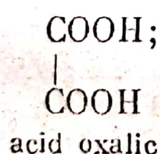


M = 101; $C_5H_{11}NO$; $CH_3-CH_2-CH_2-C(=NOH)-CH_3$



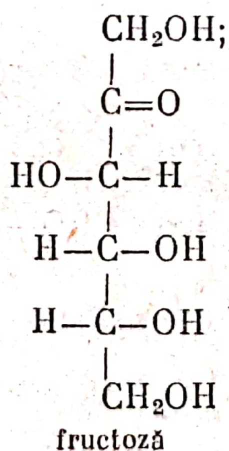
3°. a) $CH_3-C(CH_3)_2-CH_3$; C_6H_5-COOH;

neopentan (2,2-dimetilpropan) acid benzoic



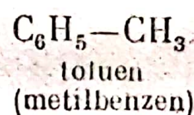
$HOOC-COOH$;

acid oxalic



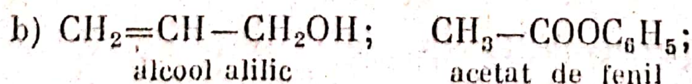
$CH_2OH-CO-CH(OH)-CH(OH)-CH(OH)-CH_2OH$; (HO–C–H, H–C–OH, H–C–OH)

fructoză



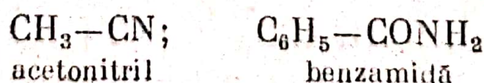
$C_6H_5-CH_3$

toluen (metilbenzen)



b) $CH_2=CH-CH_2OH$; $CH_3-COOC_6H_5$;

alcool alilic acetat de fenil

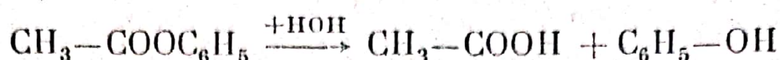


CH_3-CN; $C_6H_5-CONH_2$

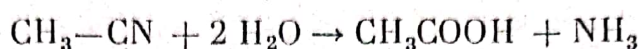
acetonitril benzamidă

1) Acidul benzoic, acidul oxalic, benzamida și fructoza sînt solide.

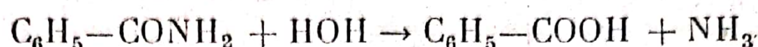
2) Pot da reacţii de hidroliză acetatul de fenil(ester), acetonitrilul şi benzamida:



$$CH_3-COOC_6H_5 \xrightarrow{+HOH} CH_3-COOH + C_6H_5-OH$$

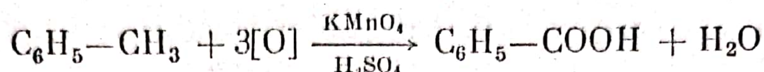


$$CH_3-CN + 2\ H_2O \rightarrow CH_3COOH + NH_3$$

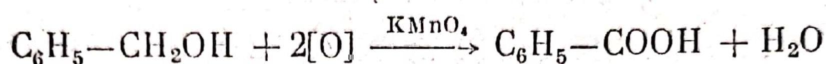


$$C_6H_5-CONH_2 + HOH \rightarrow C_6H_5-COOH + NH_3$$

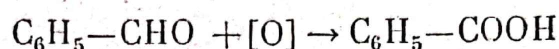
3) Acidul benzoic se poate purifica prin sublimare. Se poate obţine aplicînd metodele următoare:



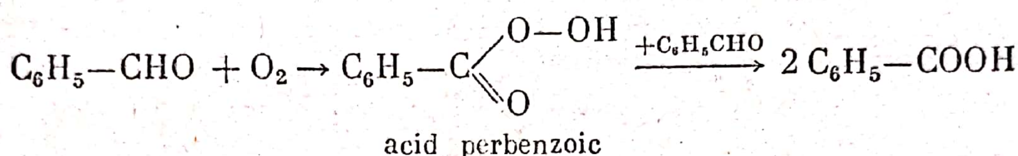
$$C_6H_5-CH_3 + 3[O] \xrightarrow[H_2SO_4]{KMnO_4} C_6H_5-COOH + H_2O$$



$$C_6H_5-CH_2OH + 2[O] \xrightarrow{KMnO_4} C_6H_5-COOH + H_2O$$

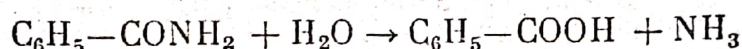


$$C_6H_5-CHO + [O] \rightarrow C_6H_5-COOH$$

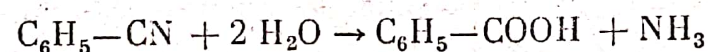


$$C_6H_5-CHO + O_2 \rightarrow C_6H_5-C\begin{matrix}\diagup O-OH \\ \diagdown\!\!\diagdown O\end{matrix} \xrightarrow{+C_6H_5CHO} 2\ C_6H_5-COOH$$

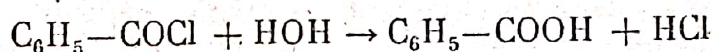
acid perbenzoic



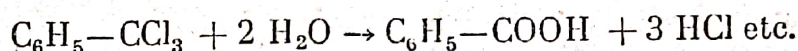
$$C_6H_5-CONH_2 + H_2O \rightarrow C_6H_5-COOH + NH_3$$



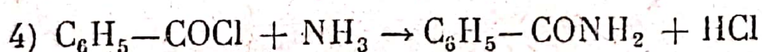
$$C_6H_5-CN + 2\ H_2O \rightarrow C_6H_5-COOH + NH_3$$



$$C_6H_5-COCl + HOH \rightarrow C_6H_5-COOH + HCl$$



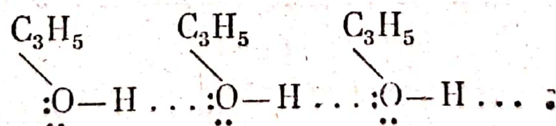
$$C_6H_5-CCl_3 + 2\ H_2O \rightarrow C_6H_5-COOH + 3\ HCl \text{ etc.}$$



4) $C_6H_5-COCl + NH_3 \rightarrow C_6H_5-CONH_2 + HCl$

$10 \cdot 140{,}5 \cdot \frac{100}{92}$ 1 527 kg clorură de benzoil.

5) Acidul benzoic, acidul oxalic, fructoza şi alcoolul alilic pot forma asociaţii moleculare prin legături de hidrogen. De exemplu, alcoolul alilic poate da naştere la asociaţii moleculare de tipul:



XXIX. 1°. 1) Se va defini solubilitatea substanţelor şi factorii de care aceasta depinde, conform manualului de liceu pentru clasa a IX-a.

2) Se vor da şi explica expresiile concentraţiilor procentuale molare şi normale conform manualului pentru clasa a IX-a.

3) Se va explica efectul termic la dizolvare ca o rezultantă a două procese, unul endoterm şi celălalt exoterm, conform manualului pentru clasa a IX-a. În concluzie, dizolvarea azotatului de amoniu are loc cu absorbţie de căldură, cantitatea de căldură absorbită la scindarea legăturilor ionice din cristal fiind mai mare decît căldura degajată la hidratarea ionilor ce compun această substanţă. Dimpo-

trivă, la dizolvarea acidului sulfuric în apă, cantitatea de căldură rezultată la hidratarea ionilor, depășește cu mult căldura consumată la scindarea moleculelor de acid în ioni (ionizarea acidului în soluție) și de aceea dizolvarea H_2SO_4 în apă degajă o cantitate mare de căldură, care poate încălzi soluția chiar pînă la fierbere. Din această cauză la prepararea soluțiilor de acid sulfuric se toarnă întotdeauna acid în apă (și nu invers!), încet, prin amestecare continuă pentru a evita ajungerea soluției la temperatura de fierbere.

4) Exemple de cristalohidrați : $CuSO_4 \cdot 5H_2O$; $Na_2CO_3 \cdot 10H_2O$; $Al_2(SO_4)_3 \cdot 18H_2O$; $CaSO_4 \cdot 2H_2O$, $FeSO_4 \cdot 7H_2O$; $CaCl_2 \cdot 6H_2O$, $BaCl_2 \cdot 2H_2O$ etc.

2°. 1) Se va defini noțiunea de legătură covalentă polară și factorii de care depinde polaritatea unei legături, conform manualului de liceu pentru clasa a IX-a. În concluzie polaritatea hidracizilor halogenilor crește în ordinea:



$$HI < HBr < HCl < HF.$$

Se vor defini noțiunea de acid după Brönsted și noțiunile de acid tare și acid slab, conform manualului pentru clasa a IX-a. Ținînd cont de variația tăriei hidracizilor în grupă (aceasta crește odată cu scăderea caracterului nemetalic), tăria hidracizilor halogenilor crește în ordinea:



$$HF < HCl < HBr < HI.$$

Acidul fluorhidric este un acid de tărie medie, ceilalți sînt acizi tari, cel mai tare fiind acidul iodhidric.

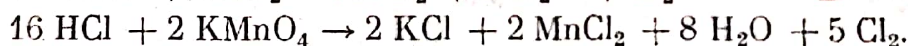
Se vor arăta factorii de care depinde entropia unei substanțe, conform manualului pentru clasa a XI-a.

Ordinea indicată este determinată de creșterea masei moleculare și de scăderea tăriei legăturilor dintre atomi.

2. Vezi manualul de liceu pentru clasa a XI-a.



3. $4\,HCl + MnO_2 \rightarrow MnCl_2 + 2\,H_2O + Cl_2$



$16\,HCl + 2\,KMnO_4 \rightarrow 2\,KCl + 2\,MnCl_2 + 8\,H_2O + 5\,Cl_2$.

3°. 1) Se alcătuiește tabelul.

Timp \ Component	A	B	C	Total
$t = 0$	0,5 + 2,5 = 3	1 + 2,5 = 3,5	0	6,5
$t = t_{ech.}$	0,5	1	2,5	4

În reacție intră la 1 mol de A, 1 mol B și se formează un mol de C deci concentrațiile inițiale ale componenților A și B se obțin din însumarea concentrațiilor lor de echilibru cu concentrația lui C.

Rezultă: $[A]_0 = 0,5 + 2,5 = 3$ mol/l;

$[B]_0 = 1 + 2,5 = 3,5$ mol/l.

2) Expresia constantei de echilibru exprimate prin concentrații molare este:

$$K_c = \frac{[C]}{[A] \cdot [B]} = \frac{2,5 \text{ mol/l}}{0,5 \text{ mol/l} \cdot 1 \text{ mol/l}} = 5 \frac{l}{\text{mol}}.$$

3) Pentru a obține valoarea constantei de echilibru exprimată prin presiuni parțiale se ține cont de ecuația de stare a gazelor perfecte.

$$pV = nRT$$

de unde $p = \frac{n}{v} RT$ și ținînd cont că n/v reprezintă tocmai concentrația, se obține

$$p_A = [A]RT; \; p_B = [B]RT; \; p_C = [C]RT.$$

Deci

$$K_p = \frac{p_C}{p_A \cdot p_B} = \frac{[C](RT)}{[A] \cdot [B](RT)^2} = K_c \cdot \frac{1}{RT}$$

Rezultă:

$$K_p = 5 \frac{l}{mol} \cdot \frac{1}{0{,}082 \frac{l \cdot atm}{mol \cdot K} \cdot 400 \ K} = 0{,}152 \ atm^{-1}.$$

C. PROBLEME PROPUSE

ENUNȚURI

1°. Un cilindru de oțel avînd volumul 30 l conține un gaz la presiunea de 806 kPa și temperatura de 18°C. a) Dacă se scot 6 moli de gaz din cilindru și se răcește apoi cilindrul la 12°C, care va fi presiunea gazului rămas în cilindru?

b) Să se identifice acest gaz din cilindru știind că este un monoxid și are densitatea în condiții normale $\rho^0 = 1{,}25\ \text{kg} \cdot \text{m}^{-3}$.

2°. La sinteza acidului clorhidric s-au folosit 89,6 m^3 de clor, măsurați la 0°C și $2{,}026 \cdot 10^5$ Pa.

Se cere:

a) cantitatea de hidrogen necesară, exprimată în kmoli, în kg și m^3 la 27 °C și 300 kPa;

b) compoziția în procente de masă și de volum a amestecului gazos care ar rezulta dacă volumul de clor utilizat ar fi pus să reacționeze cu 266 m^3 de hidrogen măsurați la 27°C și 150 kPa;

c) masa moleculară medie, densitatea și densitatea în raport cu oxigenul, a amestecului de la punctul precedent.

3°. O soluție apoasă de apă oxigenată de concentrație 34% (procente de masă) se încălzește pînă ce se descompune jumătate din cantitatea de apă oxigenată.

Se cere:

a) concentrația procentuală a soluției finale (procente de masă);

b) care este raportul dintre numărul moleculelor de apă și numărul moleculelor de apă oxigenată în soluția inițială și în cea finală;

c) dacă se pleacă de la 500 g soluție inițială, să se calculeze cantitatea de iod formată la tratarea soluției finale cu un exces de iodură de potasiu în mediu de acid sulfuric.

4°. Se amestecă 100 g soluție acid sulfuric de concentrație 5% (procente de masă) cu apă de barită (soluție de $Ba(OH)_2$). După separarea precipitatului, soluția rămasă are o concentrație în acid sulfuric de 1,56% (procente de masă). Știind că în soluția de apă de barită inițială s-au găsit 96 g apă, să se calculeze cantitatea de $Ba(OH)_2$ pur care s-a consumat.

Mase atomice: H—1; O—16; S—32; Ba—137,3.

5°. O probă de sodă cristalizată avînd masa $m_1 = 1{,}287$ g a fost tratată cu un exces de acid clorhidric și s-au degajat 100,8 cm^3 de gaz (c.n.). O altă probă de sodă cristalizată cu masa $m_2 = 0{,}715$ g a fost tratată cu 50 cm^3 de soluție de acid sulfuric de concentrație 0,2 N (normal). După descompunerea sodei, excesul de acid sulfuric a fost neutralizat cu o soluție de hidroxid de sodiu de concentrație 0,1 N (normal) consumîndu-se pentru neutralizare un volum de 50 cm^3.

Se cere:

a) cîte molecule de apă, raportat la o moleculă de Na_2CO_3, conține prima probă de sodă cristalizată analizată?

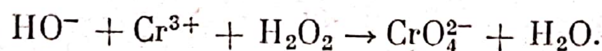
b) să se stabilească dacă cele două probe de sodă cristalizată au aceeași compoziție, sau au compoziții diferite.

Se neglijează solubilitatea dioxidului de carbon în condițiile problemei.
Mase atomice: H—1; O—16; C—12; Na—23.

6°. Un aliaj este format din rubidiu și un alt metal alcalin. O probă din acest aliaj avînd masa $m = 4,6$ g se tratează cu apă, degajîndu-se 2,24 dm³ de gaz (c.n.).
Se cere:
a) să se identifice metalul alcalin prezent alături de rubidiu în aliaj;
b) compoziția aliajului în procente de masă.
Mase atomice: Li—7; Na—23; K—39; Rb—85,5; Cs—133.

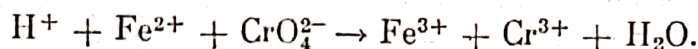
7°. Un aliaj conține aluminiu, zinc, siliciu și cupru. Dacă 1,000 g din acest aliaj este tratat cu acid clorhidric în exces, se degajă 843 cm³ hidrogen (c.n.) și rămîne un reziduu nedizolvat ce cîntărește 0,170 g. O probă de 0,500 g din același aliaj tratată cu soluție de NaOH în exces, reacționează degajînd 517 cm³ hidrogen (c.n.), rămînînd de asemenea un reziduu nedizolvat. Să se calculeze compoziția aliajului în procente de masă.
Mase atomice: Al—27; Zn—65; Si—28; Cu—64.

8°. O probă de aliaj ce conține argint, cupru și crom, avînd masa $m = 1,500$ g, se dizolvă, astfel încît soluția obținută conține ionii Ag^+, Cu^{2+} și Cr^{3+}. Această soluție este diluată pînă la un volum de 500 cm³. O zecime din soluția astfel diluată se prelucrează astfel: după eliminarea argintului și cuprului, cromul este oxidat conform ecuației următoare (neechilibrată):



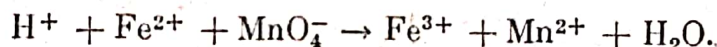
$$HO^- + Cr^{3+} + H_2O_2 \rightarrow CrO_4^{2-} + H_2O.$$

După aceasta se adaugă 25,00 cm³ de soluție ce conține ionii Fe^{2+} de concentrație 0,100 molar. Are loc următoarea reacție (neechilibrată):



$$H^+ + Fe^{2+} + CrO_4^{2-} \rightarrow Fe^{3+} + Cr^{3+} + H_2O.$$

Excesul de Fe^{2+} se oxidează apoi cu o soluție de $KMnO_4$ de concentrație 0,020 molar, consumîndu-se pentru aceasta 17,20 cm³ din această soluție de permanganat. Reacția care are loc este următoarea:



$$H^+ + Fe^{2+} + MnO_4^- \rightarrow Fe^{3+} + Mn^{2+} + H_2O.$$

Într-o altă experiență, un volum de 200 cm³ din soluția inițială se supune electrolizei, procesul de electroliză avînd loc cu un randament de curent de 90%. Toate cele trei metale sînt depuse electrolitic cantitativ (integral) dacă se trece prin sistem un curent de 2 A timp de 14,5 min.
Se cere:
a) să se stabilească coeficienții din ecuațiile reacțiilor chimice care au loc;
b) să se determine compoziția aliajului în procente de masă.
Mase atomice relative: Cu—63,55; Ag—107,87; Cr—52,00.

9°. La tratarea unei alame (aliaj de Zn cu Cu) cu soluție de hidroxid de sodiu în exces se degajă 11,2 l H_2 (c.n.) Partea nedizolvată, după filtrare, se dizolvă total în 40 g soluție acid sulfuric de concentrație 49% (procente de masă) în prezența oxigenului.
Se cere:
a) scrierea ecuațiilor reacțiilor chimice;
b) compoziția aliajului în procente de masă;
c) cantitatea de $CuSO_4 \cdot 5H_2O$ care se poate obține teoretic.
Mase atomice: H—1; O—16; S—32; Cu—64; Zn—65.

10°. Cîte g de alaun, $KAl(SO_4)_2 \cdot 12H_2O$ se depun sub formă de cristalohidrat din 320 g soluție de $KAl(SO_4)_2$ saturată la 20°C dacă 160 g de apă s-au evaporat din soluție la 20°C. Soluția saturată la 20°C conține 5,5% $KAl(SO_4)_2$ în procente de masă.
Mase atomice: K—39; Al—27; S—32; O—16; H—1.

11°. 100 cm^3 dintr-o soluţie care conţine un amestec de acid clorhidric şi acid sulfuric se neutralizează cu 160 cm^3 soluţie de hidroxid de sodiu de concentraţie 0,5 mol/l. Prin neutralizare se formează săruri neutre. După evaporarea soluţiei obţinute în urma neutralizării rezultă 5,00 g amestec de săruri. Să se calculeze compoziţia iniţială a amestecului de acizi exprimată în mol/l.

Mase atomice: H—1; O—16; Na—23; S—32; Cl—35,5.

12°. La amestecarea unei soluţii de azotat de argint cu o cantitate (masă) egală de soluţie de clorură de sodiu, substanţele reacţionează în întregime.

Se cere:

a) concentraţia procentuală (în procente de masă) a soluţiei de clorură de sodiu, dacă soluţia de azotat de argint, avea concentraţia 3,4% (procente de masă).

b) concentraţia procentuală (procente de masă) a soluţiei de azotat de sodiu rezultată.

Mase atomice: N—14; O—16; Na—23; Cl—35,5; Ag—108.

13°. Se tratează cu H_2SO_4 diluat 17,8 g dintr-un aliaj de Zn şi Mg (ambele reacţionează total), obţinîndu-se 8,96 l H_2 măsurat în condiţii normale.

Se cere:

a) compoziţia aliajului în procente de masă

b) masa (în g) de acid sulfuric consumată în reacţie;

c) cantităţile de $ZnSO_4$ şi $MgSO_4$ (în g) obţinute (se consideră sărurile anhidre).

Mase atomice: Zn—65; S—32; Mg—24; O—16; H—1.

14°. O anumită cantitate de calcar ($CaCO_3$ impur) este supusă calcinării complete. Produsul solid rezultat la calcinare, incluzînd şi impurităţile nevolatile cîntăreşte 16 g, iar gazul degajat ocupă în condiţii normale un volum de 5,6 l.

Se cere:

a) ecuaţia reacţiei chimice de descompunere termică a $CaCO_3$;

b) cantitatea de calcar supusă calcinării ştiind că impurităţile nu sînt descompuse termic;

c) compoziţia procentuală în $CaCO_3$ şi impurităţi a probei de calcar, supusă calcinării.

Mase atomice: C—12; O—16; Ca—40.

15°. Folosind un curent de 500 A se supun electrolizei 1 000 kg soluţie de clorură de sodiu pură, concentraţia soluţiei fiind 58,5% (proc. masă). Electroliza se întrerupe cînd concentraţia soluţiei de sare pură ajunge la 46,8%.

Se cere:

a) ecuaţiile reacţiilor care au loc;

b) cantitatea de hidroxid de sodiu (în kg) rezultată;

c) volumele gazelor care se formează la electroliză în condiţii normale;

d) timpul necesar electrolizei dacă randamentul de curent este 80%.

Se cunosc: constanta lui FARADAY : $F = 96\,500\ C \cdot mol^{-1}$.

Mase atomice: H—1; O—16; Na—23; Cl—35,5.

Se neglijează variaţia masei soluţiei în cursul electrolizei.

16°. Se supune electrolizei o soluţie de clorură de sodiu, iar clorul rezultat este utilizat în sinteza acidului clorhidric. Se presupune că electroliza decurge cu randament de 80%, iar sinteza acidului clorhidric cu randament 100%.

Ştiind că în urma electrolizei s-au obţinut 56 l clor gazos (măsurat în condiţii normale), se cere:

a) să se scrie reacţiile chimice care au loc la electroliză şi sinteza acidului clorhidric, precum şi mecanismul celor două reacţii;

b) cantitatea de clorură de sodiu consumată;

c) volumul de acid clorhidric gazos care se obţine dacă este măsurat la 27°C şi 4 053 kPa.

Mase atomice: Na—23; Cl—35,5.

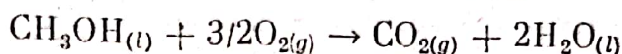
17°. Să se determine variația de entalpie ΔH_r^0 în condiții standard, care însoțește următoarele reacții chimice:

1. $CH_2{=}CH_2 + HCl \rightarrow CH_3{-}CH_2Cl$
2. $CH_3{-}CH_2OH \rightarrow CH_2{=}CH_2 + H_2O$
3. $CH_4 + Cl_2 \rightarrow CH_3Cl + HCl$.

Se cunosc valorile energiilor de legătură din tabelul următor:

Legătura	O—H	C—C	C=C	C—H	Cl—Cl	H—Cl	C—O	C—Cl
Energia, kJ/mol	462,3	347,4	606,1	410,5	238,5	431,4	351,1	328,1

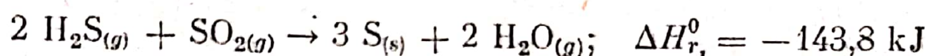
18°. În reacția de ardere a metanolului în oxigen:



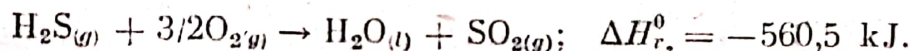
$$CH_3OH_{(l)} + 3/2O_{2(g)} \rightarrow CO_{2(g)} + 2H_2O_{(l)}$$

se degajă o cantitate de căldură egală cu 725,6 kJ pentru fiecare mol de metanol, valoare calculată pentru condiții standard ($p = 101{,}325$ kPa și $T = 298$ K). Cunoscînd entalpiile standard de formare $\Delta H^0_{298,f}$ pentru apa lichidă — 285,9 kJ/mol și pentru dioxidul de carbon gazos — 392,9 kJ/mol, să se calculeze entalpia standard de formare a metanolului lichid.

19°. Să se calculeze entalpia standard de formare a dioxidului de sulf gazos, cunoscînd variațiile de entalpie standard pentru următoarele reacții:



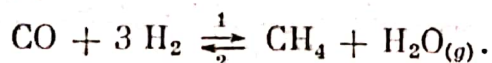
$$2\,H_2S_{(g)} + SO_{2(g)} \rightarrow 3\,S_{(s)} + 2\,H_2O_{(g)}; \quad \Delta H^0_{r_1} = -143{,}8 \text{ kJ}$$



$$H_2S_{(g)} + 3/2O_{2(g)} \rightarrow H_2O_{(l)} + SO_{2(g)}; \quad \Delta H^0_{r_2} = -560{,}5 \text{ kJ}.$$

Se cunoaște de asemenea căldura molară de vaporizare a apei $\lambda_v = 44{,}3$ kJ/mol.

20°. Se consideră reacția de echilibru:



$$CO + 3\,H_2 \underset{2}{\overset{1}{\rightleftarrows}} CH_4 + H_2O_{(g)}.$$

Se cunosc entalpiile standard de formare $\Delta H^0_{298,f}$ pentru CO: — 110,5 kJ/mol; pentru CH_4: —74,8 kJ/mol; pentru $H_2O_{(g)}$: —241,6 kJ/mol. Se cunosc de asemenea entropiile standard S^0_{298} pentru CO: 197,7 J/mol · K; pentru H_2: 130,5 J/mol · K; pentru CH_4 : 186,0 J/mol · K și pentru $H_2O_{(g)}$: 188,5 J/mol · K.

Se cere:

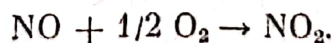
a) să se arate care reacție, 1 sau 2, este spontană la temperatura de 300°C;

b) care este temperatura maximă pînă la care reacția 1 este spontană;

c) să se calculeze valoarea constantei de echilibru K_p la 600°C.

Se consideră, că într-o primă aproximație variațiile de entalpie ΔH și de entropie ΔS nu depind de temperatură (prima aproximație a lui ULICH).

21°. Se studiază reacția de oxidare a oxidului de azot la dioxid, în fază gazoasă:



$$NO + 1/2\,O_2 \rightarrow NO_2.$$

În acest scop, într-un vas cu volumul de 2 dm³ se introduc 0,6 g NO și 0,64 g O_2, temperatura vasului fiind 25°C. Se măsoară viteza inițială a reacției și se găsește o valoare v. Repetînd experiența cu 1,2 g NO și tot cu 0,64 g O_2 viteza inițială măsurată este $4v$. Dacă se lucrează cu 0,6 g NO și 1,28 g O_2 viteza inițială a reacției este $2v$.

Se cere:

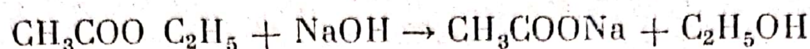
a) ordinele parțiale de reacție în raport cu NO și cu NO_2 și ordinul total de reacție;

b) să se scrie expresia vitezei de reacție și să se precizeze dacă reacția este simplă sau complexă;

c) să se calculeze viteza inițială v a reacției la 25°C dacă la această temperatură constanta de viteză este $5 \cdot 10^{-4}$ $dm^3\ mol^{-1}\ s^{-1}$.

Mase atomice: N—14; O—16.

22°. Determinîndu-se constanta de viteză a reacției de hidroliză alcalină a acetatului de etil:



$$CH_3COO\ C_2H_5 + NaOH \rightarrow CH_3COONa + C_2H_5OH$$

la diferite temperaturi s-a găsit că la

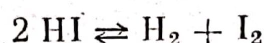
10°C $k_1 = 2,5$ $dm^3\ mol^{-1}\ s^{-1}$

iar la 20°C $k_2 = 5,5$ $dm^{-3}\ mol^{-1}\ s^{-1}$.

Să se calculeze energia de activare a acestei reacții.

Se cunoaște valoarea constantei gazelor perfecte $R = 8,31$ $J mol^{-1}\ K^{-1}$.

23°. Gradul de disociere a acidului iodhidric conform reacției de echilibru, în fază gazoasă:



$$2\ HI \rightleftharpoons H_2 + I_2$$

este $\alpha = 0,245$ la temperatura de 520°C.

Se cere:

a) să se calculeze constanta de echilibru K_p la 520°C;

b) să se determine valoarea constantei de echilibru K_c la aceeași temperatură.

24°. Un vas cu volumul 5 dm^3 este umplut cu etan la temperatura de 300 K și presiune normală și apoi este închis ermetic. Se încălzește vasul cu etan, măsurîndu-se presiunea la diferite temperaturi; se obțin următoarele valori:

Nr. crt.	T(K)	Presiunea măsurată p(kPa)	Presiunea calculată p'(kPa)
1	300	101,325	
2	500	169,820	
3	800	276,111	
4	1 000	500,748	

Se cere:

a) să se calculeze presiunile din vas p' la temperaturile respective, presupunînd că se aplică legile gazelor perfecte, și să se completeze coloana respectivă a tabelului;

b) să se explice diferențele dintre valorile p' calculate teoretic și valorile p măsurate experimental.

c) să se scrie ecuația reacției chimice care are probabil loc la temperaturi mai ridicate.

d) să se calculeze valoarea gradului de conversie α a etanului și valoarea constantei de echilibru K_p a reacției la 800 K.

Se cunoaște valoarea constantei gazelor perfecte $R = 8\ 314$ J/kmolK.

25°. Constanta de echilibru a reacției $H_{2(g)} + I_{2(g)} \rightleftharpoons 2\ HI_{(g)}$ la 600°C este egală cu 70.

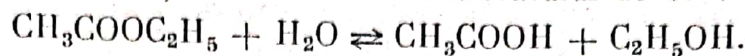
Se cere:

a) Cît iod (în %) este transformat în acid iodhidric (care este conversia) la atingerea echilibrului, dacă reactanții sînt amestecați:

1. în raport molar 1 : 1 la 600°C;
2. în raport molar 2 : 1 la 600°C (cantitatea de hidrogen este dublă față de cea de iod);

b) cîţi moli de hidrogen trebuie amestecaţi cu un mol de iod pentru ca 99% din iod să fie transformat în acid iodhidric la atingerea echilibrului la 600°C.

26°. Se studiază reacţia de hidroliză a acetatului de etil:



$$CH_3COOC_2H_5 + H_2O \rightleftarrows CH_3COOH + C_2H_5OH.$$

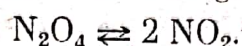
a) Dacă iniţial se pleacă de la un amestec echimolecular de ester şi apă se constată că la stabilirea echilibrului o treime din ester a fost hidrolizat. Să se calculeze constanta de echilibru a reacţiei de hidroliză.

b) Dacă iniţial se pleacă de la un amestec ce conţine n moli de apă la un mol de ester se cere:

a) fracţiunea de ester care va fi hidrolizată la stabilirea echilibrului;

b) care trebuie să fie valoarea lui n pentru ca la echilibru, 99% din ester să fie hidrolizat.

27°. În fază gazoasă dioxidul de azot se găseşte în echilibru cu dimerul său:



$$N_2O_4 \rightleftarrows 2\,NO_2.$$

La o presiune de 101,325 kPa şi la temperatura de 45°C, densitatea amestecului de echilibru în raport cu aerul este $d = 2{,}34$.

Se cere:

a) să se calculeze presiunile parţiale ale celor două specii moleculare;

b) valoarea constantei de echilibru K_p;

c) care va fi compoziţia de echilibru, la aceeaşi temperatură? dar la o presiune de 1 013,25 kPa?

Mase atomice: N—14; O—16.

28°. Se consideră echilibrul de disociere a bromului, în fază gazoasă la 1 000°C:



$$Br_2 \rightleftarrows 2\,Br.$$

Constanta de echilibru K_p, în aceste condiţii are valoarea $K_p = 5{,}67 \cdot 10^2$ Pa.

Se cere:

a) să se arate pe baza principiului Le Châtelier în ce sens va evolua sistemul la micşorarea presiunii;

b) să se regăsească prin calcul, pe baza aplicării legii acţiunii maselor, ce influenţă are presiunea asupra acestui echilibru.

c) care este valoarea gradului de disociere al bromului la presiunea de 101,325 kPa şi temperatura de 1 000°C.

29°. Un volum $v = 11{,}42$ cm^3 de acid acetic pur se dizolvă în apă. Aducînd volumul soluţiei la 2 dm^3, prin completare cu apă distilată, pH-ul soluţiei astfel obţinute este egal cu 2,87.

Se cere:

a) constanta de aciditate a acidului acetic;

b) gradul de ionizare a acidului acetic în soluţia preparată, ce are $p\text{H} = 2{,}87$;

c) volumul soluţiei de NaOH 0,1 N (normal) necesar pentru a neutraliza complet cei 2 dm^3 de soluţie iniţială de acid acetic;

d) care va fi pH-ul soluţiei obţinute în urma neutralizării de la punctul c).

Se cunoaşte densitatea acidului acetic pur $\rho = 1\,052$ kg m^{-3}.

Mase atomice: H—1; C—12; O—16; Na—23.

30°. În 4 dm^3 de apă pură se dizolvă 493 cm^3 amoniac gazos, măsuraţi la 27°C şi presiunea 202,65 kPa, volumul soluţiei obţinute rămînînd practic tot 4 dm^3. Se măsoară pH-ul soluţiei obţinîndu-se valoarea $p\text{H} = 10{,}63$.

Se cere:

a) concentraţia ionilor HO^- în soluţia obţinută;

b) constanta de bazicitate a amoniacului;

c) pH-ul soluţiei care se obţine dacă la cei 4 dm^3 soluţie de amoniac se adaugă 2 dm^3 soluţie de acid clorhidric cu concentraţia 0,01 N (normal).

31°. O soluţie de acid formic de concentraţie 3% (procente de masă) are $pH = 1,97$ şi densitatea $\rho = 1,0049$ g/cm³.

Se cere:

a) concentraţia molară a soluţiei de acid formic;

b) constanta de aciditate a acidului formic;

c) de cîte ori trebuie diluată soluţia iniţială pentru ca gradul de ionizare să crească de 10 ori.

Mase atomice: H=1; C=12; O=16.

32°. O soluţie de amoniac cu volumul de 2 dm³, are $pH = 11$. Constanta de bazicitate a amoniacului fiind $1,8 \cdot 10^{-5}$, se cere:

a) ecuaţia reacţiei de ionizare a amoniacului în soluţie apoasă;

b) concentraţia ionilor HO^- din această soluţie;

c) concentraţia soluţiei de amoniac;

d) ce volum de amoniac gazos măsurat la 27°C şi 200 kPa a fost dizolvat în 2 dm³ apă distilată pentru prepararea soluţiei respective. Se neglijează variaţia de volum a lichidului în procesul de dizolvare a amoniacului gazos.

33°. Gradul de ionizare al acidului cianhidric într-o soluţie apoasă de concentraţie 0,2 M, la 25°C, este $1,4 \cdot 10^{-2}\%$.

Se cere:

a) constanta de ionizare a acidului cianhidric la această temperatură;

b) concentraţia ionilor H_3O^+ din această soluţie şi pH-ul soluţiei;

c) ce volum de apă trebuie să se adauge unui dm³ de soluţie de HCN 0,2 M pentru ca gradul de ionizare să se dubleze.

34°. La un volum de 500 cm³ soluţie saturată la 25°C de clorură de argint se adaugă $4,44 \cdot 10^{-2}$ g clorură de calciu. Considerînd că volumul şi temperatura soluţiei nu se modifică, se cere:

a) solubilitatea clorurii de argint la 25 °C (mol · dm⁻³) în apă pură;

b) concentraţia ionilor Ag^+ şi Cl^- în soluţia saturată de AgCl (în g · dm⁻³).

c) solubilitatea AgCl (mol·dm⁻³) în soluţie, obţinută după adăugarea clorurii de calciu;

d) concentraţia ionilor Ag^+ şi Cl^- în soluţie, obţinută după adăugarea clorurii de calciu.

Mase atomice: Cl—35,5; Ca—40; Ag—108;

Produsul de solubilitate al AgCl (la 25 °C): $P_s = 1 \cdot 10^{-10}$ mol² dm⁻⁶.

35°. O soluţie de $Pb(NO_3)_2$ avînd volumul 10 cm³ şi concentraţia $2 \cdot 10^{-2}$ mol · dm⁻³ se diluează pînă la 100 cm³ cu apă distilată şi apoi se amestecă cu 100 cm³ soluţie de acid sulfuric de concentraţie $2 \cdot 10^{-2}$ N (normal).

Se cere:

a) să se arate dacă va avea loc formarea de precipitat $PbSO_4$ sau nu;

b) să se calculeze concentraţia (în g pe dm³) ionilor Pb^{2+} şi a ionilor SO_4^{2-} în soluţia nou formată.

Mase atomice: H—1; O—16; N—14; S—32; Na—23 şi Pb—207.

Produsul de solubilitate al sulfatului de plumb: $P_s = 2 \cdot 10^{-8}$ mol² · dm⁻⁶.

36°. Se dizolvă 1/2 l HCl gazos (condiţii normale) în apă astfel ca volumul soluţiei să fie 10 l.

Se cere:

a) normalitatea şi molaritatea soluţiei de HCl;

b) concentraţia ionilor H^+ la litru de soluţie, ştiind că HCl este total ionizat;

c) volumul soluţiei 0,1 N NaOH ce neutralizează soluţia de HCl.

Mase atomice: H—1,0; Cl—35,5.

37°. Ce cantitate de zinc şi acid clorhidric 10% sînt necesare pentru a obţine 15 l hidrogen (condiţii normale), dacă pierderile reprezintă 8%.

Mase atomice: H—1,0; Cl—35,5; Zn—65,4.

38°. Într-o soluție 1 M de azotat de argint se introduce o lamă de aluminiu de masă 27 g. După ce tot argintul a fost depus lama cîntărește 29,97 g.

Se cere:

a) masa aluminiului dizolvat;

b) masa argintului depus;

c) volumul soluției 1 M de azotat de argint folosit;

d) concentrația molară a soluției finale.

Mase atomice: Al=27; Ag=108

39°. O cantitate de 5 kg calcar, cu un conținut de 80% carbonat de calciu este tratată cu o soluție 10% HCl (se consideră $\rho_{HCl} = 1$ g/cm³). Gazul rezultat din reacție este barbotat într-o soluție 0,5 M de NaOH.

Se cere:

a) ecuațiile reacțiilor;

b) volumul gazului (condiții normale) rezultat din reacție;

c) volumul soluției 10% HCl (în l) necesar;

d) volumul soluției 0,5 molară de NaOH care absoarbe complet gazul rezultat din reacție

Mase atomice: H—1,0; C—12,0; O—16,0; Cl—35,5; Na—23; Ca—40,1.

40°. Se tratează 100 cm³ soluție de HCl cu exces de soluție de $KMnO_4$, la cald. Din reacție se degajă 1,12 l (condiții normale) de clor.

Se cere:

a) să se scrie ecuația reacției care a avut loc;

b) să se calculeze concentrația în mol/l a soluției inițiale de HCl;

c) să se calculeze cîți cm³ de soluție HCl de concentrație 36% (ρ=1,18 g/cm³) au fost necesari pentru a obține cei 100 cm³ de soluție de HCl (care au intrat în reacție cu $KMnO_4$);

d) să se calculeze echivalentul gram al $KMnO_4$ pentru reacția care a avut loc cu HCl.

Mase atomice: Cl—35,5; K—39; Mn—55; O—16; H—1.

41°. Acidul HA are în soluții apoase $K_a = 1 \cdot 10^{-5}$.

Se cere:

a) dimensiunile lui K_a;

b) gradul de ionizare α în soluțiile avînd concentrațiile analitice $1 \cdot 10^{-1}$ M, respectiv $1 \cdot 10^{-3}$ M;

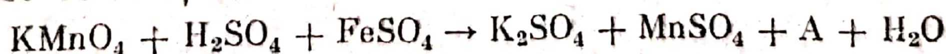
c) concentrația ionilor H_3O^+ în soluțiile avînd concentrațiile analitice $1 \cdot 10^{-1}$ M, respectiv $1 \cdot 10^{-3}$ M;

d) pH-ul soluției în care concentrația analitică a acidului HA este $C = 1 \cdot 10^{-3}$ M;

e) caracterul acido-bazic al soluției obținută prin adăugarea cantității stoechiometrice de NaOH la soluția rezultată la punctul d).

42°. La neutralizarea a 250 ml soluție NaOH 2M cu o soluție de HCl se degajă 28,63 kJ. La neutralizarea a 250 ml soluție HCl, preparată prin introducerea a 42 ml soluție 37% HCl (ρ = 1,19 g/cm³) într-un balon de 500 ml, degajîndu-se 14,51 kJ, să se determine căldura de neutralizare și să se interpreteze rezultatele obținute.

43°. Se dă reacția:



$$KMnO_4 + H_2SO_4 + FeSO_4 \rightarrow K_2SO_4 + MnSO_4 + A + H_2O$$

Se cere:

a) să se determine substanța A;

b) să se stabilească coeficienții ecuației chimice;

c) volumul soluției de $KMnO_4$ 0,2 N necesar pentru oxidarea sulfatului de fier (II) conținut în 100 ml soluție 0,1 N;

d) concentrația molară a soluției de $KMnO_4$.



44°. Prin bromurarea unei hidrocarburi A, cu formula moleculară C_5H_{10}, rezultă un singur derivat monobromurat. Scrieți formulele de structură a hidrocarburii A și cele ale izomerilor săi.

45°. În urma analizei elementare se stabilește că două substanțe A și B au aceeași compoziție procentuală (C% = 40,67; H% = 8,47 și N% = 23,73, O% = 27,19) și aceeași masă moleculară (M = 59).

a) Știind că prin hidroliză substanța A conduce la un acid C, iar substanța B la o aldehidă D și că prin oxidare D trece în C, stabiliți formulele substanțelor A, B, C și D;

b) scrieți formulele de constituție pentru cel puțin patru substanțe izomere cu A și B.

46°. Analiza complexă a cinci substanțe izomere A, B, C, D și E furnizează următoarele informații:

a) au aceeași formulă moleculară, C_7H_8O;

b) conțin un nucleu aromatic în moleculă;

c) sînt insolubile în apă;

d) numai substanțele C, D și E sînt solubile în soluție de hidroxid de sodiu și dau reacții de culoare cu o soluție de clorură ferică;

e) substanța A reacționează cu sodiu metalic, spre deosebire de substanța B care nu dă această reacție.

Pe baza acestor date stabiliți formulele de constituție ale compușilor A, B, C, D și E.

Indicați reacțiile comune ale celor cinci substanțe.

47°. Raportul dintre masa carbonului și cea a hidrogenului dintr-o hidrocarbură A cu masa moleculară 130 este 12 : 1.

Știind că prin oxidare cu dicromat de potasiu și acid sulfuric hidrocarbura A se transformă în acid tereftalic, determinați formula de structură; scrieți formulele structurale ale tuturor izomerilor lui A care prin oxidare energică conduc la acid benzoic.

Determinați nesaturarea echivalentă a compusului A, a acidului tereftalic și a acidului benzoic.

48°. Știind că prin oxidarea unei hidrocarburi nesaturate A cu dicromat de potasiu și acid sulfuric se obține acid acetic și acid piruvic, în raport molar 2 : 1, se cere:

a) formula și denumirea hidrocarburii A;

b) formulele și denumirile izomerilor geometrici ai hidrocarburii A;

c) formulele izomerilor optici obținuți prin hidrogenarea totală a hidrocarburii A;

d) volumul soluției de dicromat de potasiu 0,23 M, necesar oxidării a 9,6 g hidrocarbură A.

49°. Prin nitrarea a 25,6 g hidrocarbură aromatică polinucleară se obțin 34,6 g mononitroderivat.

Se cere:

a) masa moleculară și formula structurală a hidrocarburii;

b) cantitățile de acid sulfuric de concentrație 90% și acid azotic 63% necesare preparării amestecului nitrant, știind că în reacția de nitrare se consumă numai 50% și că raportul molar acid sulfuric : acid azotic din amestec este de 2 : 1.

50°. Într-un reactor de hidrogenare cu volumul de 72,2 dm^3 se introduc benzen și hidrogen într-un raport molar de 1 : 10. Presiunea la începutul procesului este de 10 atm, iar la sfîrșitul hidrogenării este de 8,64 atm, temperatura menținîndu-se constantă la 127°C.

Să se calculeze compoziția procentuală a amestecului la sfîrșitul reacției și randamentul reacției de hidrogenare. (Se neglijează volumul catalizatorului și se presupune că benzenul și ciclohexanul se găsesc în stare de vapori.)

51°. O alchenă A, obținută prin deshidratarea unui alcool monohidroxilic aciclic saturat B, conține cu 25,71 procente de carbon mai mult decît alcoolul B.

Să se determine:

a) formula moleculară a alchenei A;

b) formulele izomerilor alcoolului B;

c) cantitatea de soluție de Br_2 de concentrație 1,6% (în CCl_4) ce poate fi decolorată de 3,36 dm^3 alchenă A.

52°. Un amestec echimolecular format dintr-un alcan și o alchenă cu același număr de atomi de carbon în moleculă este supus unei reacții de descompunere în elemente, într-un vas închis.

Știind că la sfîrșitul reacției presiunea crește de 3,5 ori (temperatura se presupune constantă), să se determine formulele celor două hidrocarburi. (Volumul carbonului rezultat la descompunere se neglijează.)

53°. Raportul maselor elementelor constituente ale unui alcool monohidroxilic primar este C : H : O = 6 : 1 : 2.

Știind că molecula alcoolului A are o catenă de atom de carbon ramificată, se cere:

a) formula moleculară și formula structurală ale alcoolului A;

b) izomerii geometrici ce corespund formulei moleculare determinate;

c) izomerii de funcțiune ai alcoolului A;

d) ecuațiile reacțiilor de transformare a *n*-butanului în alcoolul A;

e) cantitatea de ester ce se obține la tratarea a 10 moli de alcool A cu anhidridă acetică în exces, la un randament de 90%.

54°. În urma unui proces de nitrare a anilinei se obține în final un amestec de *p*-nitroanilină, *o*-nitroanilină și 2,4-dinitroanilină în raport molar de 4 : 2 : 0,5. Știind că s-au obținut 276 kg *p*-nitroanilină și că numai 75% din anilină a fost transformată în nitroderivați, se cere:

a) ecuațiile reacțiilor;

b) cantitatea de anilină supusă nitrării;

c) cantitățile de *o*-nitroanilină și 2,4-dinitroanilină obținute;

d) conversia utilă (raportată la *p*-nitroanilină);

e) cantitatea de acid acetic 98% necesară protejării anilinei în cursul reacției de nitrare;

f) să se compare bazicitățile anilinei, *p*-nitroanilinei și 2,4-dinitroanilinei.

55°. Trei hidrocarburi A, B și C conțin în moleculă același număr de atomi de carbon. Știind că procentele de hidrogen din molecula fiecăreia sînt 18,18; 14,28 și respectiv 10,00, și că numărul atomilor de hidrogen din molecula hidrocarburii A este cu patru mai mare decît cel din molecula hidrocarburii C, să se determine:

a) formulele moleculare ale celor trei hidrocarburi;

b) căile de transformare una în alta.

56°. Într-un cilindru de oțel cu volumul de 22,4 dm^3 se introduc 2 moli de etan și 21 g alchenă necunoscută. Știind că amestecul de hidrocarburi exercită o presiune de 2,75 atm, măsurată la 27°C, se cere:

a) formula moleculară a alchenei necunoscute;

b) presiunea în cilindru dacă se introduce cantitatea stoechiometrică de hidrogen necesară hidrogenării alchenei (temperatura rămînînd constantă);

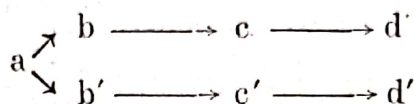
c) presiunea în cilindru, după hidrogenarea a 50% din alchenă, măsurată la temperatura de 77°C;

d) masa moleculară medie a amestecului gazos inițial din cilindru.

57°. Într-un reactor de dehidrogenare-cracare cu volumul de 56 m^3 se introduc 116 kg butan. În urma procesului de transformare termică se obține un amestec gazos care conține (în procente de volum) 20% butene, 15% propenă, 10% etenă și 10% butan netransformat.

Să se determine presiunea în reactor la începutul și la sfîrșitul procesului, cunoscînd că acesta are loc la temperatura de 546°C.

58°. Se dă următoarea schemă:



Substanța a este o hidrocarbură, iar substanța b are masa moleculară 137 și raportul maselor elementelor componente C : H : N : O = 12 : 1 : 2 : 4,57.

Știind că substanțele b cu b′, c cu c′, d cu d′ sînt izomeri de poziție, iar b cu d și b′ cu d′ sînt izomeri de funcțiune, se cere:

a) determinarea formulelor moleculare și structurale ale substanțelor indicate în schemă;

b) ecuațiile reacțiilor ce au loc;

c) o altă cale de transformare a lui b în d (respectiv b′ în d′).

59°. Prin condensarea crotonică a 0,4 kmoli aldehidă A se obțin 0,15 kmoli compus B care conține 16,32% O.

Se cere:

a) formulele substanțelor A și B și ecuația reacției;

b) randamentul reacției de condensare;

c) volumul de hidrogen (măsurat în condiții normale) necesar transformării substanței B într-un compus saturat C;

d) formula unui alt compus carbonilic izomer cu A și ecuația reacției de condensare aldolică a acestuia cu aldehida A.

60°. Un mol de substanță A se condensează cu 3 moli de substanță B, în soluție apoasă, în prezența unui catalizator bazic, rezultînd substanța C. Prin hidrogenarea substanței C se obține compusul D, cu compoziția C% = 44,12, H% = 8,82 și O% = 47,05 și cu masa moleculară 136.

Știind că 6,8 g substanță D reacționează cantitativ cu 20,4 g anhidridă acetică, se cere:

a) determinarea formulelor de structură ale compușilor A, B, C și D și scrierea ecuațiilor reacțiilor ce au loc;

b) volumul de gaz degajat în reacția dintre 6,8 g substanță D cu cantitatea de sodiu necesară;

c) formula structurală a compusului E rezultat în urma reacției dintre sarea de sodiu obținută la punctul b) și diclormetan, știind că E conține 40% oxigen.

61°. O cantitate de 26,8 g amestec echimolecular a doi acizi monocarboxilici saturați este neutralizată cu 0,5 dm^3 soluție de hidroxid de sodiu 0,8 molar.

Știind că unul dintre acizi a format la neutralizare o cantitate de sare mai mare cu 2,8 g decît celălalt acid, să se identifice cei doi acizi și să se calculeze compoziția procentuală a amestecului de săruri rezultat la neutralizare (după evaporarea apei).

62°. Raportul dintre procentul de oxigen al unui acid dicarboxilic saturat (A) și procentul de oxigen al diclorurii sale acide (B) este 2,71.

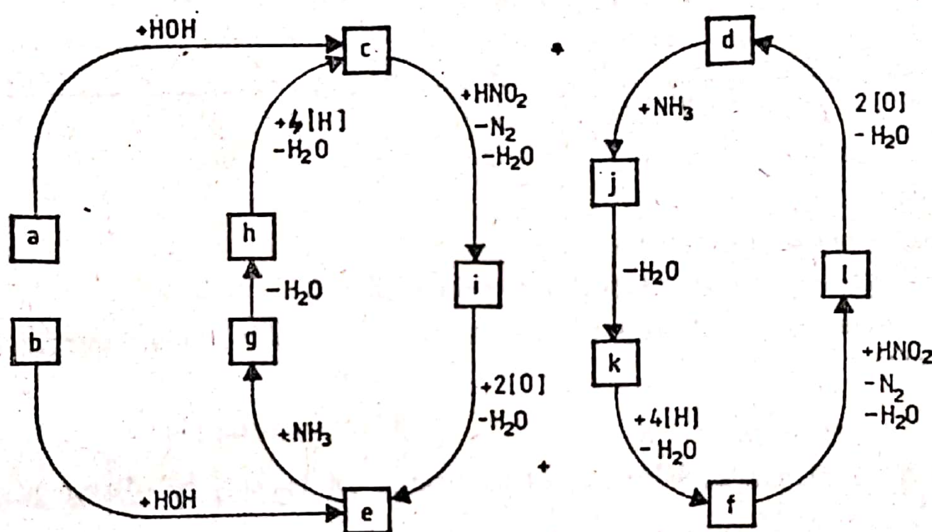
Se cere:

a) formulele moleculare și structurale ale compușilor A și B;

b) formulele structurale ale tuturor izomerilor posibili ai compușilor A și, respectiv, B;

c) volumul de soluție de hidroxid de sodiu 2 m necesară absorbției totale a acidului clorhidric degajat la transformarea a 52 kg acid în diclorura sa acidă.

63°. Se dă următoarea schemă:



Știind că a și b sînt izomeri cu formula moleculară $C_5H_{11}NO$, se cere:

a) identificarea substanțelor de la a la l.

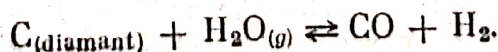
b) ecuațiile reacțiilor.

64°. Să se scrie formulele tuturor izomerilor posibili cu formulă moleculară $C_8H_{10}O$ și să se precizeze tipul de izomerie știind că toți izomerii conțin în moleculă un nucleu aromatic.

65°. Determinați formula moleculară a unui ester al unui acid monocarboxilic saturat cu un alcool monohidroxilic saturat cu același număr de atomi de carbon în moleculă, știind că procentul de hidrogen din ester este de 10,35%.

Scrieți formulele esterilor izomeri optic activi ce corespund formulei moleculare determinate.

66°. Se dă reacția



$$C_{(diamant)} + H_2O_{(g)} \rightleftarrows CO + H_2.$$

Cunoscînd datele termodinamice de mai jos, să se calculeze pentru această reacție:

1) $\Delta^r H^0_{298}$; 2) $\Delta^r S^0_{298}$; 3) $\Delta^r G^0_{1000}$; 4) Știind că $\Delta^r G^0_T = -RT \ln K_p$, să se afle K_p și K_x la $p = 2$ atm.

$\varepsilon_{H-H} = 431{,}5$ kJ/mol; $\Delta H^0_{ardere\ CO} = -282{,}8$ kJ/mol;

$\varepsilon_{O=O} = 493{,}2$ kJ/mol; $\Delta H^0_{ardere\ grafit} = -393$ kJ/mol;

$\varepsilon_{O-H} = 459{,}6$ kJ/mol; $\Delta H^0_{f(diamant)} = 2{,}1$ kJ/mol;

$S^0_{diamant} = 2{,}5$ J/mol·K;

$S^0_{H_2O\,(g)} = 188{,}5$ J/mol·K;

$S^0_{H_2} = 130{,}5$ J/mol·K;

$S^0_{CO} = 197{,}7$ J/mol·K.

(Concursul republican 1981, clasa a XI-a)

67°. La saponificarea acetatului de etil cu NaOH, la 27°C, concentrațiile inițiale ale reactanților fiind egale, se obțin experimental următoarele date:

t (min)	0	2	5	9	14	20	27	35	45
$[HO^-]\cdot 10^3$ (mol/l)	10	9,1	8,0	6,9	5,9	5,0	4,26	3,64	3,08

Se cere:

a) să se traseze graficul $C = f(t)$;

b) să se afle ordinul de reacție prin calcul;

c) să se afle constanta de viteză la 27°C și la 57°C dacă energia de activare este 70 kJ/mol.

(Concursul republican 1981, clasa a XI-a)

68°. Prin reacția a 810 kg metal trivalent cu H_2SO_4 se obține o sare neutră cu $M = 342$.

Se cere:

a) cantitatea de sare rezultată;

b) volumul, densitatea și densitatea față de aer a gazului format în reacție;

c) cantitatea de acid inițială, cu concentrația de 50%, fiind de 9 t, să se determine cantitatea rămasă după reacție;

d) volumul soluției de NaOH 2 M care neutralizează acidul sulfuric rămas (în m³).

(Concursul republican 1981, clasa a IX-a)

69°. La amestecarea unei soluții de azotat de argint cu o cantitate egală dintr-o soluție de clorură de sodiu, substanțele reacționează total.

Se cere:

a) concentrația procentuală a soluției de clorură de sodiu dacă soluția de azotat de argint are concentrația 3,4%;

b) concentrația procentuală a soluției de azotat de sodiu ce rezultă din reacție.

(Concursul republican 1982, clasa a IX-a)

70°. În 100 g soluție de hidroxid de sodiu cu concentrația 20% (procente de masă) se introduce o cantitate X g sodiu metalic astfel încît se obține Y g soluție de hidroxid de sodiu cu concentrația 40% (procente de masă).

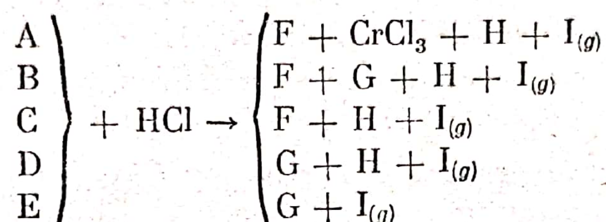
Se cere:

a) să se determine cantitatea X (în g) de sodiu metalic adăugată, precum și valoarea lui Y;

b) cunoscînd că cele Y g de soluție de hidroxid de sodiu 40% ocupă un volum de 7 ori mai mic decît volumul soluției 2 N de acid sulfuric necesar pentru neutralizarea hidroxidului de sodiu din cele Y g de soluție, să se determine concentrația molară și cea normală a acestei soluții de hidroxid de sodiu.

(Concursul republican 1982, clasa a IX-a)

71°. Se consideră următorul șir de transformări:



Să se identifice substanțele notate prin litere de la A la I, dacă se știe că substanța D este un oxid care conține 63,22% metal tetravalent.

(Concursul republican 1983, clasa a XI-a)

72°. La electroliza unei soluții în care se află dizolvată sarea de sodiu a unui acid monocarboxilic saturat, se obține la anod un amestec de gaze cu masa molară medie $\overline{M} = 39{,}33$ g/mol. Cînd acest amestec gazos este barbotat în apă de var, masa acesteia crește cu 440 g.

Să se determine:

a) masa sării electrolizate;

b) volumul gazului degajat la catod în condiții normale;

c) care este randamentul de curent, dacă s-a lucrat cu un curent de 40 A timp de 500 min.

(Concursul republican 1983, clasa a XI-a)

73°. Un amestec gazos format din CO, CH_4 și H_2S avînd masa egală cu 167,4 g, se supune arderii complete în aer. Gazele de ardere se absorb într-o soluție apoasă de NaOH, avînd loc consumarea întregii cantități de hidroxid și formarea de săruri în raportul molar $Na_2CO_3 : Na_2SO_3 = 80 : 1$ iar azotul rămas măsoară 1043,84 l (condiții normale).

Se cere:

a) compoziția în moli a amestecului gazos dat;

b) cu cîte procente a crescut masa soluției apoase după absorbția gazelor de ardere, dacă inițial soluția a avut concentrația 32,4% în NaOH.

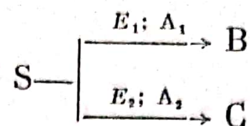
Se dau masele atomice: Na—23; S—32; C—12; O—16.

Compoziția aerului în % vol.: 20% O_2; 80% N_2.

(Concursul republican 1983, clasa a IX-a)



74°. O substanță S se izomerizează complet în compușii B și C care se obțin împreună, fiecare rezultînd în urma unei reacții simple de ordinul I.



Energiile de activare și factorii preexponențiali din ecuația lui Arrhenius au respectiv pentru cele două reacții valorile:

$$E_1 = 20\ \text{kJ}\cdot\text{mol}^{-1};\ A_1 = 2{,}5\cdot10^{11}\text{s}^{-1}$$

$$E_2 = 30\ \text{kJ}\cdot\text{mol}^{-1};\ A_2 = 1\cdot10^{12}\text{s}^{-1}.$$

Se cere:

a) să se stabilească la ce temperatură trebuie să aibă loc reacția pentru ca masele produșilor obținuți să fie în raportul $m_B : m_C = 1$;

b) temperatura la care masele respective rezultă în raportul $m_B : m_C = 8$.

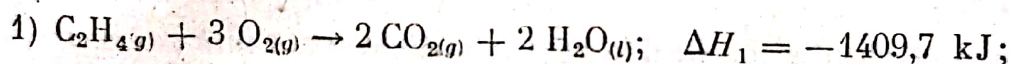
Se dau:

— constanta gazelor perfecte $R = 8{,}31\cdot10^3$ J/kmol·K;

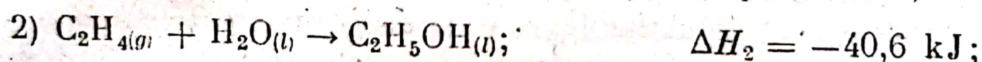
— valoarea logaritmului natural (în bază e): $\ln 2 = 0{,}693$.

(Concursul republican 1985, clasa a XI-a)

75°. Se dau următoarele reacții termochimice cu variațiile respective de entalpie standard:



1) $C_2H_{4(g)} + 3\ O_{2(g)} \rightarrow 2\ CO_{2(g)} + 2\ H_2O_{(l)}$; $\Delta H_1 = -1409{,}7$ kJ;



2) $C_2H_{4(g)} + H_2O_{(l)} \rightarrow C_2H_5OH_{(l)}$; $\Delta H_2 = -40{,}6$ kJ;



3) $H_{2(g)} + 1/2\ O_{2(g)} \rightarrow H_2O_{(l)}$; $\Delta H_3 = -285{,}5$ kJ;



4) $C_{(grafit)} + O_{2(g)} \rightarrow CO_{2(g)}$; $\Delta H_4 = -393{,}3$ kJ.

Se cunosc de asemenea următoarele valori ale entropiilor standard:

$$S^0_{C_2H_{4(g)}} = 219{,}5\ \text{J/mol}\cdot\text{K};\quad S^0_{H_2O_{(l)}} = 69{,}8\ \text{J/mol}\cdot\text{K};$$

$$S^0_{C_2H_5OH_{(l)}} = 160{,}5\ \text{J/mol}\cdot\text{K}.$$

Se cere:

a) entalpia standard de formare a etenei, $H^0_{fC_2H_{4(g)}}$;

b) să se arate dacă reacția (2) este spontană la 50°C;

c) care este temperatura maximă pînă la care această reacție (2) este spontană;

d) să se calculeze cantitatea de căldură care se degajă la arderea a 28,75 cm³ de etanol lichid.

Se dau:

— densitatea etanolului lichid $\rho = 0{,}8$ g/cm³;

— mase atomice: H—1; C—12; O—16.

(Concursul republican 1985, clasa a XI-a)

76°. La încălzirea puternică a unui gram de probă solidă ce conține $CaCO_3$, se constată că masa probei a scăzut cu 0,352 g obținîndu-se un reziduu solid format dintr-o singură substanță. La tratarea unei probe identice cu prima, cu cantitatea stoechiometrică necesară de acid clorhidric, se obține după eliminarea CO_2 format, o soluție apoasă ce conține dizolvată o singură sare.

Se cere:

a) volumul de CO_2 (condiții normale) degajat la încălzirea 1 g de probă;

b) compoziția, în procente de masă, a elementelor din proba solidă inițială.

(Concursul republican 1985, clasa a IX-a)



77°. Un amestec gazos format din azot și o altă substanță elementară necunoscută, conține 80% azot (în procente de volum) și are densitatea 1,405 kg/m³ măsurată la 27°C și 1,2 atm.

Se cere:

a) să se identifice substanța gazoasă necunoscută;

b) să se calculeze compoziția amestecului gazos exprimată în procente de masă.

(Concursul republican 1985, clasa a IX-a)

78°. Prin descompunerea termică a 12,00 g dintr-o substanță albă, cristalină, se formează H_2O (lichid) și N_2O (gaz). Volumul de N_2O măsurat în condiții normale a fost 3,36 l. Să se stabilească formula substanței.

Mase atomice: H—1; O—16; N—14.

(Concursul național 1987, clasa a IX-a)

79°. Un inginer chimist este interesat să determine compoziția unui amestec gazos de oxigen și heliu prin măsurarea densității acestuia.

a) Deduceți expresia dependenței densității amestecului (ρ) de compoziția acestuia redată prin procentul molar (X) la presiunea totală p și temperatura T.

b) Calculați compoziția amestecului de densitate $\rho = 0,72$ g/l, la 25°C și 1 atm.

c) Care este precizia metodei dacă densitatea ρ este măsurată cu o eroare de $\pm 0,005$ g/l?

Mase atomice: He—4, O—16.

Constanta gazelor perfecte: $R = 0,082 \frac{l \cdot atm}{mol \cdot K}$.

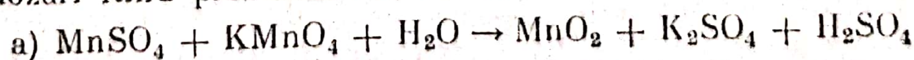
(Concursul național 1987, clasa a IX-a)

80°. Scrieți structura electronică a elementelor A, cu Z=16, și B, cu Z=56, și stabiliți care din următoarele substanțe pot reacționa cu fiecare din elementele A și B: O_2, Na, HCl, Cl_2 și H_2O. Pentru compușii care se pot forma indicați formulele moleculare și tipurile de legături.

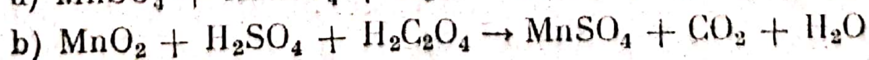
Notă: Se vor folosi simbolurile A și B pentru elementele date.

(Concursul național 1987, clasa a IX-a)

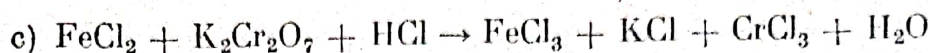
81°. Pentru dozarea unor compuși de Mn^{2+}, Mn^{4+}, Fe^{2+} și Fe^{3+} sînt folosite reacțiile indicate în schemele de mai jos, rezultatele determinărilor pentru două din dozări fiind prezentate în tabel.

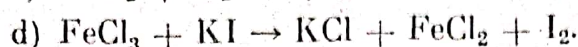


a) $MnSO_4 + KMnO_4 + H_2O \rightarrow MnO_2 + K_2SO_4 + H_2SO_4$



b) $MnO_2 + H_2SO_4 + H_2C_2O_4 \rightarrow MnSO_4 + CO_2 + H_2O$


c) $FeCl_2 + K_2Cr_2O_7 + HCl \rightarrow FeCl_3 + KCl + CrCl_3 + H_2O$


d) $FeCl_3 + KI \rightarrow KCl + FeCl_2 + I_2$.

Compus dozat	Mărimea probei (g)	Reactiv utilizat	Volumul soluției consumat în determinări (ml)	Conținut de ion metalic % (masă)
$MnSO_4$	0,2747	$KMnO_4$ 1 N	2,5	
$FeCl_2$	0,1117	$K_2Cr_2O_7$ 0,1 N	5,0	

Se cere:

a) să se calculeze coeficienții ecuațiilor reacțiilor de dozare;

b) să se calculeze conținutul procentual al ionilor metalici în probele analizate.

(Concursul național 1987, clasa a XI-a)

82°. Pentru izomerii *cis* și *trans* ai 2-butenei au fost determinate mărimile termodinamice (standard) indicate în tabel:

Mărimi termodinamice	*cis*-2-butena	*trans*-2-butenă
Căldura de ardere (kJ/mol)	2709,1	2704,7
Entropia (J/mol · K)	300,5	296,2

Se cere:

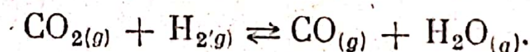
a) să se calculeze variația de entalpie liberă la izomerizare și să se arate în ce sens va evolua spontan sistemul, în condiții standard;

b) dacă izomerizarea are loc sub acțiunea unui catalizator, care are efectul unei scăderi a energiei de activare cu 17,173 kJ/mol, de cîte ori este mai mare viteza reacției catalizate decît a celei necatalizate la temperatura de 298 K?

Se dă: R = 8,314 J/mol·K; ln 2 = 0,6931.

(Concursul național 1987, clasa a XI-a)

83°. Se consideră următorul echilibru în fază gazoasă:


$$CO_{2(g)} + H_{2(g)} \rightleftarrows CO_{(g)} + H_2O_{(g)}.$$

a) Cunoscînd valoarea entalpiei de reacție la temperatura de 1000 K, $\Delta^r H^0_{1000} = 35\,040$ J, precum și cea a entropiei de reacție la aceeași temperatură, $\Delta^r S^0_{1000} = 32{,}11$ J/mol·K, calculați variația de entalpie liberă ΔG^0_{1000} la temperatura de 1000 K.

b) Care este valoarea constantei de echilibru K_p pentru această reacție la 1000 K?

c) Care sînt valorile constantelor de echilibru K_x și K_c (X — fracția molară; C — concentrația în mol/l) la aceeași temperatură (1000 K). Se va presupune comportarea ideală a gazelor din sistem.

d) Un amestec gazos ce conține în procente de volum: 35% H_2; 45% CO și 20% vapori de apă este încălzit la 1000 K. Stabiliți compoziția amestecului gazos la stabilirea echilibrului (în procente de volum).

e) Calculați entalpia de reacție $\Delta^r H^0_{1400}$, la temperatura de 1400 K, folosind valoarea $\Delta^r H^0_{1000}$ și capacitățile calorice molare la presiune constantă, C^0_p (valori aplicabile în intervalul de temperatură 1000—1400 K):

$$\Delta^r H^0_{1000} = 35040 \text{ J};$$

$$C^0_{p(CO_2)} = 42,31 + 10,09 \cdot 10^{-3}\ T \quad \text{J/mol·K};$$

$$C^0_{p(H_2)} = 27,40 + 3,20 \cdot 10^{-3}\ T \quad \text{J/mol·K};$$

$$C^0_{p(CO)} = 28,34 + 4,14 \cdot 10^{-3}\ T \quad \text{J/mol·K};$$

$$C^0_{p(H_2O)} = 30,09 + 10,67 \cdot 10^{-3}\ T \quad \text{J/mol·K}.$$

f) Avînd în vedere semnul lui $\Delta^r H^0$ precizați în ce sens se va deplasa echilibrul considerat la creșterea temperaturii.

(Olimpiada Internațională de Chimie 1980 — AUSTRIA)

84°. O substanță solidă, cristalizată, de culoare albă, dă următoarele reacții:

1) colorează în galben intens flacăra unui bec de gaz;

2) soluția sa apoasă este neutră; prin adăugarea, picătură cu picătură, a unei soluții de acid sulfuros (soluție apoasă de SO_2) se obține o soluție colorată intens în brun, care se decolorează la adăugarea unui exces de acid sulfuros;

3) soluția decolorată, în condițiile de la punctul 2), și acidulată cu HNO_3, la adăugarea de $AgNO_3$ formează un precipitat galben ce nu poate fi dizolvat în amoniac, dar se dizolvă totuși, ușor în prezența de ioni CN^- sau $S_2O_3^{2-}$.

4) Dacă se adaugă KI și H_2SO_4 diluat la soluția apoasă a substanței solide, se obține tot o colorație brună intensă a soluției care poate fi decolorată prin adăugarea de acid sulfuros sau de soluție de $Na_2S_2O_3$;

5) 0,1000 g de substanță solidă se dizolvă în apă și se adaugă 0,5 g KI și cîțiva mililitri de soluție diluată de H_2SO_4. Soluția brună obținută se titrează cu o soluție de $Na_2S_2O_3$ 0,1000 M pînă la decolorarea completă, consumîndu-se 37,40 ml soluție de tiosulfat de sodiu.

Se cere:

a) ce elemente trebuie să conțină substanța solidă? De ce?

b) care sînt compușii implicați în reacțiile de la punctele 1) — 4)? Scrieți formulele lor moleculare;

c) scrieți în formă ionică ecuațiile reacțiilor ce au loc la puncte 1) — 4);

d) pe baza datelor de la punctul 5) precizați care este substanța solidă studiată.

(Olimpiada Internațională de Chimie 1980 — Austria)

85°. Oxalatul de calciu monohidrat, $CaC_2O_4 \cdot H_2O$ este o sare puțin solubilă avînd o importanță analitică și fiziologică. Produsul său de solubilitate la 25°C este $2,1 \cdot 10^{-9}$ $(mol/dm^3)^2$.

Ionul oxalat poate fi protonat la ion hidrogenoxalat ($HC_2O_4^-$) sau la acid oxalic. Valorile *pKa* la 25°C sînt 1,23 ($H_2C_2O_4$) și 4,28 ($HC_2O_4^-$). La 25°C produsul ionic al apei este $1,0 \cdot 10^{-14}$ $(mol/dm^3)^2$.

a) Scrieți expresiile acelor condiții de echilibru care prezintă interes pentru calculul solubilității oxalatului de calciu în apă.

b) Scrieți condițiile de concentrații care sînt necesare pentru calculul solubilității *s* (mol/dm^3) a oxalatului de calciu în prezența unui acid tare de concentrație *C*.

c) calculați solubilitatea (în g/dm³) a oxalatului de calciu monohidratat în celulele plantelor în care un sistem tampon reglează pH-ul la valoarea 6,5.

d) Calculați solubilitatea (g/dm³) oxalatului de calciu monohidratat într-o soluție de acid clorhidric de concentrație 0,010 mol/dm³. Calculați, de asemenea, concentrația ionilor de hidroniu în această soluție.

e) Calculați concentrațiile de echilibru ale tuturor celorlalte specii existente în soluția de la punctul d).

(Olimpiada Internațională de Chimie 1982 — Suedia)

86°. Studiul cinetic al hidrolizei alcaline a unor compuși organici clorurați au condus la următoarele rezultate:

a) Un anumit volum de soluție a sării neutre de potasiu a acidului monoclorsuccinic a fost tratat cu un volum egal de soluție de hidroxid de potasiu, ambele soluții avînd concentrația inițială 0,2 mol/dm³. S-a determinat concentrația KOH în amestecul de reacție, la 25°C, la diferite intervale de timp, obținîndu-se următoarele rezultate:

t (min)	10	20	30	45	60	80	100
C_{KOH} (mol/dm³)	0,085	0,074	0,065	0,056	0,049	0,042	0,036

Repetînd experiența, cu aceleași concentrații inițiale ale soluțiilor, dar la 35°C, concentrația hidroxidului de potasiu s-a redus la jumătate din valoarea sa inițială după 21 min.

b) La hidroliza 3-metil-3-clorhexanului, de asemenea, cu o soluție de KOH s-a găsit că, independent de concentrațiile inițiale ale reactanților (egale între ele), concentrația hidroxidului de potasiu se reduce la jumătate din valoarea inițială, după 32 min, dacă reacția are loc la 25°C și după 11 min dacă reacția are loc la 35°C.

c) În cadrul hidrolizei 2,4-dimetil-3-izopropil-3-clorpentanului s-a găsit același mecanism ca în cazul reacției de la punctul b), dar viteza de reacție, în aceleași condiții, este de 100 de ori mai mare.

Pe baza acestor date experimentale răspundeți la următoarele întrebări:

1) care este ordinul de reacție în cele trei cazuri, a), b), c)?

2) care este valoarea constantei de viteză a reacției de la punctul a) la 25°C?

3) care sînt valorile energiei de activare pentru reacțiile de la punctele a) și b)?

4) dacă în reacția de la punctul a) se introduce sarea neutră de potasiu a acidului L-clorosuccinic (care este levogiră) ce configurație va avea sarea respectivă a acidului malic ce rezultă în urma hidrolizei?

5) dacă în reacția de la punctul b) se introduce izomerul levogir, ce activitate optică va avea 3-metil-3-hexanolul rezultat în urma hidrolizei?

6) cum se poate explica faptul că viteza reacției de la punctul c) este mult mai mare decît cea a reacției de la punctul b), cu toate că ambele reacții sînt de același tip și au loc în condiții identice de concentrații și temperatură?

Toate răspunsurile trebuie explicate.

(Olimpiada Internațională de Chimie 1983 — R.S. România)

87°. În secolul al XIX-lea industria chimică s-a dezvoltat pentru prima dată la un nivel important, prin producția de coloranți. Nu se cunoștea cauza pentru care compușii formați aveau o culoare atît de intensă. Unii coloranți pot fi considerați ca fiind formați din molecule rectilinii (1-dimensionale) în lungul cărora sînt distribuiți electronii. Conform mecanicii cuantice acești electroni pot fi considerați ca unde cu o lungime $\lambda = \frac{h}{mv} = \frac{h}{p}$ unde h reprezintă constanta lui Plank, p — cantitatea de mișcare și v — viteza electronului. Lungimea de undă a electronului are acces în spațiul disponibil *(should fit to the available space)*. Acest model se numește „teoria particulei într-o cutie". Fiecărei lungimi de undă îi corespunde o stare energetică, adică are un anumit nivel energetic. Dacă o moleculă absoarbe lumină, un electron trece de la un nivel de energie mai scăzut la un nivel mai ridicat. Pentru diferența de energie ΔE a acestui transfer electronic se poate scrie $\Delta E = \frac{hc}{\lambda}$, în care c este viteza luminii, iar λ — lungimea de undă a luminii absorbite. Dacă un corp este colorat, lungimea de undă a luminii absorbite se găsește în domeniul vizibil al spectrului (400—650 nm).

1) În răspuns se va reprezenta prin desen undele electronilor cu nivel energetic scăzut și cu nivel electronic ridicat, corespunzător unei molecule unidimensionale de lungime l.

2) Indicați o expresie generală pentru lungimea de undă posibilă a electronului în funcție de lungimea l. În modelul „particulei într-o cutie" considerăm numai variațiile de energie cinetică a electronului.

3) Deduceți o expresie pentru nivelele de energie posibile pe care le pot poseda electronii dintr-o moleculă. Această expresie este funcție de lungimea l.

4) Arătați că pentru un lanț de lungimea l care posedă k electroni absorbția care are o lungime de undă maximă este dată de $\lambda = \frac{8\, m\, cl^2}{h(k+1)}$ pentru valori pare ale lui k.

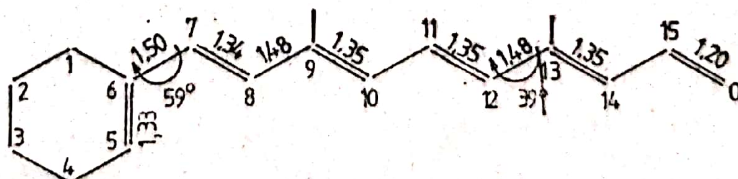
Imaginați o moleculă lineară care posedă un sistem de duble legături conjugate. Culoarea observată se datorește electronilor π ai sistemului. Fiecare atom C care lungește lanțul aduce un electron sistemului de electroni π și lungimea moleculei crește cu o valoare a. Valoarea a este lungimea legăturii C—C în sistemul conjugat.

Notăm cu N numărul atomilor de carbon C.

5) Deduceți o expresie pentru lungimea de undă corespunzătoare primului transfer de electroni în funcție de N, pentru valori pare ale lui N.

6) Arătați, utilizînd calcule, cîți atomi de carbon ar trebui să fie luați în considerație pentru ca molecula să prezinte culoare dacă $\alpha = 0{,}142$ nm.

Retina ochiului uman conține substanță sensibilă la lumină, rodopsina. Aceasta este compusă dintr-o proteină (apsina) legată de o substanță numită retinal. În 1971, Gilardi, Karle și Sperling au determinat structura cristalină a retinalului și forma acestuia în cristal. În formulă, se indică structura moleculei precum și lungimea legăturilor.



Se dau lungimile legăturilor în angstromi (1 angstrom = 0,1 nm). Atomii C de la 7 la 12 se găsesc într-un plan. Săgeţile curbe indică unghiurile dintre legăturile $C_5—C_6$ şi $C_7—C_8$ de 59° şi cel dintre $C_{11}—C_{12}$ şi $C_{13}—C_{14}$ de 39°.

Aplicînd teoria „particulei în cutie" la fragmentul $C_7—C_{12}$ se găseşte lungimea de undă corespunzătoare absorbţiei ca avînd nivelul de energie cel mai scăzut, 213 nm.

În realitate retinalul absoarbe la lungimea de aproximativ 380 nm.

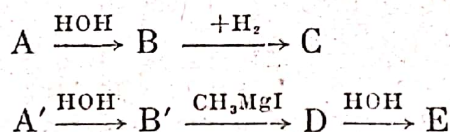
7) În concordanţă cu teoria „particulei în cutie" indicaţi cauza pentru care absorbţia are loc la o lungime de undă mai mare (380 nm). Dacă retinalul este legat de proteină pentru a forma rodopsină se constată că absorbţia se poate deplasa pînă la aproximativ 600 nm.

8) dacă dorim să explicăm aceasta prin teoria mai sus amintită, care atomi ar fi blocaţi de proteină şi se situează astfel într-un plan? Indicaţi cu ajutorul calculului răspunsul corect.

Constante: viteza luminii $c = 3{,}00 \cdot 10^8$ ms^{-1};
constanta Plank $h = 6{,}63 \cdot 10^{-34}$ J · s;
masa electronului $m = 9{,}11 \cdot 10^{-31}$ kg.

(Olimpiada Internaţională de Chimie 1986 — Olanda)

88°. Se consideră următoarea schemă de reacţii:


$$A \xrightarrow{HOH} B \xrightarrow{+H_2} C$$
$$A' \xrightarrow{HOH} B' \xrightarrow{CH_3MgI} D \xrightarrow{HOH} E$$

Se ştie că substanţa A este derivat dihalogenat care conţine 31,86% C; 5,31% H şi 62,83% Cl, iar A′ un izomer al său. Să se stabilească structura compuşilor A, A′, B, B′, C, D şi E şi să se scrie ecuaţiile chimice corespunzătoare.

(Concursul republican 1979)

89°. Doi compuşi A şi B admit drept formule brute $(CH)_n$ şi $(CH)_{n'}$. Un mol din substanţa A poate adiţiona 2 moli de hidrogen pentru a forma un compus cu formula brută $(CH_3)_n$; un mol din substanţa B poate adiţiona 3 moli de hidrogen pentru a forma un compus cu formula brută $(CH_2)_{n'}$. Substanţa B se poate obţine din compusul A care la rîndul său se poate obţine din metan.

Se cere:

a) să se indice substanţele A şi B;

b) să se scrie ecuaţiile chimice ale tuturor transformărilor ce au loc;

c) să se calculeze volumul de metan (c.n.) necesar obţinerii a 5 kmoli din compuşii A şi, respectiv, B.

(Concursul republican 1980)

90°. O hidrocarbură A reacţionează cu acidul bromhidric formînd un compus B care cu pulbere de Mg (în mediu de eter anhidru absolut) formează compusul C. Din reacţia substanţei B cu C rezultă pe lîngă sarea D şi 3,4-dimetil hexanul. Ştiind că substanţa A supusă oxidării cu $K_2Cr_2O_7$ în mediu acid formează numai acid acetic, să se determine formulele substanţelor participante la fiecare din reacţii şi să se scrie ecuaţiile corespunzătoare.

(Concursul judeţean 1982)

91°. O substanță organică $C_xH_yO_z$ cu masa moleculară 60 conține 60% C, iar raportul maselor O : H = 2 : 1. Știind că substanța poate prezenta trei izomeri A, B, C, se cere:

a) să se stabilească formulele moleculare ale substanțelor date;

b) să se atribuie izomerilor formulele de structură corespunzătoare, știind că izomerul A nu se deshidratează și nu se oxidează cu agenți obișnuiți.

— Izomerul B prin oxidare formează un compus D care nu polimerizează;

— Izomerul C prin oxidare formează un compus E care prin trimerizare formează un compus F;

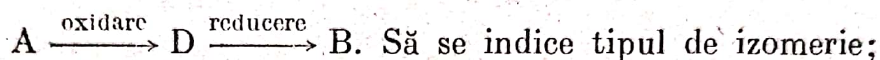
c) să se scrie ecuațiile transformărilor indicate;

d) să se calculeze volumele de aer necesar arderii complete a 24 g compus A; cantitatea (în g și moli) de compus F obținut din 12 g compus C.

(Concursul republican 1982)

92°. Două substanțe A și B ($C_7H_7O_2N$) din clasa compușilor aromatici pot exista sub forma a trei perechi de izomeri. Să se scrie:

a) formulele celor trei perechi de izomeri știind că:



$A \xrightarrow{\text{oxidare}} D \xrightarrow{\text{reducere}} B$. Să se indice tipul de izomerie;

b) ecuațiile reacțiilor de la punctul a) și denumirea substanțelor A, B și D.

(Concursul republican 1983)

93°. Un amestec de alcan și alchenă cu același număr de atomi de carbon are densitatea față de hidrogen 28,8, iar presiunile parțiale în raportul 4 : 1. Să se identifice hidrocarburile și să se scrie formulele tuturor izomerilor precizînd tipul de izomerie.

(Concursul județean 1984)

94°. Se nitrează benzenul cu 635 kg amestec nitrant ce conține 20% HNO_3. Să se calculeze cantitatea de nitrobenzen obținut dacă acidul rezidual conține 2% HNO_3.

(Concursul republican 1984)

95°. O hidrocarbură A cu formula moleculară C_9H_8 decolorează o soluție de Br_2 în CCl_4. Hidrogenarea catalitică la presiune normală conduce la compusul B cu formula moleculară C_9H_{10}. Hidrogenarea compusului A în condiții energice conduce la compusul C cu formula moleculară C_9H_{16}. Oxidarea compusului A în fază de vapori cu O_2 pe un catalizator de V_2O_5 la 250°C conduce la compusul D cu formula moleculară $C_8H_4O_3$.

Se cere:

a) să se atribuie formulele de structură pentru compușii A, B, C, D;

b) ce izomer al substanței A se oxidează cu $KMnO_4$ în mediu acid la acid tereftalic?

(Concursul republican 1985)

96°. O alchenă A adiționează acid bromhidric conducînd la un compus B care conține 48,5% Br.

Se cere:

a) formula moleculară a hidrocarburii A;

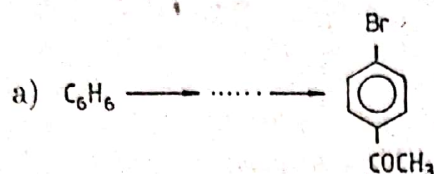
b) formulele de structură posibile pentru A, știind că prin oxidarea unui mol A cu dicromat de potasiu în mediu acid se obțin 2 moli de aceeași substanță;

c) care dintre izomerii substanței A, în condițiile reacției de oxidare, degajă CO_2; să se scrie pentru unul din izomeri ecuația reacției pe care o dă cu apa;

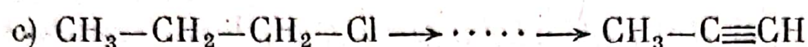
d) formulele de structură ale izomerilor substanței A care prezintă izomerie geometrică.

(Concursul județean 1986)

97°. Să se sugereze metode de realizare a următoarelor transformări:







(Concursul județean 1986)

98°. Pentru nitrarea benzenului se folosește un amestec sulfonitric care se prepară din HNO_3 80% și H_2SO_4 100%. Știind că raportul molar benzen: acid azotic este 1 : 1 și raportul dintre masa de H_2SO_4: apă este de 6 : 1 la începutul reacției și 3 : 1 la sfîrșitul reacției, să se calculeze:

a) compoziția procentuală a amestecului sulfonitric inițial;

b) masa de amestec sulfonitric necesar nitrării unei tone de benzen;

c) masele de acid sulfuric și acid azotic necesar preparării amestecului sulfonitric de la punctul b).

(Concursul județean 1976)

99°. Un acid monocarboxilic saturat care conține 40% carbon este transformat într-un ester care conține cu 14,54% mai mult carbon în comparație cu acidul. Știind că alcoolul folosit pentru esterificare este aciclic, saturat, monohidroxilic să se stabilească formula de structură a esterului.

(Concursul republican 1976)

100°. Un amestec de două hidrocarburi aromatice izomere, care conțin 90,57% C, iar în fază gazoasă are densitatea față de aer $d = 3,66$, este oxidat cu permanganat de potasiu în mediu de acid sulfuric. Prin separarea compușilor organici solizi rezultați prin oxidare se obține un amestec format din 59,51% acid benzoic și 40,49% acid ftalic.

Se cere:

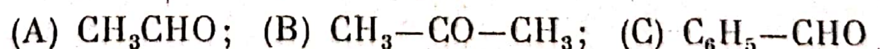
a) să se stabilească formulele de structură ale celor două hidrocarburi;

b) să se calculeze raportul molar al amestecului de hidrocarburi;

c) să se calculeze numărul de moli de permanganat de potasiu necesar oxidării unei mase de 318 g amestec de hidrocarburi.

(Concursul republican 1978)

101°. Se consideră următorii compuși carbonilici:



care participă la reacția de condensare alcolică.

Să se indice:

a) care dintre aceşti compuşi pot funcţiona drept componentă carbonilică;

b) care dintre aceşti compuşi pot funcţiona drept componentă metilenică;

c) cîţi aldoli pot fi obţinuţi din aceşti trei compuşi.

(Concursul republican 1978)

102°. O substanţă A conţine 69,8% C, 11,6% H şi restul oxigen şi are masa moleculară 86. Prin tratare cu CH_3MgI conduce la un compus B care prin hidroliză formează substanţa C. Prin deshidratarea intramoleculară a compusului C se obţine substanţa D, care supusă oxidării conduce la un amestec echimolecular de acid propionic şi acetonă. Să se stabilească structura compuşilor A, B, C, D.

(Concursul republican 1978)

103°. Într-o instalaţie de alchilare catalitică a benzenului cu etenă în vederea obţinerii etilbenzenului, se lucrează cu un raport molar benzen: etenă = 2 : 1. Amestecul lichid rezultat din reacţie are următoarea compoziţie în procente de masă: 53,8% benzen, 35,1% etilbenzen şi 11,1% dietilbenzen.

Se cere:

a) să se calculeze conversia utilă, conversia totală şi randamentul de transformare a benzenului;

b) să se calculeze conversia utilă, conversia totală şi randamentul de transformare a etenei.

(Concursul judeţean 1979)

104°. O substanţă A cu compoziţia următoare: 42,85% C, 2,38% H; 38,06% O; 16,71% N are masa moleculară 168. Ea poate exista în trei forme izomere. Să se stabilească formula sa moleculară; să se precizeze care din cei trei izomeri posibili este substanţa A ştiind că prin clorurare conduce la un singur derivat monoclorurat. Să se precizeze care din cele trei forme izomere se poate sintetiza cel mai uşor, şi anume pe ce cale.

(Concursul republican 1979)

105°. Dintr-un amestec care conţine toate monoalchenele aciclice cu un acelaşi număr de atomi de carbon în moleculă, se separă izomerul cu o structură simetrică la care se adiţionează acid hipocloros. Ştiind că produsul obţinut conţine cu 5,99% mai puţin hidrogen, faţă de izomerul iniţial, se cere:

a) să se stabilească formula brută moleculară a monoalchenelor din amestec;

b) să se stabilească formula de structură şi denumirile ştiinţifice ale monoalchenelor din amestec;

c) să se indice mecanismul polimerizării izomerului cu catena principală cea mai scurtă;

d) să se indice formulele de structură şi o proprietate fizică foarte importantă, pentru fiecare din substanţele obţinute prin adiţia acidului hipocloros la monoalchena simetrică.

(Concursul republican 1979)

106°. Se consideră produsul carbonilic cu formula C_3H_6O și se cere.

a) să se indice izomerii posibili și denumirea lor;

b) să se indice schemele de reacții și condițiile prin care pornind la un anumit compus să se obțină simultan ambii izomeri carbonilici A și B;

c) să se indice o schemă de reacție prin care compușii A și B se pot transforma unul în celălalt.

(Concursul județean 1981)

107°. O alchenă A supusă oxidării cu permanganat de potasiu în mediu acid formează două cetone B și C. Cetona B se poate obține în urma reacției dintre bromura de izopropil și acetilură monosodică, cînd rezultă un produs intermediar care adiționează apă în prezență de $HgSO_4$. Cetona C se obține prin adiția apei la 3-fenil-propină-1.

Să se indice:

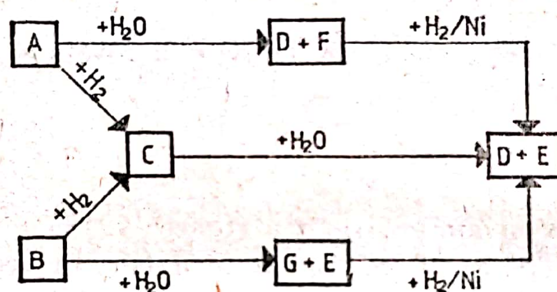
a) formulele de structură A, B, C și denumirea compușilor;

b) conținutul procentual pentru alchena A;

c) izomerii geometrici corespunzători alchenei A.

(Concursul republican 1981)

108°. Se dă următoarea schemă:



Știind că A și B sînt izomeri cu formula $C_7H_{10}O_3$, să se stabilească formulele de structură ale compușilor din schemă.

(Concursul republican 1982)

109°. Se tratează o cantitate de benzen cu acid sulfuric oleum cu 20% SO_3; în urma reacției rezultă un amestec de acizi benzen-mono- și disulfonici în raportul molar 3:1:

Se cere:

1) să se determine cantitatea de H_2SO_4 cu 20%SO_3 și de benzen consumată pentru obținerea a 1424 kg amestec de acizi (considerind că întreaga cantitate de benzen a reacționat și că masa de reacție obținută conține numai acizii sulfonici menționați și H_2SO_4);

2) să se indice ecuațiile reacțiilor prin care pornind de la cei doi acizi sulfonici utilizați ca materie primă, se obține:

a) *o*, *m*, *p*-dihidroxibenzen;

b) trinitrofenol;

c) difenileter;

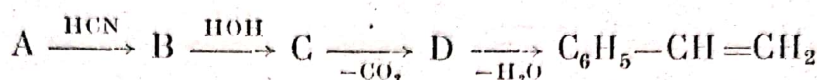
d) acid adipic.

3) să se indice ordinea descrescătoare a tăriei acide a compușilor menționați, la punctele a), b), c), d);

4) mecanismul reacției de obținere a acidului benzendisulfonic și a trinitrofenolului.

(Concursul republican 1982)

110°. Se consideră următoarea schemă de reacții:



$$A \xrightarrow{HCN} B \xrightarrow{HOH} C \xrightarrow[-CO_2]{} D \xrightarrow[-H_2O]{} C_6H_5{-}CH{=}CH_2$$

Indicați:

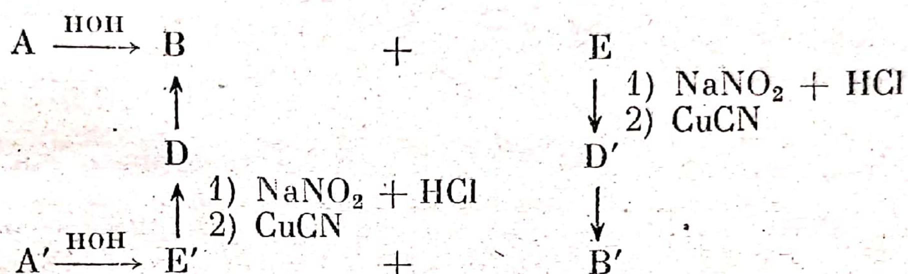
a) structurile A, B, C, D știind că A conține un atom de oxigen în moleculă, are $M = 120$ și același grad de nesaturare ca hidrocarbura final obținută;

b) succesiunea și titlul reacțiilor;

c) cantitatea de stiren ce se obține din 100 kg A dacă conversia este de 50%, iar randamentul în stiren 70%.

(Concursul județean 1983)

111°. Se dă următoarea schemă:



Știind că A și A′ sînt substanțe izomere cu formula moleculară $C_{13}H_{10}O_3N_2$ și că la rîndul lor cei doi izomeri pot exista fiecare sub forma a trei izomeri de poziție, să se scrie:

a) formulele și denumirile substanțelor A, B, D, E, A′, B′, D′, E′;

b) ecuațiile reacțiilor indicate în schemă;

c) succesiunea de reacții prin care substanța E se transformă în E′ și, respectiv, B′ se transformă în B.

(Concursul republican 1983)

112°. O hidrocarbură A cu $M = 186$ prin oxidare cu dicromat de potasiu și acid sulfuric formează compușii B, C, și D în raportul molar 1:1:1. Știind că: prin încălzire B elimină apă și formează compusul E cu formula $C_8H_4O_3$; substanța C este un acid monocarboxilic saturat care conține 40% C; compusul D reacționează cu HCN dar nu dă reacția Tollens, se cere:

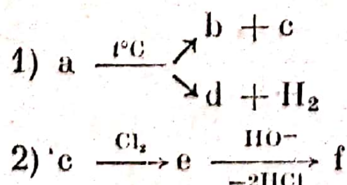
a) să se determine structurile compușilor A, B, C, D, E;

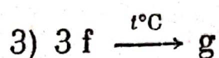
b) formulele de structură ale tuturor izomerilor de poziție a hidrocarburii A;

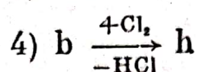
c) care dintre izomerii de la b) prezintă izomerie geometrică și optică. Să se scrie formulele acestora.

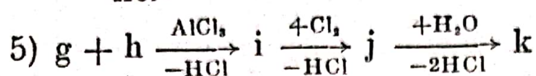
(Concursul județean 1984)

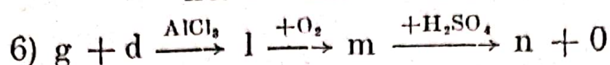
113°. Se dă schema:

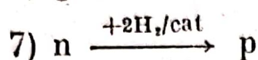


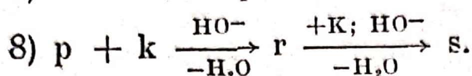

3) $3\,f \xrightarrow{t^\circ C} g$


4) $b \xrightarrow[-HCl]{+Cl_2} h$


5) $g + h \xrightarrow[-HCl]{AlCl_3} i \xrightarrow[-HCl]{+Cl_2} j \xrightarrow[-2HCl]{+H_2O} k$


6) $g + d \xrightarrow{AlCl_3} l \xrightarrow{+O_2} m \xrightarrow{+H_2SO_4} n + o$


7) $n \xrightarrow{+2H_2/cat} p$


8) $p + k \xrightarrow[-H_2O]{HO^-} r \xrightarrow[-H_2O]{+K;\ HO^-} s.$

Substanța s cu $M = 274$, conține în moleculă un singur atom de oxigen, iar numărul atomilor de hidrogen este cu două unități mai mic decît cel al atomilor de carbon.

1. Să se identifice substanțele notate cu litere (de la a...s) și să se scrie ecuațiile reacțiilor.

2. Să se precizeze dacă substanța s prezintă izomeri sterici și în caz afirmativ, să se scrie formulele structurale ale acestora.

(Concursul republican 1984)

114°. Prin clorurarea fotochimică a toluenului se obține o masă de reacție care, după îndepărtarea acidului clorhidric, conține în procente de masă 64,4% clorură de benziliden; 12,65% clorură de benzil; 19,55% feniltriclormetan și 3,5% toluen. Considerînd că întreaga cantitate de clor introdusă în proces a reacționat, se cere:

a) raportul molar toluen: clor la începutul reacției;

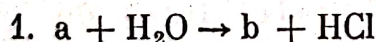
b) procentul molar de toluen nereacționat;

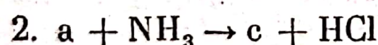
c) conversia utilă, conversia totală și randamentul;

d) volumele de clor (c.n.) și, respectiv, toluen ($d = 0{,}86$ g/cm³) necesare fabricării a 322 kg clorură de benziliden.

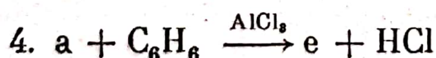
(Concursul republican 1984)

115°. Două substanțe a și a′ cu același procent de clor în moleculă (45,22%) dau următoarele reacții:


1. $a + H_2O \rightarrow b + HCl$

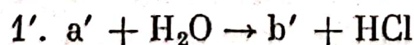

2. $a + NH_3 \rightarrow c + HCl$

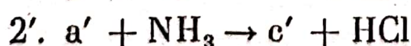

3. $a + R{-}NH_2 \rightarrow d + HCl$


4. $a + C_6H_6 \xrightarrow{AlCl_3} e + HCl$

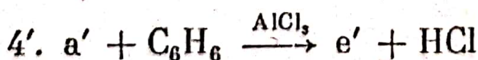

5. $a + Ar{-}ONa \rightarrow f + NaCl$

și, respectiv:


1′. $a' + H_2O \rightarrow b' + HCl$


2′. $a' + NH_3 \rightarrow c' + HCl$


3′. $a' + R{-}NH_2 \rightarrow d' + HCl$


4′. $a' + C_6H_6 \xrightarrow{AlCl_3} e' + HCl$


5′. $a' + Ar{-}ONa \rightarrow f' + NaCl$

Ştiind că numărul de atomi de carbon din substanţa a este cu o unitate mai mare decît numărul de atomi de carbon din substanţa a' se cere:

— formulele substanţelor a şi a';

— ecuaţiile reacţiilor;

— mecanismul reacţiilor 4 şi, respectiv, 5;

— să se compare bazicitatea substanţelor c, d, c' şi d' şi să se argumenteze ordinea creşterii bazicităţii acestora.

(Concursul republican 1985)

116°. Un derivat al benzenului (A) are formula empirică C_9H_{12}.

Prin bromurarea acestuia în prezenţa luminii se obţin doi monobromderivaţi cu randamente aproximativ egale. Bromurarea la întuneric în prezenţă de fier conduce, de asemenea, la doi monobromderivaţi; dacă reacţia are loc în condiţii energice se formează patru dibromderivaţi.

Determinaţi structura compusului A şi a produşilor de bromurare.

Scrieţi schema reacţiilor.

(Olimpiada Internaţională de Chimie 1979 — Leningrad)

117°. Benzaldehida şi acidul malonic reacţionează în mediu de piridină, la 60°C, conducînd după decarboxilare, la un compus A cu un randament de aproximativ 80%.

Prin hidrogenarea catalitică a 1,48 g A în prezenţă de Pt la temperatura camerei şi la presiune normală se obţine compusul B, consumîndu-se 0,25 l hidrogen. În urma reacţiei compusului B cu acid polifosforic (reacţie de tip Friedel-Crafts) se obţine compusul C, care poate fi izolat, însoţit de doi acizi carboxilici izomeri ca produşi secundari.

Aceşti produşi secundari Da şi Db se formează în cantităţi apreciabile cînd B se găseşte în concentraţie mare în mediu de reacţie şi proporţia lor scade cu scăderea concentraţiei lui B în mediu de reacţie.

Analiza elementară conduce la următoarele rezultate: 81,8%C şi 6,1%H pentru C, iar pentru Da şi Db — 76,6%C şi 6,4%H (în limitele erorilor experimentale).

O cantitate de 2,82 g Da (ca şi de Db) necesită 100 ml soluţie de hidroxid de potasiu 0,1 N pentru a fi neutralizată. Substanţa C poate fi purificată prin distilare (p.f. 243 . . . 245°C) şi are punctul de topire 40°C; densitatea sa este 1,09 g/cm³. Masa moleculară determinată prin spectroscopie de masă este 132.

Utilizînd aceste informaţii, determinaţi următoarele:

1) formula structurală a lui *A*;

2) formula structurală a lui *B*;

3) formula structurală a lui *C*;

4) formulele structurale ale lui Da şi Db;

5) o altă cale de sinteză a lui A folosind substanţe iniţiale cît mai simple posibil, cu formarea uşoară a unei legături C—C;

6) o altă cale de sinteză a lui B, utilizînd materii prime iniţiale cît mai simple, cu formarea uşoară a unei legături C—C;

7) formulele structurale ale substanţelor rezultate în urma reacţiilor:

a) C + hidroxilamină (în cataliză acidă);

b) C + bromură de fenilmagneziu (C_6H_5MgBr); urmată de hidroliză în prezenţă de acizi;

c) C + benzaldehidă + $C_2H_5O^-Na^+$.

(Olimpiada Internaţională de Chimie 1980 — Linz)

118°. Un acid carboxilic A, cu formula moleculară $C_5H_8O_2$ se prezintă sub forma a doi izomeri, *cis* — A′ și *trans* — A″. Prin hidrogenare cu H_2/Pt se obține un acid carboxilic racemic B din care se pot separa enantiomerii (+)B și (—)B. A′ și A″ reacționează rapid cu Br_2 în tetraclorură de carbon, la întuneric și la temperatura 20°C, conducînd la compusul C.

a) Care este constituția compușilor A și B?

b) Scrieți formulele de proiecție Fischer pentru enantiomerii lui B /nu se ia în considerare semnul (—) sau (+)/.

c) Cîți stereoizomeri se formează simultan la tratarea compusului A′ sau A″ cu brom?

d) Explicați mersul reacțiilor de la punctul c).

e) Reprezentați prin formule de proiecție Fischer și printr-o formulă de proiecție Newman (conformație) stereoizomerii obținuți la punctul c). Arătați care dintre ei se găsesc în relația de enantiomerie și, respectiv, diastereoizomerie.

(Olimpiada Internațională de Chimie 1980 — Linz)

119°. Un acid organic solid A, de culoare albă, conține numai carbon, hidrogen și oxigen. Pentru a-i determina masa molară aproximativă, se dizolvă 10 g acid în apă. Soluția obținută are punctul de înghețare de —2,5°C. Masa soluției este 76,1 g, iar valoarea *p*H-ului 1,4. În tabele se găsește valoarea constantei molare a depresiunii punctului de congelare a apei ca fiind egală cu 1,86 kcal/mol.
Pentru o determinare mai precisă a masei molare a acidului A, se titrează 0,120 g acid cu o soluție de hidroxid de sodiu 0,1 M. Utilizind ca indicator fenolftaleina, se consumă 23,4 cm^3 de hidroxid de sodiu pentru neutralizare.

a) Determinați masa molară și structura acidului A.

O substanță lichidă B se dizolvă în apă pentru a forma o soluție de 10%. *p*H-ul acestei soluții este în jur de 4. Substanța B nu se oxidează ușor, dar dă reacția iodoformului, în urma căreia, după acidulare și oxidare se obține acidul A. Se consumă 1,5 g iod pentru a transforma 0,10 g B.
La tratarea substanței B cu sodiu se degajă hidrogen și se formează un compus organometalic. B are masa molară de aproximativ 100 g/mol.

b) Scrieți ecuația reacției iodoformului și pe cea a reacției cu sodiu. Pentru moleculele organice utilizați formulele structurale.

Compusul C în soluție apoasă are o conductivitate care diferă foarte puțin de apa pură.
În urma hidrolizei alcaline a lui C se formează amoniac; 0,120 g din substanța C se tratează la cald cu o soluție diluată de hidroxid de sodiu și gazul format se culege în 50 cm^3 acid clorhidric cu concentrația de 0,1 mol/dm^3. Excesul de acid se titrează cu 10 cm^3 soluție de hidroxid de sodiu cu concentrația de 0,1 mol/dm^3.
Hidroliza acidă a substanței C are loc cu degajare de dioxid de carbon. Din depresiunea punctului de înghețare, masa molară a substanței C este estimată între 40 g/mol și 70 g/mol.

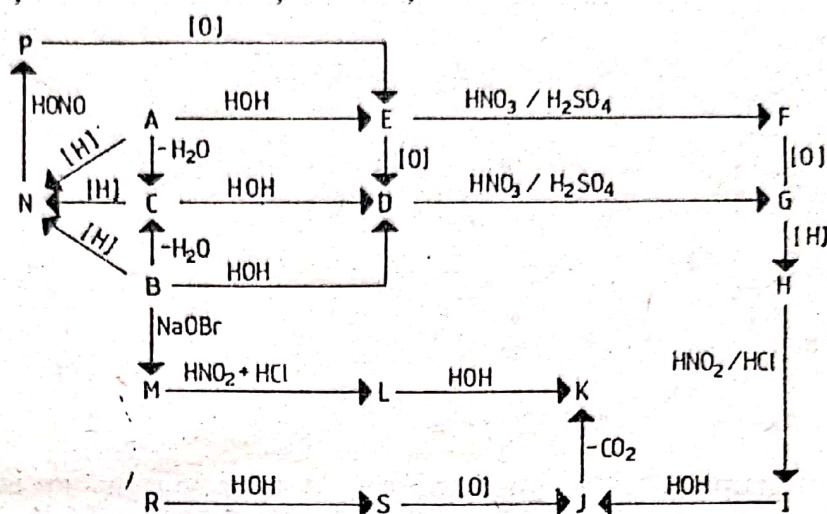
c) Determinați structura lui C. Scrieți ecuația reacției de hidroliză alcalină și, respectiv, acidă.

Dacă substanța C reacționează cu esterul etilic al acidului A în prezența unei baze puternice drept catalizator, se formează etanol și compusul D.
Compoziția substanței D este 37,5%C; 3,1%H; 21,9%N și restul oxigen; compusul este un acid.

d) Determinați structura lui D. Care este atomul de hidrogen cu caracter acid? Marcați-l cu asterix în structură.

(Olimpiada Internațională de Chimie 1982 — Stockholm)

120°. Cunoscînd că substanțele A și B sînt izomere cu formula moleculară C_7H_7NO și că substanța M are masa molară 93 g, să se determine formulele compușilor de la A la S și să se scrie ecuațiile reacțiilor.

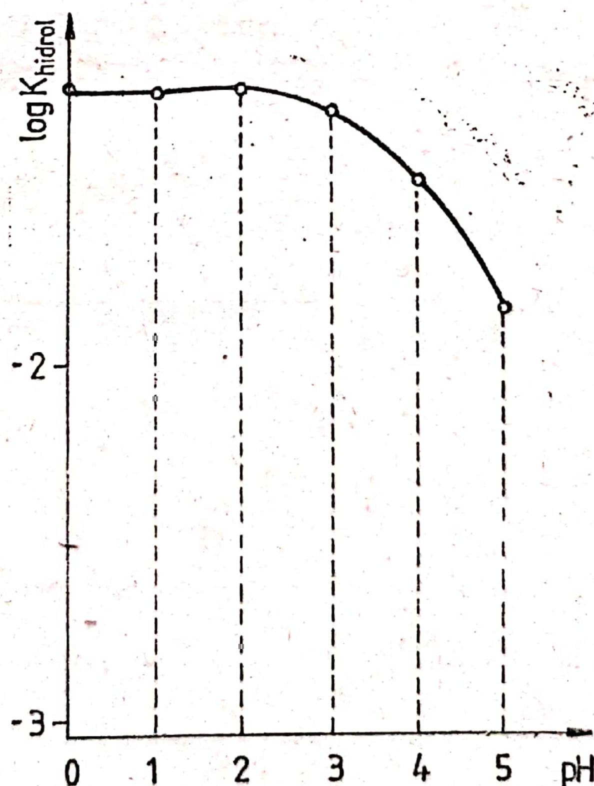


(Olimpiada Internațională de Chimie 1983 — R.S. România)

121°. Eficiența înaltă a catalizei enzimatice se datorează unei mulțimi de factori. Unul dintre aceștia constă în faptul că transformarea chimică are loc prin intermediul unui complex reactant — enzimă. În acest complex grupa funcțională din reactant se orientează într-o poziție favorabilă de reacție față de grupa cu rol de catalizator al enzimei. Pentru o tratare cantitativă a acestui efect s-au efectuat multe studii pe substanțe — model în care centrul activ al catalizatorului enzimatic a fost introdus în apropierea centrului de reacție al moleculei reactantului.

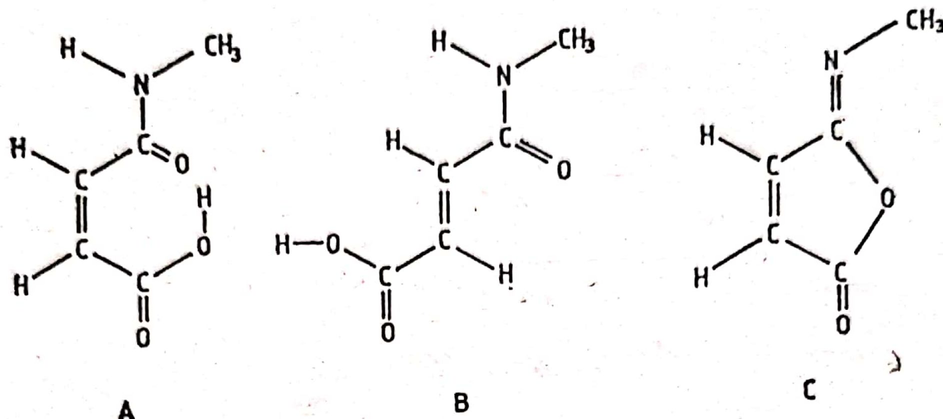
Un exemplu îl constituie hidroliza legăturii amidice din N-metilmonoamida acidului *cis*-buten-di-oic (A). Această reacție (cu cinetică de ordinul I) decurge în apă la 39°C și $pH = 2$, de un milion de ori mai rapid decît hidroliza N-metil-monoamida acidului *trans*-butendi-oic (B).

Relația între constanta de hidroliză (K_{hidrol}) și pH pentru reacția de hidroliză a monoamidei A este reprezentată grafic astfel:



În urma studiului efectuat s-au desprins următoarele observații:

a) Adaosul de apă la izoamida C determină o reacție rapidă în urma căreia se formează mai întîi A; apoi, printr-un proces mai lent, are loc hidroliza lui A.



b) Carbonul grupei amidă din compusul A este marcat cu izotopul ^{13}C, iar hidroliza acestei amide s-a efectuat în apă ce conține izotopul O^{18}, la $pH = 2$ și la temperatura de 39°C.

Diacidul format la hidroliză este izolat, transformat în sarea dublă de argint și decarboxilat complet cu brom în mediu anhidru de reacție. Dioxidul de carbon format este un amestec de molecule cu masa 44, 45, 46 și 47. Aceste molecule se formează în cantități egale.

Răspundeți la următoarele întrebări:

1) de ce viteza reacției de hidroliză a lui A este mult mai mare decît în cazul lui B?

2) explicați de ce viteza de hidroliză a lui A este independentă de pH, în intervalul $pH = 0$ și $pH = 2$ (vezi figura).;

3) de ce constanta de hidroliză a lui A scade rapid la $pH > 3$?

4) redați un mecanism detaliat al hidrolizei lui A. Indicați care etapă a reacției este determinată de viteză;

5) arătați că observațiile a) și b) sînt în concordanță cu mecanismul redat la 4.

(Olimpiada Internațională de Chimie — Olanda)

REZOLVĂRI

1°. a) Se calculează numărul de kmoli existenți inițial în cilindru:

$$\nu_1 = \frac{p_1 V}{RT_1} = \frac{806 \cdot 10^3 \cdot 30 \cdot 10^{-3}}{8\,310 \cdot 291} = 10^{-2} \text{ kmoli} = 10 \text{ moli.}$$

Scoțînd 6 moli din cilindru mai rămîn 4 moli de gaz, și presiunea din cilindru devine:

$$p_2 = \frac{\nu_2 R T_2}{V} = \frac{4 \cdot 10^{-3} \cdot 8\,310 \cdot 285}{30 \cdot 10^{-3}} = 3{,}158 \cdot 10^5 \text{ Pa.}$$

b) Densitatea în condiții normale este:

$$\rho^\circ = \frac{M}{V_{mol}}, \text{ deci masa molară a gazului va fi}$$

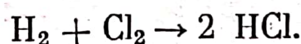
$$M = \rho^\circ \cdot V_{mol} = 1{,}25 \cdot 22{,}4 = 28 \text{ kg} \cdot \text{kmol}^{-1}.$$

Gazul fiind un monoxid înseamnă că elementul combinat cu oxigenul are masa atomică 28 — 16 = 12. Deci acesta este carbonul și gazul respectiv este monoxidul de carbon, CO.

2°. a) Se calculează numărul de kmoli de clor folosit:

$$\nu_1 = \frac{pV}{RT} = \frac{2{,}026 \cdot 10^5 \cdot 89{,}6}{8\,310 \cdot 273} = 8 \text{ kmoli clor.}$$

Ecuația reacției este:



$$H_2 + Cl_2 \rightarrow 2\ HCl.$$

Deci numărul de kmoli de hidrogen necesar este tot 8 kmoli. Masa acestui hidrogen va fi $m = 16$ kg, iar volumul în condițiile cerute, va fi:

$$V = \frac{\nu RT}{p} = \frac{8 \cdot 8\,310 \cdot 300}{300 \cdot 10^3} = 66{,}48 \text{ m}^3\ H_2.$$

b) Se calculează numărul de kmoli de hidrogen:

$$\nu_2 = \frac{pV}{RT} = \frac{150 \cdot 10^3 \cdot 266}{8\,310 \cdot 300} = 16 \text{ kmoli } H_2.$$

Deci 8 kmoli de clor sînt puși în contact cu 16 kmoli de H_2, din care vor reacționa evident numai 8 kmoli formînd 16 kmoli HCl.
Deci amestecul rezultat va fi format din 16 kmoli de HCl rezultat și 8 kmoli de H_2 nereacționat.

Masa amestecului gazos va fi:

$$m = 16 \cdot 36,5 + 8 \cdot 2 = 600 \text{ kg amestec.}$$

Compoziția în procente de masă:

600 kg amestec .... $16 \times 36,5$ kg HCl
100 kg amestec x

$$x = 97,33\% \text{ HCl}$$

600 kg amestec .... 16 kg H_2
100 kg amestec .... y

$$y = 2,67\% \; H_2.$$

Compoziția în procente volum este aceeași ca în procente de moli:

$$HCl : \frac{16}{24} \cdot 100 = 66,67\%;$$

$$H_2 : \frac{8}{24} \cdot 100 = 33,33\%.$$

c) Masa moleculară medie:

$$\overline{M} = X_{HCl} \cdot M_{HCl} + X_{H_2} \cdot M_{H_2} = \frac{16}{24} 36,5 + \frac{8}{24} \cdot 2 = 25 \text{ kg|kmol.}$$

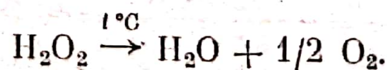
Densitatea medie (în condiții normale):

$$\overline{\rho^{\circ}} = \frac{\overline{M}}{V_{mol}} = 1,116 \text{ kg/m}^3 = 1,116 \text{ g/dm}^3.$$

Densitatea în raport cu oxigenul:

$$d = \frac{\overline{M}}{32} = 0,781.$$

3°. a) Fie m masa soluției inițiale, exprimată în g. Ea conține $\frac{34}{100} m$ g de H_2O_2 și $\frac{66}{100} m$ g de apă. Prin încălzire se descompune $\frac{1}{2} \cdot \frac{34}{100} m = \frac{17 m}{100}$ g H_2O_2 conform ecuației:



$$H_2O_2 \xrightarrow{t\,°C} H_2O + 1/2 \; O_2.$$

Se calculează cantitatea de apă formată:

34 g H_2O_2 .... 18 g H_2O
$\frac{17m}{100}$ g H_2O_2.................. x

$$x = \frac{9m}{100} \text{ g } H_2O \text{ rezultată din descompunere.}$$

Soluția finală va conține:

$$\frac{66m}{100} + \frac{9m}{100} = \frac{75m}{100} \text{ g apă și } \frac{17m}{100} \text{ g } H_2O_2 \text{ nedescompusă}$$

Masa soluției finale va fi: $\frac{75}{100}m + \frac{17m}{100} = \frac{92m}{100}$ g.

Deci concentrația procentuală a acesteia este:

$\frac{92m}{100}m$ g soluție .... $\frac{17m}{100}$ g H_2O_2

100 g soluție .... Y

$$Y = 18{,}48\%.$$

b) În soluția inițială avem:

$$\frac{34m}{100} \text{ g } H_2O_2 = \frac{34}{100}m\frac{1}{34} = \frac{m}{100} \text{ moli de } H_2O_2 \text{ și, respectiv,}$$

$$\frac{66m}{100}\frac{1}{18} = \frac{11m}{300} \text{ moli de apă.}$$

Raportul numerelor de molecule este de fapt raportul numerelor respective de moli. Deci, în soluția inițială acest raport este:

$$r_1 = \frac{11m}{300} \cdot \frac{100}{m} = \frac{11}{3}.$$

În soluția finală, a cărei masă o considerăm egală cu m_1 vom avea:

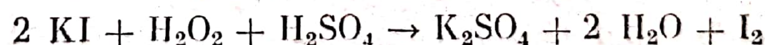
$$\frac{18{,}48\,m_1}{100} \text{ g } H_2O_2 = \frac{18{,}48}{100}m_1 \cdot \frac{1}{34} = 5{,}435 \cdot 10^{-3}\,m_1$$

moli de H_2O_2 și, respectiv, $\frac{81{,}52}{100}m_1$, g $H_2O = \frac{81{,}52}{100}m_1 \cdot \frac{1}{18} = 4{,}529 \cdot 10^{-2}\,m_1$ moli de H_2O.

Raportul respectiv va fi:

$$r_2 = 8{,}33.$$

c) Ecuația reacției este



$$2\ KI + H_2O_2 + H_2SO_4 \rightarrow K_2SO_4 + 2\ H_2O + I_2$$

Se calculează cantitatea de I_2 rezultată:

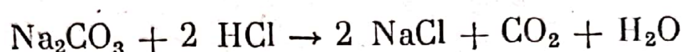
34 g H_2O_2 .... 254 g I_2

$\frac{500 \times 34}{100}$ g H_2O_2 .... X g I_2 $\quad X = 1\,270$ g I_2.

4°. Fie X numărul de moli de H_2SO_4 consumat. Atunci $2X$ este numărul de moli de apă formată. Masa apei în soluția finală va fi:
$m_1 = 95$ g (din soluția de acid) $+ 96$ g (din apă de barită) $+ 36X$ g (rezultată din reacție) $= (191 + 36X)$ g apă.

Acidul neconsumat $m_2 = 5 - 98X$ g H_2SO_4.
Masa soluției finale $m_3 = 191 + 36X + 5 - 98X = 196 - 62X$.
Punînd condiția că soluția are concentrația 1,56% (procente de masă) avem:

$$\begin{array}{ll} (196-62X) \text{ g soluție} \ldots\ldots\ldots & (5-98X) \text{ g } H_2SO_4 \\ 100 \text{ g soluție} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots & 1{,}56 \text{ g } H_2SO_4 \end{array}$$



$$100\,(5-98X) = 1{,}56\,(196-62X).$$

Rezolvînd ecuația se obține: $X = 0{,}02$ moli H_2SO_4 consumat.
Deci s-au consumat tot 0,02 moli de $Ba(OH)_2$.
Masa de hidroxid de bariu pur consumat este: $m = 0{,}02 \times 171{,}3 = 3{,}426$ g.

5°. a) Se calculează numărul de moli de CO_2 degajat la tratarea sodei cu HCl:

$$Na_2CO_3 + 2\ HCl \rightarrow 2\ NaCl + CO_2 + H_2O$$

$$pV = \nu RT;\quad \nu = \frac{pV}{RT} = \frac{1{,}013\cdot 10^5\ \text{Pa}\cdot 100{,}8\cdot 10^{-6}\ \text{m}^3}{8\,310\ \frac{\text{J}}{\text{kmol}\cdot\text{K}}\cdot 273\ \text{K}} \begin{array}{l} = 4{,}5\cdot 10^{-6}\ \text{kmol}; \\ = 4{,}5\cdot 10^{-3}\ \text{mol}. \end{array}$$

Se calculează masa molară a cristalohidratului $Na_2CO_3 \cdot nH_2O$

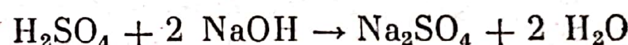
$$\nu = \frac{m_1}{M_1};\quad M_1 = \frac{m_1}{\nu} = \frac{1{,}287}{4{,}5\cdot 10^{-3}} = 286\ \text{g mol}^{-1}.$$

$$106 + n_1 \cdot 18 = 286.$$

Rezolvînd se obține: $n_1 = 10$.
Deci proba respectivă este un cristalohidrat cu formula $Na_2CO_3 \cdot 10H_2O$.

b) Se calculează numărul de echivalenți de NaOH cu care se neutralizează excesul de acid sulfuric:

$$\begin{array}{ll} 1000\ \text{cm}^3 \text{ soluție} \ldots\ldots\ldots\ldots & 0{,}1 \text{ echivalenți} \\ 50\ \text{cm}^3 \text{ soluție} \ldots\ldots\ldots\ldots & X \end{array}$$



$$X = 5\cdot 10^{-3} \text{ echivalenți NaOH} = 5\cdot 10^{-3} \text{ moli NaOH}.$$

Ecuația reacției de neutralizare este:

$$H_2SO_4 + 2\ NaOH \rightarrow Na_2SO_4 + 2\ H_2O$$

Deci numărul de moli de acid sulfuric în exces este jumătate din numărul de moli de NaOH adică $2{,}5 \cdot 10^{-3}$ moli.

Se calculează numărul de moli de H_2SO_4 în soluția cu care s-a tratat proba de sodă:

$$\begin{array}{ll} 1000\ \text{cm}^3 \text{ sol} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots & 0{,}2 \text{ echivalenți} = 0{,}1 \text{ moli } H_2SO_4 \\ 50\ \text{cm}^3 \text{ sol} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots & Y \end{array}$$



$$Y = 5\cdot 10^{-3} \text{ moli } H_2SO_4.$$

Deci în reacția sodei cu acidul sulfuric:

$$Na_2CO_3 + H_2SO_4 \rightarrow Na_2SO_4 + H_2O + CO_2$$

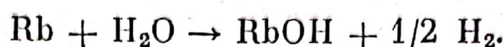
s-au consumat $5 \cdot 10^{-3} - 2,5 \cdot 10^{-3} = 2,5 \cdot 10^{-3}$ moli H_2SO_4. Conform ecuației, proba de sodă a conținut tot $2,5 \cdot 10^{-3}$ moli $Na_2CO_3 \cdot n_2H_2O$. Masa molară a cristalohidratului este:

$$M_2 = \frac{0,715}{2,5 \cdot 10^{-3}} = 286 \text{ g/mol.}$$

Rezultă ca și la punctul a) că formula cristalohidratului este $Na_2CO_3 \cdot 10H_2O$, adică cele două probe au aceeași compoziție.

6°. a) Fie A masa atomică a metalului Me.

Reacțiile cu apa:



$$Rb + H_2O \rightarrow RbOH + 1/2\ H_2.$$



$$Me + H_2O \rightarrow MeOH + 1/2\ H_2.$$

Numărul de moli de hidrogen degajat este 0,1 moli.

Notînd cu X și Y numărul de moli de rubidiu și, respectiv, de metal Me avem:

$$85,5\ X + AY = 4,6$$

$$X + Y = 0,2.$$

Rezolvînd sistemul se obține:

$$Y = \frac{12,5}{85,5 - A}$$

Y fiind numărul de moli de metal Me trebuie să îndeplinească două condiții: prima — să fie pozitiv adică $A < 85,5$ și a doua să fie strict mai mic decît 0,2 (care este numărul total de moli de metale alcaline din aliaj).

Deci: $Y < 0,2$ sau $\frac{12,5}{85,5 - A} < 0,2.$

Rezolvînd această inegalitate se obține condiția $A < 23$.

Această condiție este satisfăcută numai de litiu care are masa atomică 7. Dacă s-ar lua $A = 23$ (pentru sodiu), atunci $Y = 0,2$ și deci „aliajul" ar fi format numai din metalul Me și nu ar putea conține și rubidiu, deoarece numărul total de moli de metale alcaline din aliaj este chiar 0,2. Deci celălalt metal alcalin este litiul.

b) Revenind la sistemul de ecuații de la punctul a) avem:

$$85,5X + 7Y = 4,6$$

$$X + Y = 0,2$$

Rezolvînd sistemul se obține: $X = 0,0408$ moli Rb.

$Y = 0,1592$ moli Li.

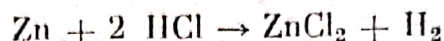
Compoziția aliajului în procente de masă este:

$$Rb: \frac{0,0408 \times 85,5}{4,6} \cdot 100 = 75,83\%$$

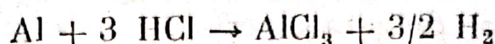
$$Li: \frac{0,1592 \times 7}{4,6} \cdot 100 = 24,23\%.$$

7°. Dintre elementele componente ale aliajului cu acidul clorhidric reacționează numai Al și Zn, iar cu soluția de NaOH reacționează Al, Zn și Si. Cuprul nu reacționează nici cu soluția de HCl nici cu cea de NaOH.

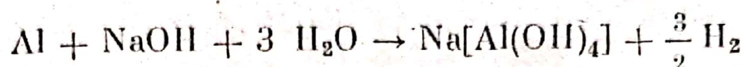
Ecuațiile reacțiilor chimice:



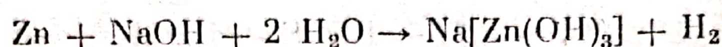
$$Zn + 2\ HCl \rightarrow ZnCl_2 + H_2$$



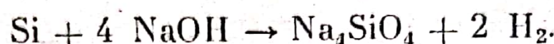
$$Al + 3\ HCl \rightarrow AlCl_3 + 3/2\ H_2$$



$$Al + NaOH + 3\ H_2O \rightarrow Na[Al(OH)_4] + \frac{3}{2} H_2$$



$$Zn + NaOH + 2\ H_2O \rightarrow Na[Zn(OH)_3] + H_2$$



$$Si + 4\ NaOH \rightarrow Na_4SiO_4 + 2\ H_2.$$

Numărul de moli de hidrogen degajați în reacția cu HCl este

$$n_1 = \frac{843 \cdot 10^{-3}}{22,4} = 37,62 \cdot 10^{-3} \text{ moli.}$$

În reacția cu NaOH se degajă $n_2 = \frac{0,517}{22,41} = 23,07 \cdot 10^{-3}$ moli H_2. Deoarece proba de aliaj care a fost tratată cu NaOH are masa 0,500 g, adică numai jumătate din cea a probei tratate cu HCl, numărul de moli de H_2 care s-ar fi degajat din aceeași cantitate de aliaj, de 1,000 g este $n_3 = 2 \cdot 23,07 \cdot 10^{-3} = 46,14 \cdot 10^{-3}$ mol H_2.

Diferența $\Delta n = n_3 - n_1 = 8,52 \cdot 10^{-3}$ moli este evident hidrogenul degajat în reacția siliciului cu NaOH (acesta nereacționînd cu HCl). Deci numărul de moli de Si în 1,000 g aliaj este $\frac{1}{2} \cdot 8,52 \cdot 10^{-3} = 4,26 \cdot 10^{-3}$ moli Si (conform ecuației reacției chimice).

Masa de Si este $m_{Si} = 4,26 \cdot 10^{-3} \cdot 28 = 0,119$ g.
Reziduul rămas după tratarea probei cu HCl este format din Cu și Si. Deci masa cuprului din probă este:

$$m_{Cu} = 0,170 - 0,119 = 0,051 \text{ g.}$$

Fie X masa în g a aluminiului și, respectiv, Y cea a Zn din probă. Rezultă

$$X + Y = 1,000 - (0,170) = 0,830.$$

Se exprimă conform ecuațiilor reacțiilor chimice volumele de H_2 rezultate din reacția Al și, respectiv, Zn cu HCl:

27 g Al .... $1,5 \cdot 22,4$ l H_2
X g Al .... V_1 $\qquad V_1 = \frac{33,6\ X}{27,0}$

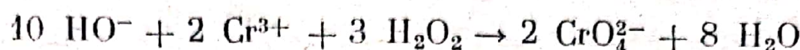
65 g Zn .... 22,4 l H_2
Y g Zn .... V_2 $\qquad V_2 = \frac{22,4\ Y}{65}$

Deci: $\begin{cases} X + Y = 0,830 \\ \frac{33,6\ X}{27,0} + \frac{22,4\ Y}{65} = 0,843 \end{cases}$ Rezolvînd sistemul se obține: $m_{Al} = 0,619$ g Al, $m_{Zn} = 0,211$ g Zn.

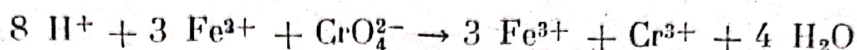
Compoziţia aliajului în procente de masă:

% Al = 61,9%; % Zn = 21,1%; % Cu = 5,1% şi % Si = 11,9%.

8°. a) Coeficienţii se stabilesc prin metoda redox



$$10\ HO^- + 2\ Cr^{3+} + 3\ H_2O_2 \rightarrow 2\ CrO_4^{2-} + 8\ H_2O$$



$$8\ H^+ + 3\ Fe^{2+} + CrO_4^{2-} \rightarrow 3\ Fe^{3+} + Cr^{3+} + 4\ H_2O$$



$$8\ H^+ + 5\ Fe^{2+} + MnO_4^- \rightarrow 5\ Fe^{3+} + Mn^{2+} + 4\ H_2O$$

b) Numărul de moli de MnO_4^- utilizaţi pentru titrare:

1000 cm³ soluţie .... 0,020 moli MnO_4^-
17,20 cm³ soluţie X

$$X = \frac{17,20 \cdot 0,02}{1\,000} = 3,44 \cdot 10^{-4} \text{ moli } MnO_4^-.$$

Excesul de ioni Fe^{2+} este de 5 ori mai mare (conform ecuaţiei reacţiei), adică $5 \cdot 3,44 \cdot 10^{-4} = 1,72 \cdot 10^{-3}$ moli Fe^{2+}.
Numărul de moli de Fe^{2+} în soluţia adăugată va fi:

1000 cm³ soluţie .... 0,1 moli Fe^{2+}
25 cm³ soluţie .... Y

$$Y = 2,5 \cdot 10^{-3} \text{ moli } Fe^{2+}.$$

Deci cu ionii CrO_4^{2-} au reacţionat:

$$2,5 \cdot 10^{-3} - 1,72 \cdot 10^{-3} = 7,8 \cdot 10^{-4} \text{ moli } Fe^{2+}.$$

Din ecuaţia reacţiei respective rezultă că numărul de moli de CrO_4^{2-} este $\frac{1}{3} \cdot 7,8 \cdot 10^{-4} = 2,6 \cdot 10^{-4}$. Deoarece pentru această analiză s-a luat numai o zecime din soluţia obţinută la dizolvarea aliajului înseamnă că în întreaga cantitate de aliaj se găsesc $10 \cdot 2,6 \cdot 10^{-4} = 2,6 \cdot 10^{-3}$ moli Cr $= 2,6 \cdot 10^{-3} \cdot 52 = 0,1352$ g Cr. Rezultă că proba conţine $m_{Cr} = 0,1352$ g Cr.
Se calculează acum cantitatea de crom existentă în cei 200 cm³ soluţie supusă electrolizei:

500 cm³ soluţie .... 0,1352 g Cr
200 cm³ soluţie X

$$X = 5,408 \cdot 10^{-2} \text{ g Cr}.$$

Echivalentul cromului Cr^{+3} este $\frac{52}{3}$ g şi pentru depunerea acestuia prin electroliză sînt necesari 96 500 C. Deci se poate calcula numărul de coulombi consumaţi pentru depunerea cromului:

$\frac{52}{3}$ g Cr .... 96 500 C
$5,408 \cdot 10^{-2}$ g Cr .... Q_1

$$Q_1 = 301,08 \text{ C}.$$

Numărul total de coulombi consumaţi în electroliză

$$Q_t = It = 2 \times 14,5 \times 60 = 1740 \text{ C},$$

din care consumați util:

$$Q_u = \frac{90}{100} \cdot 1740 = 1566 \text{ C}.$$

Deci pentru depunerea argintului și cuprului s-au consumat:

$$Q_2 = Q_u - Q_1 = 1566 - 301{,}08 = 1264{,}92 \text{ C}.$$

Masa totală a cuprului și argintului din proba analizată este:

$$m_{Cu+Ag} = 1{,}500 - m_{Cr} = 1{,}3648 \text{ g}$$

din care în soluția supusă electrolizei se găsesc:

$$m'_{Cu+Ag} = \frac{2}{5} m_{Cu+Ag} = 0{,}5459 \text{ g}.$$

Fie X masa în g a Ag și, respectiv, Y cea a cuprului din soluția supusă electrolizei:

$$X + Y = 0{,}5459.$$

Echivalentul argintului Ag^+ este 107,87 și deci pentru depunerea argintului s-au consumat

$$\begin{array}{rcl} 107{,}87 \text{ g Ag} & \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots & 96\,500 \text{ C} \\ X \text{ g Ag} & \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots & Q_3 \\ \hline \end{array}$$

$$Q_3 = \frac{96\,500}{107{,}87} X \text{C}.$$

Echivalentul cuprului Cu^{2+} este $\frac{63{,}55}{2}$ și pentru depunerea celor Y g Cu s-au consumat:

$$\begin{array}{rcl} \frac{63{,}55}{2} \text{ g Cu} & \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots & 96\,500 \text{ C} \\ Y \text{ g Cu} & \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots & Q_4 \\ \hline \end{array}$$

$$Q_4 = \frac{2 \cdot 96\,500 \cdot Y}{63{,}550}.$$

Dar $Q_3 + Q_4 = Q_2$. Deci:

$$\begin{cases} X + Y = 0{,}5459 \\ \dfrac{96\,500\,X}{107{,}87} + \dfrac{2 \cdot 96\,500\,Y}{63{,}55} = 1264{,}92. \end{cases}$$

Rezolvînd sistemul se obține:

$$X = 0{,}1834 \text{ g Ag}; \ Y = 0{,}3625 \text{ g Cu}.$$

Deci în probă se găsesc:

$$m_{Ag} = \frac{5}{2} \cdot 0{,}1834 = 0{,}4585 \text{ g Ag};$$

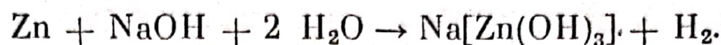
$$m_{Cu} = \frac{5}{2} \cdot 0{,}3625 = 0{,}90630 \text{ g Cu};$$

$$m_{Cr} = 0{,}1352 \text{ g Cr}.$$

Compoziţia aliajului în procente de masă este:

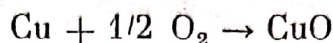
$$\% \text{ Ag} = 30{,}57\%; \quad \% \text{ Cu} = 60{,}42\%; \quad \% \text{ Cr} = 9{,}01\%.$$

9°. a) Cu hidroxidul de sodiu reacţionează numai zincul:



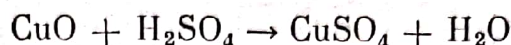
$$Zn + NaOH + 2\ H_2O \rightarrow Na[Zn(OH)_3] + H_2.$$

Partea nedizolvată este cuprul care se dizolvă în acid sulfuric în prezenţă de oxigen. Reacţia poate fi considerată ca avînd loc în două etape:



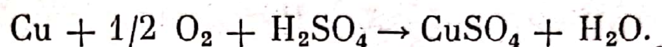
$$Cu + 1/2\ O_2 \rightarrow CuO$$

şi



$$CuO + H_2SO_4 \rightarrow CuSO_4 + H_2O$$

sau reacţia globală



$$Cu + 1/2\ O_2 + H_2SO_4 \rightarrow CuSO_4 + H_2O.$$

b) Numărul de moli de Zn din alamă este egal cu numărul de moli de H_2 degajaţi (conform ecuaţiei reacţiei), adică 0,5 moli = 32,5 g Zn.

Se calculează cantitatea de H_2SO_4 existentă în cele 40 g soluţie 49%:

$$\frac{\begin{array}{l} 100 \text{ g soluţie} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots 49 \text{ g } H_2SO_4 \\ 40 \text{ g soluţie} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots X \text{ g } H_2SO_4 \end{array}}{X = 19{,}6 \text{ g } H_2So_4.}$$

Deci:

$$\frac{\begin{array}{l} 64 \text{ g Cu} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots 98 \text{ g } H_2SO_4 \\ X \text{ g Cu} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots 19{,}6 \text{ g } H_2SO_4 \end{array}}{Y = 12{,}8 \text{ g Cu.}}$$

Total alamă: 32,5 + 12,8 = 45,3. Deci compoziţia este:

$$\% \text{ Zn} = \frac{32{,}5}{45{,}3} \cdot 100 = 71{,}74\%;$$

$$\% \text{ Cu} = \frac{12{,}8}{45{,}3} \cdot 100 = 28{,}26\%.$$

c) Cantitatea teoretică de $CuSO_4 \cdot 5\ H_2O$ ce se poate obţine este aceea cantitate care conţine cele 12,8 g Cu din alamă.

Masa molară a cristalohidratului este 250. Rezultă:

$$\frac{\begin{array}{l} 250 \text{ g } CuSO_4 \cdot 5\ H_2O \ldots\ldots\ldots\ldots 64 \text{ g Cu} \\ X \text{ g } CuSO_4 \cdot 5\ H_2O \ldots\ldots\ldots\ldots 12{,}8 \text{ g Cu} \end{array}}{X = 50 \text{ g } CuSO_4 \cdot 5\ H_2O}$$

10°. Se calculează cantitatea de $KAl(SO_4)_2$ existent în soluţia iniţială, de concentraţie 5,5%:

$$m_1 = \frac{5{,}5}{100} \cdot 320 = 17{,}6 \text{ g.}$$

Deci soluția inițială conține 17,6 g $KAl(SO_4)_2$ și 320—17,6 = 302,4 g apă. După evaporarea celor 160 g apă mai rămîn $m_2 = 142{,}4$ g apă.
Masa molară a $KAl(SO_4)_2$: $M_1 = 258$
Masa molară a cristalohidratului $KAl(SO_4)_2 \cdot 12H_2O$: $M_2 = 474$.
Fie X numărul de grame de cristalohidrat care se depune. Se calculează cantitatea m_3 de $KAl(SO_4)_2$ depusă și, respectiv, m_4 de apă depusă în cristalohidrat:

474 g $KAl(SO_4)_2 \cdot 12H_2O$ .... 258 g $KAl(SO_4)_2$
X g $KAl(SO_4)_2 \cdot 12H_2O$ .... m_3

$$m_3 = \frac{258}{474} X \text{ g } KAl(SO_4)_2 \text{ depus.}$$

474 g $KAl(SO_4)_2$ .... 216 g H_2O
X g $KAl(SO_4)_2$ .... m_4 g H_2O

$$m_4 = \frac{216}{474} X \text{ g } H_2O \text{ depusă.}$$

Deci după depunerea cristalohidratului în soluție mai rămîn:

$$m_5 = \left(17{,}6 - \frac{258}{474} X\right) \text{ g } KAl(SO_4)_2$$

și

$$m_6 = \left(142{,}4 - \frac{216}{474} X\right) \text{ g } H_2O.$$

Masa totală a soluției rămase după depunerea cristalohidratului:

$$m_7 = 17{,}6 - \frac{258}{474} X + 142{,}4 - \frac{216}{474} X = (160 - X) \text{ g soluție.}$$

Se pune condiția că soluția conține 5,5% $KAl(SO_4)_2$:

$(160 - X)$ g soluție .... $\left(17{,}6 - \frac{258}{474} X\right)$ g $KAl(SO_4)_2$
100 g soluție .... 5,5 g $KAl(SO_4)_2$

$$5{,}5(160 - X) = 100\left(17{,}6 - \frac{258}{474} X\right).$$

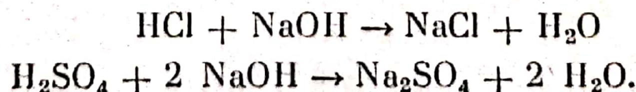
Rezolvînd ecuația se obține: $X = 17{,}98$ g de cristalohidrat $KAl(SO_4)_2 \cdot 12H_2O$.

11°. Se calculează numărul de moli de NaOH utilizați la neutralizare:

1000 cm^3 soluție .... 0,5 moli NaOH
160 cm^3 soluție .... n moli NaOH

$$n = 0{,}08 \text{ moli NaOH.}$$

Fie X și Y numărul de moli de HCl și, respectiv, de H_2SO_4 din soluția inițială supusă neutralizării. Ecuațiile reacțiilor sînt:



$$HCl + NaOH \rightarrow NaCl + H_2O$$
$$H_2SO_4 + 2\ NaOH \rightarrow Na_2SO_4 + 2\ H_2O.$$

Conform acestor ecuații numărul de moli de NaOH consumați în prima reacție este tot X, iar în cea de a doua este $2\ Y$.

Deci:

$$X + 2\ Y = 0{,}08.$$

Rezultă din reacție X moli $NaCl = 58{,}5\ X$ g NaCl și Y moli $Na_2SO_4 = 142\ Y$ g Na_2SO_4.

Se alcătuiește sistemul de ecuații:

$$\begin{cases} X + 2\ Y = 0{,}08 \\ 58{,}5\ X + 142\ Y = 5. \end{cases}$$

Rezolvînd acest sistem se obține:

$$X = 0{,}0544 \text{ moli HCl};$$

$$Y = 0{,}0128 \text{ moli } H_2SO_4.$$

Cum aceste cantități se găsesc în 100 cm^3 soluție înseamnă că la un litru soluție inițială avem:

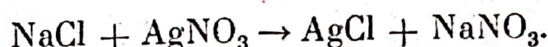
$$HCl : 0{,}544 \text{ mol/l};$$

$$H_2SO_4 : 0{,}128 \text{ mol/l}.$$

12°. a) Fie m masa celor două soluții care se amestecă. Cantitatea de $AgNO_3$ pur va fi:

$$m_1 = \frac{3{,}4 \cdot m}{100}.$$

Ecuația reacției chimice:



$$NaCl + AgNO_3 \rightarrow AgCl + NaNO_3.$$

Se calculează masa de NaCl care a reacționat:

$$\begin{array}{lcl} 58{,}5 \text{ g NaCl} & \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots & 170 \text{ g } AgNO_3 \\ X \text{ g NaCl} & \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots & \dfrac{3{,}4\ m}{100} \end{array}$$

$$X = \frac{58{,}5 \cdot 3{,}4\ m}{100 \cdot 170} \text{ g NaCl în cele } m \text{ g soluție de NaCl.}$$

Deci concentrația acestei soluții de NaCl este:

$$\begin{array}{lcl} m \text{ g soluție} & \ldots\ldots\ldots\ldots & \dfrac{58.5 \cdot 3{,}4\ m}{100 \cdot 170} \text{ g NaCl} \\ 100 \text{ g soluție} & \ldots\ldots\ldots\ldots & Y \quad \text{ g NaCl} \end{array}$$

$$Y = \frac{58{,}5 \cdot 3{,}4}{170}\ \% = 1{,}17\%\ NaCl.$$

b) Se calculează cantitatea de $NaNO_3$ rezultată:

$$\begin{array}{lcl} 170 \text{ g } AgNO_3 & \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots & 85 \text{ g } NaNO_3 \\ \frac{3{,}4\, m}{100} \text{ g } AgNO_3 & \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots & X \text{ g } NaNO_3 \end{array}$$

$$X = \frac{3{,}4 \cdot 85 \cdot m}{100 \cdot 170} \text{ g } NaNO_3.$$

Se calculează, de asemenea cantitatea, de AgCl care precipită:

$$\begin{array}{lcl} 170 \text{ g } AgNO_3 & \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots & 143{,}5 \text{ g AgCl} \\ \frac{3{,}4\, m}{100} \text{ g } AgNO_3 & \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots & Y \text{ g AgCl} \end{array}$$

$$Y = \frac{143{,}5 \cdot 3{,}4\, m}{100 \cdot 170}.$$

Masa soluţiei obţinute este:

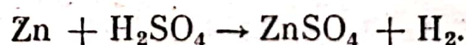
$$m_2 = 2\,m - \frac{143{,}5 \cdot 3{,}4\, m}{100 \cdot 170} = 1{,}9713\ m \text{ g soluţie } NaNO_3.$$

Concentraţia procentuală a acesteia este:

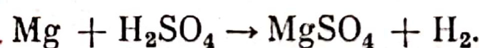
$$\begin{array}{lcl} 1{,}9713\ m \text{ g soluţie} & \ldots\ldots\ldots\ldots & \frac{3{,}4 \cdot 85\, m}{100 \cdot 170} \\ 100 \text{ g soluţie} & \ldots\ldots\ldots\ldots & Z \text{ g } NaNO_3 \end{array}$$

$$Z = \frac{3{,}4 \cdot 85 \cdot m}{1{,}9713 \cdot 170\, m} = 0{,}862\%\ NaNO_3.$$

13°. a) Fie X numărul de moli de Zn şi Y numărul de moli de Mg din aliaj. Ecuaţiile reacţiilor chimice:



$$Zn + H_2SO_4 \rightarrow ZnSO_4 + H_2.$$



$$Mg + H_2SO_4 \rightarrow MgSO_4 + H_2.$$

Deci numărul de moli de hidrogen rezultaţi din prima reacţie este X, iar din cea de a doua Y.
Rezultă sistemul de ecuaţii:

$$\begin{cases} 65\ X + 24\ Y = 17{,}8 \\ X + Y = \frac{8{,}96}{22{,}4}. \end{cases}$$

Rezolvînd sistemul se obţine:

$$X = 0{,}2 \text{ moli Zn} = 13 \text{ g}$$

$$Y = 0{,}2 \text{ moli Mg} = 4{,}8 \text{ g Mg}.$$

Deci aliajul este echimolecular.

Compoziţia în procente de masă:

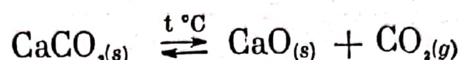
$$\% Zn = \frac{13}{17,8} \cdot 100 = 73,03\%$$

$$\% Mg = \frac{4,8}{17,8} \cdot 100 = 26,97\%.$$

b) Numărul de moli de H_2SO_4 consumat în prima reacţie este 0,2 iar în cea de a doua tot 0,2 adică în total se consumă 0,4 moli H_2SO_4 = 39,2 g H_2SO_4.

c) Rezultă din prima reacţie 0,2 moli $ZnSO_4$ = 32,2 g $ZnSo_4$. Din cea de a doua reacţie rezultă 0,2 moli $MgSO_4$ = 24 g $MgSO_4$.

14°. a) La descompunerea termică a carbonatului de calciu se obţine oxid de calciu şi dioxid de carbon:



$$CaCO_{3(s)} \overset{t\,°C}{\rightleftharpoons} CaO_{(s)} + CO_{2(g)}$$

Reacţia este reversibilă, dar CO_2 fiind gaz, părăseşte sistemul şi practic reacţia poate fi total deplasată spre dreapta.

b) Se calculează masele molare:

$$M_{CaCO_3} = 100; \quad M_{CaO} = 56.$$

Din volumul de CO_2 rezultat se calculează masa de $CaCO_3$ descompus şi masa de CaO format:

100 g $CaCO_3$ .... 22,4 l CO_2
X g $CaCO_3$ .... 5,6 l CO_2

X = 25 g $CaCO_3$ (pur).

56 g CaO .... 22,4 CO_2
Y g CaO .... 5,6 CO_2

Y = 14 g CaO.

Reziduul solid obţinut la calcinare este format din CaO rezultat şi impurităţile care nu se descompun termic. Deci masa impurităţilor este $m = 16 - 14 = 2$ g impurităţi.

Deci proba de calcar supusă calcinării conţinea 25 g $CaCO_3$ pur şi 2 g impurităţi adică în total 27 g calcar.

c) Compoziţia procentuală a calcarului (procente de masă):

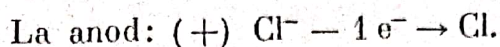
$$\% CaCO_3 = \frac{25}{27} 100 = 92,59\%;$$

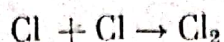
$$\% \text{ impurităţi} = \frac{2}{27} \cdot 100 = 7,41\%.$$

15°. a) Mecanismul electrolizei este destul de complex, dar rezultatul final al electrolizei poate fi reprezentat prin următoarele reacţii:

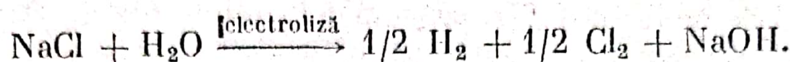
La catod (—): $H_3O^+ + 1e^- \rightarrow H_2O + H$ — reacţie primară

$H + H \rightarrow H_2$ — reacţie secundară.


La anod: $(+)\ Cl^- - 1\,e^- \rightarrow Cl.$ — reacție primară


$Cl + Cl \rightarrow Cl_2$ — reacție secundară.

Deci în soluție rămîn ionii HO^- și Na^+ adică se acumulează NaOH.
Reacția globală a procesului de electroliză este:


$$NaCl + H_2O \xrightarrow{\text{electroliză}} 1/2\ H_2 + 1/2\ Cl_2 + NaOH.$$

b) Se calculează cantitatea de sare pură în soluția inițială:

$$m_1 = \frac{1000 \cdot 58,5}{100} = 585 \text{ kg NaCl}$$

și cea finală:

$$m_2 = \frac{1000 \cdot 46,8}{100} = 468 \text{ kg.}$$

Deci cantitatea de NaCl descompusă este:

$$m_3 = m_1 - m_2 = 117 \text{ kg NaCl} = 2 \text{ kmoli NaCl.}$$

Din reacția globală a procesului de electroliză rezultă că se formează tot 2 kmoli NaOH = 80 kg NaOH.

c) La catod rezultă 1 kmol $H_2 = 22,4\ m^3$ (c.n.).

La anod rezultă 1 kmol $Cl_2 = 22,4\ m^3\ Cl_2$ (c.n.).

d) Conform reacțiilor de la electrozi rezultă că pentru descompunerea unei „molecule" de NaCl se transferă un electron, deci echivalentul acestei sări este egal cu molul. Rezultă că:

1 mol NaCl .... 96 500 C

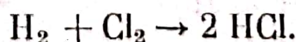
2000 moli NaCl .... X C

$X = 1,93 \cdot 10^8$C consumați util în procesul de electroliză. Randamentul fiind 80% sînt necesari:

$$Q_{total} = 1,93 \cdot 10^8 \cdot \frac{100}{80} = 2,4125 \cdot 10^8 \text{ C}$$

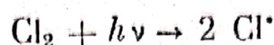
$$Q = It \text{ deci } t = \frac{Q}{I} = \frac{2,4125 \cdot 10^8}{500} = 4,825 \cdot 10^5 \text{ s sau } t = 134 \text{ ore.}$$

16°. a) Pentru mecanismul electrolizei vezi problema **15°**.
Sinteza acidului clorhidric:


$$H_2 + Cl_2 \rightarrow 2\ HCl.$$

Este o reacție în lanț care poate fi reprezentată schematic prin următoarele etape:

— etapa de inițiere are loc sub acțiunea luminii:



$$Cl_2 + h\nu \rightarrow 2\ Cl^{\bullet}$$

adică are loc prin absorbția energiei luminoase scindarea moleculei de clor în atomi (radicali liberi).

— etapa de propagare:



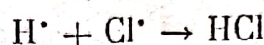
$$Cl^{\bullet} + H_2 \rightarrow HCl + H^{\bullet}$$



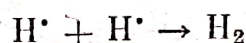
$$H^{\bullet} + Cl_2 \rightarrow HCl + Cl^{\bullet}$$

....

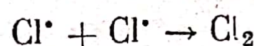
— etapa de întrerupere a lanțului:



$$H^{\bullet} + Cl^{\bullet} \rightarrow HCl$$

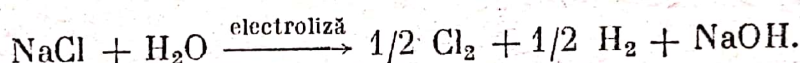


$$H^{\bullet} + H^{\bullet} \rightarrow H_2$$



$$Cl^{\bullet} + Cl^{\bullet} \rightarrow Cl_2$$

b) Ecuația globală a reacției de electroliză este:



$$NaCl + H_2O \xrightarrow{\text{electroliză}} 1/2\ Cl_2 + 1/2\ H_2 + NaOH.$$

Rezultă că:

$$58{,}5 \text{ g NaCl} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \frac{1}{2} \cdot 22{,}4 \text{ l } Cl_2$$

$$X \text{ g NaCl} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots 56 \text{ l } Cl_2$$

$X = 292{,}5$ g NaCl cu un randament de descompunere electrolitică de 100%. Dar randamentul fiind doar 80% rezultă că este necesară o cantitate de NaCl:

$$m = 292{,}5 \cdot \frac{100}{80} = 365{,}625 \text{ g NaCl necesară cu } \eta = 80\%.$$

c) Conform ecuației reacției de sinteză a HCl volumul de HCl obținut este dublu față de volumul clorului utilizat, deci, în condiții normale de presiune și temperatură, se obține un volum de 112 l HCl gazos.

Considerînd HCl ca un gaz perfect avem:

$$\frac{p_0V_0}{T_0} = \frac{pV}{T} \Rightarrow V = \frac{p_0V_0T}{T_0p} = \frac{1{,}01325 \cdot 10^5 Pa \cdot 112 l \cdot 300 \text{ K}}{273 \text{ K} \cdot 4{,}053 \cdot 10^6 \text{ Pa}}$$

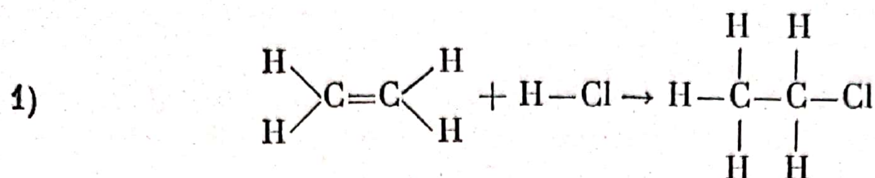
$V_{HCl} = 3{,}077$ l HCl măsurat la 27°C și 4 053 kPa.

17°. Variația de entalpie într-o reacție chimică este egală cu diferența dintre suma energiilor tuturor legăturilor care se desfac și suma energiilor tuturor legăturilor care se formează:

$$\Delta H_r = \sum \varepsilon_{\substack{\text{legături desfăcute} \\ \text{(reactanți)}}} - \sum \varepsilon_{\substack{\text{legături formate} \\ \text{(produși de reacție)}}}$$

Pentru a pune în evidență mai clar legăturile care se desfac și cele care se formează, se scriu ecuațiile reacțiilor utilizînd formule structurale.

1)

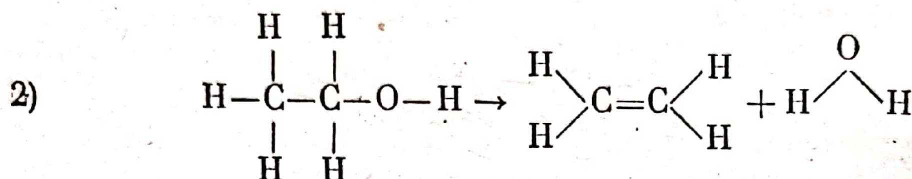


$$\Delta H^0_{r_1} = [4\varepsilon_{C-H} + \varepsilon_{C=C} + \varepsilon_{H-Cl}] - [5\varepsilon_{C-H} + \varepsilon_{C-C} + \varepsilon_{C-Cl}].$$

Înlocuind valorile numerice ale energiilor de legătură din tabel se obține:

$\Delta H^0_{r_1} = -48{,}5$ kJ. Reacția este slab exotermă.

2)

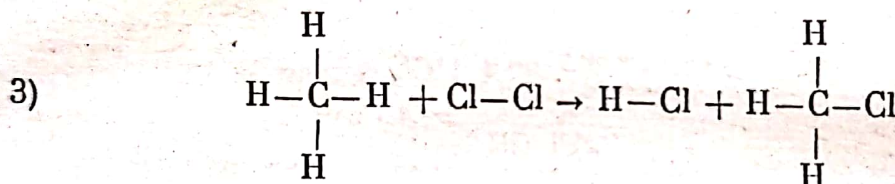


$$\Delta H^0_{r_2} = [5\varepsilon_{C-H} + \varepsilon_{C-C} + \varepsilon_{C-O} + \varepsilon_{O-H}] - [4\varepsilon_{C-H} + \varepsilon_{C=C} + 2\varepsilon_{O-H}].$$

Înlocuind valorile numerice rezultă:

$\Delta H^0_{r_2} = +40{,}6$ kJ. Reacția este slab endotermă.

3)



$$\Delta H^0_{r_3} = [4\varepsilon_{C-H} + \varepsilon_{Cl-Cl}] - [3\varepsilon_{C-H} + \varepsilon_{C-Cl} + \varepsilon_{H-Cl}].$$

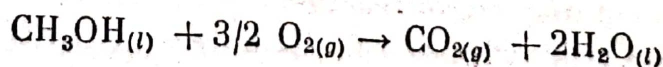
După înlocuiri se obține:

$\Delta H^0_{r_3} = -110{,}5$ kJ. Reacția este exotermă.

18°. Ca o consecință a legii lui Hess, variația de entalpie standard într-o reacție chimică se poate exprima prin entalpiile standard de formare ale produșilor de reacție și ale reactanților. Această variație de entalpie standard este diferența dintre suma tuturor entalpiilor standard de formare ale produșilor de reacție și suma tuturor entalpiilor standard de formare ale reactanților:

$$\Delta H^0_r = \sum \Delta H^0_{298,\,f(\text{produși})} - \sum \Delta H^0_{298,\,f(\text{reactanți})}.$$

Pentru reacția de ardere a metanolului:



$$CH_3OH_{(l)} + 3/2\ O_{2(g)} \rightarrow CO_{2(g)} + 2H_2O_{(l)}$$

avem:

$$\Delta H^0_r = \Delta H^0_{298,\,f,\,CO_2} + 2\Delta H^0_{298,\,f,\,H_2O} - \Delta H^0_{298,\,f,\,CH_3OH}.$$

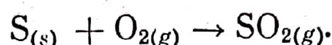
Entalpia standard de formare a oxigenului gazos este prin definiție egală cu zero. Rezultă:

$$\Delta H^0_{298,\,f,\,CH_3OH} = \Delta H^0_{298,\,f,\,CO_2} + 2\Delta H^0_{298,\,f,\,H_2O} - \Delta H^0_r.$$

Înlocuind valorile numerice date (ținînd cont de semnele respective!) și $\Delta H^0_r = -725{,}6$ kJ, deoarece reacția este exotermă, se obține:

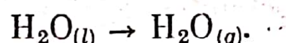
$$\Delta H^0_{298,\,f,\,CH_3OH} = -239{,}1 \text{ kJ/mol}.$$

19°. Căldura de formare (entalpia standard de formare) este variația de entalpie a sistemului în reacția de sinteză a unui mol de substanță din elementele componente în starea lor cea mai stabilă în condiții standard ($p = 101{,}325$ kPa și $T = 298$ K). Deci entalpia standard de formare a dioxidului de sulf va fi variația de entalpie în reacția:



$$S_{(s)} + O_{2(g)} \rightarrow SO_{2(g)}.$$

Ecuația acestei reacții se poate obține (pe baza legii lui Hess) din ecuațiile reacțiilor date dacă acestea se înmulțesc cu niște coeficienți și apoi se adună algebric. Pe lîngă cele două ecuații date trebuie de asemenea scrisă cea de a treia, trecerea apei lichide în apă sub formă de vapori (gaz):



$$H_2O_{(l)} \rightarrow H_2O_{(g)}.$$

Pentru a nu greși semnele se recomandă transcrierea ecuațiilor respective cu toți termenii în partea stîngă și egalarea lor cu zero. Fie a, b și c coeficienții cu care se înmulțesc ecuațiile reacțiilor respective:

A. $2aH_2S_{(g)} + aSO_{2(g)} - 3aS_{(s)} - 2aH_2O_{(g)} = 0;$ $\qquad \Delta H^0_{r_1}$

B. $bH_2S_{(g)} + 3/2\,bO_{2(g)} - bH_2O_{(l)} - bSO_{2(g)} = 0;$ $\qquad \Delta H^0_{r_2}$

C. $cH_2O_{(l)} - cH_2O_{(g)} = 0;$ $\qquad \lambda_V$

Coeficienții a, b, c, trebuie determinați astfel încît după înmulțirea ecuațiilor respective cu acești coeficienți și adunarea lor să rezulte ecuația reacției de formare a dioxidului de sulf:

$$S_{(s)} + O_{2(g)} - SO_{2(g)} = 0; \qquad \Delta H^0_{298,\,f,\,SO_2}.$$

Pentru găsirea acestor coeficienți se alege un anumit component și se identifică coeficientul său din ecuațiile adunate cu coeficientul aceluiași component din ecuația de formare a dioxidului de sulf (care poate fi și nul dacă componentul ales nu se găsește în reacția de formare a dioxidului de sulf). Se recomandă să se ia în considerare componenți care participă la cît mai puține din reacțiile date, dacă este posibil numai la una singură. Considerînd astfel sulful $S_{(s)}$, acesta se găsește numai în ecuația A cu coeficientul $-3a$, iar în ecuația reacției de formare cu coeficientul 1. Deci $-3a = 1$, de unde rezultă imediat $a = -\frac{1}{3}$. Luînd acum în considerare SO_2, în ecuațiile adunate acesta va avea coeficientul $(a-b)$, iar în ecuația reacției

de formare a dioxidului el are coeficientul -1. Deci: $a-b=-1$, adică $b=a+1=2/3$. Pentru găsirea coeficientului c se poate lua spre exemplu $H_2O_{(l)}$ și prin raționament similar se obține $-b+c=0$ sau $b=c$ adică $c=\frac{2}{3}$. Rezultă așadar coeficienții:

$$a=-\frac{1}{3}; \quad b=\frac{2}{3}; \quad c=\frac{2}{3}.$$

Entalpia standard de formare a dioxidului de sulf va fi:

$$\Delta H^0_{298,\,f,\,SO_2}=a\Delta H^0_{r_1}+b\Delta H^0_{r_2}+c\lambda_V.$$

Înlocuind valorile numerice se obține:

$$\Delta H^0_{298,\,f\,SO_2}=-296,2\ \text{kJ/mol}.$$

20°. a) Se calculează variația de entalpie standard pentru reacția directă (reacția 1):

$$\Delta H^0_{r_1}=(\Delta H^0_{298,\,f\,CH_4}+\Delta H^0_{298,\,f\,H_2O})-(\Delta H^0_{298,\,f\,CO}+3\Delta H^0_{298,\,f\,H_2}).$$

Hidrogenul fiind un element în starea sa stabilă în condiții standard, rezultă (prin convenție) $\Delta H^0_{298,\,f,\,H_2}=0$. Înlocuind celelalte valori din problemă se obține

$$\Delta H^0_{r_1}=-205,9\ \text{kJ}.$$

Se calculează de asemenea variația de entropie ΔS^0_r;

$$\Delta S^0_r=(S^0_{298,\,CH_4}+S^0_{298,\,H_2O})-(S^0_{298,\,CO}+3S^0_{298,\,H_2}).$$

Înlocuind valorile numerice se obține:

$$\Delta S^0_r=-214,7\ \text{J/molK}.$$

Variația de entalpie liberă, la temperatura de 300°C $=573$ K (în aproximația din enunț) va fi:

$$\Delta G^0_T=\Delta H^0_r-T\cdot\Delta S^0_r=-8,29\cdot10^4\ \text{J}.$$

Deci variația de entalpie liberă fiind negativă înseamnă că reacția 1 este spontană la temperatura de 573 K (300°C).

b) Temperatura maximă pînă la care reacția 1 este spontană se poate afla din condiția $\Delta G^0_T=0$ adică:

$$-205,9\cdot10^3-T(-214,7)=0$$

de unde rezultă $T_{max}=959\ \text{K}=686°\text{C}$.

c) Relația dintre constanta de echilibru K_p și variația de entalpie liberă ΔG^0_T este:

$$\Delta G^0_T=-RT\ \ln K_p.$$

Se calculează ΔG_T^0 la 873 K:

$$\Delta G_{873}^0 = -205{,}9 \cdot 10^3 + 873 \cdot 214{,}7 = -1{,}85 \cdot 10^4 \text{ J}.$$

Rezultă:

$$\ln K_p = \frac{-\Delta G_T^0}{RT} = \frac{1{,}85 \cdot 10^4}{8{,}31 \cdot 873} = 2{,}55$$

de unde

$$K_p = \exp(2{,}55) = 12{,}8 \text{ atm}^{-2}.$$

21°. a) Se calculează concentrațiile inițiale ale reactanților în prima experiență:

$$[NO] = \frac{0{,}6}{30} \cdot \frac{1}{2} = 0{,}01 \text{ mol} \cdot \text{dm}^{-3}$$

$$[O_2] = \frac{0{,}64}{32} \cdot \frac{1}{2} = 0{,}01 \text{ mol} \cdot \text{dm}^{-3}.$$

Fie n_{NO} și n_{O_2} ordinele parțiale de reacție în raport cu oxidul de azot și, respectiv, cu oxigenul.

Expresia vitezei de reacție este:

$$v = k [NO]^{n_{NO}} \cdot [O_2]^{n_{O_2}}$$

În a doua experiență concentrația oxidului de azot este dublă, cea a oxigenului rămînînd neschimbată. Deci:

$$v = k [0{,}01]^{n_{NO}} \cdot [O_2]^{n_{O_2}}$$

și

$$4v = k [0{,}02]^{n_{NO}} \cdot [O_2]^{n_{O_2}}.$$

Făcînd raportul celor două viteze se obține:

$$\frac{1}{4} = \left[\frac{0{,}01}{0{,}02}\right]^{n_{NO}}, \quad \text{sau} \quad \frac{1}{4} = \left[\frac{1}{2}\right]^{n_{NO}}$$

de unde rezultă $n_{NO} = 2$.

În a treia experiență se dublează concentrația oxigenului, rămînînd neschimbată concentrația oxidului de azot:

$$2v = k [0{,}01]^{n_{NO}} \cdot [0{,}02]^{n_{O_2}}.$$

Raportînd această ecuație la:

$$v = k [0{,}01]^{n_{NO}} \cdot [0{,}01]^{n_{O_2}}$$

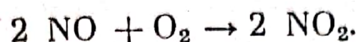
se obține: $2 = \left[\frac{0{,}002}{0{,}01}\right]^{n_{O_2}}$ de unde se obține $n_{O_2} = 1$.

Deci ordinul parțial de reacție în raport cu NO este 2, iar în raport cu oxigenul este 1. Ordinul total al reacției este:

$$m = n_{NO} + n_{O_2} = 3.$$

b) $v = k[NO]^2 \cdot [O_2]$.

Reacția este simplă căci ordinele parțiale de reacție coincid cu molecularitatea, reacția putînd fi scrisă:



$$2\ NO + O_2 \rightarrow 2\ NO_2.$$

c) $v = k[NO]^2[O_2] = 5 \cdot 10^{-4}\ dm^6mol^{-2}s^{-1}[10^{-2}mol \cdot dm^{-3}]^2 \cdot [10^{-2}mol \cdot dm^{-3}] =$
$= 5 \cdot 10^{-10}\ mol \cdot dm^{-3} \cdot s^{-1}$.

22°. Dependența vitezei de reacție de temperatură are loc prin intermediul constantei de viteză, conform relației lui ARRHENIUS:

$$k = A\ \exp\left[-\frac{E_a}{RT}\right]$$

unde A este factorul preexponențial, practic independent de temperatură, iar E_a este energia de activare a reacției. Logaritmînd această expresie se obține:

$$\ln k = \ln A - \frac{E_a}{RT}.$$

Determinîndu-se constanta de viteză la două temperaturi diferite T_1 și T_2, avem:

$$\ln k_1 = \ln A - \frac{E_a}{RT_1}$$

$$\ln k_2 = \ln A - \frac{E_a}{RT_2}.$$

Făcînd diferența dintre aceste relații, rezultă:

$$\ln\frac{k_1}{k_2} = \frac{E_a}{R}\left[\frac{1}{T_2} - \frac{1}{T_1}\right].$$

De aici se obține expresia energiei de activare:

$$E_a = \frac{R\ \ln\frac{k_1}{k_2}}{\left[\frac{1}{T_2} - \frac{1}{T_1}\right]}.$$

Înlocuind valorile numerice: $k_1 = 2{,}5$ și $k_2 = 5{,}5\ dm^3 \cdot mol^{-1}s^{-1}$ și $T_1 = 283$ K; $T_2 = 293$ K, iar $R = 8{,}31\ J \cdot mol^{-1} \cdot K^{-1}$ obținem:

$$E_a = 5{,}43 \cdot 10^4\ J \cdot mol^{-1}.$$

23°. a) Fie n numărul de moli de acid iodhidric existenți inițial în sistem și α gradul de disociere al acestuia la temperatura dată. Se alcătuiește următorul tabel:

Număr de moli	HI	H_2	I_2	Total
Inițial	n	0	0	n
La echilibru	$n - n\alpha = n(1-\alpha)$	$\frac{n}{2}\alpha$	$\frac{n}{2}\alpha$	$n(1-\alpha) + \frac{2n\alpha}{2} = n$

Cunoscînd numărul de moli din fiecare component la echilibru, precum și numărul total de moli din sistem se calculează fracțiile molare ale celor trei componenți:

$$X_{HI} = \frac{n(1-\alpha)}{n} = (1-\alpha); \quad X_{H_2} = \frac{n\alpha}{2n} = \frac{\alpha}{2}; \quad X_{I_2} = \frac{n\alpha}{2n} = \frac{\alpha}{2}.$$

Presiunea parțială a unui component într-un amestec gazos este produsul dintre fracția sa molară și presiunea totală:

$$P_{HI} = (1-\alpha)P; \; P_{H_2} = \frac{\alpha}{2}P \text{ și } P_I = \frac{\alpha}{2}P.$$

Expresia constantei de echilibru K_p este:

$$K_p = \frac{P_{H_2} \cdot P_{I_2}}{P_{HI}^2}.$$

Înlocuind expresiile presiunilor parțiale se obține:

$$K_p = \frac{\frac{\alpha^2}{4}P^2}{(1-\alpha)^2 P^2} = \frac{\alpha^2}{4(1-\alpha)^2}.$$

Punînd $\alpha = 0{,}245$ rezultă:

$$K_p = 2{,}63 \cdot 10^{-2}.$$

b) Relația dintre constantele de echilibru K_p și K_c este:

$$K_p = K_c(RT)^{\Delta\nu}$$

unde $\Delta\nu$ este variația numărului de moli în urma reacției care are loc. În cazul disocierii acidul iodhidric din doi moli de HI se obține un mol de H_2 și un mol I_2 deci tot doi moli în total. Reacția are loc fără variația numărului de moli, adică $\Delta\nu = 0$. Rezultă că $K_p = K_c$ și deci $K_c = 2{,}63 \cdot 10^{-2}$.

Observație. Se remarcă faptul că în cazul acestei reacții de disociere a acidului iodhidric ambele constante, atît K_p, cît și K_c sînt adimensionale, deci nu au unități de măsură.

24°. a) Considerînd comportare ideală a gazului din vas (cu volum constant) avem:

$$\frac{p_0}{T_0} = \frac{p_i}{T_i}$$

de unde

$$p_i = p_0 \frac{T_i}{T_0}.$$

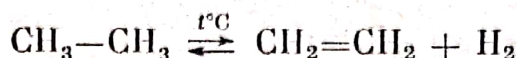
Făcînd calculul pentru cele patru temperaturi se obține:

$$p_1' = p_1 = 101{,}325 \; kP_a \quad p_3' = p_1 \frac{T_3}{T_1} = 270{,}2 \text{ kPa}$$

$$p_2' = p_1 \frac{T_2}{T_1} = 168{,}875 \; k\text{P}_a \quad p_4' = p_1 \cdot \frac{T_4}{T_1} = 337{,}75 \text{ kPa}.$$

b) Valorile măsurate ale presiunii p sînt mai mari decît cele calculate p', diferența fiind cu atît mai mare, cu cît temperatura este mai ridicată. Prin urmare numărul de molecule din sistem crește. Rezultă deci că are loc descompunere termică a etanului.

c) Această descompunere nu poate fi decît o reacție de dehidrogenare, rezultînd etenă și hidrogen:



$$CH_3{-}CH_3 \overset{t°C}{\rightleftarrows} CH_2{=}CH_2 + H_2$$

d) Fie α gradul de conversie (disociere) a etanului la 800 K.

Din fiecare mol de etan se descompun α moli rezultînd α moli etenă și tot α moli H_2. Dacă în sistem se găsesc n moli etan inițial, la o temperatură dată, după stabilirea echilibrului, mai rămîn $n(1 - \alpha)$ moli etan, formîndu-se $n\alpha$ moli etenă și $n\alpha$ moli H_2. Numărul total de moli din sistem la temperatura respectivă este $n(1 + \alpha)$.

Ținînd cont de ecuația de stare a gazelor perfecte $pV = \nu RT$ unde ν este numărul de moli din sistem vom avea:

$$p'V = nRT$$

p' fiind presiunea calculată în ipoteza că nu are loc nici o modificare a numărului de moli

și

$$pV = n(1 + \alpha)RT$$

p este presiunea reală, măsurată experimental.

Făcînd raportul celor două ecuații avem:

$$\frac{p'}{p} = \frac{1}{1 + \alpha} \quad \text{de unde rezultă} \quad \alpha = \frac{p - p'}{p'} = \frac{276{,}111 - 270{,}2}{270{,}2} = 0{,}022 = 2{,}2\%.$$

Expresia constantei de echilibru K_p este:

$$K_p = \frac{p_{C_2H_4} \cdot p_{H_2}}{p_{C_2H_6}}$$

Presiunile parțiale sînt:

$$p_{C_2H_6} = X_{C_2H_6} p = \frac{n(1 - \alpha)}{n(1 + \alpha)} p = \frac{1 - \alpha}{1 + \alpha} p = 264{,}22 \text{ kPa};$$

$$p_{C_2H_4} = X_{C_2H_4} \cdot p = \frac{n\alpha}{n(1 + \alpha)} p = \frac{\alpha}{1 + \alpha} p = 6{,}21 \text{ kPa};$$

$$p_{H_2} = X_{H_2} \cdot p = \frac{n\alpha}{n(1 + \alpha)} p = 6{,}21 \text{ kPa}.$$

Înlocuind valorile presiunilor parțiale se obține:

$$K_p = \frac{6{,}21^2}{264{,}22} = 0{,}146 \text{ kPa}.$$

25°. a) 1. Fie C mol/dm³ concentrația molară a celor doi reactanți și x numărul de moli/dm³ transformați în HI:

$$K = \frac{[HI]^2}{[H_2][I_2]} = \frac{(2x)^2}{(C - x)(C - x)} = \frac{4x^2}{(C - x)^2}.$$

Deci:

$$\sqrt{K} = \frac{2x}{C - x}$$

de unde

$$\sqrt{K}(C - x) = 2x; \quad \sqrt{K} \cdot C - \sqrt{K} \cdot x = 2x$$

$$x(\sqrt{K} + 2) = \sqrt{K} \cdot C$$

și

$$\frac{X}{C} = \frac{\sqrt{K}}{\sqrt{K} + 2} = \frac{\sqrt{70}}{\sqrt{70} + 2} = 0{,}807 = 80{,}7\%.$$

2. Fie α gradul de conversie a iodului în acid iodhidric, adică fracțiunea din fiecare mol de iod care s-a transformat în HI. Fie de asemenea C numărul de moli de iod pe dm³. Avem la echilibru:

$$[H_2] = 2C - C\alpha = C(2 - \alpha)$$

$$[I_2] = C - C\alpha = C(1 - \alpha)$$

$$[HI] = 2C\alpha$$

$$K = \frac{4C^2\alpha^2}{C^2(2 - \alpha)(1 - \alpha)} = \frac{4\alpha^2}{(2 - \alpha)(1 - \alpha)}.$$

Rezolvînd această ecuație de gradul doi în α și considerînd numai soluția care are sens fizic, și anume cea cu $\alpha \leqslant 1$ se obține

$$\alpha = 0{,}9508 \quad \text{adică } \alpha = 95{,}08\%.$$

Deci fracțiunea din fiecare mol de I_2 care se transformă în HI este 95,08%.

b) Fie X numărul de moli de H_2 necesar și V volumul sistemului. Atunci:

$$[H_2] = \frac{X - \alpha_1}{V} \quad [I_2] = \frac{1 - \alpha_1}{V} \quad [HI] = \frac{2\alpha_1}{V}$$

$$K = \frac{4\alpha_1^2 \cdot V^2}{(X - \alpha_1)(1 - \alpha_1) \cdot V^2} = \frac{4\alpha_1^2}{(X - \alpha_1)(1 - \alpha_1)}.$$

Rezolvînd ecuația în raport cu X se obține:

$$X = \frac{4\alpha_1^2 + K\alpha_1 - K\alpha_1^2}{K(1 - \alpha_1)}$$

iar înlocuind valorile numerice $K = 70$ și $\alpha_1 = 0{,}99$ se obține $X = 6{,}59$ moli H_2.

26°. a) Expresia constantei de echilibru este:

$$K_c = \frac{[CH_3COOH][C_2H_5OH]}{[CH_3COOC_2H_5][H_2O]}.$$

Se alcătuieşte tabelul:

Concentraţia ($mol \cdot dm^{-3}$)	Ester	Apă	Acid	Alcool
Iniţial	C	C	0	0
La echilibru	$\frac{2}{3}C$	$\frac{2}{3}C$	$\frac{1}{3}C$	$\frac{1}{3}C$

Înlocuind datele în expresia constantei de echilibru rezultă:

$$K_C = \frac{C^2 \cdot 9}{9 \cdot 4 \cdot C^2} = \frac{1}{4} = 0{,}25.$$

b) Se alcătuieşte un nou tabel similar cu cel de la punctul precedent, ţinînd cont de faptul că iniţial concentraţia esterului este C $mol \cdot dm^{-3}$, iar cea a apei nC $mol \cdot dm^{-3}$.

Fie X fracţiunea din fiecare mol de ester transformată la echilibru, şi deci CX numărul de moli pe dm^{-3} de ester şi de apă care s-au transformat şi în acelaşi timp numărul de moli de alcool şi de acid pe dm^3 care au rezultat. Se obţin deci următoarele date:

Concentraţia ($mol \cdot dm^{-3}$)	Ester	Apă	Acid	Alcool
Iniţial	C	nC	0	0
La echilibru	$C - Cx = C(1 - x)$	$nC - Cx = C(n - x)$	Cx	Cx

Deoarece constanta de echilibru K_C nu depinde de concentraţiile iniţiale ale reactanţilor, ea va avea tot valoarea 1/4. Rezultă:

$$\frac{1}{4} = \frac{C^2x^2}{C^2(1 - x)(n - x)} \quad \text{sau} \quad \frac{x^2}{(1 - x)(n - x)} = \frac{1}{4}$$

de unde rezultă ecuaţia de gradul doi în x:

$$3x^2 + (n + 1)x - n = 0$$

şi soluţia care convine ca sens fizic (x trebuie să fie o cantitate pozitivă):

$$x = \frac{-(n + 1) + \sqrt{(n + 1)^2 + 12n}}{6}.$$

Deci x reprezintă fracţiunea de ester care va fi hidrolizată la echilibru dacă amestecul iniţial conţine n moli de apă la un mol ester.

2. Din ecuația de gradul doi în x obținută anterior se exprimă n funcție de x:

$$n = \frac{x(3x+1)}{1-x}.$$

Înlocuind pe $x = 0{,}99$ se obține $n = 393$.
Deci este necesar un exces foarte mare de apă pentru a transforma practic tot esterul.

27°. a) Fie n numărul inițial de moli de N_2O_4 (se presupune că inițial se introduce în sistem numai N_2O_4); și α gradul de disociere. Se alcătuiește tabelul:

Număr de moli	N_2O_4	NO_2	Total
Inițial	n	0	n
La echilibru	$n(1-\alpha)$	$2n\alpha$	$n(1+\alpha)$

Fracțiile molare la echilibru sînt:

$$X_{N_2O_4} = \frac{n(1-\alpha)}{n(1+\alpha)} = \frac{1-\alpha}{1+\alpha}; \quad X_{NO_2} = \frac{2n\alpha}{n(1+\alpha)} = \frac{2\alpha}{1+\alpha}.$$

Deci presiunile parțiale vor fi:

$$P_{N_2O_4} = \frac{1-\alpha}{1+\alpha} P \quad \text{și} \quad P_{NO_2} = \frac{2\alpha}{1+\alpha} P.$$

Pentru a calcula valoarea gradului de disociere α, calculăm masa molară medie a amestecului $\overline{M} = 28{,}9\, d$.
Dar masa molară medie se poate scrie și funcție de fracțiile molare ale componenților:

$$\overline{M} = \sum_i M_i X_i = X_{N_2O_4} \cdot M_{N_2O_4} + X_{NO_2} \cdot M_{NO_2}.$$

Rezultă:

$$28{,}9\, d = \frac{1-\alpha}{1+\alpha} \cdot 92 + \frac{2\alpha}{1+\alpha} \cdot 46 = \frac{92}{1+\alpha}.$$

Rezolvînd în raport cu α se obține:

$$\alpha = \frac{92 - 28{,}9\, d}{28{,}9\, d}$$

și înlocuind $d = 2{,}34$, avem: $\alpha = 0{,}36$.
Introducînd această valoare a lui α în expresiile presiunilor parțiale se obține:

$$P_{N_2O_4} = 47{,}682 \text{ kPa} \quad \text{și} \quad P_{NO_2} = 53{,}643 \text{ kPa}.$$

b) Expresia constantei de echilibru K_p este:

$$K_p = \frac{P^2_{NO_2}}{P_{N_2O_4}}.$$

Înlocuind valorile presiunilor parțiale rezultă:

$$K_p = 60{,}35 \text{ kPa}.$$

c) Constanta de echilibru K_p nu depinde de presiune la temperatură constantă, deci noile presiuni parțiale trebuie să satisfacă condițiile:

$$p'_{NO_2} + p'_{N_2O_4} = 1013{,}25 \text{ kPa} \quad \text{și} \quad \frac{(p'_{NO_2})^2}{p'_{N_2O_4}} = 60{,}35 \text{ kPa}.$$

Rezolvînd acest sistem de două ecuații cu două necunoscute se obține:

$$p'_{NO_2} = 217{,}14 \text{ kPa} \quad \text{și} \quad p'_{N_2O_4} = 796{,}11 \text{ kPa}.$$

Rezultă că odată cu creșterea presiunii crește și presiunea parțială a N_2O_4 pe seama micșorării presiunii parțiale a NO_2, deci echilibrul se deplasează spre stînga, spre formarea de N_2O_4. Această concluzie este în concordanță cu principiul Le Châtelier, conform căruia creșterea presiunii totale din sistem deplasează echilibrul înspre partea unde rezultă un număr mai mic de moli.

28°. a) Principiul Le Châtelier afirmă că dacă asupra unui sistem în echilibru se exercită o constrîngere, echilibrul se deplasează în sensul diminuării constrîngerii. Pentru un sistem gazos cu volum și temperatură determinate, presiunea este proporțională cu numărul de moli de gaz din sistem. Deci la micșorarea presiunii din sistem, echilibrul se va deplasa în sensul creșterii numărului de moli, care să compenseze micșorarea presiunii. În cazul reacției de disociere a bromului:



$$Br_2 \rightleftarrows 2\,Br$$

micșorarea presiunii va conduce la deplasarea echilibrului spre dreapta deoarece în acest sens, dintr-un mol de brom molecular rezultă doi moli de brom atomic. Rezultă că micșorarea presiunii duce la creșterea gradului de disociere a bromului molecular.

b) Expresia constantei de echilibru K_p este:

$$K_p = \frac{p^2_{Br}}{p_{Br_2}}.$$

Fie n numărul de moli de brom molecular care se găsesc inițial în sistem și α gradul său de disociere, iar P presiunea totală. Se alcătuiește tabelul următor:

Număr de moli	Br_2	Br	Total
Inițial	n	0	n
La echilibru	$n(1-\alpha)$	$2n\alpha$	$n(1+\alpha)$

Fracțiile molare ale componentelor sînt:

$$X_{Br_2} = \frac{n(1-\alpha)}{n(1+\alpha)} = \frac{1-\alpha}{1+\alpha} \qquad X_{Br} = \frac{2n\alpha}{n(1+\alpha)} = \frac{2\alpha}{1+\alpha}$$

iar presiunile parțiale:

$$p_{Br_2} = \frac{1-\alpha}{1+\alpha} \cdot P \quad \text{și} \quad p_{Br} = \frac{2\alpha}{1+\alpha} P$$

Rezultă:

$$K_p = \frac{\frac{4\alpha^2}{(1+\alpha)^2} P^2}{\frac{1-\alpha}{1+\alpha} P} = \frac{4\alpha^2}{1-\alpha^2} P.$$

Rezolvînd în raport cu α se obține: $\alpha = \sqrt{\frac{K_p}{4P + K_p}}$. Așadar la diminuarea presiunii gradul de disociere α crește, regăsindu-se același rezultat ca la punctul a).

c) Înlocuind valorile numerice ale lui K_p și P avem:

$$\alpha = \sqrt{\frac{5{,}67 \cdot 10^2}{4 \cdot 1{,}013 \cdot 10^5 + 5{,}67 \cdot 10^2}} = 3{,}74 \cdot 10^{-2} = 3{,}74\%.$$

29°. a) Se calculează masa de acid acetic dizolvat:

$$m = \rho \cdot v = 1052 \text{ kgm}^{-3} \cdot 11{,}42 \cdot 10^{-6} \text{ m}^3 = 1{,}2 \cdot 10^{-2} \text{ kg} = 12{,}0 \text{ g}.$$

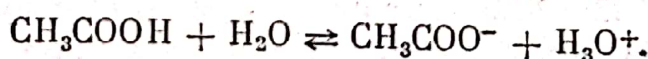
Numărul de moli de acid acetic dizolvat este:

$$n = \frac{12}{60} = 0{,}2 \text{ moli}$$

iar concentrația molară a soluției obținute va fi:

$$C = \frac{0{,}2}{2} = 0{,}1 \text{ mol} \cdot \text{dm}^{-3}.$$

Ecuația reacției de ionizare a acidului acetic în soluție apoasă:



$$CH_3COOH + H_2O \rightleftarrows CH_3COO^- + H_3O^+.$$

Constanta de aciditate va avea expresia:

$$K_a = \frac{[CH_3COO^-][H_3O^+]}{[CH_3COOH]}.$$

Făcînd aproximația că acidul acetic este destul de slab pentru a putea neglija concentrația moleculelor care se ionizează în comparație cu cea a moleculelor neionizate, dar în același timp un acid mult mai tare decît apa ca acid și deci se poate neglija concentrația ionilor H_3O^+ proveniți din ionizarea apei, se obține:

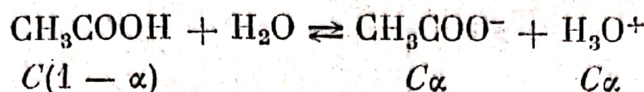
$$K_a = \frac{[H_3O^+]^2}{C}$$

deoarece, conform reacției de ionizare $[H_3O^+] = [CH_3COO^-]$. C este concentrația inițială a acidului acetic în soluție ($\text{mol} \cdot \text{dm}^{-3}$), care în aproximația făcută, este egală și cu concentrația de echilibru a acidului neionizat.

Din $pH = 2,87$ rezultă $[H_3O^+] = 10^{-2,87} = 1,35 \cdot 10^{-3}$ mol · dm^{-3}. Înlocuind valorile numerice în expresia constantei de aciditate avem:

$$K_a = \frac{(1,35 \cdot 10^{-3})}{0,1} = 1,82 \cdot 10^{-5}.$$

b) Fie α gradul de ionizare al acidului acetic în soluția preparată. La echilibru, în sistem vor exista concentrațiile:



$$\begin{array}{lcl} CH_3COOH + H_2O & \rightleftharpoons & CH_3COO^- + H_3O^+ \\ C(1-\alpha) & & C\alpha \qquad C\alpha \end{array}$$

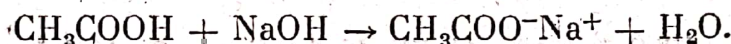
Deci:

$$K_a = \frac{C^2\alpha^2}{C(1-\alpha)} = \frac{C\alpha^2}{1-\alpha}.$$

Avînd în vedere ca $\alpha \ll 1$ se poate scrie expresia aproximativă:

$$K_a \simeq C\alpha^2 \quad \text{deci} \quad \alpha \simeq \sqrt{\frac{K_a}{C}} = \sqrt{\frac{1,82 \cdot 10^{-5}}{0,1}} = 1,35 \cdot 10^{-2} \text{ sau } \alpha \simeq 1,35\%.$$

c) Ecuația reacției de neutralizare:



$$CH_3COOH + NaOH \rightarrow CH_3COO^-Na^+ + H_2O.$$

Atît pentru NaOH, cît și pentru acidul acetic concentrațiile molare sînt egale cu cele normale, deci la neutralizarea completă:

$$V_{acid} \cdot N_{acid} = V_{bază} N_{bază} \quad \text{sau} \quad V_{NaOH} = \frac{V_{acid} \cdot N_{acid}}{N_{NaOH}}.$$

Înlocuind valorile numerice se obține:

$$V_{NaOH} = \frac{2 \text{ dm}^3 \cdot 0,1}{0,1} = 2 \text{ dm}^3 \text{ soluție NaOH } 0,1 \text{ N}.$$

d) Avînd în vedere că volumul de soluție de NaOH adăugat este cel exact necesar neutralizării, în soluția obținută, al cărei volum total este 4 dm^3, există numai acetat de sodiu, de concentrație

$$C_1 = \frac{0,2 \text{ mol}}{4 \text{ dm}^3} = 0,05 \text{ mol} \cdot \text{dm}^{-3}.$$

Acetatul de sodiu provenind de la un acid slab și bază tare, va hidroliza în soluție apoasă conform reacției de hidroliză:



$$CH_3COO^-Na^+ + H_2O \rightleftharpoons CH_3COOH + Na^+OH^-$$

sau în formă ionică:



$$CH_3COO^- + H_2O \rightleftharpoons CH_3COOH + HO^-$$

Constanta de echilibru:

$$K = \frac{[CH_3COOH] \cdot [HO^-]}{[CH_3COO^-][H_2O]}.$$

Considerînd concentrația apei practic constantă, se obține expresia constantei de hidroliză K_h:

$$K_h = K[H_2O] = \frac{[CH_3COOH][HO^-]}{[CH_3COO^-]}.$$

Amplificînd cu $[H_3O^+]$ se obține:

$$K_h = \frac{[CH_3COOH][HO^-][H_3O^+]}{[CH_3COO^-][H_3O^+]} = K_{H_2O} \cdot \frac{1}{K_a}$$

unde $K_{H_2O} = [H_3O^+][HO^-]$ este produsul ionic al apei.
Din ecuația reacției de hidroliză rezultă că, dacă se neglijează concentrația ionilor HO^- proveniți din ionizarea apei se poate scrie $[CH_3COOH] \simeq [HO^-]$, deci:

$$\frac{[HO^-]^2}{[CH_3COO^-]} = \frac{K_{H_2O}}{K_a}.$$

Dar $[HO^-] = \frac{K_{H_2O}}{[H_3O^+]}$ și înlocuind avem:

$$\frac{K^2_{H_2O}}{[H_3O^+]^2[CH_3COO^-]} = \frac{K_{H_2O}}{K_a}$$ de unde se obține:

$$[H_3O^+] = \sqrt{\frac{K_a \cdot K_{H_2O}}{CH_3COO^-}}.$$

Făcînd aproximația că numărul ionilor CH_3COO^- care hidrolizează este mult mai mic decît cel al ionilor nehidrolizați se poate scrie relația aproximativă $[CH_3COO^-] \simeq C_1$, unde C_1 este concentrația molară a acetatului de sodiu din soluție. Deci:

$$[H_3O^+] = \sqrt{\frac{K_a \cdot K_{H_2O}}{C_1}} = \sqrt{\frac{1,82 \cdot 10^{-5} \cdot 1 \cdot 10^{-14}}{0,05}} \simeq 1,91 \cdot 10^{-9} \text{ mol} \cdot \text{dm}^{-3}$$

sau:

$$pH = -\lg[H_3O^+] \simeq 8,72.$$

Deci soluția obținută prin neutralizarea acidului acetic cu hidroxid de sodiu va avea un caracter bazic pH-ul său fiind mai mare decît 7, valoare ce corespunde mediului neutru.

30°. a) Produsul ionic al apei, în condiții standard, are valoarea:

$$K_{H_2O} = [H_3O^+][HO^-] = 1 \cdot 10^{-14} \text{ mol}^2 \cdot \text{dm}^{-6}.$$

Logaritmînd relația se obține:

$$\lg[H_3O^+] + \lg[HO^-] = -14$$

sau

$$-\lg[H_3O^+] - \lg[HO^-] = 14$$

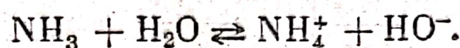
Dar prin definiție $-\lg[H_3O^+] = pH$ și $-\lg[HO^-] = pOH$, deci în soluții apoase:

$$pH + pOH = 14.$$

Rezultă: $pOH = 14 - pH = 3{,}37$ și $[HO^-] = 10^{-3{,}37}$, adică

$$[HO^-] = 4.27 \cdot 10^{-4}\ mol \cdot dm^{-3}.$$

b) Reacția de ionizare a amoniacului în soluție apoasă este



$$NH_3 + H_2O \rightleftarrows NH_4^+ + HO^-.$$

Constanta de echilibru se scrie:

$$K = \frac{[NH_4^+][HO^-]}{[NH_3][H_2O]}.$$

Considerînd concentrația apei practic constantă se obține expresia constantei de bazicitate:

$$K_b = K[H_2O] = \frac{[NH_4^+][HO^-]}{[NH_3]}.$$

Făcînd aproximația că amoniacul este o bază destul de slabă pentru a putea neglija concentrația moleculelor care ionizează în comparație cu cea a moleculelor neionizate, se poate considera concentrația moleculelor de amoniac la echilibru aproximativ egală cu concentrația inițială C a amoniacului în soluție, deci $[NH_3] \simeq C\ mol \cdot dm^{-3}$. De asemenea, amoniacul fiind o bază mult mai tare decît apa ca bază, se poate neglija într-o destul de bună aproximație, concentrația ionilor HO^- proveniți din ionizarea apei în comparație cu cea a ionilor HO^- proveniți din reacția amoniacului cu apa.

În acest caz $[HO^-] \simeq [NH_4^+]$. Cu aceste aproximații expresia constantei de bazicitate devine:

$$K_b = \frac{[HO^-]^2}{C}.$$

Pentru a obține valoarea lui C se calculează numărul de moli de amoniac dizolvați:

$$pV = \nu RT \Rightarrow \nu = \frac{pV}{RT} = \frac{202{,}65 \cdot 10^3 \cdot 493 \cdot 10^{-6}}{8{,}31 \cdot 300} = 4 \cdot 10^{-2}\ \text{moli}\ NH_3.$$

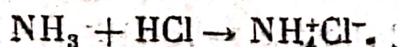
Deci

$$[NH_3] = \frac{4 \cdot 10^{-2}\ \text{moli}}{4\ dm^3} = 1 \cdot 10^{-2}\ mol \cdot dm^{-3}.$$

Înlocuind și valoarea $[HO^-] = 4{,}27 \cdot 10^{-4}\ mol \cdot dm^{-3}$ obținută la punctul a) se obține:

$$K_b = \frac{[4{,}27 \cdot 10^{-4}]^2}{1 \cdot 10^{-2}} = 1{,}82 \cdot 10^{-5}.$$

c) Numărul de moli de HCl din cei $2\ dm^3$ soluție 0,01 N este $2 \cdot 10^{-2}$ și aceștia vor neutraliza $2 \cdot 10^{-2}$ moli NH_3 formînd tot $2 \cdot 10^{-2}$ moli NH_4Cl:



$$NH_3 + HCl \rightarrow NH_4^+Cl^-.$$

Dar cum numărul de moli de amoniac în soluția inițială era $4 \cdot 10^{-2}$ înseamnă că mai rămîn neneutralizați $2 \cdot 10^{-2}$ moli NH_3. Volumul total al soluției este 6 dm^3 deci concentrațiile clorurii de amoniu și amoniacului în această soluție vor fi:

$$[NH_4Cl] = \frac{0,02}{6} = \frac{1}{3} \cdot 10^{-2}\ mol \cdot dm^{-3} \text{ și } [NH_3] = \frac{0,02}{6} = \frac{1}{3} \cdot 10^{-2}\ mol \cdot dm^{-3}.$$

Această soluție conține o bază slabă (NH_3) și sarea sa cu un acid tare (NH_4Cl) fiind deci o soluție tampon. Pentru a-i calcula pH-ul se pleacă de la expresia constantei de bazicitate:

$$K_b = \frac{[NH_4^+][HO^-]}{[NH_3]}$$

și se înlocuiește $[HO^-] = \frac{K_{H_2O}}{[H_3O^+]}$ obținîndu-se:

$$K_b = \frac{[NH_4^+] \cdot K_{H_2O}}{[H_3O^+][NH_3]}$$

de unde rezultă:

$$[H_3O^+] = \frac{K_{H_2O}}{K_b} \cdot \frac{[NH_4^+]}{[NH_3]}.$$

După cum am văzut, în soluția obținută după adăugarea acidului clorhidric $[NH_4^+] \simeq [NH_4Cl]$, dacă se neglijează concentrația ionilor NH_4^+ proveniți din ionizarea amoniacului în reacția sa cu apa. Deci $[NH_4^+] = \frac{1}{3} \cdot 10^{-2}\ mol \cdot dm^{-3}$. De asemenea, în aproximația făcută deja la punctul b) $[NH_3] = \frac{1}{3} \cdot 10^{-2}\ mol \cdot dm^{-3}$. Rezultă că în această soluție $[NH_4^+] \simeq [NH_3]$ și atunci:

$$[H_3O^+] = \frac{K_{H_2O}}{K_b} = \frac{1 \cdot 10^{-14}}{1,82 \cdot 10^{-5}} = 5,49 \cdot 10^{-10}\ mol \cdot dm^{-3}$$

și $pH = -\lg[H_3O^+] = 9,26$.

Observație: Rezultatul obținut are un caracter mai general. Soluția de amoniac a fost neutralizată exact pe jumătate cu HCl (punctul de semineutralizare) și de aceea $[NH_4^+] = [NH_3]$, iar $pH = 14 - pK_b = pK_a$ unde K_a este constanta de aciditate a acidului conjugat amoniacului, adică a ionului amoniu NH_4^+. În cazul general cînd soluția conține o bază slabă și sarea sa cu un acid tare, această soluție tampon va avea un pH ce se poate calcula cu formula:

$$pH = pK_a - \lg\left[\frac{C_{sare}}{C_{bază}}\right]$$

unde $pK_a = -\lg K_a$, K_a fiind constanta de aciditate a acidului conjugat bazei slabe utilizate; C_{sare} este concentrația sării bazei slabe cu un acid tare, iar $C_{bază}$ este concentrația bazei slabe existente în soluția tampon.

Dacă soluţia tampon este formată dintr-un acid slab şi sarea sa cu o bază tare atunci se poate uşor arăta că pH-ul acestei soluţii are expresia

$$pH = pK_a - \lg\left[\frac{C_{acid}}{C_{sare}}\right]$$

unde K_a este constanta de aciditate a acidului slab respectiv.

În ambele cazuri în punctul de semineutralizare (semiechivalenţă) $pH = pK_a$.

31°. a) Se calculează masa unui decimetru cub de soluţie:

$$m = \rho V = 1{,}0049\ g/cm^3 \cdot 1000\ cm^3 = 1004{,}9\ g.$$

Se calculează cantitatea de acid formic (în moli) existentă într-un dm³ de soluţie (concentraţia molară). Masa molară a acidului formic este 46 g/mol.

100 g soluţie .... 3 g HCOOH

1004,9 g soluţie .... x g HCOOH

$$x = \frac{3 \cdot 1004{,}9}{100} = 30{,}147\ g = \frac{30{,}147}{46}\ moli = 0{,}6554\ mol/dm^3.$$

Deci concentraţia molară a soluţiei este 0,6554 M.

b) Ecuaţia reacţiei de ionizare este:



$$HCOOH + H_2O \rightleftharpoons HCOO^- + H_3O^+.$$

Constanta de ionizare (de aciditate):

$$K_a = \frac{[HCOO^-]\,[H_3O^+]}{[HCOOH]}.$$

În anumite aproximaţii (vezi problema 29°) rezultă:

$$K_a = \frac{\alpha^2\ C}{1 - \alpha}$$

unde α este gradul de ionizare, iar C este concentraţia molară a soluţiei.

Gradul de ionizare $\alpha = \frac{[H_3O^+]}{C}$.

Concentraţia ionilor de hidroniu se află din valoarea pH-ului:

$$pH = -\lg[H_3O^+] \text{ deci } [H_3O^+] = 10^{-pH} = 1{,}0715 \cdot 10^{-2}.$$

Rezultă:

$$\alpha = \frac{1{,}0715 \cdot 10^{-2}}{0{,}6554} = 0{,}01635 = 1{,}635\%.$$

Înlocuind se obţine:

$$K_a = 1{,}78 \cdot 10^{-4}.$$

c) După diluare se obţine un nou grad de disociere α_1 şi o nouă concentraţie molară C_1. Constanta de aciditate nu depinde de concentraţie. Deci:

$$K_a = \frac{\alpha_1^2 C_1}{1 - \alpha_1} = \frac{\alpha^2 C^3}{1 - \alpha}.$$

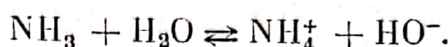
Rezultă:

$$C_1 = \frac{\alpha^2 C^2}{1-\alpha} \cdot \frac{1-\alpha_1}{\alpha_1^2} = K_a \frac{1-10\alpha}{(10\alpha)^2} = 5{,}57 \cdot 10^{-3}.$$

$$\frac{C}{C_1} = \frac{0{,}6554}{5{,}57 \cdot 10^{-3}} = 117{,}7.$$

Deci soluţia iniţială trebuie diluată de 117,7 ori pentru ca gradul de ionizare să crească de 10 ori.

32°. a)



$$NH_3 + H_2O \rightleftarrows NH_4^+ + HO^-.$$

Amoniacul fiind o bază slabă, reacţia este reversibilă, echilibrul fiind mult deplasat spre stînga.

b) Într-o soluţie apoasă concentraţia ionilor de hidroniu şi cea a ionilor HO^- sînt legate prin relaţia:

$$[H_3O^+]\,[HO^-] = K_{H_2O}$$

unde K_{H_2O} este produsul ionic al apei care, în condiţii standard (la 298²K şi 1 atm) are valoarea:

$$K_{H_2O} = 1 \cdot 10^{-14}\ \text{mol}^2 \cdot \text{dm}^{-6}.$$

Avînd în vedere că $pH = -\lg[H_3O^+]$, rezultă că $[H_3O^+] = 10^{-11}\ \text{mol} \cdot \text{dm}^{-3}$ şi $[HO^-] = \frac{K_{H_2O}}{[H_3O^+]} = 10^{-3}\ \text{mol} \cdot \text{dm}^{-3}$.

c) În anumite aproximaţii (vezi problema 29):
Se poate considera valabilă relaţia:

$$[H_3O^+] = \frac{K_{H_2O}}{\sqrt{K_b \cdot C}}$$

unde C reprezintă concentraţia bazei slabe în soluţia apoasă. Deci:

$$C = \frac{K_{H_2O}^2}{K_b [H_3O^+]^2} = \frac{(10^{-14})^2}{1{,}8 \cdot 10^{-5} (10^{-11})^2} = 5{,}56 \cdot 10^{-2}\ \text{mol} \cdot \text{dm}^{-3}.$$

d) Volumul soluţiei fiind 2 dm³, s-au dizolvat.

$$2 \cdot 5{,}56 \cdot 10^{-2} = 0{,}1112\ \text{moli de amoniac.}$$

Considerînd că amoniacul se comportă ca un gaz perfect volumul acestuia în condiţiile cerute va fi:

$$pV = \nu RT;\ V = \frac{\nu RT}{p} = \frac{0{,}1112 \cdot 10^{-3} \cdot 8310 \cdot 300}{2 \cdot 10^5} = 1{,}386 \cdot 10^{-3}\ \text{m}^3 = 1{,}386\ \text{dm}^{-3}.$$

33°. a) Reacţia de ionizare a HCN în soluţie apoasă este:



$$HCN + H_2O \rightleftarrows H_3O^+ + CN^-.$$

Făcînd aproximaţia că HCN este un acid mult mai tare decît apa, ca acid, se poate neglija concentraţia ionilor hidroniu proveniţi din ionizarea apei şi ca

atare $[H_3O^+] = [CN^-]$. În această aproximație dacă α este gradul de ionizare a acidului cianhidric în soluția de concentrație molară $C \cdot mol \cdot dm^{-3}$, la echilibru avem:

$$[H_3O^+] = [CN^-] = \alpha C \text{ și } [HCN] = C(1 - \alpha)$$

Expresia constantei de ionizare (constantei de aciditate) va fi:

$$K_a = \frac{[H_3O^+] \cdot [CN^-]}{[HCN]},$$

Înlocuind concentrațiile respective se obține:

$$K_a = \frac{\alpha^2 C^2}{C(1 - \alpha)} = \frac{\alpha^2 C}{1 - \alpha}.$$

Avind în vedere că $\alpha \ll 1$ se poate scrie relația aproximativă:

$$K_a \simeq \alpha^2 C.$$

și inlocuind $\alpha = 1,4 \cdot 10^{-2}\% = 1,4 \cdot 10^{-4}$ și $C = 0,2 \text{ mol} \cdot dm^{-3}$ se obține:

$$K_a = 3,92 \cdot 10^{-9} \text{ mol} \cdot dm^{-3}.$$

b) $[H_3O^+] = [CN^-] = \alpha C = 0,2 \cdot 1,4 \cdot 10^{-4} = 2,8 \cdot 10^{-5} \text{ mol} \cdot dm^{-3}$.

$$pH = -\lg [H_3O^+] = -\lg [2,8 \cdot 10^{-5}] = 4,55.$$

c) Fie V volumul de apă ce trebuie adăugat. Soluția astfel obținută va avea concentrația $C_1 = \frac{1}{1+V} \cdot C$ deoarece cei C moli de HCN existenți într-un dm^3 soluție inițială se vor găsi în $(1 + V)$ l soluție diluată.

Constanta de aciditate are aceeași valoare și în soluția diluată ca și în cea inițială, deci dacă α_1 este gradul de disociere (ionizare) în soluția diluată avem:

$$\alpha_1^2 C_1 = \alpha^2 C \text{ și } \frac{C_1}{C} = \frac{\alpha^2}{\alpha_1^2}$$

cum $\alpha_1 = 2\alpha$ (gradul de ionizare trebuie să se dubleze), rezultă:

$$\frac{C_1}{C} = \frac{\alpha^2}{(2\alpha)^2} = \frac{1}{4}.$$

Dar

$$\frac{C_1}{C} = \frac{1}{1+V} = \frac{1}{4}$$

de unde rezultă imediat $V = 3 \text{ dm}^3$.

34°. Fie s solubilitatea clorurii de argint în $mol \cdot dm^{-3}$ la 25°C.
În soluție AgCl este complet ionizată deci concentrațiile ionilor Ag^+ și Cl^- în soluția saturată (exprimate în $mol \cdot dm^{-3}$) vor fi egale chiar cu concentrația molară a AgCl

în aceeași soluție saturată, deci $[Ag^+] = [Cl^-] = s\ mol \cdot dm^{-3}$. Expresia produsului de solubilitate este:

$$P_s = [Ag^+][Cl^-] = s^2.$$

Rezultă:

$$s = \sqrt{P_s} = \sqrt{1 \cdot 10^{-10}\ mol^2 \cdot dm^{-6}} = 1 \cdot 10^{-5}\ mol \cdot dm^{-3}.$$

b) $[Ag^+] = s = 1 \cdot 10^{-5}\ mol \cdot dm^{-3} = 1 \cdot 10^{-5} \cdot 108\ g \cdot dm^{-3} = 1{,}08 \cdot 10^{-3}\ g \cdot dm^{-3}$;
$[Cl^-] = s = 1 \cdot 10^{-5}\ mol \cdot dm^{-3} = 1 \cdot 10^{-5} \cdot 35{,}5\ g \cdot dm^{3} = 3{,}55 \cdot 10^{-4}\ g \cdot dm^{-3}$.

c) Se calculează numărul de moli de $CaCl_2$ adăugați:

$n = \frac{4{,}44 \cdot 10^{-2}}{111} = 4 \cdot 10^{-4}$ moli $CaCl_2$. Volumul rămînînd constant ($0{,}5\ dm^3$) concentrația clorurii de calciu va fi $[CaCl_2] = \frac{4 \cdot 10^{-4}}{0{,}5\ dm^3} = 8 \cdot 10^{-4}\ mol \cdot dm^{-3}$.

Dar, dintr-un mol de $CaCl_2$ în soluție rezultă doi moli de ioni Cl^-, deci concentrația molară a ionilor Cl^- proveniți din clorura de calciu este $[Cl^-]_{CaCl_2} = 1{,}6 \cdot 10^{-3}\ mol \cdot dm^{-3}$.

Fie s_1 solubilitatea clorurii de argint în soluția care conține $8 \cdot 10^{-4}\ mol \cdot dm^{-3}$ de $CaCl_2$. Concentrația ionilor Ag^+ va fi tot $s_1\ mol \cdot dm^{-3}$, ca și cea a ionilor Cl^- proveniți din clorura de argint.

Deci în această soluție vom avea:

$$[Ag^+] = s_1\ mol \cdot dm^{-3};$$
$$[Cl^-] = [Cl^-]_{CaCl_2} + [Cl^-]_{AgCl} = (1{,}6 \cdot 10^{-3} + s_1)\ mol \cdot dm^{-3}.$$

Produsul concentrațiilor acestor ioni în soluția saturată este chiar produsul de solubilitate:

$$s_1 \cdot (1{,}6 \cdot 10^{-3} + s_1) \simeq 1 \cdot 10^{-10}.$$

Avînd în vedere faptul că s_1 va fi mai mic decît s obținut la punctul a), deci $s_1 \ll 1{,}6 \cdot 10^{-3}$, aceasta se poate neglija și se poate scrie relația aproximativă $1{,}6 \cdot 10^{-3}\ s_1 \simeq 1 \cdot 10^{-10}$ de unde se obține

$$s_1 \simeq 6{,}25 \cdot 10^{-8}\ mol \cdot dm^{-3}.$$

Observație: Calculul exact al lui s_1 prin rezolvarea ecuației de gradul doi, dă practic același rezultat.

d) $[Ag^+] = s_1 = 6{,}25 \cdot 10^{-8}\ mol \cdot dm^{-3}$
$[Cl^-] = 1{,}6 \cdot 10^{-3} + s_1 \simeq 1{,}6 \cdot 10^{-3}\ mol \cdot dm^{-3}$

s_1 fiind neglijabil în comparație cu 10^{-3}.

35°. a) Se calculează concentrațiile inițiale ale celor două soluții, în $mol \cdot dm^{-3}$. Soluția de azotat de plumb se diluează de zece ori față de concentrația ei inițială (înainte de amestecarea cu acidul sulfuric) devine $C_1 = 2 \cdot 10^{-3}\ mol \cdot dm^{-3}$. Acidul sulfuric este un acid dibazic, deci concentrația sa molară va fi jumătate din normalitate, adică $C_2 = 1 \cdot 10^{-2}\ mol \cdot dm^{-3}$. După amestecarea celor două soluții, volumul total al soluției obținute se dublează și deci concentrația fiecăreia se reduce la jumătate:

$$C_{Pb(NO_3)_2} = 1 \cdot 10^{-3}\ mol \cdot dm^{-3};$$
$$C_{H_2SO_4} = 5 \cdot 10^{-3}\ mol \cdot dm^{-3}.$$

Cum ambele săruri sînt electroliți tari, complet ionizați rezultă:

$$[Pb^{2+}] = 1 \cdot 10^{-3} \text{ mol} \cdot dm^{-3};$$
$$[SO_4^{2-}] = 5 \cdot 10^{-3} \text{ mol} \cdot dm^{-3}.$$

Precipitatul de sulfat de plumb se va forma numai dacă produsul concentrațiilor ionilor Pb^{2+} și SO_4^{2-} va fi mai mare decît produsul de solubilitate al acestei săruri:

$$[Pb^{2+}][SO_4^{2-}] = 1 \cdot 10^{-3} \cdot 5 \cdot 10^{-3} = 5 \cdot 10^{-6} > P_s = 2 \cdot 10^{-8}.$$

Deci la amestecarea celor două soluții se va forma precipitatul de sulfat de plumb.

b) Fie s solubilitatea sulfatului de plumb ($\text{mol} \cdot dm^{-3}$) în soluția obținută prin amestecarea celor două soluții inițiale, soluție în care există un exces de ioni SO_4^{2-}. De aceea în această soluție $[Pb^{2+}] = s$, iar concentrația ionilor de plumb care au precipitat este $(10^{-3} - s) \text{ mol} \cdot dm^{-3}$, egală evident și cu concentrația ionilor SO_4^{2-} care au precipitat. Se obține de aici concentrația ionilor SO_4^{2-} care au mai rămas în soluție, și anume:

$$[SO_4^{2-}] = 5 \cdot 10^{-3} - (10^{-3} - s) = (4 \cdot 10^{-3} + s) \text{ mol} \cdot dm^{-3}.$$

Produsul concentrațiilor ionilor Pb^{2+} și SO_4^{2-} rămași în soluție trebuie să fie egal cu produsul de solubilitate P_s:

$$s(s + 4 \cdot 10^{-3}) = 2 \cdot 10^{-8}.$$

Rezolvînd ecuația de gradul doi în s și luînd soluția pozitivă (singura care are sens fizic) se obține $s = 5 \cdot 10^{-6} \text{ mol} \cdot dm^{-3}$.

Rezultă în final:

$$[Pb^{2+}] = s = 5 \cdot 10^{-6} \text{ mol} \cdot dm^{-3} = 5 \cdot 10^{-6} \cdot 207 = 1{,}035 \cdot 10^{-3} \text{ g} \cdot dm^{-3}.$$
$$[SO_4^{2-}] = 4 \cdot 10^{-3} + s = 4 \cdot 10^{-3} + 5 \cdot 10^{-6} = 4{,}005 \cdot 10^{-3} \text{ mol} \cdot dm^{-3} = 4{,}005 \cdot 10^{-3} \cdot 96 =$$
$$= 0{,}3845 \text{ g} \cdot dm^{-3}.$$

36°. a) $\frac{112}{22{,}4} = 5$ moli HCl $= 5 \cdot 36{,}5$ g HCl $= 5$ echiv. HCl

10 l sol. HCl .... 5 echiv. HCl

1 l sol. HCl .... $x = 0{,}5$ echiv. HCl, respectiv: 0,5 N HCl și 0,5 M HCl

b) $H_3O^+ = HCl$, respectiv: $y = 0{,}5$ ioni gram H_3O^+/l

c) $\frac{V_{NaOH}}{V_{HCl}} = \frac{n_{HCl}}{n_{NaOH}}$ sau $NaOH = \frac{10 \cdot 0{,}5}{0{,}1} = 50$ l NaOH 0,1 N

37°. a) $Zn + 2\,HCl = ZnCl_2 + H_2$

b) Raportul de echivalență:



$$H_2 \longrightarrow Zn \longrightarrow 2\,HCl$$

22,4 l H_2 .... 65,38 g Zn .... 72,93 g HCl

15 l H_2 .... x' .... $y' \frac{10}{100}$

$$x' = \frac{65{,}38 \cdot 15}{22{,}4} = 43{,}78 \text{ g Zn};$$

$$y' = \frac{72{,}93 \cdot 15 \cdot 100}{22{,}4 \cdot 10} = 488 \text{ g HCl } 10\%.$$

c) Cu pierderi 8%:

$(100 - 8) = 92$ g Zn .... 100 g Zn

43,78 g Zn .... $x = \underline{47,59}$ g Zn

$(100 - 8) = 92$ g HCl .... 100 g HCl

488 g HCl .... $y = \underline{530,8 \text{ g HCl } 10\%}$.

38°. a) Elementele se substituie în cantități echivalente

$$E_{Al} = \frac{27}{3} = 9; \quad E_{Ag} = 108$$

$$\frac{m_{Al}}{m_{Ag}} = \frac{E_{Al}}{E_{Ag}}; \text{ 1 g Al depune: } \frac{108}{9} = 12 \text{ g Ag.}$$

$x =$ g Al dizolvat

$27 - x + 12\,x = 29,97$

$11\,x = 2,97; \quad x = 0,27$ g Al dizolvat

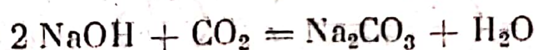
b) $\dfrac{0,27}{y} = \dfrac{9}{108}; \quad y = \dfrac{108 \cdot 0,27}{9} = 3,24$ g Ag depus.

c) $\dfrac{3,24}{108} = 0,03$ l $= 30$ ml $AgNO_3$ 1 M

d) $\dfrac{0,27 \cdot 1000}{30} = 9$ g Al^{3+} într-un litru soluție

$$\frac{m}{M} = \frac{9}{27} = 0,333 \text{ moli/l } Al^{3+},$$

39°. a) $CaCO_3 + 2\,HCl = CaCl_2 + CO_2 + H_2O$


$2\,NaOH + CO_2 = Na_2CO_3 + H_2O$

b) 5 kg calcar:

$5\,000 \cdot 0,8 = 4\,000$ g $CaCO_3$ 100%

1 mol $CaCO_3$ = 100 g .... 1 mol CO_2 (22,4 l)

4 000 g .... $x = 40$ moli $CO_2 = 896$ l CO_2.

c) 100 kg $CaCO_3$ .... 73 kg HCl

4 kg $CaCO_3$ .... $y = 2,92$ kg HCl 100% $= 29,2$ kg HCl 10%,

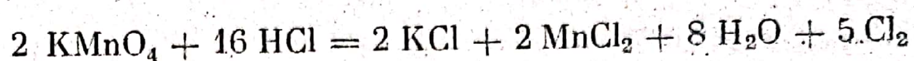
d) 2 moli NaOH absorb 1 mol CO_2

1 mol CO_2 .... 2 moli NaOH

40 moli CO_2 .... $x = 80$ moli NaOH

NaOH 0,5 M: 80 moli se află în $\dfrac{80}{0,5} = 160$ l soluție NaOH

40°. a) Ecuația reacției chimice care are loc:



$$2\ KMnO_4 + 16\ HCl = 2\ KCl + 2\ MnCl_2 + 8\ H_2O + 5\ Cl_2$$

b) 16 moli HCl .... 5 · 22,4 l Cl_2
x_1 moli HCl .... 1,12 l Cl_2

$x = 0,16$ moli HCl/100 cm³ soluție, ceea ce înseamnă că 1 000 cm³ soluție conțin 1,6 moli HCl.

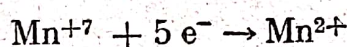
c) Masa de HCl din soluție: $0,16 \times 36,5 = 5,84$ g HCl în 100 cm³

100 g soluție .... 36 g HCl
x_2 g soluție .... 5,84 g HCl

$$x_2 = 16,2 \text{ g soluție HCl } 36\%$$

$$v = \frac{16,2 \text{ g}}{1,18 \text{g/cm}^3} = 13,74 \text{ cm}^3 \text{ soluție HCl } 36\%$$

d) Ținînd seama de procesul redox:

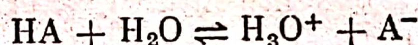


$$Mn^{+7} + 5\ e^- \rightarrow Mn^{2+}$$

se calculează echivalentul-gram al permanganatului de potasiu:

$$E = \frac{M_{KMnO_4}}{5} = 31,6.$$

41°. a) Ținînd seama de ecuația reacției chimice:



$$HA + H_2O \rightleftharpoons H_3O^+ + A^-$$

se scrie expresia constantei de aciditate:

$$K_a = \frac{[H_3O^+][A^-]}{[HA]} = \left\langle \frac{\frac{mol}{l} \cdot \frac{mol}{l}}{\frac{mol}{l}} \right\rangle = \left\langle \frac{mol}{l} \right\rangle$$

b) $K_a = \frac{\alpha^2 c}{1 - \alpha} \approx \frac{\alpha^2 c}{1} \Rightarrow \alpha = \sqrt{\frac{K_a}{c}}$

$$\alpha_1 = \sqrt{\frac{1 \cdot 10^{5}}{10^{-1}}} = 10^{-2}; \quad \alpha_2 = \sqrt{\frac{1 \cdot 10^{-5}}{10^{-3}}} = 10^{-1}.$$

c) Din ecuația reacției chimice se calculează concentrația ionilor H_3O^+ la echilibru:

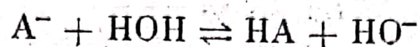
$$[H_3O^+] = \alpha c \Rightarrow [H_3O^+]_1 = 10^{-3}$$
$$[H_3O^+]_2 = 10^{-4}$$

sau:

$$[H_3O^+] = \sqrt{c \cdot K_a} \Rightarrow [H_3O^+]_1 = 10^{-3}$$
$$[H_3O^+]_2 = 10^{-4}.$$

d) $pH = -\log[H_3O^+]_2 = -\log 10^{-4} = 4.$

e) Procesul fiind stoechiometric, se formează sarea NaA care, provenind de la un acid slab, HA, va hidroliza:



$$A^- + HOH \rightleftharpoons HA + HO^-$$

şi soluţia va avea caracter bazic.

42°. a) În 250 ml soluţie NaOH 2 M se află:

$$\frac{250 \cdot 2}{1\,000} = 0{,}5 \text{ moli NaOH.}$$

Prin neutralizarea celor 0,5 moli NaOH se degajă 28,63 kJ, iar efectul termic al reacţiei de neutralizare se calculează imediat:

$$\Delta H_1 = \frac{28{,}63}{0{,}5} = 57{,}26 \text{ kJ/mol.}$$

În cei 500 ml soluţie se găseşte întreaga cantitate de HCl cuprinsă în 42 ml soluţie 37%.

$$\rho = \frac{m}{v} \Rightarrow m = 42 \cdot 1{,}19 = 50 \text{ g soluţie } 37\%;$$

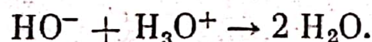
$$m_{HCl} = 50 \cdot \frac{37}{100} = 18{,}5 \text{ g adică } 0{,}506 \text{ moli.}$$

La reacţia de neutralizare participă numai 250 ml soluţie, adică jumătate din cantitatea de HCl (0,253 moli).

Efectul termic al reacţiei de neutralizare se calculează ca şi în cazul NaOH:

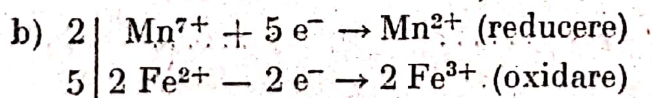
$$\Delta H_2 = \frac{14{,}51}{0{,}253} = 57{,}35 \text{ kJ/mol.}$$

Efectul termic al reacţiilor de neutralizare este acelaşi în cazul acizilor şi bazelor tari, fiind vorba de acelaşi proces care are loc:

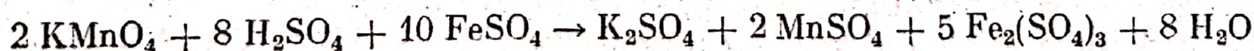


$$HO^- + H_3O^+ \rightarrow 2\,H_2O.$$

43°. a) În reacţia respectivă are loc oxidarea Fe(II) la Fe(III) prin urmare $A = Fe_2(SO_4)_3$



b)
$$\begin{array}{l|l} 2 & Mn^{7+} + 5\,e^- \rightarrow Mn^{2+} \text{ (reducere)} \\ 5 & 2\,Fe^{2+} - 2\,e^- \rightarrow 2\,Fe^{3+} \text{ (oxidare)} \end{array}$$



$$2\,KMnO_4 + 8\,H_2SO_4 + 10\,FeSO_4 \rightarrow K_2SO_4 + 2\,MnSO_4 + 5\,Fe_2(SO_4)_3 + 8\,H_2O$$

$KMnO_4$ — agent oxidant; $FeSO_4$ — agent reducător.

c) $v_{KMnO_4} \cdot n_{KMnO_4} = v_{FeSO_4} \cdot n_{FeSO_4}$.

$$v_{KMnO_4} = \frac{100 \cdot 0{,}1}{0{,}2} = 50 \text{ ml soluţie } KMnO_4 \text{ 0,2 N.}$$

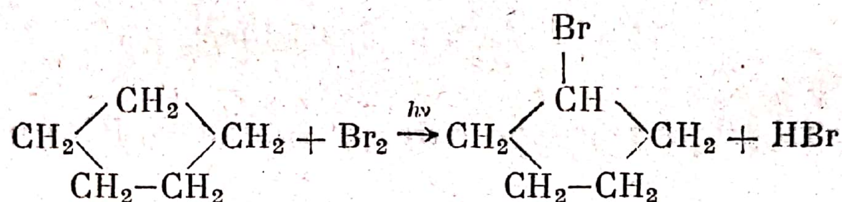
d) Se ține seama de faptul că echivalentul chimic al $KMnO_4$ în procesele redox este:

$$E_{KMnO_4} = \frac{M_{KMnO_4}}{5}$$

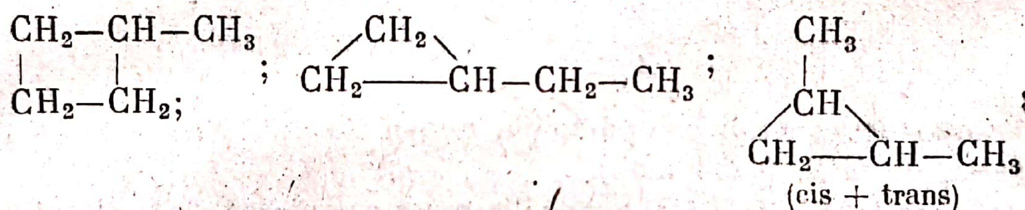
și ținînd seama de relația $n = pM(p = 5)$ rezultă:

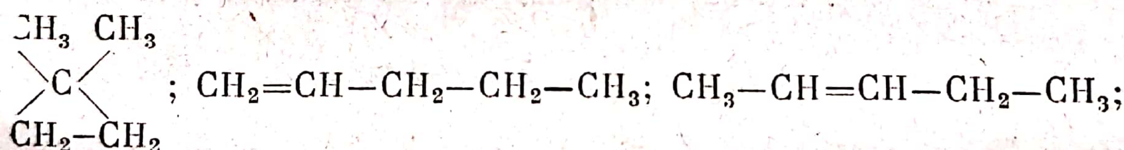
$$M = \frac{0,2}{5} = 0,04 \text{ moli/l } KMnO_4.$$

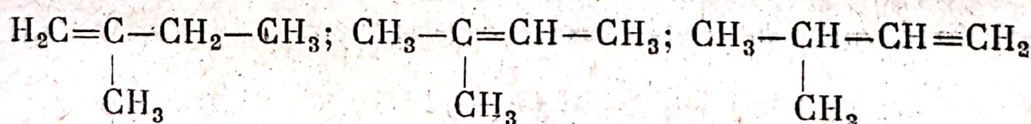
44°. Hidrocarbura A poate fi — după formula moleculară — o alchenă sau un cicloalcan. Deoarece la bromurare rezultă un singur derivat monobromurat, înseamnă că toți cei 10 atomi de hidrogen sînt echivalenți; deci A nu poate fi decît ciclopentan:



Formulele de structură ale izomerilor săi sînt:







45°. a) Stabilirea formulei moleculare:

100 g ...... 40,67 g C ...... 8,47 g H ...... 23,73 g N ...... 27,10 g O
50 g ...... x_1 ...... x_2 ...... x_3 ...... x_4

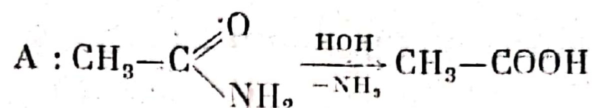
$$x_1 = 24; \quad C : \frac{24}{12} = 2 \text{ at. de C}$$

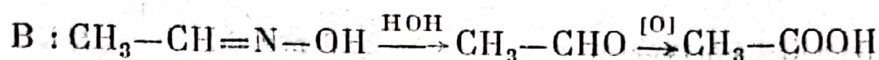
$$x_2 = 5; \quad H : \frac{5}{1} = 5 \text{ at. de H}$$

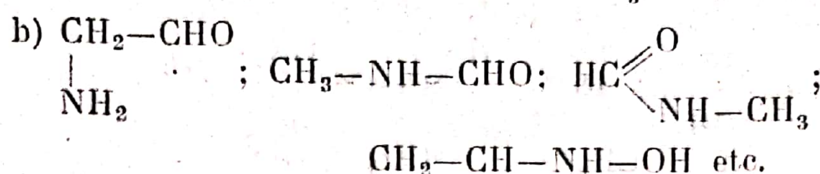
$$x_3 = 14; \quad N : \frac{14}{14} = 1 \text{ at. de N}$$

$$x_4 = 16; \quad O : \frac{16}{16} = 1 \text{ at. de O}$$

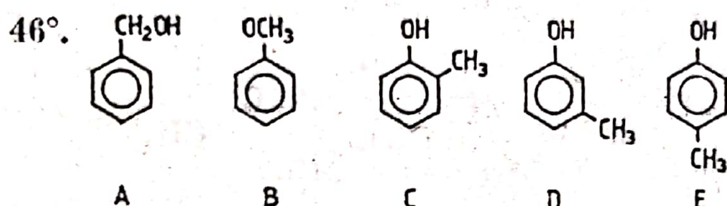
Formula moleculară: C_2H_5NO







46°.



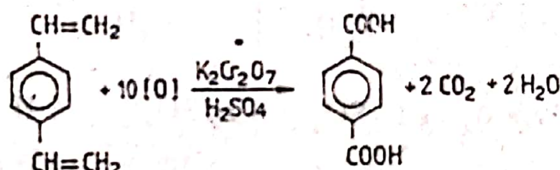
Reacțiile comune ale celor cinci substanțe izomere sînt reacțiile de substituție electrofilă la nucleul aromatic (halogenare, nitrare, sulfonare, alchilare etc.).

47.° Formula moleculară a hidrocarburii A:

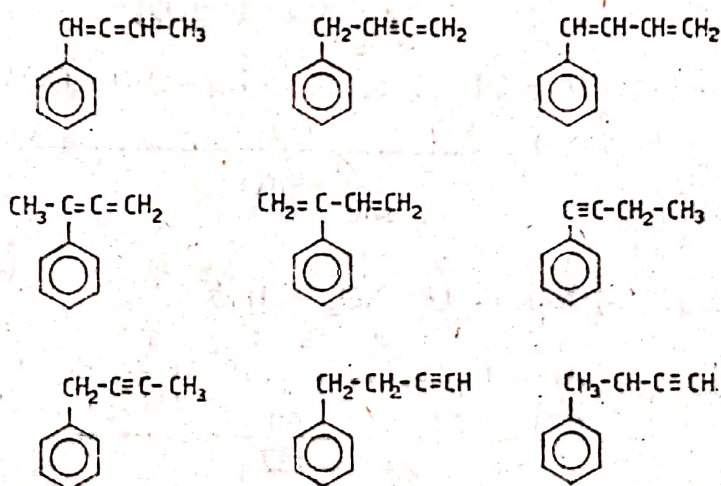
$$C : \frac{12}{12} = 1; \quad H : \frac{1}{1} = 1$$

$$(CH)_n = 130; \; n = 10.$$

Formula structurală a hidrocarburii A:

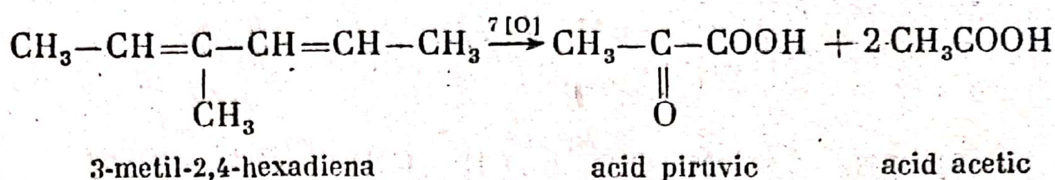


Formulele structurale ale izomerilor lui A care prin oxidare conduc la acid benzoic:



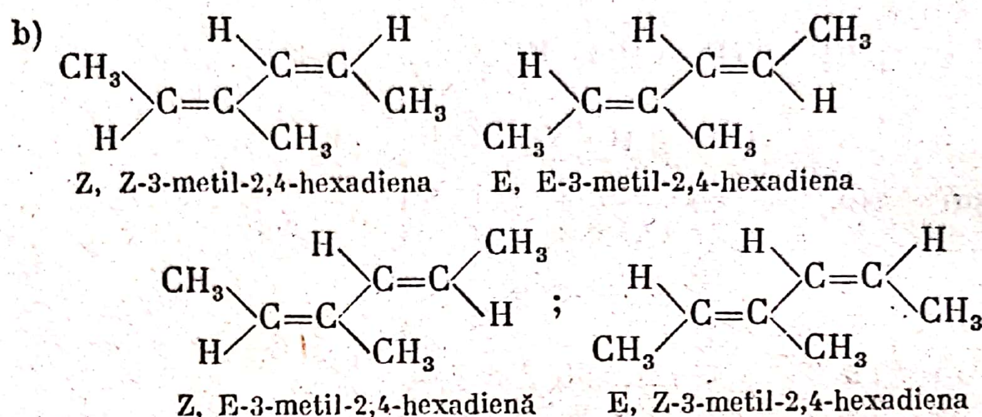
NE a *p*-divinilbenzenului = 6
NE a acidului benzoic = 5
NE a acidului tereftalic = 6

48°. a) Formula structurală a hidrocarburii A:



3-metil-2,4-hexadiena   acid piruvic   acid acetic

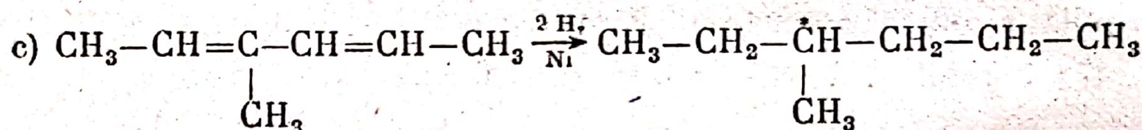
b)

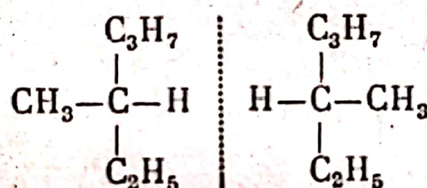


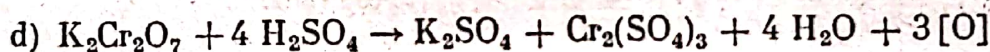
Z, Z-3-metil-2,4-hexadiena   E, E-3-metil-2,4-hexadiena

Z, E-3-metil-2,4-hexadienă ;   E, Z-3-metil-2,4-hexadiena

c)





d) 

$$K_2Cr_2O_7 + 4\,H_2SO_4 \rightarrow K_2SO_4 + Cr_2(SO_4)_3 + 4\,H_2O + 3\,[O]$$

$M_A = 96$;   96 g y .... 7 · 16 g [O]
9,6 x

$x = 0{,}7 \cdot 16$ g [O]

3 · 16 g [O] .... 1 mol $K_2Cr_2O_7$
0,7 · 16 .... y

$y = 0{,}23$ moli
vol. sol. $= 1\ dm^3$

49°. a) 

$$Ar{-}H + HNO_3 \rightarrow Ar{-}NO_2 + H_2O$$

Ar + 1 .... Ar + 46
25,6 34,6

Ar = 127

$M_{Ar-H} = 128\ (C_{10}H_8)$

Ar—H = naftalină

b) $$\begin{array}{l} 128 \text{ g} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots 63 \text{ g } HNO_3 \\ 25{,}6 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots x_1 \\ \hline x_1 = 12{,}6 \text{ g } HNO_3 \end{array}$$

$$\begin{array}{l} 2 \cdot 98 \text{ g } H_2SO_4 \ldots\ldots\ldots 63 \text{ g } HNO_3 \\ x_2 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots 12{,}6 \\ \hline x_2 = 30{,}2 \text{ g } H_2SO_4 \end{array}$$

$$\begin{array}{l} 100 \text{ g soluție } HNO_3 \ldots\ldots\ldots\ldots 63 \text{ g } HNO_3 \\ x_3 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots 12{,}6 \\ \hline x_3 = 20 \text{ g soluție } HNO_3 \; 63\% \end{array}$$

$$\begin{array}{l} 100 \text{ g soluție } H_2SO_4 \ldots\ldots\ldots\ldots 90 \text{ g } H_2SO_4 \\ x_4 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots 30{,}2 \\ \hline x_4 = 43{,}5 \text{ g soluție } H_2SO_4 \; 90\% \end{array}$$

Amestec nitrant necesar reacției: $43{,}5 + 20 = 63{,}5$ g

Amestec nitrant utilizat: $63{,}5 \cdot \frac{100}{50} = 127$ g.

50°. Se calculează numărul de moli de benzen și hidrogen la începutul reacției:

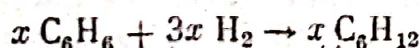
$$\frac{P_0V_0}{T_0} = \frac{PV}{T}; \; V_0 = 492{,}7 \text{ l}; \; \text{nr. moli} = \frac{492{,}7}{22{,}4} = 22 \text{ moli}$$

$(2$ moli C_6H_6 și 20 moli $H_2)$.

Numărul de moli la sfîrșitul reacției:

$$\frac{P_0V_0'}{T_0} = \frac{PV'}{T}; \; V_0' = 425{,}7 \text{ l}; \; \text{nr. moli} = 425{,}7/22{,}4 = 19 \text{ moli}$$

Se notează cu x nr. de moli de benzen hidrogenat:



$$x\,C_6H_6 + 3x\,H_2 \rightarrow x\,C_6H_{12}$$

$$2 - x + 20 - 3x + x = 19; \; x = 1.$$

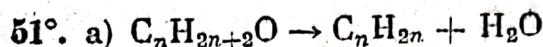
Randamentul reacției de hidrogenare (raportat la benzen):

$$\eta = \frac{1}{2} \cdot 100 = 50\%.$$

Amestecul final va conține 1 mol C_6H_6, 17 moli H_2, 1 mol C_6H_{12}.

Compoziția procentuală va fi:

$$\begin{array}{l} (1 \cdot 78 + 17 \cdot 2 + 1 \cdot 84) \text{ g amestec} \ldots\ldots 78 \text{ g } C_6H_6 \ldots\ldots 34 \text{ g } H_2 \ldots\ldots 84 \text{ g } C_6H_{12} \\ 100 \text{ g} \ldots\ldots\ldots\ldots x_1 \ldots\ldots\ldots\ldots x_2 \ldots\ldots\ldots x_3 \\ \hline x_1 = 39{,}80\% \; C_6H_6; \; x_2 = 17{,}34\% \; H_2; \; x_3 = 42{,}86\% \; C_6H_{12}. \end{array}$$

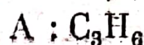


51°. a) $C_nH_{2n+2}O \rightarrow C_nH_{2n} + H_2O$

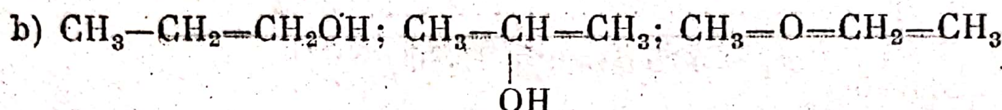
$$\frac{\begin{array}{lcl}(14\,n + 18)\text{ g B} & \ldots\ldots\ldots\ldots & 12\,n\text{ g carbon}\\ 100\text{ g} & \ldots\ldots\ldots\ldots & x_1\end{array}}{x_1 = \dfrac{1200\,n}{14\,n + 18}\,\%}$$

$$\frac{\begin{array}{lcl}14\,n\text{ g A} & \ldots\ldots\ldots\ldots & 12\,n\text{ g carbon}\\ 100 & \ldots\ldots\ldots\ldots & x_2\end{array}}{x_2 = \dfrac{1200\,n}{14\,n} = 85{,}71\,\%}$$

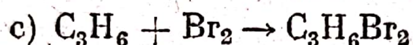
$$85{,}71 - \frac{1200\,n}{14\,n + 18} = 25{,}71;\ n = 3$$



$$A : C_3H_6$$



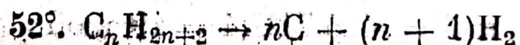
b) $CH_3{-}CH_2{=}CH_2OH$; $CH_3{=}\underset{\displaystyle OH}{\underset{|}{CH}}{=}CH_3$; $CH_3{=}O{=}CH_2{=}CH_3$



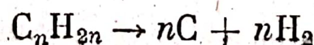
c) $C_3H_6 + Br_2 \rightarrow C_3H_6Br_2$

$$\frac{\begin{array}{lcl}22{,}4\text{ dm}^3\ C_3H_6 & \ldots\ldots\ldots\ldots & 160\text{ g } Br_2\\ 3{,}36\text{ dm}^3 & \ldots\ldots\ldots\ldots & x\end{array}}{x = 24\text{ g } Br_2.}$$

$$\frac{\begin{array}{lcl}100\text{ g soluție} & \ldots\ldots\ldots\ldots & 1{,}6\text{ g } Br_2\\ y & \ldots\ldots\ldots\ldots & 24\text{ g } Br_2\end{array}}{y = 1\,500\text{ g sol. } 1{,}6\%\ Br_2}$$



52°. $C_nH_{2n+2} \rightarrow nC + (n + 1)H_2$

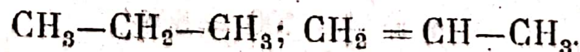


$C_nH_{2n} \rightarrow nC + nH_2$

Se notează cu x nr. de moli de alcan și respectiv, alchenă.
Volumul inițial al amestecului $= 2x \cdot 22{,}4$ dm^3 (c.n.).
Volumul final al amestecului $= x(n + 1) + xn \cdot 22{,}4$ dm^3.

$$3{,}5 \cdot 2x \cdot 22{,}4 = x(2n + 1) \cdot 22{,}4$$

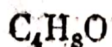
$$2n + 1 = 7;\ n = 3$$



$$CH_3{-}CH_2{-}CH_3;\ CH_2 = CH{-}CH_3.$$

53°. a) **Formula brută și moleculară:**

$$C : \frac{6}{12} = 0{,}5;\ H : \frac{1}{1} = 1;\ O : \frac{2}{16} = 0{,}125$$

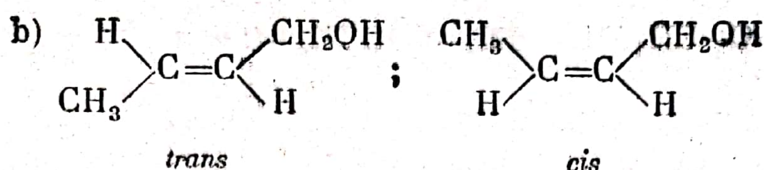


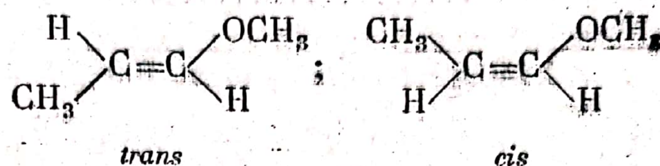
C_4H_8O

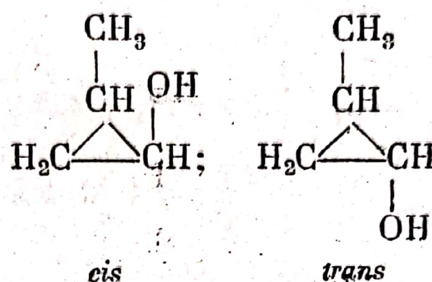
Formula structurală: $CH_2 = \underset{\displaystyle CH_3}{\underset{|}{C}}{-}CH_2OH$

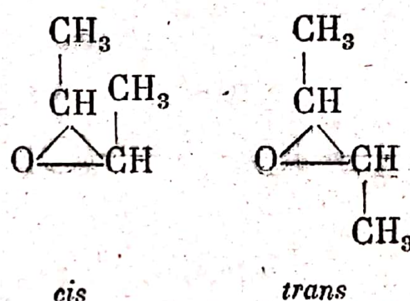


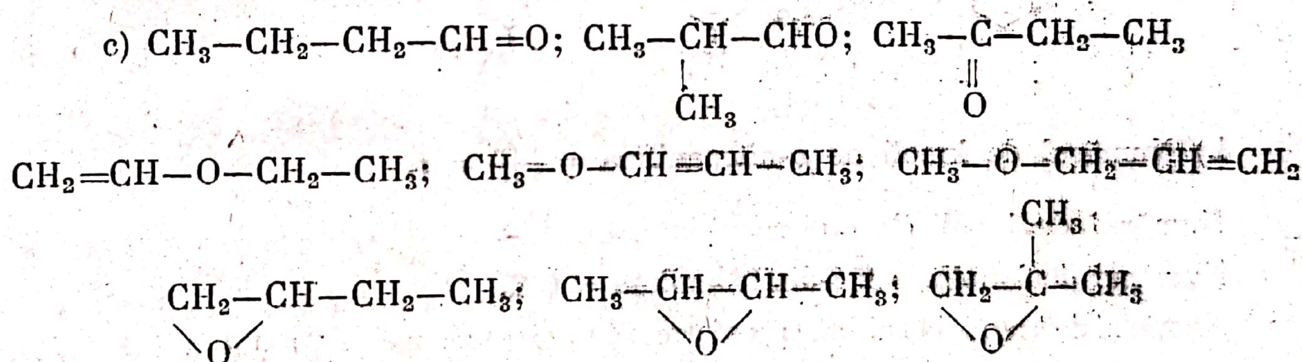


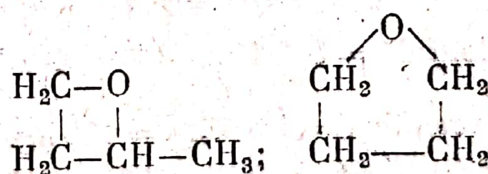

b)
H, CH3, CH2OH, H
CH3, H, CH2OH, H
trans
cis

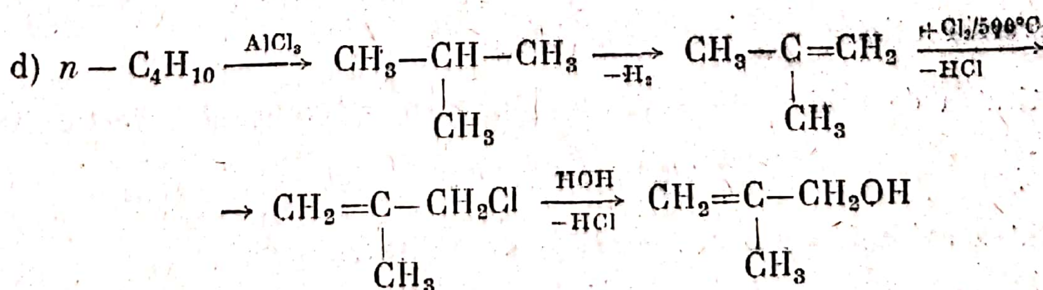

H, CH3, OCH3, H
CH3, H, OCH3, H
trans
cis

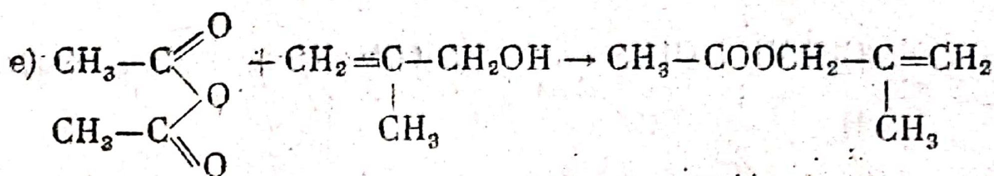

CH3
CH OH
H2C CH;
CH3
CH
H2C CH
OH
cis
trans


CH3
CH CH3
O CH
CH3
CH
O CH
CH3
cis
trans


c) CH3—CH2—CH2—CH=O; CH3—CH—CHO; CH3—C—CH2—CH3
CH3
O
CH2=CH—O—CH2—CH3; CH3—O—CH=CH—CH3; CH3—O—CH2—CH=CH2
CH3;
CH2—CH—CH2—CH3; CH3—CH—CH—CH3; CH2—C—CH3
O
O
O


H2C—O
H2C—CH—CH3;
O
CH2 CH2
CH2—CH2


d) n — C4H10
AlCl3
CH3—CH—CH3
CH3
−H2
CH3—C=CH2
CH3
+Cl2/500°C
−HCl
→ CH2=C—CH2Cl
CH3
HOH
−HCl
CH2=C—CH2OH
CH3

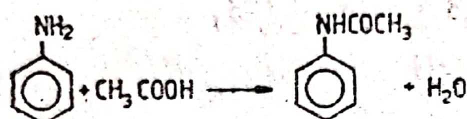


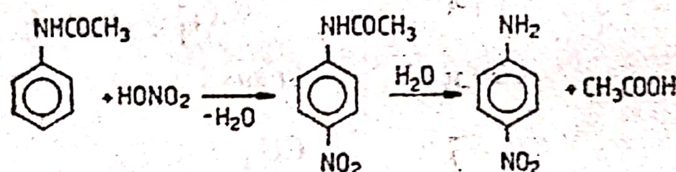
1 mol alcool .... 114 g eter
10 moli x

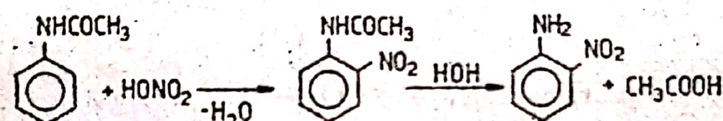
$x = 1\,140$ g ester (randament 100%)

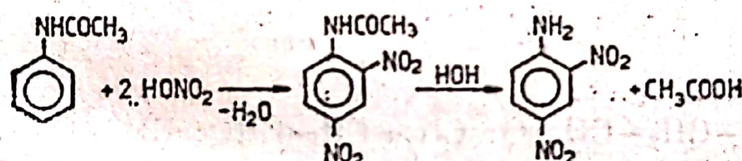
$$1\,140\,\frac{90}{100} = 1\,026 \text{ g ester (randament } 90\%).$$

54.° a) Ecuațiile reacțiilor:









b) Numărul de kmoli de *p*-nitroanilină $= \frac{276}{138} = 2$.

Numărul de kmoli de *o*-nitroanilină $= 1$.

Numărul de kmoli de 2,4-dinitroanilină $= 0{,}25$.

Numărul de kmoli de anilină transformată în nitroderivați $= 2 + 1 + 0{,}25 = 3{,}25$.

Cantitatea de anilină transformată $= 3{,}25 \times 93 = 302{,}25$ kg

Cantitatea de anilină inițială $= 302{,}25 \times \frac{100}{75} = 403$ kg $= 4{,}3$ kmoli.

c) Cantitatea de *o*-nitroanilină $= 1 \times 138 = 138$ kg.

Cantitatea de 2,4-dinitroanilină $= 0{,}25 \times 183 = 45{,}75$ kg.

d) Conversia utilă $= \frac{186}{403} \cdot 100 = 46{,}15\%$.

e) Cantitatea de acid acetic $= 4{,}33$ kmoli $\times 60 = 260$ kg acid acetic 100%

$$260 \cdot \frac{100}{98} = 265{,}3 \text{ kg.}$$

Bazicitatea anilinei > *p*-nitroanilinei > 2,4-dinitroanilinei.

55°. a) Ştiind că cele trei hidrocarburi au în moleculă acelaşi număr de atomi de carbon, se pot scrie următoarele formule moleculare:

A : C_xH_y unde x = număr de atomi de carbon;

B : C_xH_z z, y, u = număr de atomi de hidrogen.

C : C_xH_u

Se calculează procentele de hidrogen:

$$\frac{\begin{array}{l}(12x + y)\text{ hidrocarbură A} \ldots\ldots\ldots y\text{ g H}\\ 100 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots 18{,}18\end{array}}{100\,y = 18{,}18(12x + y)}$$

$$\frac{\begin{array}{l}(12x + z)\text{ g hidrocarbură B} \ldots\ldots\ldots z\text{ g H}\\ 100 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots 14{,}28\end{array}}{100\,z = 14{,}28(12x + z).}$$

$$\frac{\begin{array}{l}(12x + u)\text{ hidrocarbură C} \ldots\ldots\ldots u\text{ g H}\\ 100 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots 10{,}00\end{array}}{100\,u = 10(12x + u).}$$

Din enunţ se ştie că $y = u + 4$ şi înlocuind valoarea lui y din prima ecuaţie, obţinem:

$$100\,u = 10\,(12\,x + u)$$
$$100\,(u + 4) = 18{,}18\,(12\,x + u + 4)$$
$$100\,u = 120\,x + 10\,u$$
$$90\,u = 120\,x$$

$$u = \frac{120x}{90}\;;\; u = \frac{4x}{3}$$

$$100\left(\frac{4x}{3} + 4\right) = 18{,}18\left(12\,x + \frac{4x}{3} + 4\right).$$

Rezolvînd această ecuaţie, se găseşte $x = 3$; apoi se calculează $u = 4$; $y = 8$, $z = 6$.

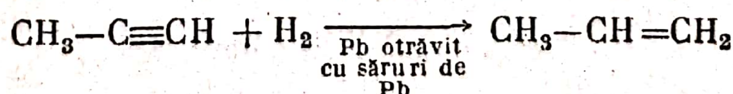
Deci formulele celor trei hidrocarburi sînt:

A : $CH_3{-}CH_2{-}CH_3$ propan;

B : $CH_2{=}CH{-}CH_3$ propenă;

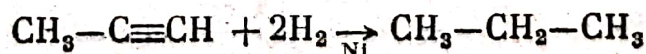
C : $CH{\equiv}C{-}CH_3$ propină.

b) C se poate transforma în B prin hidrogenare parţială:



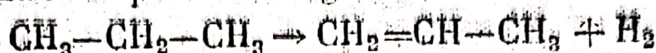
$$CH_3{-}C{\equiv}CH + H_2 \xrightarrow[\text{cu săruri de Pb}]{\text{Pb otrăvit}} CH_3{-}CH{=}CH_2$$

C se poate transforma în A prin hidrogenare completă:



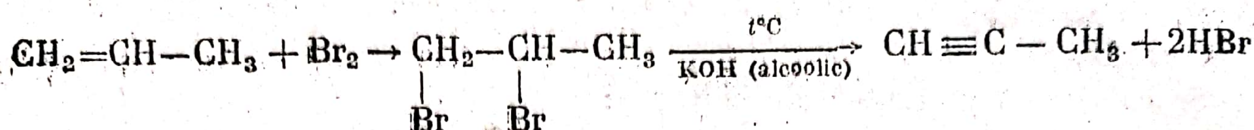
$$CH_3{-}C{\equiv}CH + 2H_2 \xrightarrow[Ni]{} CH_3{-}CH_2{-}CH_3$$

A se transformă în B prin dehidrogenare:



$$CH_3-CH_2-CH_3 \rightarrow CH_2=CH-CH_3 + H_2$$

B se transformă în C astfel:



$$CH_2=CH-CH_3 + Br_2 \rightarrow \underset{\displaystyle Br}{\underset{|}{C}H_2}-\underset{\displaystyle Br}{\underset{|}{C}H}-CH_3 \xrightarrow[\text{KOH (alcoolic)}]{t°C} CH\equiv C-CH_3 + 2HBr$$

56°. a) Se calculează volumul amestecului gazos măsurat în condiții normale

$$\frac{P_0V_0}{T_0} = \frac{PV}{T} \Rightarrow V_0 = 56 \text{ dm}^3.$$

Se scade volumul ocupat de 2 moli etan ($44,8 \text{ dm}^3$) în condiții normale și se află volumul ocupat de 21 g alchenă:

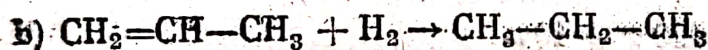
$$56 - 44,8 = 11,2 \text{ dm}^3.$$

Se calculează masa moleculară a alchenei:

$11,2 \text{ dm}^3$ .... 21 g
$22,4 \text{ dm}^3$ .... M g (1 mol.)

$$M = 42$$

$$C_nH_{2n} = 42 \Rightarrow n = 3 \text{ (propenă)}.$$



b) $CH_2=CH-CH_3 + H_2 \rightarrow CH_3-CH_2-CH_3$

$22,4 \text{ dm}^3$ propenă .... $22,4 \text{ dm}^3$ H_2
$11,2 \text{ dm}^3$ x

$$x = 11,2 \text{ dm}^3\ H_2.$$

Volumul total de gaze (măsurat în condiții normale) va fi:

$$56 + 11,2 = 67,2 \text{ dm}^3.$$

Presiunea în cilindru va fi:

$$P_1 = \frac{67,2 \cdot 300}{22,4 \cdot 273} = 3,3 \text{ atm}.$$

c) La hidrogenarea a $5,6 \text{ dm}^3$ propenă (50%) se consumă $5,6 \text{ dm}^3$ din volumul de hidrogen (rezultînd $5,6 \text{ dm}^3$ propan).

Volumul gazelor după hidrogenare (măsurat în condiții normale) va fi:

$$67,2 - 5,6 = 61,6 \text{ dm}^3$$

Presiunea în cilindru va fi în acest caz:

$$\frac{P_0V_0}{T_0} = \frac{P_2V}{T_2} \Rightarrow P_2 = \frac{61,6 \cdot 350}{22,4 \cdot 273} = 3,52 \text{ atm}.$$

d) 42 g propenă .... 1 mol
21 g x

$x = 0{,}5$ moli propenă

În cilindru vor fi 2 moli etan şi 0,5 moli propenă deci în total 2,5 moli.

$$2 \times 30 = 60 \text{ g (etan)}$$
$$0{,}5 \times 42 = 21 \text{ g (propenă)}$$

$$\overline{M} = \frac{60 + 21}{2{,}5} = 32{,}4.$$

57°. Se determină volumul ocupat de butan în condiţii normale:

58 kg C_4H_{10} .... 22,4 m³
116 kg x

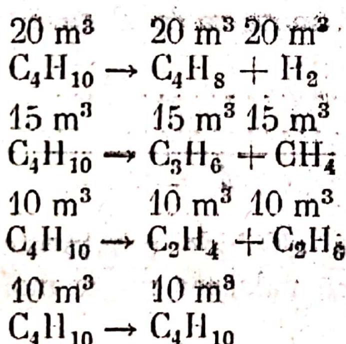
$x = 44{,}8$ m³.

Se determină presiunea în reactor la începutul procesului ($t = 546°$ C)

$$\frac{P_0V_0}{T_0} = \frac{P_iV}{T} \rightarrow P = \frac{P_0V_0T}{VT_0} = \frac{44{,}8(546 + 273)}{56 \cdot 273}$$

$$P = 2{,}4 \text{ atm.}$$

Pentru a calcula presiunea la sfîrşitul procesului (t = 546° C) se calculează mai întîi volumul total al gazelor rezultate:



$$\overset{20\ m^3}{C_4H_{10}} \rightarrow \overset{20\ m^3}{C_4H_8} + \overset{20\ m^3}{H_2}$$
$$\overset{15\ m^3}{C_4H_{10}} \rightarrow \overset{15\ m^3}{C_3H_6} + \overset{15\ m^3}{CH_4}$$
$$\overset{10\ m^3}{C_4H_{10}} \rightarrow \overset{10\ m^3}{C_2H_4} + \overset{10\ m^3}{C_2H_6}$$
$$\overset{10\ m^3}{C_4H_{10}} \rightarrow \overset{10\ m^3}{C_4H_{10}}$$

55 m³ C_4H_{10} .... 100 m³ amestec gazos
44,8 m³ x

$x = 81{,}45$ m³ amestec gazos (în condiţii normale)

$$P_f = \frac{81{,}45(546 + 273)}{56 \cdot 273} = 4{,}36 \text{ atm.}$$

58°. a, b) Se calculează formula moleculară a substanţei b:

$$C: \frac{12}{12} = 1$$

$$H: \frac{1}{1} = 1$$

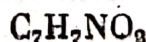
$$N: \frac{2}{14} = 0{,}142$$

$$O: \frac{4{,}57}{16} = 0{,}282$$

$\rightarrow C_7H_7NO_2$ (formula brută)

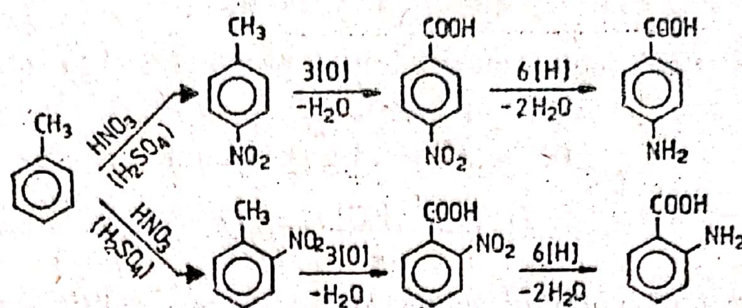
$(C_7H_7NO_2)_n = 147 \Rightarrow n = 1$

Deci formula moleculară este:

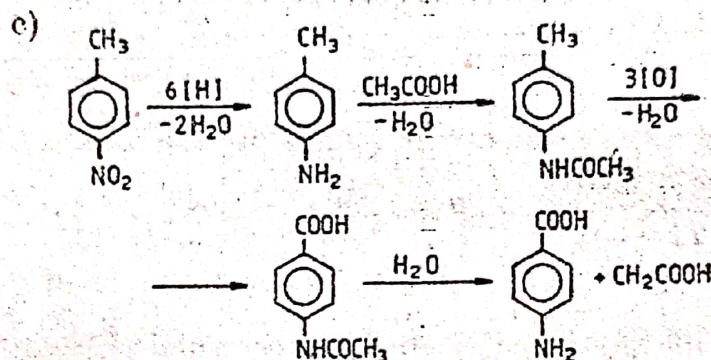


$C_7H_7NO_2$

Avînd în vedere datele problemei și formula moleculară a substanței b, schema poate fi redată astfel:



c)

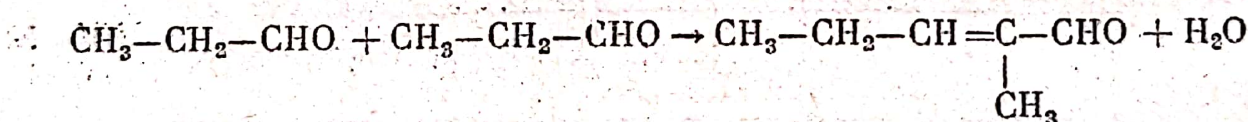


59°. a) 16° Se determină masa moleculară a substanței B:

100 g B .... 16,32 g O
M (1 moli) .... 16 g O

$$M = 98.$$

Formula generală a unei aldehide nesaturate (cum este B) : $C_nH_{2n-2}O$ rezultînd pentru B, $n = 6$. (După valoarea masei moleculare a lui B este exclus ca aldehida A să fie aromatică.)

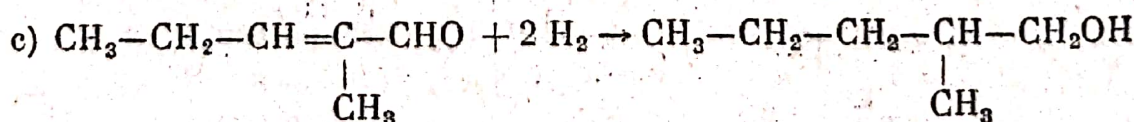


b) 2 kmoli A .... 1 kmol B
4 kmoli A x

$x = 2$ kmoli B (randament 100%)

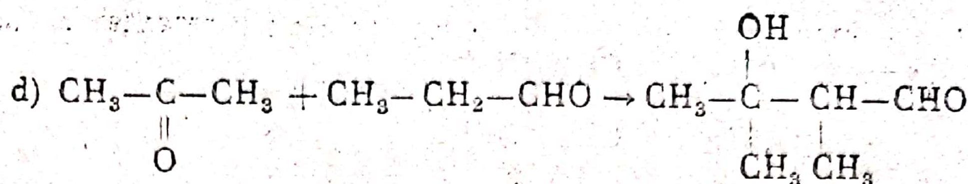
$$\eta = \frac{1,5}{2} \cdot 100 = 75\%,$$

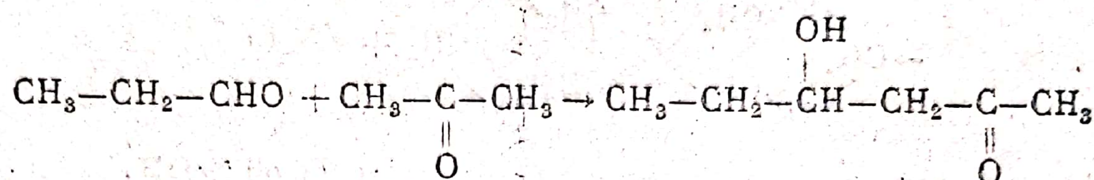
c)



1 kmol .... $2 \cdot 22,4\ m^3$
1,5 kmoli x

$$x = 2 \cdot 1,5 \cdot 22,4 = 67,2\ m^3.$$





60°. a) Se determină formula moleculară a substanței D:

$$C: \frac{136 \cdot 44{,}12}{12 \cdot 100} = 5;$$

$$H: \frac{136 \cdot 8{,}82}{1 \cdot 100} = 12;$$

$$O: \frac{136 \cdot 47{,}05}{16 \cdot 100} = 4.$$

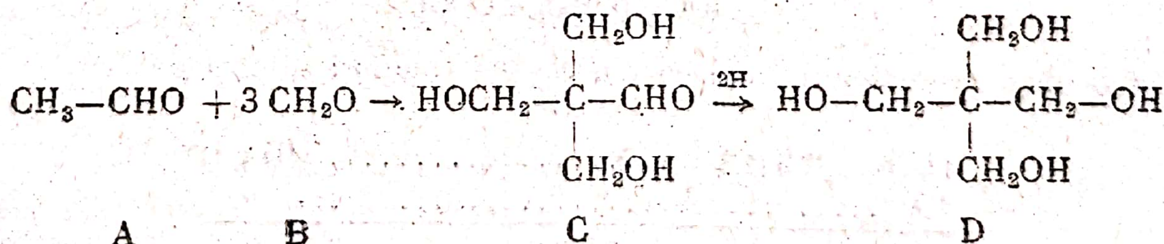
Formula moleculară: $C_5H_{12}O_4$.

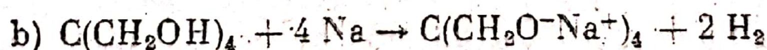
Determinarea numărului de grupe hidroxil

6,8 g D .... 20,4 g anhidridă acetică
136 g .... x_1

$x_1 = 408$ g anhidridă acetică $= 4$ moli.

Deci substanța D are patru grupe hidroxil. Ținînd cont de modul de obținere a substanței D, formulele de structură ale substanțelor A, B, C și D și ecuațiile reacțiilor sînt următoarele:



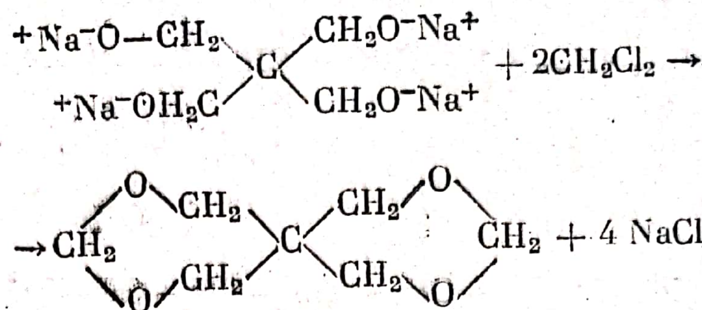


b) $C(CH_2OH)_4 + 4\,Na \rightarrow C(CH_2O^-Na^+)_4 + 2\,H_2$

136 g .... $2 \cdot 22{,}4$ l H_2
6,8 .... x_2

$x_2 = 2{,}24$ l H_2

e)



61°. 1 dm^3 soluţie .... 0,8 moli NaOH
0,5 dm^3 x

$$x = 0{,}4 \text{ moli NaOH}.$$

Fiind vorba de un amesteo echimolecular de acizi monocarboxilici, înseamnă că sînt cîte 0,2 moli din fiecare acid în amestec.

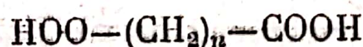
Formula generală a unui acid monocarboxilic saturat este $C_nH_{2n}O_2$. Se notează cu n, respectiv n', numărul de atomi de carbon din molecula fiecărui acid şi va rezulta:

$$0{,}2\,(14\,n + 32) + 0{,}2\,(14\,n' + 32) = 26{,}8$$

$$0{,}2\,(14\,n + 31 + 23) - 0{,}2\,(14\,n' + 31 + 23) = 2{,}8,$$

Rezolvînd sistemul se află $n = 3$ şi $n' = 2$.
Deci acizii sînt: $CH_2—CH_2—COOH$ şi $CH_3—COOH$.
În urma reacţiei rezultă 0,2 moli propionat de sodiu şi 0,2 moli acetat de sodiu.
Compoziţia procentuală va fi 46,06% acetat şi 53,94% propionat.

62°. Formula generală a unui acid dicarboxilic saturat este:



$$HOO—(CH_2)_n—COOH$$

iar cea a diclorurii sale acide este:



$$ClOC—(CH_2)_n—COCl.$$

Calculînd procentele de oxigen din cei doi compuşi se obţine:

$(14\,n + 90)$ g A .... 64 g O
100 .... a

$$a = \frac{6\,400}{14\,n + 90}\ \%\,O$$

$(14\,n + 71 + 56)$ g B .... 32 g
100 .... b

$$b = \frac{3\,200}{14\,n + 127}\ \%\,O.$$

Făcînd raportul procentelor de oxigen:

$$\frac{6\,400}{14n+90}:\frac{3\,200}{14n+127}=2,71$$

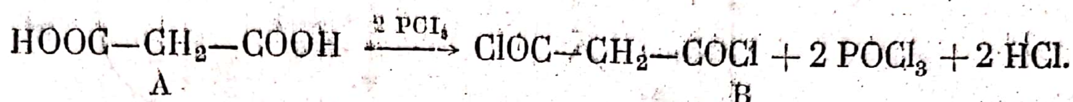
$$\frac{(14n+127)\cdot 2}{14n+90}=2,71$$

$$28n+254=38n+244$$

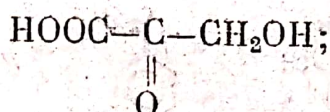
$$10n=10$$

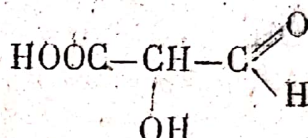
$$n=1.$$

Deci formulele lui A și B sînt:



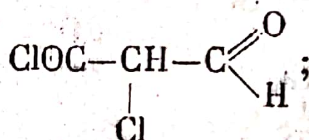
b) Formulele structurale ale izomerilor lui A și, respectiv, B sînt:
Izomerii lui A:

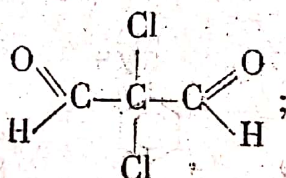


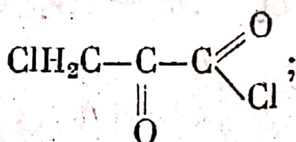


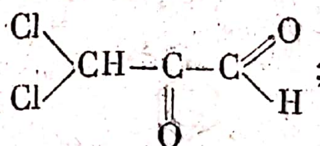


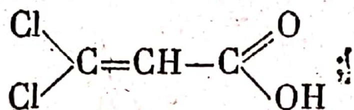
Izomerii lui B:

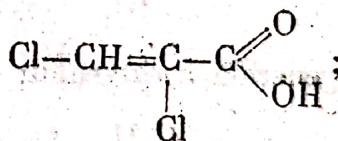


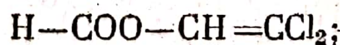














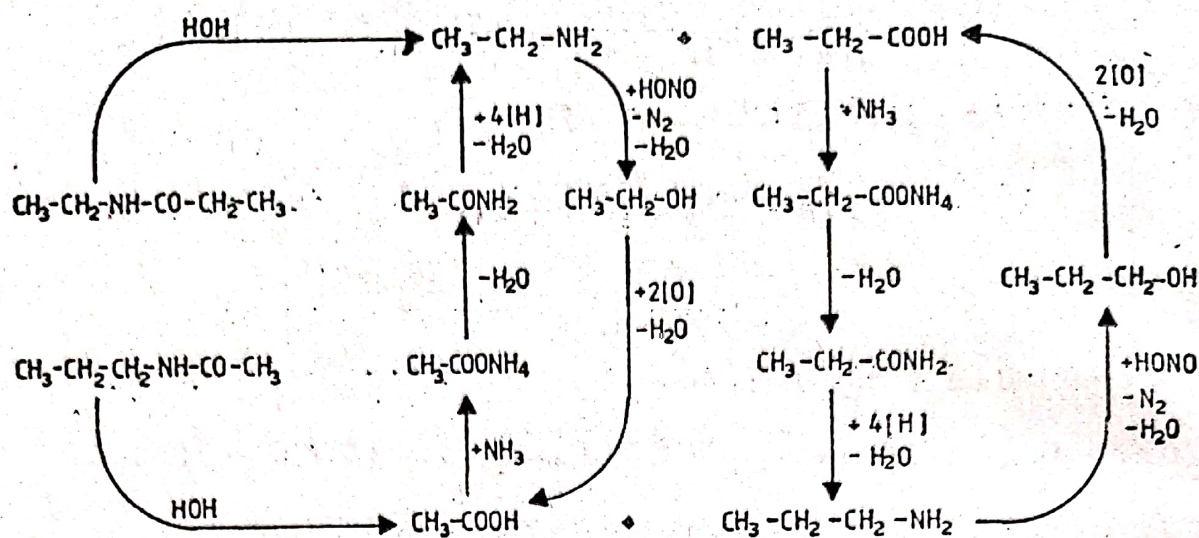
c) Din 104 kg A (1 kmol) .... 2 kmoli HCl
52 kg x

$x = 1$ kmol HCl.

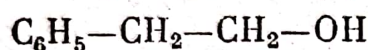
1 dm³ soluție .... 2 moli
x .... 1 000 moli

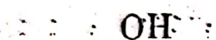
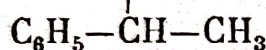
$x = 500$ dm³ soluție.

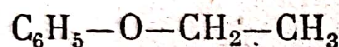
63°.

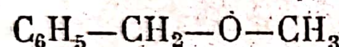


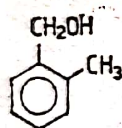
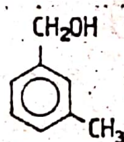
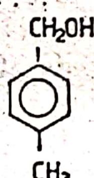
64°. Alcooli şi eteri

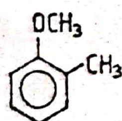
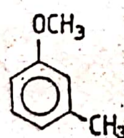
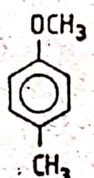

$C_6H_5-CH_2-CH_2-OH$



$C_6H_5-CH(OH)-CH_3$

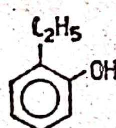
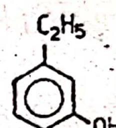
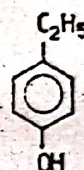

$C_6H_5-O-CH_2-CH_3$

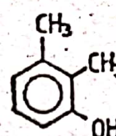
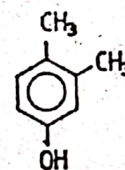
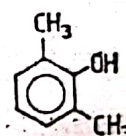

$C_6H_5-CH_2-O-CH_3$

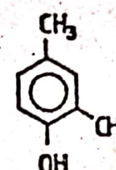
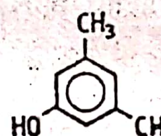
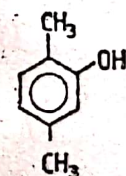




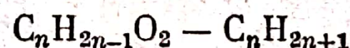
Fenoli

65°. Formula generală a esterului:


$$C_nH_{2n-1}O_2 - C_nH_{2n+1}$$

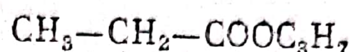
Se calculează procentul de hidrogen:

$$(12 \cdot 2n + 2n - 1 + 2n + 1 + 32) \text{ g ester } \ldots\ldots\ldots \; 2n - 1 + 2n + 1$$
$$100 \text{ g } \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \; x_1$$

$$x_1 = \frac{4n \cdot 100}{28n + 32} \text{ \% H.}$$

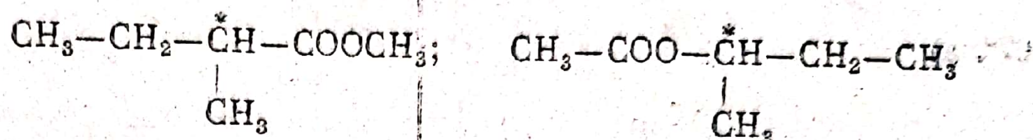
$$\frac{4n \cdot 100}{28n + 32} = 10{,}35 \Rightarrow n = 3$$

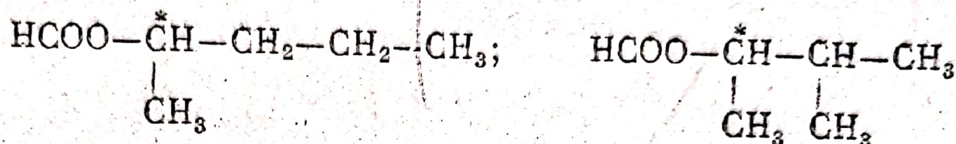
Deci formula moleculară a esterului va fi

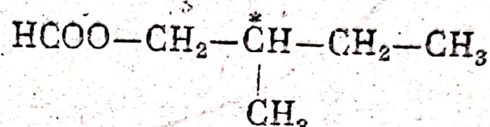


$$CH_3-CH_2-COOC_3H_7$$

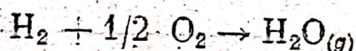
Formulele esterilor optic activi:







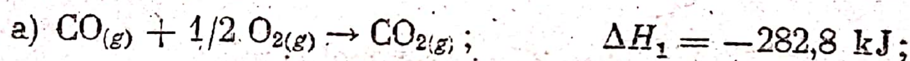
66°. a) Din energiile de legătură date se obține căldura de ardere a hidrogenului.



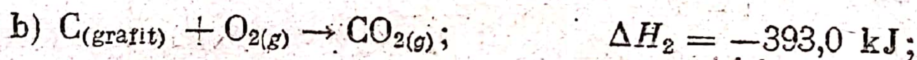
$$H_2 + 1/2\ O_2 \rightarrow H_2O_{(g)}$$

$$\Delta H^0_{ardere\ H_2} = \varepsilon_{H-H} + 1/2\varepsilon_{O=O} - 2\varepsilon_{O-H} = -241{,}1\ kJ.$$

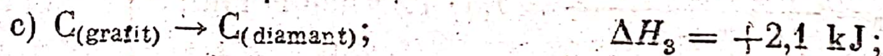
Deci se dau următoarele reacții termochimice și efectele termice respective.



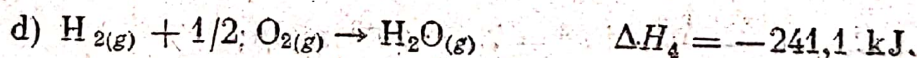
a) $CO_{(g)} + 1/2\ O_{2(g)} \rightarrow CO_{2(g)}$; $\Delta H_1 = -282{,}8\ kJ$;



b) $C_{(grafit)} + O_{2(g)} \rightarrow CO_{2(g)}$; $\Delta H_2 = -393{,}0\ kJ$;

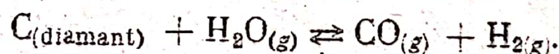


c) $C_{(grafit)} \rightarrow C_{(diamant)}$; $\Delta H_3 = +2{,}1\ kJ$;



d) $H_{2(g)} + 1/2\ O_{2(g)} \rightarrow H_2O_{(g)}$ $\Delta H_4 = -241{,}1\ kJ$.

Se cere calculat efectul termic al reacției:



$$C_{(diamant)} + H_2O_{(g)} \rightleftarrows CO_{(g)} + H_{2(g)}.$$

Aplicînd metoda generală de rezolvare (metoda „coeficienților nedeterminați") se găsește că înmulțind ecuațiile a), c) și d) cu -1 și apoi adunîndu-le cu ecuația b) se obține chiar ecuația pentru care se cere calculat efectul termic. Deci:

$$\Delta^r H^0_{298} = -\Delta H_1 + \Delta H_2 - \Delta H_3 - \Delta H_4 = 128{,}8\ kJ.$$

2) $\Delta^r S^0_{298} = S^0_{CO} + S^0_{H_2} - S^0_{(diamant)} - S^0_{H_2O(g)} = 137{,}2\ J/mol \cdot K.$

3) $\Delta^r G^0_T = \Delta^r H^0_{298} - T\Delta^r S^0_{298}.$

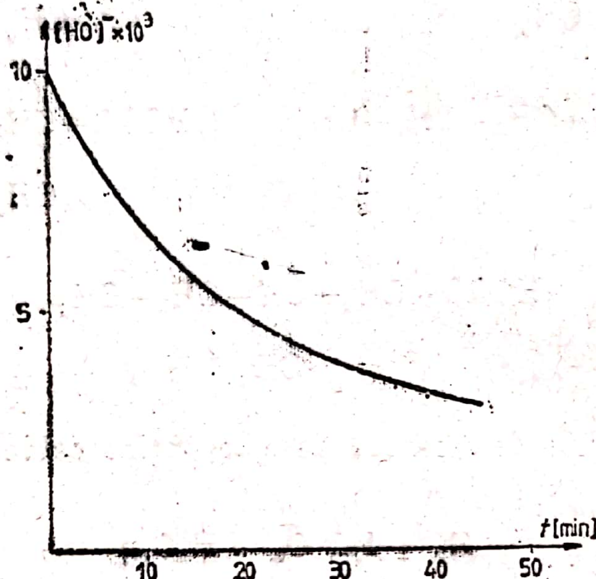
Deci: $\Delta^r G^0_{1000} = \Delta^r H^0_{298} - 1\,000\ \Delta^r S^0_{298} = -8\,400\ J.$

4) $\Delta G_T^0 = -RT \ln K_p$; rezultă $\ln K_p = \frac{-\Delta G_T^0}{RT} \simeq 1$; $K_p = e$ (baza logaritmilor naturali).

$K_p = K_x \cdot P^{\Delta\nu}$; $\Delta\nu$ este variaţia numărului de moli de gaz.

Rezultă: $K_x = \frac{K_p}{P} = 1{,}359$.

67°. a)



b) Se calculează viteza medie pe două intervale de timp, preferabil pe mijlocul intervalului, precum şi concentraţia medie pe aceleaşi intervale de timp:

$$\bar{v}_{5-9} = \frac{(8-6{,}9)\cdot 10^{-3}}{9-5} = 2{,}75 \cdot 10^{-4} \text{ mol/l} \cdot \text{min};$$

$$\bar{v}_{14-20} = \frac{(5{,}9-5{,}0)\cdot 10^{-3}}{20-14} = 1{,}5 \cdot 10^{-4} \text{ mol/l} \cdot \text{min};$$

$$\bar{C}_{5-9} = \frac{8+6{,}9}{2} \cdot 10^{-3} = 7{,}45 \cdot 10^{-3} \text{ mol/l};$$

$$\bar{C}_{14-20} = \frac{5{,}9+5}{2} \cdot 10^{-3} = 5{,}45 \cdot 10^{-3} \text{ mol/l}.$$

Dacă n este ordinul parţial de reacţie în raport cu hidroxidul, iar m cel în raport cu esterul, atunci concentraţiile iniţiale ale reactanţilor fiind egale ele rămîn egale în tot timpul şi deci se poate scrie:

$$\bar{v}_{5-9} = k[C_{5-9}]^{n+m}$$

şi

$$\bar{v}_{14-20} = k[C_{14-20}]^{n+m}.$$

Făcînd raportul acestor două viteze medii se obţine:

$$\frac{\bar{v}_{5-9}}{\bar{v}_{14-20}} = \left[\frac{\bar{C}_{5-9}}{\bar{C}_{14-20}}\right]^{n+m} \quad \text{adică} \quad \frac{2{,}75 \cdot 10^{-4}}{1{,}5 \cdot 10^{-4}} = \left[\frac{7{,}45}{5{,}45}\right]^{n+m}.$$

Efectuind calculele rezultă:

$$1{,}833 = (1{,}367)^{n+m}$$

de unde:

$$n + m = \frac{\ln 1{,}833}{\ln 1{,}367} \simeq 2$$

adică ordinul total de reacție este 2.

c) Se calculează valorile constantei de viteză pentru cele două intervale de timp alese (eventual se mai fac calcule și pentru alte intervale de timp) și se ia valoarea medie obținută pentru constanta de viteză:

$$k_1 = \frac{\bar{v}_{5-9}}{(\bar{C}_{5-9})^2} = \frac{2{,}75 \cdot 10^{-4}\ \text{mol/l} \cdot \text{min}}{(7{,}45 \cdot 10^{-3})^2\ \text{mol}^2/\text{l}^2} = 4{,}95\ \text{l/mol} \cdot \text{min}.$$

Analog avem:

$$k_2 = \frac{\bar{v}_{14-20}}{(\bar{C}_{14-20})^2} = 5{,}05\ \text{l/mol} \cdot \text{min}.$$

Rezultă astfel valoarea medie a constantei de viteză, la 27°C, $k = 5$ l/mol·min.

Pentru a găsi valoarea acestei constante la 57°C, se folosește ecuația lui Arrhenius.

$$k = A \cdot e^{-Ea/RT}$$

în care Ea este energia de activare, iar A, factorul de frecvență, practic independent de temperatură. Aplicînd relația pentru cele două temperaturi se obține:

$$k_{27°C} = A \cdot e^{-Ea/R\,300}$$

$$k_{57°C} = A \cdot e^{-Ea/R\,330}$$

Făcînd raportul rezultă:

$$\frac{k_{57°C}}{k_{27°C}} = e^{\frac{Ea}{R}\left(\frac{1}{300} - \frac{1}{330}\right)}$$

de unde înlocuind valorile numerice se obține:

$$k_{57°C} = 64{,}2\ \text{l/mol} \cdot \text{min}.$$

68°. a) Formula moleculară a sării este: $Me_2(SO_4)_3$ și dacă A este masa atomică a metalului atunci: $2A + 3 \cdot 96 = 342$ de unde $A = 27$. Deci metalul este aluminiul.

Numărul de kmoli de aluminiu este $\frac{810}{27} = 30$ kmoli.

În urma reacției:



$$2\,Al + 3\,H_2SO_4 \rightarrow Al_2(SO_4)_3 + 3\,H_2$$

vor rezulta 15 kmoli sulfat de aluminiu, adică 5 130 kg.

b) Gazul rezultat este hidrogenul. Vor rezulta 45 kmoli H_2 adică

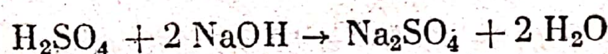
$$45 \cdot 22{,}4 = 1\,008 \ \text{m}^3 \ \text{(c.n.)}$$

$$\rho = \frac{M}{V} = \frac{2}{22{,}4} = 0{,}0893 \ \text{g/l} = 0{,}0893 \ \text{kg/m}^3$$

$$d_{aer} = \frac{M_{H_2}}{28{,}9} = 0{,}0692.$$

c) În reacție s-au consumat 45 kmoli H_2SO_4, adică 4 410 kg. Soluția utilizată conține $9\,000 \cdot \frac{50}{100} = 4\,500$ kg acid. Deci cantitatea rămasă după reacție este $4\,500 - 4\,410 = 90$ kg H_2SO_4.

d) Ecuația reacției de neutralizare:



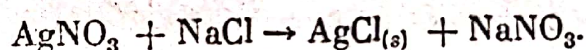
$$H_2SO_4 + 2\,NaOH \rightarrow Na_2SO_4 + 2\,H_2O$$

Numărul de moli de H_2SO_4 ce se neutralizează este $\frac{90\,000}{98} = 918{,}37$ moli și deci numărul de moli de NaOH necesar va fi $2 \times 918{,}37 = 1\,836{,}74$ moli.

Soluția de NaOH conținînd 2 mol/l, volumul ei va fi:

$$918{,}37 \ \text{l} = 0{,}91837 \ \text{m}^3.$$

69°. a) Ecuația reacției:



$$AgNO_3 + NaCl \rightarrow AgCl_{(s)} + NaNO_3.$$

Fie m masa soluțiilor care se amestecă. Cantitatea de $AgNO_3$ din soluție va fi:

$$m_1 = \frac{3{,}4\,m}{100} \ \text{g} \ AgNO_3.$$

Cantitatea de NaCl care reacționează cu această cantitate de $AgNO_3$ este:

170 g $AgNO_3$ .... 58,5 g NaCl

$\frac{3{,}4\,m}{100}$ g $AgNO_3$ .... m_2

$$m_2 = 1{,}17 \cdot 10^{-2}\, m \ \text{g NaCl}.$$

Deci concentrația soluției de NaCl este.

$$c\% = \frac{1{,}17 \cdot 10^{-2}\, m}{m} \cdot 100 = 1{,}17\%.$$

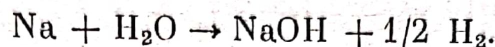
b) Din reacție rezultă $\frac{3{,}4\,m}{100} \cdot \frac{1}{170} \cdot 85$ g $NaNO_3$.

Neglijînd masa cantității de AgCl care precipită față de masa soluțiilor amestecate, concentrația soluției de $NaNO_3$ este:

$$c\% = \frac{1}{2\,m} \cdot \frac{3{,}4\,m}{100}\,\frac{85}{170} \cdot 100 = 0{,}85\%\ NaNO_3.$$

70°. a) Soluția conține 20 g NaOH și 80 g apă.

Sodiul adăugat va reacționa cu apa și va forma o altă cantitate de hidroxid conform reacției:



$$Na + H_2O \rightarrow NaOH + 1/2\ H_2.$$

Cantitatea de NaOH formată va fi:

$$\begin{array}{lcl} 23\ g\ Na & \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots & 40\ g\ NaOH \\ x\ g\ Na & \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots & m_1\ g\ NaOH \\ \hline \end{array}$$

$$m_1 = \frac{40\,x}{23}\,g\ NaOH.$$

Masa de hidrogen degajată din reacție este:

$$\begin{array}{lcl} 23\ g\ Na & \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots & 1\ g\ H_2 \\ x\ g\ Na & \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots & m_2\ g\ H_2 \\ \hline \end{array}$$

$$m_2 = \frac{x}{23}\,g\ H_2\ \text{degajat}.$$

Deci masa soluției rezultate este: $100 + X - \dfrac{X}{23}$.

Această soluție conține $\left(20 + \dfrac{40\,X}{23}\right)$ g NaOH.

Punînd condiția ca soluția să aibă concentrația 40% se obține:

$$\frac{20 + \dfrac{40\,X}{23}}{100 + X - \dfrac{X}{23}} = \frac{40}{100}.$$

Rezolvînd ecuația se obține: $X = 17{,}74$ g Na, iar $Y = 114{,}1$ g soluție.

b) Cantitatea de NaOH din soluția obținută este:

$$\frac{40 \cdot 14{,}74}{23} = 25{,}62\ g\ NaOH = 0{,}64\ \text{moli}.$$

Pentru neutralizarea acestei cantități de NaOH sînt necesari 0,32 moli de acid sulfuric care se vor găsi în 0,32 l soluți e de concentrație 2 N (sau 1 M).

Deci volumul soluției de NaOH este $\dfrac{0{,}32\ l}{7} = 45{,}7\ cm^3$.

Molaritatea soluției de NaOH este: $\dfrac{0{,}64\ \text{moli}}{45{,}7 \cdot 10^{-3}\ l} = 14\ \text{mol/l}$.

Rezultă că soluția de NaOH de concentrație 40% are concentrația molară 14 M, iar normalitatea ei va fi tot 14 N.

71°. Formula moleculară a oxidului metalului tetravalent este MeO_2.

Fie A masa atomică a acestui metal.

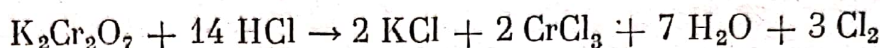
Atunci:

$$\begin{array}{ll}(A + 32)\ \text{g oxid} \ldots\ldots\ldots\ldots & A\ \text{g metal} \\ 100\ \text{g oxid} \ldots\ldots\ldots\ldots & 63{,}22\ \text{g metal} \\ \hline \end{array}$$

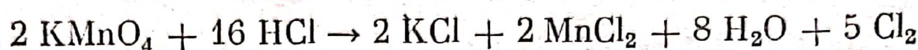
$$100\ A = 63{,}22(A + 32), \text{ de unde } A = 55$$

deci metalul este manganul, iar D este MnO_2.

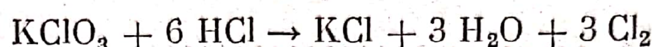
Reacțiile din schemă sînt următoarele:



$$K_2Cr_2O_7 + 14\ HCl \rightarrow 2\ KCl + 2\ CrCl_3 + 7\ H_2O + 3\ Cl_2$$



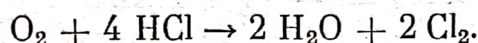
$$2\ KMnO_4 + 16\ HCl \rightarrow 2\ KCl + 2\ MnCl_2 + 8\ H_2O + 5\ Cl_2$$



$$KClO_3 + 6\ HCl \rightarrow KCl + 3\ H_2O + 3\ Cl_2$$

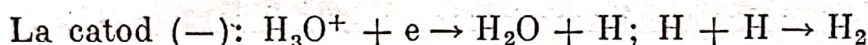


$$MnO_2 + 4\ HCl \rightarrow MnCl_2 + 2\ H_2O + Cl_2$$

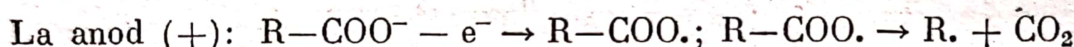


$$O_2 + 4\ HCl \rightarrow 2\ H_2O + 2\ Cl_2.$$

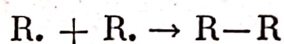
72°. a) La electroliza soluției sării de sodiu a unui acid monocarboxilic au loc reacțiile:



La catod (—): $H_3O^+ + e \rightarrow H_2O + H;\ H + H \rightarrow H_2$

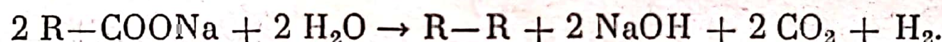


La anod (+): $R{-}COO^- - e^- \rightarrow R{-}COO.;\ R{-}COO. \rightarrow R. + CO_2$



$R. + R. \rightarrow R{-}R$

Reacția globală este:



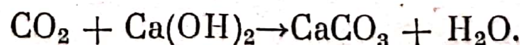
$$2\ R{-}COONa + 2\ H_2O \rightarrow R{-}R + 2\ NaOH + 2\ CO_2 + H_2.$$

Deci la anod se degajă o hidrocarbură și CO_2, în raport molar 1 : 2. Notînd prin M masa moleculară a hidrocarburii, a cărei fracție molară în amestecul de gaze degajat la anod este 1/3, cea a dioxidului de carbon fiind 2/3, masa moleculară medie a acestui amestec este:

$$\overline{M} = \frac{1}{3} M + \frac{2}{3} \cdot 44 = 39{,}33$$

de unde rezultă $M = 30$ și deci hidrocarbura formată este etanul ($CH_3{-}CH_3$), adică radicalul R este CH_3. Așadar, sarea electrolizată este acetatul de sodiu, CH_3COONa.

CO_2 este barbotat în apă de var în care este reținut



$$CO_2 + Ca(OH)_2 \rightarrow CaCO_3 + H_2O.$$

Deci creșterea masei soluției fiind 440 g, rezultă că la electroliză s-au format 440 g CO_2, adică 10 moli. Conform reacției globale a procesului de electroliză la un mol de sare rezultă 1 mol de CO_2 și prin urmare au fost supuși electrolizei 10 moli de acetat de sodiu, adică $10 \cdot 82 = 820$ g CH_3COONa.

b) La catod se degajă 5 moli de H_2 adică 112 l (c.n.).

c) Randamentul de curent poate fi definit ca raportul dintre sarcina electrică consumată util (Q_u) şi sarcina electrică totală transferată prin sistem, adică $Q_{total} = It$.

Deci $\eta = \frac{Q_u}{It} \cdot 100\%$.

Q_u se poate calcula din cantitatea de CO_2 rezultată, un mol de CO_2 fiind egal cu un echivalent, deoarece pentru formarea unei molecule de CO_2 este necesar un singur electron.

Deci:

$$\begin{array}{ll} 1 \text{ mol } CO_2 \ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots & 96\,500 \text{ C} \\ 10 \text{ moli } \ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots & Q_u \\ \hline \end{array}$$

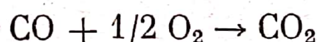
$$Q_u = 965\,000 \text{ C}.$$

Rezultă:

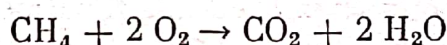
$$\eta = \frac{965\,000}{40 \cdot 500 \cdot 60} \cdot 100 = 80{,}4\%.$$

73°. a) Fie: x — numărul de moli de CO, y — numărul de moli de CH_4 şi, respectiv, z, numărul de moli de H_2S din amestecul dat.

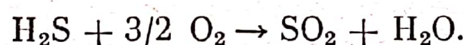
Reacţiile de ardere sînt:



$$CO + 1/2\ O_2 \rightarrow CO_2$$

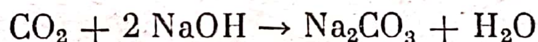


$$CH_4 + 2\ O_2 \rightarrow CO_2 + 2\ H_2O$$



$$H_2S + 3/2\ O_2 \rightarrow SO_2 + H_2O.$$

La absorbţia gazelor de ardere în soluţia de NaOH vor avea loc reacţiile:



$$CO_2 + 2\ NaOH \rightarrow Na_2CO_3 + H_2O$$



$$SO_2 + 2\ NaOH \rightarrow Na_2SO_3 + H_2O.$$

Numărul de moli de oxigen consumat la ardere va fi 1/4 din numărul de mol de azot rămas, adică $\frac{1}{4} \cdot \frac{1043{,}84}{22{,}4} = 11{,}65$ moli O_2.

Pe baza acestor date se alcătuieşte următorul sistem de ecuaţii:

$$28\,x + 16\,y + 34\,z = 167{,}4$$

$$\frac{1}{2}x + 2\,y + \frac{3}{2}z = 11{,}65$$

$$x + y = 80\,z$$

Rezolvînd sistemul se obţine:

$$x = 3 \text{ moli CO};$$

$$y = 5 \text{ moli } CH_4;$$

$$z = 0{,}1 \text{ moli } H_2S.$$

b) Numărul de moli de CO_2 rezultat la ardere este $x + y = 8$ moli care vor reacționa cu 16 moli de NaOH. Deci în total se consumă 16,2 moli NaOH = 648 g.

Masa soluției de NaOH utilizată este:

$$648 \cdot \frac{100}{32,4} = 2\,000 \text{ g soluție.}$$

Creșterea masei soluției este egală cu masa de CO_2 și de SO_2 absorbit, adică:

$$= 8 \cdot 44 + 0,1 \cdot 64 = 358,4 \text{ g.}$$

În procente, această creștere va fi:

$$\frac{358,4}{2000} \cdot 100 = 17,92\%.$$

74°. Cele două reacții fiind de izomerizare, substanțele B și C sînt izomere, deci au aceeași masă moleculară și ca atare raportul de masă în care rezultă este raportul vitezelor cu care ele se formează. Fie, în caz general, acest raport egal cu r:

$$r = \frac{m_B}{m_C} = \frac{v_B}{v_C}$$

unde v_B și v_C reprezintă respectiv vitezele cu care se formează compușii B și C din S. Conform ecuației lui Arrhenius:

$$v_B = k_1[S] = A_1 \cdot e^{-Ea_1/RT} \cdot [S]$$

$$v_C = k_2[S] = A_2 \cdot e^{-Ea_2/RT} \cdot [S]$$

în care [S] reprezintă concentrația substanței S care este, evident, aceeași pentru ambele reacții.

Făcînd raportul lor se obține:

$$r = \frac{A_1}{A_2} \cdot \frac{e^{-Ea_1/RT}}{e^{-Ea_2/RT}} = \frac{A_1}{A_2} \cdot e^{\frac{1}{RT}(Ea_2 - Ea_1)}$$

sau:

$$e^{\frac{1}{RT}(Ea_2 - Ea_1)} = r \cdot \frac{A_2}{A_1}$$

adică:

$$\frac{1}{RT}(Ea_2 - Ea_1) = \ln\left(r\,\frac{A_2}{A_1}\right)$$

de unde:

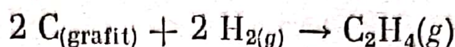
$$T = \frac{Ea_2 - Ea_1}{R \ln\left(r\,\frac{A_2}{A_1}\right)}.$$

Înlocuind valorile numerice pentru cele două cazuri se obține:

a) $$T = \frac{10^4 \text{ J/mol}}{8{,}31 \text{ J/mol} \cdot \text{K} \ln 4} = \frac{10^4}{8{,}31 \cdot 2 \ln 2} = 868 \text{ K};$$

b) $$T = \frac{10^4 \text{ J/mol}}{8{,}31 \text{ J/mol} \cdot \text{K} \ln (8 \cdot 4)} \quad \frac{10^4}{8{,}31 \cdot 5 \ln 2} = 347 \text{ K}.$$

75°. a) Aplicînd „metoda coeficienților nedeterminați" se găsește că reacția de formare a etenei din elemente:



$$2\,C_{(grafit)} + 2\,H_{2(g)} \rightarrow C_2H_4(g)$$

se poate obține din ecuațiile date prin înmulțirea acestora cu cîte un coeficient și apoi adunarea lor. Acești coeficienți sînt:

−1 pentru prima reacție;

0 pentru a doua reacție;

+2 pentru a treia reacție;

+2 pentru a patra reacție.

Rezultă că:

$$\Delta^f H_{298(C_2H_4)} = -1(\Delta H_1) + 2\,\Delta H_3 + 2\,\Delta H_4 = +52{,}1 \text{ kJ}.$$

b) Condiția de spontaneitate a unei reacții este:

$$\Delta^r G_T^0 < 0.$$

Dar $\Delta^r G_T^0 = \Delta^r H_{298}^0 - T\Delta^r S_{298}^0$.

Pentru reacția 2) variația de entropie va fi:

$$\Delta^r S_{298}^0 = S_{C_2H_5OH}^0 - S_{H_2O}^0 - S_{C_2H_4}^0 = -128{,}8 \text{ J/mol K}$$

$$\Delta^r G_T^0 = -40{,}6 \cdot 10^3 - 323\,(-128{,}8) \simeq 1000 \text{ J} > 0$$

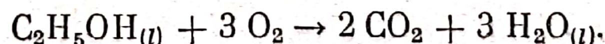
deci reacția 2) nu este spontană la 50°C.

c) Temperatura maximă pînă la care reacția 2) este spontană se determină din condiția $\Delta^r G^0 = 0$ adică

$$\Delta^r H_{298}^0 - T\Delta^r S_{298}^0 = 0 \text{ și } T = \frac{\Delta^r H_{298}^0}{\Delta^r S_{298}^0} = 315 \text{ K}.$$

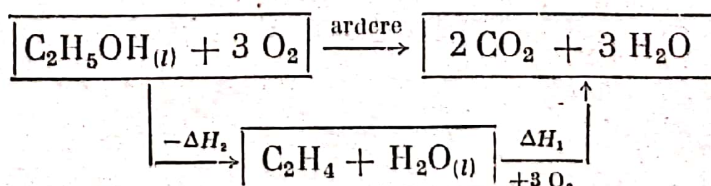
Deci reacția (2) va fi spontană pînă la maximum 42°C.

d) Pentru a determina căldura de ardere a etanolului lichid se folosește reacția de ardere:



$$C_2H_5OH_{(l)} + 3\,O_2 \rightarrow 2\,CO_2 + 3\,H_2O_{(l)}.$$

Aplicînd legea lui Hess, se poate alcătui următorul ciclu:

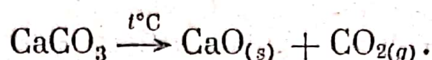


Rezultă că $\Delta H^0_{ardere} = \Delta H_1 - \Delta H_2 = -1369{,}1$ kJ.
Așadar la arderea unui mol de etanol lichid se degajă 1369,1 kJ.
Masa celor 28,75 cm^3 etanol lichid este:

$$m = \rho \cdot V = 23 \text{ g} = 1/2 \text{ moli } C_2H_5OH.$$

Deci la arderea acestei cantități de etanol vor rezulta $1/2\ \Delta H^0_{ardere} = 684{,}55$ kJ.

76°. a) La încălzirea puternică a $CaCO_3$ va rezulta evident oxid de calciu solid:



$$CaCO_3 \xrightarrow{t°C} CaO_{(s)} + CO_{2(g)}.$$

Cum reziduul solid conține o singură substanță, poate conține numai CaO. Aceasta înseamnă că proba inițială, pe lîngă $CaCO_3$ poate conține numai fie CaO fie un alt compus care prin încălzire formează tot CaO ca produs solid.

Din aceste date rezultă că proba inițială conține numai $CaCO_3$ și CaO, deoarece se degajă numai CO_2.

Volumul de CO_2 degajat la încălzire este $\frac{0{,}352}{44} \cdot 22{,}4$ l $= 0{,}1792$ l (c.n.) ceea ce reprezintă 0,008 moli. Deci proba inițială conținea 0,008 moli $CaCO_3$, care reprezintă 0,8 g $CaCO_3$ și 0,2 g CaO.

Masa de calciu din probă va fi: $\frac{0{,}8}{100} \cdot 40 + \frac{0{,}2}{56} \cdot 40 = 0{,}4629$ g Ca.

Masa carbonului va fi: $\frac{0{,}8}{100} \cdot 12 = 0{,}096$ g C.

Masa oxigenului va fi: $\frac{0{,}8}{100} \cdot 48 + \frac{0{,}2}{56} \cdot 16 = 0{,}4411$ g O.

Rezultă compoziția procentuală a elementelor din probă:

$$46{,}29\%\ \text{Ca};\ 9{,}60\%\ \text{C și } 44{,}11\%\ \text{O}.$$

77°. a) Din densitate se calculează masa molară medie a amestecului:

$$pV = \frac{m}{\overline{M}} RT;\quad \overline{M} = \frac{m}{V}\,\frac{RT}{p} = \rho\,\frac{RT}{p};$$

$$\overline{M} = 1{,}405\,\frac{\text{g}}{\text{l}} \cdot \frac{0{,}082\,\frac{\text{l} \cdot \text{atm}}{\text{mol K}} \cdot 300\text{ K}}{1{,}2\text{ atm}} = 28{,}8\text{ g/mol}.$$

Fracția molară a azotului în amestec este 0,8, deci a celuilalt gaz este 0,2. Dacă M este masa moleculară a gazului necunoscut avem:

$$\overline{M} = 0{,}8 \cdot 28 + 0{,}2\ M = 28{,}8.$$

Rezultă $M = 32$ g/mol.
Substanța fiind elementară, înseamnă că este oxigenul.
b) Compoziția amestecului în procente de volum este 80% N_2 și 20% O_2.

Pentru a determina compoziția în procente de masă considerăm 100 l amestec și calculăm masa fiecărui component:

$$m_{N_2} = \frac{80}{22,4} \cdot 28 = 100 \text{ g } N_2;$$

$$m_{O_2} = \frac{20}{22,4} \cdot 32 = 28,57 \text{ g } O_2.$$

Masa totală a celor 100 l amestec este 128,57 g. Deci, amestecul conține în procente de masă:

$$\frac{100}{128,57} \cdot 100 = 77,78\% \ N_2;$$

$$\frac{28,57}{128,57} \cdot 100 = 22,22\% \ O_2.$$

78°. Masa protoxidului de azot format este:

$$m_1 = \frac{3,36}{22,4} \cdot 44 = 6,6 \text{ g}.$$

Masa apei rezultate la descompunere este deci:

$$m_2 = 12,00 - 6,6 = 5,4 \text{ g}.$$

Se calculează masa fiecărui element component al substanței descompuse:

$$m_N = \frac{6,6}{44} \cdot 28 = 4,2 \text{ g};$$

$$m_O = \frac{6,6}{44} \cdot 16 + \frac{5,4}{18} \cdot 16 = 7,2 \text{ g};$$

$$m_H = \frac{5,4}{18} \cdot 2 = 0,6 \text{ g}.$$

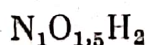
Numărul de atomi-gram din fiecare element este:

$$N : \frac{4,2}{14} = 0,3;$$

$$O : \frac{7,2}{16} = 0,45;$$

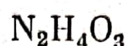
$$H : \frac{0,6}{1} = 0,6.$$

Împărțind prin cel mai mic dintre ei se obține formula brută:



$$N_1O_{1,5}H_2$$

Se amplifică toată formula cu 2 pentru a obține coeficienți întregi și a avea astfel o formulă moleculară posibilă:



$$N_2H_4O_3$$

Această formulă moleculară corespunde evident azotatului de amoniu: NH_4NO_3.

79°. a) Dacă X este procentul molar, spre exemplu al oxigenului, atunci fracția molară a acestuia va fi $\frac{X}{100}$, iar cea a heliului

$$\left(1 - \frac{X}{100}\right) = \frac{100 - X}{100}$$

Masa molară medie a unui asemenea amestec este:

$$\overline{M} = \frac{X}{100} \cdot 32 + \frac{100 - X}{100} \cdot 4 = \frac{28\,X + 400}{100}.$$

Densitatea amestecului va fi:

$$\rho = \frac{\overline{M}}{V_M}$$

unde volumul molar trebuie calculat în condițiile problemei, adică la presiunea p și temperatura T.

$$\frac{p_0 V_{M_0}}{T_0} = \frac{p V_M}{T} \text{ de unde: } V_M = \frac{p_0 V_{M_0} T}{T_0 p} \text{ și înlocuind:}$$

$p_0 = 1$ atm; $V_{M_0} = 22{,}4$ l și $T_0 = 273$ K se obține:

$$V_M = 0{,}082 \cdot \frac{T}{p}, \text{ iar densitatea va fi:}$$

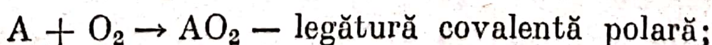
$$\rho = \frac{(28\,X + 400)p}{100(0{,}082\,T)}\ \text{g/l}$$

pentru p în atm și T în K.

b) $X = \frac{1}{28}\left[\frac{100\,\rho\,(0{,}082\,T)}{p} - 400\right] = 48{,}5.$

Deci compoziția amestecului de densitate $\rho = 0{,}72$ g/l la 25°C și 1 atm este: 48,55% O_2 și 51,45% He (în procente molare sau procente de volum).

c) Punînd $\Delta\rho = \pm 0{,}005$ g/l și considerînd $p = 1$ atm, iar $T = 298$ K rezultă.



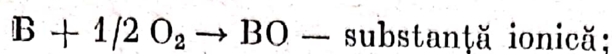
$$X = 87{,}27(\rho \pm 0{,}005) - 14{,}29 = 87{,}27\rho - 14{,}25 \pm 0{,}44.$$

Deci precizia determinării în acest caz este $\pm 0{,}44\%$.

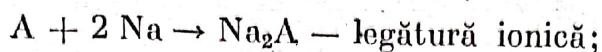
80°. A: Z = 16; $1s^2\,2s^2\,2p^6\,3s^2\,3p^4$

B : Z = 56; $1s^2\,2s^2\,2p^6\,3s^2\,3p^6\,4s^2\,3d^{10}\,4p^6\,5s^2\,4d^{10}\,5p^6\,6s^2$.

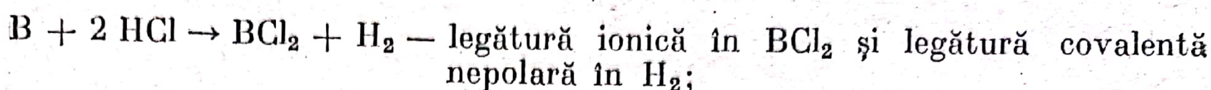
$A + O_2 \rightarrow AO_2$ — legătură covalentă polară;



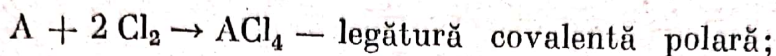
$B + 1/2\ O_2 \rightarrow BO$ — substanță ionică;



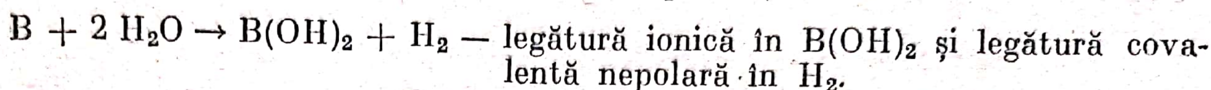
$A + 2\ Na \rightarrow Na_2A$ — legătură ionică;



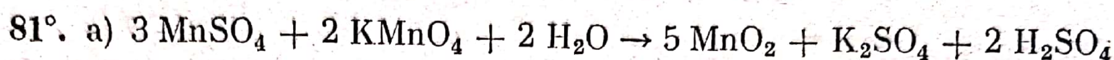
$B + 2\ HCl \rightarrow BCl_2 + H_2$ — legătură ionică în BCl_2 și legătură covalentă nepolară în H_2;



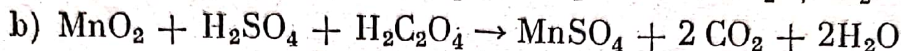
$A + 2\ Cl_2 \rightarrow ACl_4$ — legătură covalentă polară;



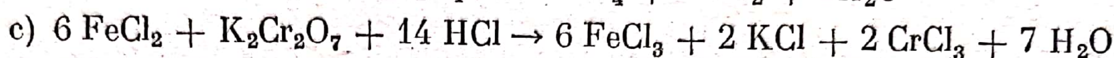
$B + 2\ H_2O \rightarrow B(OH)_2 + H_2$ — legătură ionică în $B(OH)_2$ și legătură covalentă nepolară în H_2.



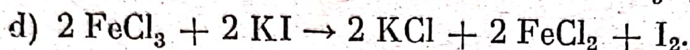
81°. a) $3\ MnSO_4 + 2\ KMnO_4 + 2\ H_2O \rightarrow 5\ MnO_2 + K_2SO_4 + 2\ H_2SO_4$



b) $MnO_2 + H_2SO_4 + H_2C_2O_4 \rightarrow MnSO_4 + 2\ CO_2 + 2H_2O$



c) $6\ FeCl_2 + K_2Cr_2O_7 + 14\ HCl \rightarrow 6\ FeCl_3 + 2\ KCl + 2\ CrCl_3 + 7\ H_2O$



d) $2\ FeCl_3 + 2\ KI \rightarrow 2\ KCl + 2\ FeCl_2 + I_2$.

În reacția a) echivalentul $KMnO_4$ este 1/3 moli deoarece manganul trece de la starea de oxidare +7 la +4.

Numărul de moli de $KMnO_4$ din soluția utilizată este:

$$\frac{2,5}{1\,000} \cdot \frac{1}{3} = \frac{2,5}{3} \cdot 10^{-3} \text{ moli.}$$

La 3 moli $MnSO_4$ .... 2 moli $KMnO_4$

X moli $MnSO_4$ .... $\frac{2,5}{3} \cdot 10^{-3}$ moli $KMnO_4$

$X = 1,25 \cdot 10^{-3}$ moli de $MnSO_4$ care conține $1,25 \cdot 10^{-3} \cdot 55 = 6,875 \cdot 10^{-3}$ g Mn.

Deci procentul de mangan în proba analizată este:

$$\%Mn = \frac{6,875 \cdot 10^{-3}}{0,2747} \cdot 100 = 25\%.$$

Echivalentul $K_2Cr_2O_7$ în reacția c) este 1/6 moli deoarece cromul trece de la starea de oxidare +6 la +3 și în moleculă sînt doi atomi de crom care transferă împreună 6 electroni. Deci în soluția utilizată sînt:

$$\frac{5}{1\,000} \cdot \frac{0,1}{6} = \frac{0,5}{6} \cdot 10^{-3} \text{ moli } K_2Cr_2O_7.$$

La 6 moli $FeCl_2$ .... 1 mol $K_2Cr_2O_7$

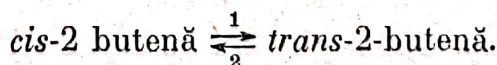
X moli $FeCl_2$ .... $\frac{0,5}{6} \cdot 10^{-3}$ moli $K_2Cr_2O_7$

$X = 0,5 \cdot 10^{-3}$ moli $FeCl_2$ care conțin $0,5 \cdot 10^{-3} \cdot 56 = 28 \cdot 10^{-3}$ g Fe.

Procentul de fier din proba analizată va fi:

$$\%Fe = \frac{28 \cdot 10^{-3}}{0,1117} \cdot 100 = 25\%.$$

82°. Se consideră reacția de izomerizare:



$$cis\text{-2 butenă} \underset{2}{\overset{1}{\rightleftharpoons}} trans\text{-2-butenă}.$$

Dacă se are în vedere reacția (1) și faptul că $\Delta H^\circ_{ardere} = -Q_{ardere}$ variația de entalpie va fi:

$$\Delta^r H^0_{298} = \Delta H^0_{ardere\ (cis\text{-}2\text{-butenă})} - \Delta H^0_{ardere\ (trans\text{-}2\text{-butenă})} = -4{,}4\ \text{kJ}.$$

Pentru a stabili sensul spontan în condiții standard, se calculează variația de entropie și apoi de entalpie liberă:

$$\Delta^r S^0_{298} = S^0_{(trans\text{-}2\text{-butenă})} - S^0_{(cis\text{-}2\text{-butenă})} = -4{,}3\ \text{J/molK}$$

$$\Delta^r G^0_{298} = \Delta^r H^0_{298} - T\Delta^r S^0_{298}.$$

Punînd $T = 298$ K se obține:

$$\Delta^r G^0_{298} = -3{,}12 \cdot 10^3\ \text{J/mol} < 0.$$

Deci reacția (1) este spontană în condiții standard și ca atare poate avea loc spontan izomerizarea *cis*-2-butenei în *trans*-2-butenă.

b) Scăderea energiei de activare a reacției catalizate va modifica valoarea constantei de viteză

$$k_0 = Ae^{-Ea/RT} \text{ și } k_{cat} = Ae^{-(Ea - \Delta Ea)/RT}.$$

Rezultă:

$$\frac{v_{cat}}{v_0} = \frac{k_{cat}}{k_0} = \frac{Ae^{-(Ea - \Delta Ea)/RT}}{Ae^{-(Ea)/RT}} = e^{\Delta Ea/RT}.$$

Înlocuind valorile numerice se obține:

$$\frac{v_{cat}}{v_0} = e^{6,931} = (e^{\ln 2})^{10} = 2^{10} = 1\,024.$$

Deci viteza reacției catalizate este de 1 024 de ori mai mare decît a celei necatalizate.

83°. a) $\Delta H^0_{1000} = 35\,040$ J;

$\Delta S^0_{1000} = 32{,}11$ J/molK;

$\Delta G^0_{1000} = \Delta H^0 - T\Delta S^0 = 35\,040 - 1\,000 \cdot 32{,}11 = 2\,930$ J.

b) $\Delta G^0_T = -RT \ln K_p$

$$\ln K_p = -\frac{\Delta G^0_T}{RT} = -\frac{2\,930}{8\,314} = -0{,}352418.$$

$$K_p = 0{,}703.$$

c) Deoarece reacția are loc fără variația numărului de moli, rezultă: $K_x = K_p = K_c$ (adimensionale).

d) Compoziția inițială a amestecului gazos este:

$$X_{0(CO)} = 0{,}45;\ X_{0(H_2)} = 0{,}35;\ X_{0(H_2O)} = 0{,}20;\ X_{0(CO_2)} = 0{,}00.$$

Notînd cu X fracția molară a lui CO_2 în starea de echilibru a sistemului, celelalte fracții molare devin:

$$X_{(CO)} = 0{,}45 - X;\ X_{(H_2O)} = 0{,}20 - X;\ X_{(H_2)} = 0{,}35 + X;$$

$$K_p = K_X = \frac{X_{(CO)} \cdot X_{(H_2O)}}{X_{(CO_2)} \cdot X_{(H_2)}} = \frac{(0{,}45 - X)(0{,}20 - X)}{X(0{,}35 + X)} = 0{,}703.$$

Rezolvînd ecuația se obține: $X = 0{,}104$.

Deci la echilibru, compoziția în procente de volum va fi: 34,6% CO; 9,6% H_2O; 45,4% H_2 și 10,4% CO_2.

(Procentele de volum pentru un amestec gazos se obţin prin înmulţirea fracţiilor molare cu 100.)

e) Conform legii lui Kirchhoff, efectul termic al unei reacţii chimice la o anumită temperatură este dat de relaţia:

$$\Delta H^0_T = \Delta H^0_{T_0} + \int_{T_0}^{T} \Delta C_p \cdot dT$$

unde

$$\Delta C_p = \sum C_{p(\text{produşi})} - \sum C_{p(\text{reactanţi})}$$

este variaţia capacităţii calorice molare la presiune constantă în cursul reacţiei Deci:

$$\Delta H^0_{1400} = \Delta H^0_{1000} + \int_{1000}^{1400} \Delta C_p \cdot dT.$$

Calcularea lui ΔC_p conduce la valoarea:

$$\Delta C_p = C_{p(CO)} + C_{p(H_2O)} - C_{p(CO_2)} - C_{p(H_2)} = -11,28 + 1,52 \cdot 10^{-3}\ T.$$

Rezultă:

$$\Delta H^0_{1400} = H^0_{1000} + \int_{1000}^{1400} (-11,28 + 1,52 \cdot 10^{-3} T) dT =$$

$$= H^0_{1000} - \int_{1000}^{1400} 11,28\ dT + \int_{1000}^{1400} 1,52 \cdot 10^{-3} T\ dT.$$

Calculînd integralele şi introducînd valorile numerice se obţine:

$$\Delta H^0_{1400} = H^0_{1000} - 4\,512 + 729,6 = 31\,257,6\ \text{J}.$$

Deci la 1 400 K reacţia este mai slab endotermă, adică va consuma mai puţină energie decît la temperatura de 1 000 K.

f) Conform izobarei de reacţie a lui Van't Hoff $\frac{\partial \ln K_p}{\partial T} = \frac{\Delta H}{RT^2}$ sau prin integrare:

$$(\ln K_p)_{T_2} - (\ln K_p)_{T_1} = -\frac{\Delta H}{R}\left(\frac{1}{T_2} - \frac{1}{T_1}\right).$$

Dacă $T_2 > T_1$ şi $\Delta H > 0$ rezultă că ln K_p la temperatura T_2 este mai mare decît ln K_p la temperatura T_1, adică la creşterea temperaturii creşte şi K_p, deci echilibrul se va deplasa în sensul formării produşilor de reacţie CO şi H_2O (spre dreapta).

Aceeaşi concluzie rezultă aplicînd principiul Le Châtelier: creşterea temperaturii va favoriza reacţia endotermă, adică formarea de CO şi H_2O.

84°. a) Substanţa solidă conţine elementele Na şi I deoarece:

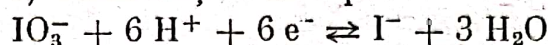
— culoarea galbenă pe care o capătă flacăra unui bec de gaz la introducerea substanţei indică prezenţa sodiului;

— sarea de argint de culoare galbenă care poate fi dizolvată cu agenţi complexanţi puternici ca CN^- şi $S_2O_3^{2-}$ poate fi numai AgI.

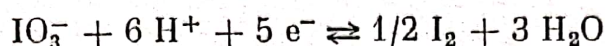
b) Reacţiile de la punctele 1)—4) arată că este vorba de sarea de sodiu a unui acid oxigenat al iodului.

Atît SO_2 cît şi I^- sînt oxidaţi. În primul caz se formează I^- prin intermediul moleculelor de I_2 (sau mai exact I_3^-) de culoare brună intensă. Şi în al doilea caz se formează I_2 (sau I_3^-). Avînd în vedere faptul că soluţia substanţei analizate este neutră nu poate fi vorba decît de sarea de sodiu a unui acid tare, deci pot fi luate în considerare doar $NaIO_3$ şi $NaIO_4$. Masele moleculare ale acestor substanţe sînt: 197,90 pentru iodatul de sodiu şi, respectiv, 213,90 pentru periodatul de sodiu.

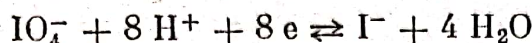
c) Semireacţiile care pot fi avute în vedere ar fi:



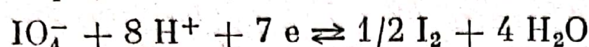
$IO_3^- + 6\,H^+ + 6\,e^- \rightleftharpoons I^- + 3\,H_2O$



$IO_3^- + 6\,H^+ + 5\,e^- \rightleftharpoons 1/2\,I_2 + 3\,H_2O$



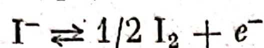
$IO_4^- + 8\,H^+ + 8\,e \rightleftharpoons I^- + 4\,H_2O$



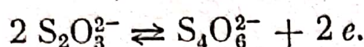
$IO_4^- + 8\,H^+ + 7\,e \rightleftharpoons 1/2\,I_2 + 4\,H_2O$



$SO_2 + 2\,H_2O \rightleftharpoons HSO_4^- + 3\,H^+ + 2\,e$

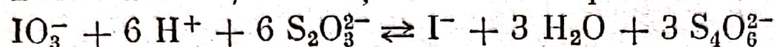


$I^- \rightleftharpoons 1/2\,I_2 + e^-$

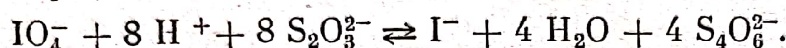


$2\,S_2O_3^{2-} \rightleftharpoons S_4O_6^{2-} + 2\,e.$

Dintre acestea, ca reacţii redox ce ar putea avea loc, ar fi de exemplu:



$IO_3^- + 6\,H^+ + 6\,S_2O_3^{2-} \rightleftharpoons I^- + 3\,H_2O + 3\,S_4O_6^{2-}$



$IO_4^- + 8\,H^+ + 8\,S_2O_3^{2-} \rightleftharpoons I^- + 4\,H_2O + 4\,S_4O_6^{2-}.$

d) Experienţa arată că 0,1000 g compus reacţionează cu $3{,}74 \cdot 10^{-3}$ moli $S_2O_3^{2-}$.
Prima ipoteză: compusul este $NaIO_3$.

$$\begin{array}{l} 1 \text{ mol } NaIO_3 = 197{,}90 \text{ g } NaIO_3 \ldots\ldots\ldots\ldots 6 \text{ moli } S_2O_3^{2-} \\ \qquad\qquad\quad 0{,}1000 \text{ g } NaIO_3 \ldots\ldots\ldots\ldots X \text{ moli } S_2O_3^{2-} \end{array}$$

$$X = \frac{0{,}1 \cdot 6}{197{,}90} = 3{,}032 \cdot 10^{-3} \text{ moli } S_2O_3^{2-}$$

ceea ce nu corespunde datelor experimentale.

A doua ipoteză: compusul este $NaIO_4$.

$$\begin{array}{l} 1 \text{ mol } NaIO_4 = 213{,}9 \text{ g} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots 8 \text{ moli } S_2O_3^{2-} \\ \qquad\qquad\qquad 0{,}1 \text{ g} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots Y \end{array}$$

$$Y = \frac{0{,}1 \cdot 8}{213{,}9} = 3{,}740 \cdot 10^{-3} \text{ moli } S_2O_3^{2-}$$

ceea ce corespunde datelor problemei.

Deci substanţa solidă analizată este $NaIO_4$, adică periodatul de sodiu.

85°. a) $[Ca^{2+}] \cdot [C_2O_4^{2-}] = K_s$ (1); $[H^+] \cdot [OH^-] = K_{H_2O}$ (2)

$$\frac{[H^+] \cdot [HC_2O_4^-]}{[H_2C_2O_4]} = K_{a_1} \quad (3); \qquad \frac{[H^+] \cdot [C_2O_4^{2-}]}{[HC_2O_4^-]} = Ka_2 \qquad (4)$$

b) $s = [Ca^{2+}] = [C_2O_4^{2-}] + [HC_2O_4^-] + [H_2C_2O_4]$ (5)

$$C = [H^+] + [HC_2O_4^-] + 2[H_2C_2O_4] - [OH^-] \qquad (6)$$

Una dintre ecuaţiile (5) sau (6) poate fi înlocuită prin:

$$[H^+] + 2[Ca^{2+}] = [HC_2O_4^-] + 2[C_2O_4^{2-}] + [HO^-] + [C] \qquad (7)$$

c) Solubilitatea oxalatului monohidrat este $6{,}7 \cdot 10^{-3}$ g/dm³ (calculată din ecuaţia (8)).

d) Prin eliminarea concentraţiilor speciilor oxalat cu ajutorul ecuaţiilor (1), (3) şi (4) şi neglijînd concentraţia ionilor HO^- din (5) şi (6) se obţine:

$$s^2 = K_s + \frac{[H^+] \cdot K_s}{K_{a_2}} + \frac{[H^+]^2 \cdot K_s}{K_{a_1} \cdot K_{a_2}} \qquad (8)$$

$$C = [H^+] + \frac{[H^+] \cdot K_s}{s \cdot Ka_2} + \frac{2[H^+]^2 \cdot K_s}{s \cdot Ka_1 \cdot Ka_2} \qquad (9)$$

Dacă se elimină s între ecuaţiile (8) şi (9) se obţine ecuaţia de gradul patru. Este mult mai convenabil să se aplice o metodă iterativă.

Într-o primă aproximaţie, se poate considera

$[H^+] = C$ şi cu această valoare a lui $[H^+]$ se calculează:

— s din (8) şi

— ultimii doi termeni din (9) care sînt termeni corectivi. Prin aceasta ecuaţia (9) conduce la o nouă valoare a lui $[H^+]$, care se utilizează pentru următoarea iteraţie.

După două iteraţii se obţin următoarele rezultate:

$s = 6{,}6 \cdot 10^{-4}$ mol/dm³ $\simeq 9{,}6 \cdot 10^{-2}$ g/dm³.

$[H^+] = 9{,}3 \cdot 10^{-3}$ mol/dm³.

e) $[Ca^{2+}] = 6{,}6 \cdot 10^{-4}$ mol/dm³;

$[Cl^-] = 0{,}010$ mol/dm³;

$[HO^-] = 1{,}1 \cdot 10^{-12}$ mol/dm³;

$[C_2O_4^{2-}] = 3{,}2 \cdot 10^{-6}$ mol/dm³;

$[HC_2O_4^-] = 5{,}7 \cdot 10^{-4}$ mol/dm³;

$[H_2C_2O_4] = 9{,}0 \cdot 10^{-5}$ mol/dm³.

86°. 1. Pentru reacţia de la punctul a) se poate determina ordinul:

— dacă presupunem reacţia de ordinul I

$$k = \frac{1}{t} \ln \frac{a}{a - x}$$

t	$k \cdot 10^2$
10	1,625
20	1,505
30	1,436
45	1,288
60	1,189
80	1,084
100	1,022

k nefiind constant, reacţia nu este de ordinul I;

— dacă presupunem reacţia de ordinul II (concentraţiile reactanţilor fiind egale la momentul iniţial):

$$k = \frac{1}{t}\left(\frac{1}{a - x} - \frac{1}{a}\right)$$

t	k
10	0,176
20	0,176
30	0,179
45	0,175
60	0,173
80	0,173
100	0,178

k avînd aproximativ o valoare constantă, reacţia satisface ecuaţia cinetică pentru ordinul II, deci ordinul de reacţie este 2.

Pentru reacţia de la punctul b) timpul de înjumătăţire fiind independent de concentraţia iniţială, înseamnă că reacţia este de ordinul 1:

$$k = \frac{1}{t} \ln \frac{a}{a - x} = \frac{1}{t_{1/2}} \ln \frac{a}{a - \frac{a}{2}} = \frac{1}{t_{1/2}} \ln 2.$$

Deci reacția de la punctul b) este de ordinul 1.

Reacția de la punctul c) avînd același mecanism va fi tot de ordinul 1.

2. Valoarea constantei de viteză a reacției de la punctul a) este media valorilor obținute la punctul precedent:

$$k = 0{,}176 \text{ dm}^3 \cdot \text{mol}^{-1} \cdot \text{min}^{-1}.$$

3. Pentru determinarea energiilor de activare calculăm valoarea constanei de viteză, k' la 35°C.

Pentru reacții de ordinul II relația dintre constanta de viteză și timpul de înjumătățire este:

$$k = \frac{1}{t}\left(\frac{1}{a-x} - \frac{1}{a}\right) = \frac{1}{t_{1/2}} \cdot \left(\frac{1}{a - \frac{a}{2}} - \frac{1}{a}\right) = \frac{1}{t_{1/2}} \cdot \frac{1}{a}.$$

Cunoscînd timpul de înjumătățire la 35°C și concentrația inițială $a = 0{,}1$ mol/dm³ (prin amestecarea volumelor egale, din cele două soluții, concentrația fiecăreia se reduce la jumătate), calculăm constanta de viteză k' la 35°C:

$$k' = \frac{1}{21} \cdot \frac{1}{0{,}1} = 0{,}476 \text{ dm}^3 \cdot \text{mol}^{-1} \cdot \text{min}^{-1}.$$

Deci energia de activare a reacției de la punctul a) va fi:

$$E_a = R \ln \frac{k'}{k} \cdot \frac{T' \cdot T}{T' - T} = 8\,314 \ln \frac{0{,}476}{0{,}176} \cdot \frac{308 \cdot 298}{308 - 298}$$

$$E_a = 7{,}592 \cdot 10^7 \text{ J} \cdot \text{kmol}^{-1} = 18{,}16 \text{ kcal} \cdot \text{mol}^{-1}$$

Pentru reacția de la punctul b) care este de ordinul I, se determină valorile constantei de viteză la cele două temperaturi, din valorile timpului de înjumătățire:

$$k = \frac{\ln 2}{t_{1/2}}.$$

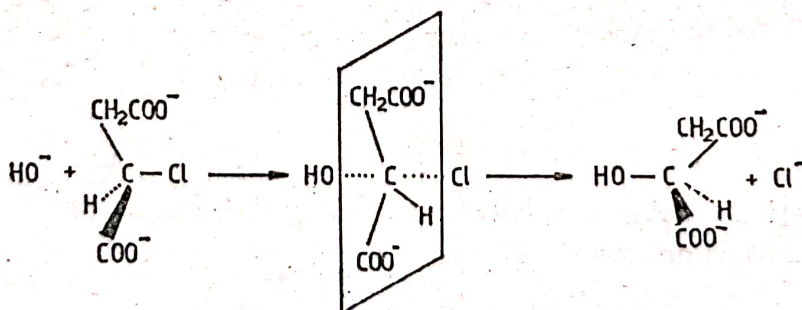
La 25°C: $k = \frac{\ln 2}{t_{1/2}} = \frac{\ln 2}{32} = 2{,}166 \cdot 10^{-2} \text{ min}^{-1}.$

La 35°C: $k' = \frac{\ln 2}{11} = 6{,}301 \cdot 10^{-2} \text{ min}^{-1}.$

Deci energia de activare va fi:

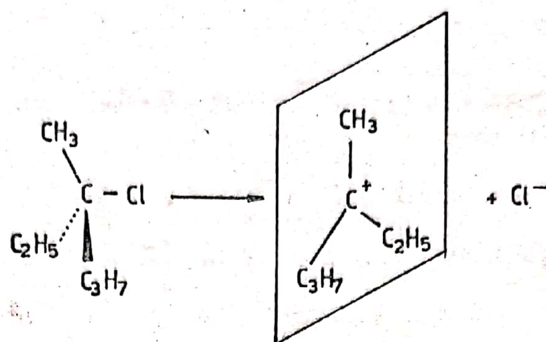
$$E_{(b)} = 8\,314 \ln \frac{6{,}301 \cdot 10^{-2}}{2{,}166 \cdot 10^{-2}} \cdot \frac{308 \cdot 298}{308 - 298} = 8{,}149 \cdot 10^7 \text{ J/kmol} = 19{,}5 \text{ kcal/mol}.$$

4. Produsul reacției de hidroliză, în cazul reacției de la punctul a) va deveni dextrogir datorită inversiei de configurație:



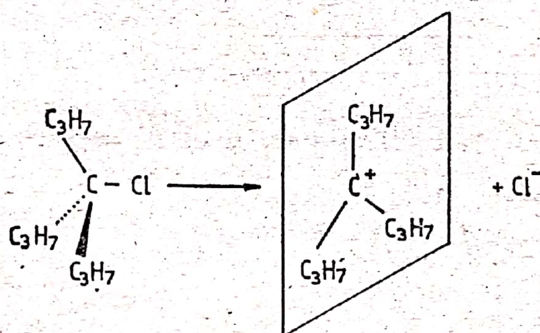
Reacția, fiind de tipul SN2, decurge prin intermediul stării de tranziție; la trecerea în stare finală se produce o inversie de configurație a atomului de carbon asimetric. Deci dacă reactantul este levogir, produsul reacției va deveni dextrogir.

5. Reacția de la punctul b) este monomoleculară, SN-1; deci ea are loc prin intermediul formării unui carbocation relativ stabil, etapă care este determinantă de viteză:



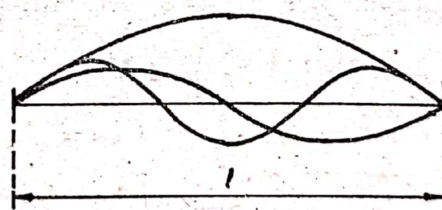
Structura cea mai probabilă a carbocationului este cea plană. Acest carbocation poate fi atacat de reactantul nucleofil (ionul OH^-) din ambele părți ale planului cu aceeași probabilitate și, ca urmare, produsul reacției se va obține sub formă de amestec racemic, deci nu va poseda activitate optică, fiind inactiv prin compensație intermoleculară.

6. În cazul reacției de la punctul c) lucrurile se petrec în mod analog ca la punctul precedent, deosebirea constînd însă în repulsia mai accentuată dintre substituenți care sînt mai voluminoși și deci tendința mai pronunțată de a trece sub forma carbocationului cu structură plană, în care repulsia este mai mică.



Aceasta duce la creșterea vitezei etapei de formare a carbocationului și deci a vitezei de ansamblu a reacției.

87°. 1.



2. $l = n \cdot \frac{1}{2} \lambda$ sau $\lambda = 2\,l/n$ $(n = 1, 2, 3, ...)$.

3. $E_k = \frac{1}{2} \cdot mv^2 = \frac{p^2}{2m}$; $p = h/\lambda$; $E_k = h^2n^2/8\,ml^2$.

4. k electroni, orbitale ocupate pînă la $n_{max} = 1/2\,k$ (k par). Prima orbitală neocupată $n_{max} + 1 = 1/2\,k + 1$.

$$\Delta E = h\nu = E_k\,(1/2\,k + 1) - E(1/2\,k) = \frac{h^2}{8\,ml^2}[(1/2\,k + 1)^2 - (1/2\,k)^2] =$$

$$= \frac{h^2}{8\,ml^2}(k + 1); \quad \lambda = \frac{c}{\nu} = \frac{8\,mcl^2}{k(k + 1)}.$$

5. Pentru N (număr par), lungimea $l = (N - 1)\ a$; numărul de electroni $k = N$.

Înlocuind în 4) rezultă: $\lambda = \frac{8\ mc\ (N-1)^2 a^2}{h(N+1)}$.

6. Este necesar $\lambda > 400$ nm; de la $\lambda > 4 \cdot 10^{-7}$ m.

I. Pentru N par avem:

$$\frac{8\,mc\,(N-1)a^2}{h\,(N+1)} > 4 \cdot 10^{-7}$$

$$\frac{(N-1)^2}{(N+1)} > \frac{4 \cdot 10^{-7} \cdot 6{,}63 \cdot 10^{-34}}{8 \cdot 9{,}11 \cdot 10^{-31} \cdot 3 \cdot 108\ (1{,}42 \cdot 10^{-10})^2} > 6{,}02.$$

I_1. Se încearcă

N	6	7	8	9
$\frac{(N-1)^2}{N+1}$	$\frac{25}{7}$	$\frac{36}{8}$	$\frac{49}{9}$	$\frac{81}{10}$

Primul număr care satisface este 9, dar s-a presupus N par. Din această cauză $N = 10$.

I_2. Se calculează

$$N^2 - 2\,N + 1 > 6{,}02\ (N + 1)$$

$$N^2 - 8{,}02\ N - 5{,}02 > 0$$

$$N_{1,2} = \frac{8{,}02 \mp \sqrt{8{,}02^2 + 4 \cdot 5{,}02}}{2} = \frac{1}{2}(8{,}02 + 9{,}19) = 8{,}60$$

$$N > 8{,}60 \text{ și par, deci } N = 10.$$

II. Pentru N impar:

II_1. $\frac{(N-1)^2}{N} > 6{,}02$ (vezi I)

Se încearcă

$N =$	7	8
$\frac{(N-1)^2}{N}$	$\frac{36}{7}$	$\frac{49}{8}$

Primul număr care satisface este $N = 8$, dar am presupus impar și de aceea $N = 9$.

II_2. Se calculează $N^2 - 2\,N + 1 > 6{,}02\ N$

$$N^2 - 8{,}02\,N + 1 > 0$$

$$N = \frac{8{,}02 \mp \sqrt{8{,}02^2 - 4}}{2} = \frac{1}{2}(8{,}02 + 7{,}77) = 7{,}89;$$

$$N > 7{,}89 \text{ și impar de aceea } N = 9$$

$N = 9$ este răspunsul corect.

Dacă se ia în considerație și stabilitatea, răspunsul este $N = 10$ deoarece pentru $N = 9$ avem un radical care este foarte reactiv.

7. Pentru 5—6 și 7—8 unghiul este 59°, iar pentru 11—12 și 13—14 este 39°. Numai dacă acesta ar fi de 90° am putea neglija complet efectul dublelor legături între C_5 și C_6; C_{13} și C_{14}; C_{15} și O. Cu cît l este mai mare cu atît mai mare este și λ. Unghiurile nefiind de 90° „cutia" va fi mai mare.

8. Numai atunci cînd C_5 și C_6 sînt forțate în același plan, lungimea „cutiei" devine:

$$l = 0{,}700 + 0{,}133 + 0{,}150 = 0{,}983 \text{ nm și } k = 8.$$

Pentru

$$\lambda = 3{,}30 \cdot 10^{12} \frac{l^2}{k+1} \dots = 3{,}30 \cdot 10^{12} \frac{(0{,}983 \cdot 10^{-9})^2}{9} = 354 \text{ nm}.$$

Dar nu este suficient și forțînd C_{13} și C_{14} în plan rezultă același răspuns, adică insuficient. Atunci C_5, C_6, C_{13} și C_{14} în plan:

Atunci $l = 0{,}70 + 0{,}133 + 0{,}155 + 0{,}148 + 0{,}135 = 1{,}27$ nm și $k = 10$.

$$\lambda = 3{,}30 \cdot 10^{12} \frac{(1{,}27 \cdot 10^{-9})^2}{11} = 484 \text{ nm}.$$

Dar tot nu este suficient. Deci C_{15} și O de asemenea în plan:

$$l = 1{,}27 + 0{,}148 = 10{,}120 = 1{,}54 \text{ nm}; \; k = 12$$

$$\lambda = 3{,}30 \cdot 10^{12} \frac{(1{,}54 \cdot 10^{-9})^2}{13} = 602 \text{ nm}$$

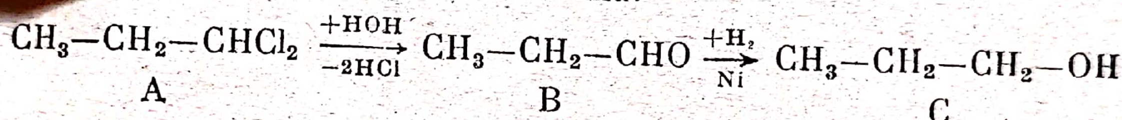
ceea ce se observă și experimental. Pe baza acestui model C_{15} și O sînt forțați într-un plan.

88°. Determinarea formulei moleculare:

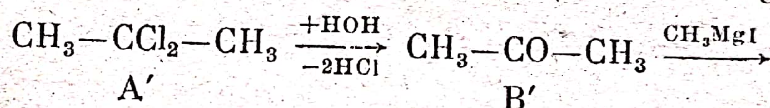
$$C : \frac{31{,}86}{12} = 2{,}655; \quad H : \frac{5{,}31}{1} = 5{,}31; \quad Cl : \frac{62{,}83}{35{,}5} = 1{,}769$$

$$C : H : Cl = 3 : 6 : 2; \quad C_3H_6Cl_2.$$

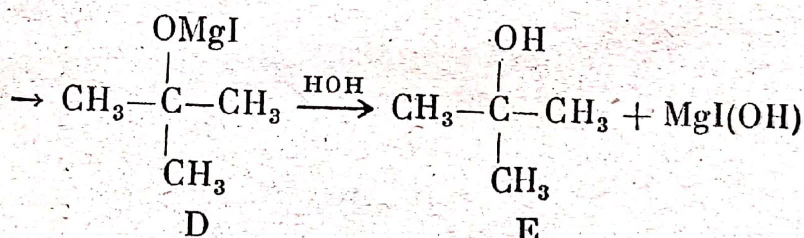
Ecuațiile reacțiilor cuprinse cu schemă:



$$\underset{A}{CH_3-CH_2-CHCl_2} \xrightarrow[-2HCl]{+HOH} \underset{B}{CH_3-CH_2-CHO} \xrightarrow[Ni]{+H_2} \underset{C}{CH_3-CH_2-CH_2-OH}$$

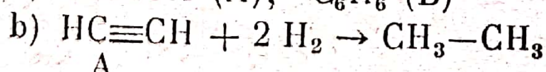


$$\underset{A'}{CH_3-CCl_2-CH_3} \xrightarrow[-2HCl]{+HOH} \underset{B'}{CH_3-CO-CH_3} \xrightarrow{CH_3MgI}$$

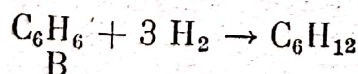


$$\rightarrow \underset{D}{CH_3-C(OMgI)(CH_3)-CH_3} \xrightarrow{HOH} \underset{E}{CH_3-C(OH)(CH_3)-CH_3} + MgI(OH)$$

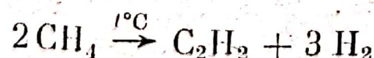
89°. a) $HC \equiv CH$ (A); C_6H_6 (B)

b) 

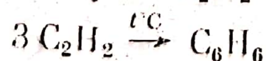
$$\underset{A}{HC \equiv CH} + 2\,H_2 \rightarrow CH_3-CH_3$$



$$\underset{B}{C_6H_6} + 3\,H_2 \rightarrow C_6H_{12}$$



$$2\,CH_4 \xrightarrow{t°C} C_2H_2 + 3\,H_2$$



$$3\,C_2H_2 \xrightarrow{t°C} C_6H_6$$

c) 1 kmol C_2H_2 .... $2 \cdot 22{,}4$ m³ CH_4
5 kmol .... x_1

$x_1 = 224$ m³ CH_4.

1 kmol C_6H_6 ....3 kmol C_2H_2 ....6 22,4 m³ CH_4
5 kmol C_6H_6 .... x_2

$x_2 = 672$ m³ CH_4.

Pentru

$$\lambda = 3{,}30 \cdot 10^{12} \frac{l^2}{k+1} \ldots = 3{,}30 \cdot 10^{12} \frac{(0{,}983 \cdot 10^{-9})^2}{9} = 354 \text{ nm}.$$

Dar nu este suficient și forțînd C_{13} și C_{14} în plan rezultă același răspuns, adică insuficient. Atunci C_5, C_6, C_{13} și C_{14} în plan:

$$l = 0{,}70 + 0{,}133 + 0{,}155 + 0{,}148 + 0{,}135 = 1{,}27 \text{ nm și } k = 10.$$

Atunci

$$\lambda = 3{,}30 \cdot 10^{12} \frac{(1{,}27 \cdot 10^{-9})^2}{11} = 484 \text{ nm}.$$

Dar tot nu este suficient. Deci C_{15} și O de asemenea în plan:

$$l = 1{,}27 + 0{,}148 = 10{,}120 = 1{,}54 \text{ nm}; \; k = 12$$

$$\lambda = 3{,}30 \cdot 10^{12} \frac{(1{,}54 \cdot 10^{-9})^2}{13} = 602 \text{ nm}$$

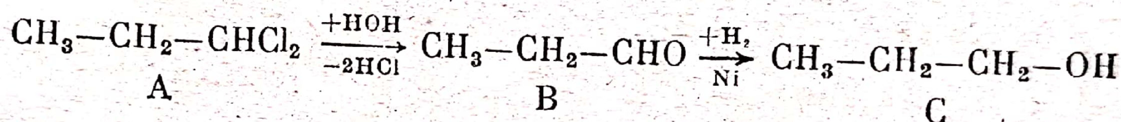
ceea ce se observă și experimental. Pe baza acestui model C_{15} și O sînt forțați într-un plan.

88°. Determinarea formulei moleculare:

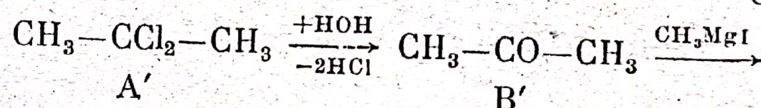
$$C : \frac{31{,}86}{12} = 2{,}655; \quad H : \frac{5{,}31}{1} = 5{,}31; \quad Cl : \frac{62{,}83}{35{,}5} = 1{,}769$$

$$C : H : Cl = 3 : 6 : 2; \quad C_3H_6Cl_2.$$

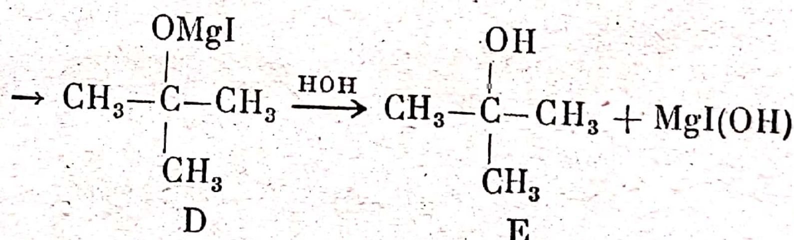
Ecuațiile reacțiilor cuprinse cu schemă:



$$\underset{A}{CH_3-CH_2-CHCl_2} \xrightarrow[-2HCl]{+HOH} \underset{B}{CH_3-CH_2-CHO} \xrightarrow[Ni]{+H_2} \underset{C}{CH_3-CH_2-CH_2-OH}$$



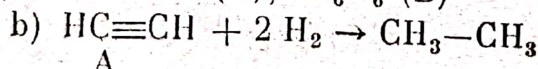
$$\underset{A'}{CH_3-CCl_2-CH_3} \xrightarrow[-2HCl]{+HOH} \underset{B'}{CH_3-CO-CH_3} \xrightarrow{CH_3MgI}$$



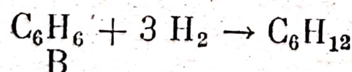
$$\rightarrow \underset{D}{CH_3-C(OMgI)(CH_3)-CH_3} \xrightarrow{HOH} \underset{E}{CH_3-C(OH)(CH_3)-CH_3} + MgI(OH)$$

89°. a) $HC\equiv CH$ (A); C_6H_6 (B)

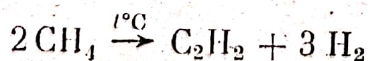
b)



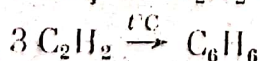
$$\underset{A}{HC\equiv CH} + 2\,H_2 \rightarrow CH_3-CH_3$$



$$\underset{B}{C_6H_6} + 3\,H_2 \rightarrow C_6H_{12}$$



$$2\,CH_4 \xrightarrow{t°C} C_2H_2 + 3\,H_2$$



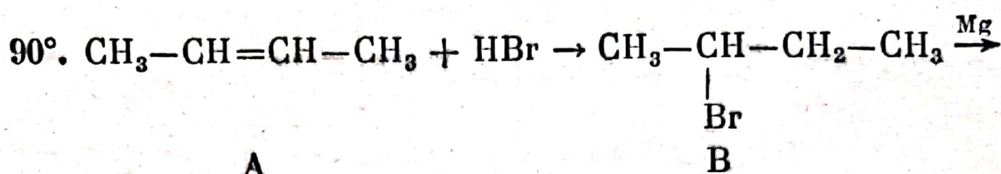
$$3\,C_2H_2 \xrightarrow{t°C} C_6H_6$$

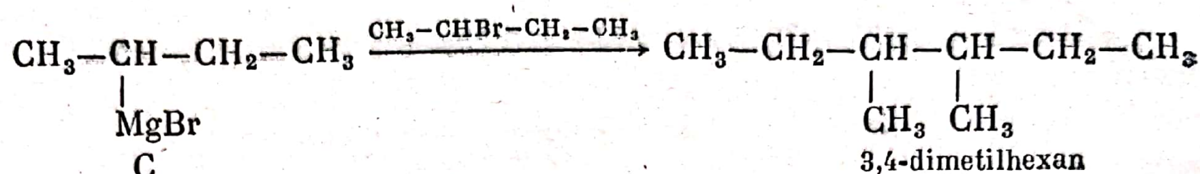
c) 1 kmol C_2H_2 .... $2 \cdot 22{,}4$ m³ CH_4
5 kmol .... x_1

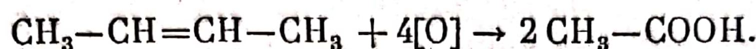
$x_1 = 224$ m³ CH_4.

1 kmol C_6H_6 ....3 kmol C_2H_2 ....6 22,4 m³ CH_4
5 kmol C_6H_6 .... x_2

$x_2 = 672$ m³ CH_4.

90°.




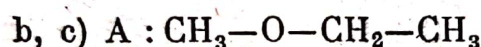


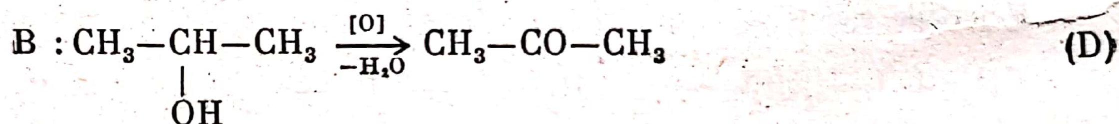
91°. a) $12\,x + y + 16\,z = 60$

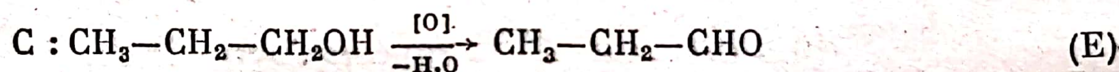
$$\frac{16\,z}{y} = \frac{2}{1}; \quad y = 8\,z$$

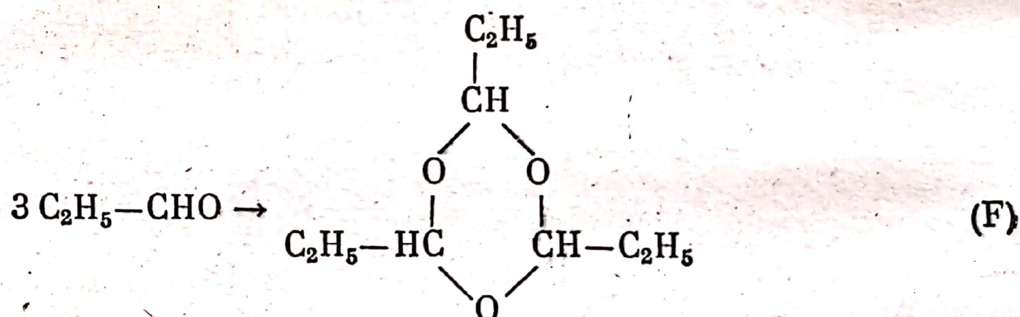
$$60\,(12\,x + 24\,z) = 1\,200\,x$$

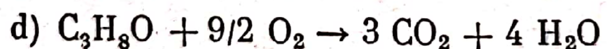
$$x = 3$$
$$y = 8 \qquad C_3H_8O$$
$$z = 1$$

b, c)








d)


60 g A .... 100,8 l O_2

24 g A .... a_1

$a_1 = 40{,}32$ l $O_2 \rightarrow 201{,}6$ l aer

1 mol B ....1 mol D

$\frac{12}{60}$ moli B .... a_1

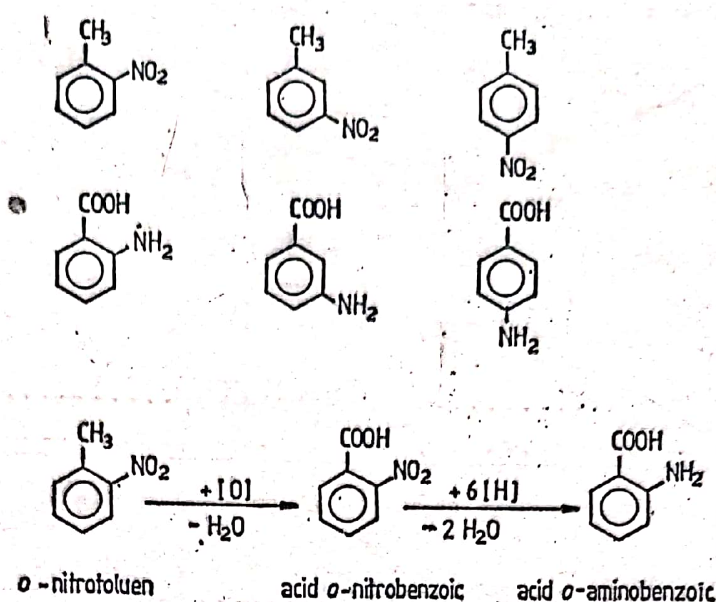
$a_1 = 0{,}2$ moli $D = 0{,}2 \cdot 58$ g $= 11{,}6$ g D.

3 moli C .... 1 mol F

$\frac{12}{60}$ moli C .... a_2

$a_2 = 0{,}066$ moli $= 11{,}48$ g F.

92°.



(La fel pentru derivații *meta* și *para*.)

o-, *m*- și *p* — Nitrotoluenii sînt izomeri de poziție. Acizii *o*-, *m*- și *p*-aminobenzoici sînt izomeri de poziție. Nitrotoluenii sînt izomeri de funcțiune cu acizii aminobenzoici.

93°. Se consideră

$$x \text{ moli } C_nH_{2n+2} \text{ și } y \text{ moli } C_nH_{2n}.$$

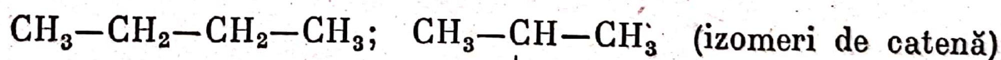
raportul molar = raportul presiunilor parțiale = 4 : 1

$$\frac{x}{y} = \frac{4}{1} \qquad x = 4y$$

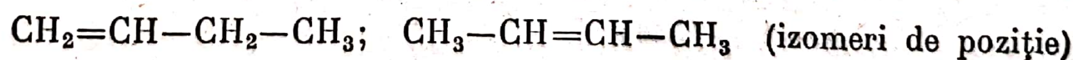
$$d/H_2 = \frac{\overline{M}}{2}; \quad \overline{M} = \frac{x(14n+2) + y(14n)}{x+y}$$

$$\overline{M} = \frac{4y(14n+2) + y(14n)}{5y} = \frac{70n+8}{5}$$

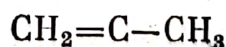
$$28{,}8 \cdot 2 = \frac{70n+8}{5}; \quad n = 4$$



n-butan   izobutan

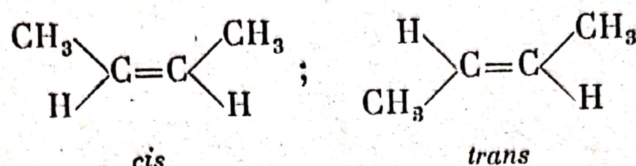


1-butenă   2-butenă (*cis* + *trans*)

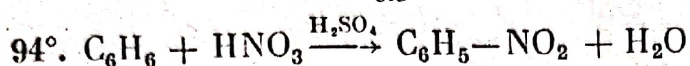


izobutenă

Izobutena este izomer de catenă cu 1-butena și, respectiv, 2-butena; 2—butena există sub forma a doi izomeri geometrici:



cis *trans*



94°. $C_6H_6 + HNO_3 \xrightarrow{H_2SO_4} C_6H_5{-}NO_2 + H_2O$

$$635 \cdot \frac{20}{100} = 127 \text{ kg } HNO_3$$

123 kg nitrobenzen .... 63 kg HNO_3 .... 18 kg H_2O

x kg .... a_1 .... a_2

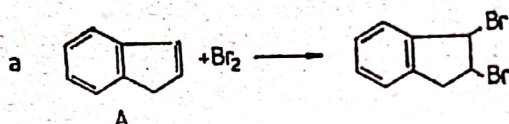
$$a_1 = \frac{63\,x}{123} \text{ kg } HNO_3; \quad a_2 = \frac{18\,x}{123} \text{ kg } H_2O;$$

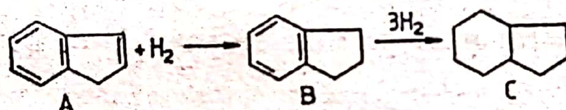
$\left(635 - \frac{63\,x}{123} + \frac{18\,x}{123}\right)$ kg acid rezidual ...... $\left(127 - \frac{63\,x}{123}\right)$ kg HNO_3

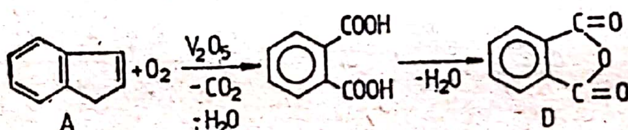
100 2

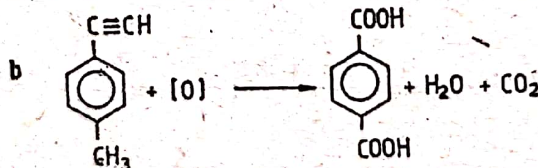
$$x = 224{,}75 \text{ kg nitrobenzen.}$$

95°.











96°. $C_nH_{2n} + HBr \rightarrow C_nH_{2n+1}$

$(14\,n + 1 + 80)$ g A .... 80 g Br

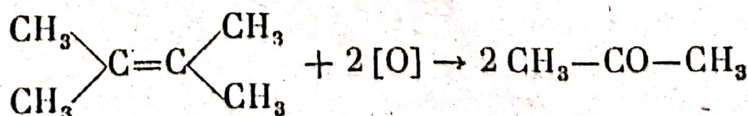
100 48,5

$$n = 6 \Rightarrow C_6H_{12}$$

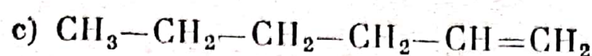


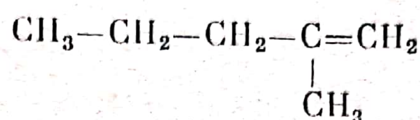
b) $CH_3{-}CH_2{-}CH{=}CH{-}CH_2{-}CH_3 + 4[O] \rightarrow 2\,CH_3{-}CH_2{-}COOH$

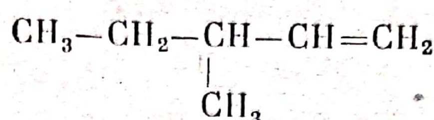
sau

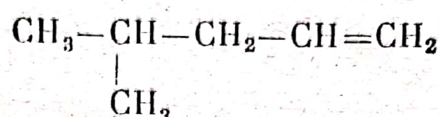


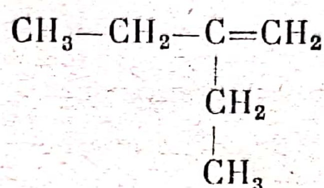
$(CH_3)_2C{=}C(CH_3)_2 + 2\,[O] \rightarrow 2\,CH_3{-}CO{-}CH_3$

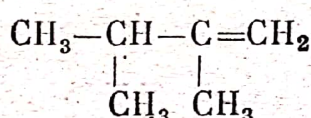

c) CH3—CH2—CH2—CH2—CH=CH2

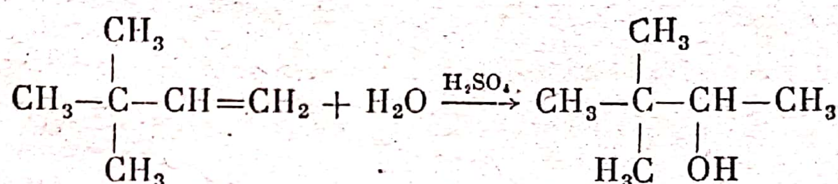


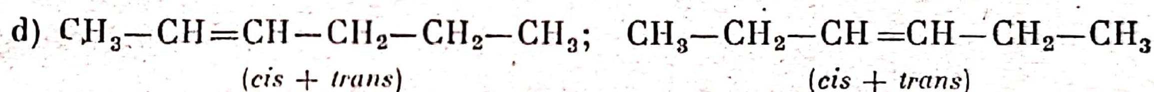


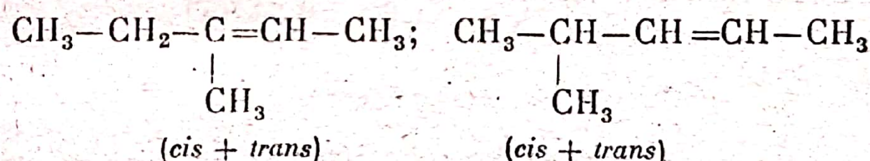


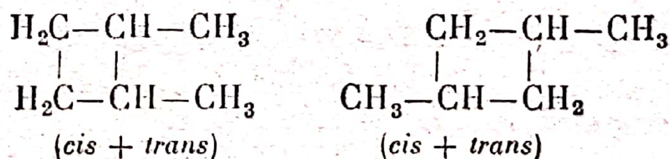


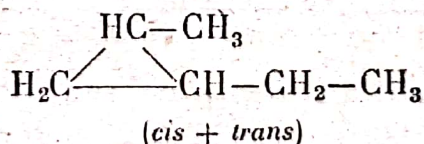


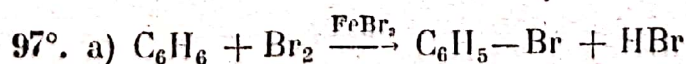


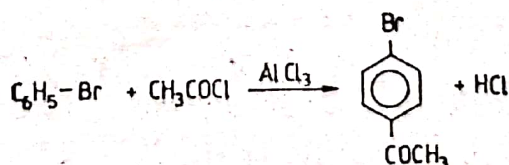

d) CH3—CH=CH—CH2—CH2—CH3; CH3—CH2—CH=CH—CH2—CH3
(cis + trans)
(cis + trans)

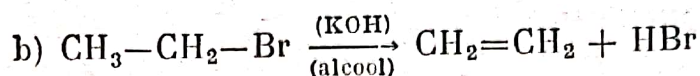




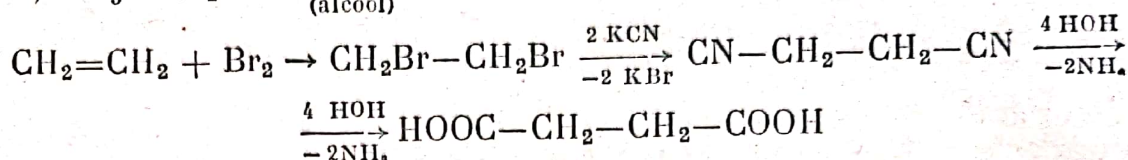



97°. a) C6H6 + Br2 FeBr3 C6H5—Br + HBr


C6H5-Br + CH3COCl
AlCl3
Br
COCH3
+ HCl

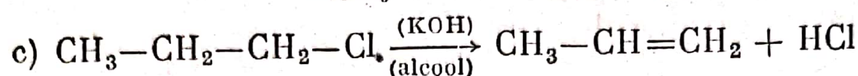


b) $CH_3-CH_2-Br \xrightarrow[\text{(alcool)}]{\text{(KOH)}} CH_2=CH_2 + HBr$

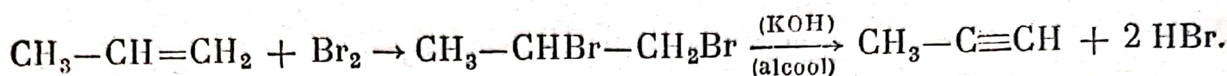


$CH_2=CH_2 + Br_2 \rightarrow CH_2Br-CH_2Br \xrightarrow[-2\,KBr]{2\,KCN} CN-CH_2-CH_2-CN \xrightarrow[-2NH_3]{4\,HOH}$

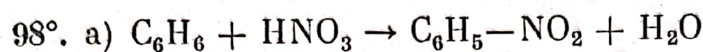
$\xrightarrow[-2NH_3]{4\,HOH} HOOC-CH_2-CH_2-COOH$



c) $CH_3-CH_2-CH_2-Cl \xrightarrow[\text{(alcool)}]{\text{(KOH)}} CH_3-CH=CH_2 + HCl$



$CH_3-CH=CH_2 + Br_2 \rightarrow CH_3-CHBr-CH_2Br \xrightarrow[\text{(alcool)}]{\text{(KOH)}} CH_3-C\equiv CH + 2\,HBr.$



98°. a) $C_6H_6 + HNO_3 \rightarrow C_6H_5-NO_2 + H_2O$

$x\,k$ moli $C_6H_6 \rightarrow x\,k$ moli $HNO_3 \rightarrow 63 \cdot x$ kg $HNO_3 \rightarrow 63\,x\frac{100}{80}$ kg soluție 80%= $= 78{,}75\,x$ kg $\rightarrow 15{,}75\,x$ kg H_2O (inițial);

$$y \text{ kmoli } H_2SO_4 \text{ necesari}; \quad \frac{15{,}75\,x}{98\,y} = \frac{1}{6}$$

$$6 \cdot 15{,}75\,x = 98\,y.$$

$(78{,}75\,x + 6 \cdot 15{,}75\,x)$ kg amestec .... $63\,x$ kg HNO_3

100 .... a_1

$$a_1 = \frac{6\,300}{173{,}25}\ \%\ HNO_3; \quad a_1 = 36{,}36\%;$$

$$a_2 = \frac{9\,450}{173{,}25}\ \%\ H_2SO_4; \quad a_2 = 54{,}54\%;$$

$$a_3 = 9{,}1\%\ H_2O.$$

b) $78\,x$ kg C_6H_6 .... $173{,}25\,x$ kg amestec nitrant

1 000 kg .... b_1

$$b_1 = 2221{,}15 \text{ kg amestec nitrant.}$$

c) $2221{,}15 \cdot \frac{36{,}36}{100} = 807{,}61$ kg $HNO_3 \Rightarrow 807{,}61 \cdot \frac{100}{80} =$

$= 1009{,}51$ kg sol. HNO_3 80%

$$2221{,}15 \cdot \frac{54{,}54}{100} = 1211{,}46 \text{ kg } H_2SO_4.$$

99°. $(14\,n + 32)$ g acid .... $12\,n$ g C

100 g .... 40 g C

$$560\,n + 1\,280 = 1\,200\,n \Rightarrow n = 2.$$

Formula esterului: $CH_3-COOC_nH_{2n+1}$

$(14\,n + 60)$ g .... $(12\,n + 24)$ g C

100 g X

$$X = \frac{1\,200\,n + 2\,400}{14\,n + 60}\ \%\ C$$

$$\frac{1\,200\,n + 2\,400}{14\,n + 60} = 40 + 14{,}54 = 54{,}54 \Rightarrow n = 2$$

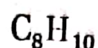
Deci formula esterului: $CH_3-COOCH_2-CH_3$.

100°. a) Formula moleculară:

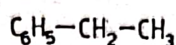
$$M = 28,9 \cdot 3,66 = 106$$

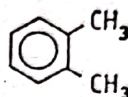
$$C : \frac{90,57 \cdot 106}{12 \cdot 100} = 8$$

$$H : \frac{9,43 \cdot 106}{100} = 10$$

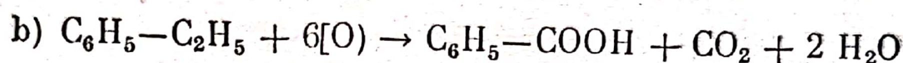


$$C_8H_{10}$$





Etilbenzen o-Xilen



b) $C_6H_5{-}C_2H_5 + 6[O] \rightarrow C_6H_5{-}COOH + CO_2 + 2\ H_2O$



$$\begin{array}{l} 1 \text{ mol} \ldots\ldots\ldots 122 \text{ g} \\ x_1 \ldots\ldots\ldots 59,51 \end{array}$$

$$x_1 = \frac{59,51}{122} \text{ moli etilbenzen}$$

$$\begin{array}{l} 1 \text{ mol} \ldots\ldots\ldots 166 \\ x_2 \ldots\ldots\ldots 40,49 \end{array}$$

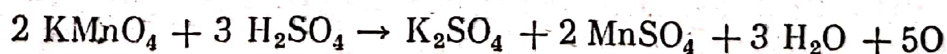
$$x_2 = \frac{40,49}{166} \text{ moli o-xilen}$$

$$\frac{x_1}{x_2} = \frac{2}{1}$$

c) $318 : 106 = 3$ moli amestec (2 moli etilbenzen + 1 mol o-xilen)

$$\begin{array}{l} 1 \text{ mol hidrocarbură} \ldots\ldots\ldots 6 \cdot 16 \text{ g O} \\ 3 \text{ moli} \ldots\ldots\ldots y \end{array}$$

$$y = 18 \cdot 16 \text{ g O.}$$



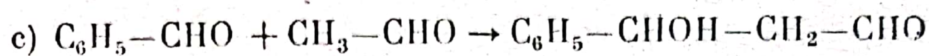
$$2\ KMnO_4 + 3\ H_2SO_4 \rightarrow K_2SO_4 + 2\ MnSO_4 + 3\ H_2O + 5O$$

$$\begin{array}{l} 2 \text{ mol } KMnO_4 \ldots\ldots\ldots 5 \cdot 16 \text{ g O} \\ z \ldots\ldots\ldots 18 \cdot 16 \end{array}$$

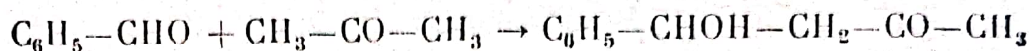
$$z = \frac{2 \cdot 18}{5} = 7,2 \text{ moli } KMnO_4.$$

101°. a) Toţi cei trei compuşi carbonilici pot funcţiona drept componentă carbonilică.

b) Aldehida acetică şi acetona pot funcţiona drept componentă metilenică.



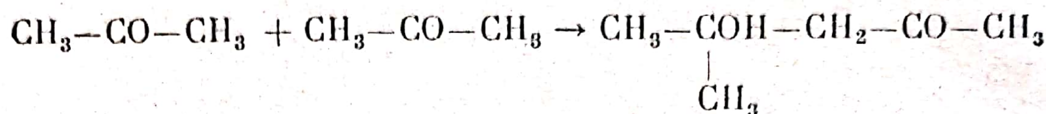
c) $C_6H_5-CHO + CH_3-CHO \rightarrow C_6H_5-CHOH-CH_2-CHO$



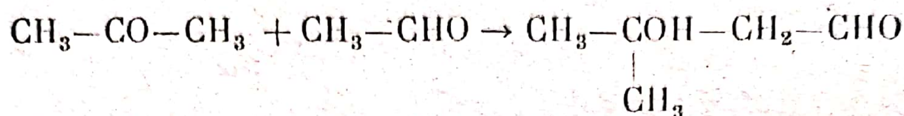
$C_6H_5-CHO + CH_3-CO-CH_3 \rightarrow C_6H_5-CHOH-CH_2-CO-CH_3$



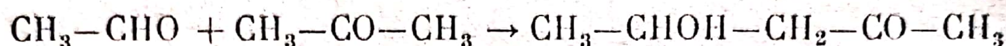
$CH_3-CHO + CH_3-CHO \rightarrow CH_3-CHOH-CH_2-CHO$



$CH_3-CO-CH_3 + CH_3-CO-CH_3 \rightarrow CH_3-C(CH_3)OH-CH_2-CO-CH_3$



$CH_3-CO-CH_3 + CH_3-CHO \rightarrow CH_3-C(CH_3)OH-CH_2-CHO$



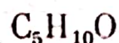
$CH_3-CHO + CH_3-CO-CH_3 \rightarrow CH_3-CHOH-CH_2-CO-CH_3$

102°. Formula moleculară:

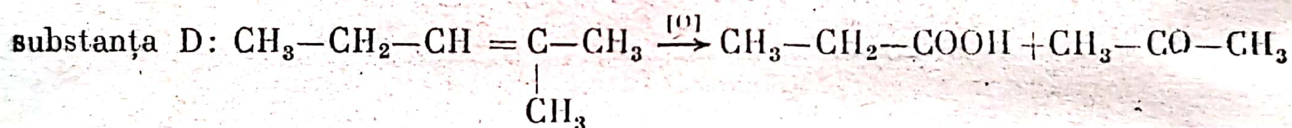
$$C : \frac{86 \cdot 69,8}{100 \cdot 12} = 5$$

$$H : \frac{86 \cdot 11,6}{100} = 10$$

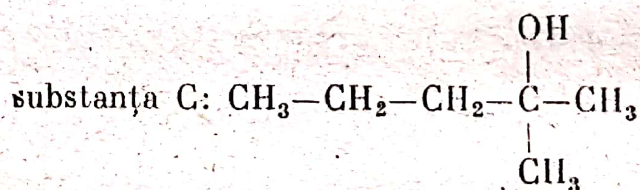
$$O : \frac{86 \cdot 18,6}{100 \cdot 16} = 1$$



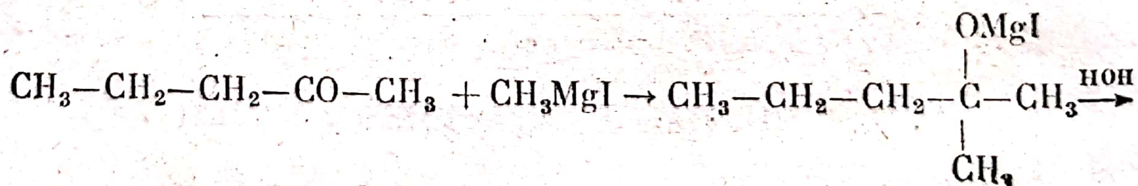
$C_5H_{10}O$



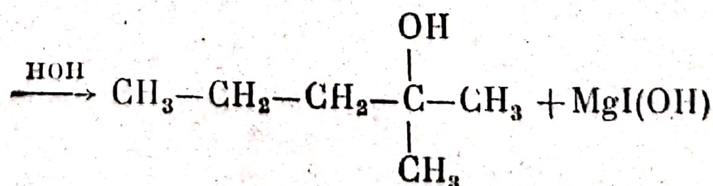
substanța D: $CH_3-CH_2-CH=C(CH_3)-CH_3 \xrightarrow{[O]} CH_3-CH_2-COOH + CH_3-CO-CH_3$



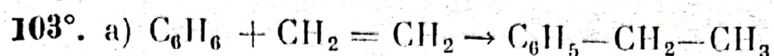
substanța C: $CH_3-CH_2-CH_2-C(OH)(CH_3)-CH_3$

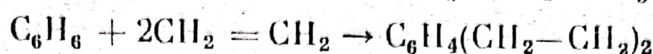


$\underset{A}{CH_3-CH_2-CH_2-CO-CH_3} + CH_3MgI \rightarrow \underset{B}{CH_3-CH_2-CH_2-C(OMgI)(CH_3)-CH_3} \xrightarrow{HOH}$



$\xrightarrow{HOH} CH_3-CH_2-CH_2-C(OH)(CH_3)-CH_3 + MgI(OH)$

103°. a) 
$C_6H_6 + CH_2=CH_2 \rightarrow C_6H_5-CH_2-CH_3$


$C_6H_6 + 2CH_2=CH_2 \rightarrow C_6H_4(CH_2-CH_3)_2$


$C_6H_6 \rightarrow C_6H_6$

78 kg C_6H_6 .... 106 kg etilbenzen............ 28 kg etenă
x_1 .... 35,1 .... y_1

$x_1 = 25{,}83$ kg C_6H_6; $y_1 = 9{,}27$ kg etenă.

78 kg C_6H_6 .... 134 kg dietilbenzen .... 56 kg etenă
x_2 .... 11,1 kg .... y_2

$x_2 = 6{,}46$ kg C_6H_6; $y_2 = 4{,}64$ kg etenă.

Total benzen $= 53{,}8 + 25{,}83 + 6{,}46 = 86{,}09$ kg $\Rightarrow$ 1,1 kmoli

$$C_u = \frac{25{,}83}{86{,}09} \cdot 100 = 30\%$$

$$C_t = \frac{32{,}29}{86{,}09} \cdot 100 = 37{,}5\%$$

$$\eta = \frac{C_u}{C_t} \cdot 100 = 80\%$$

b) 2 moli C_6H_6: 1 mol etenă $\Rightarrow$ 0,55 kmoli etenă $\Rightarrow 0{,}55 \cdot 28 = 15{,}4$ kg etenă

$$C_u = \frac{9{,}27}{15{,}4} \cdot 100 = 60{,}2\%$$

$$C_t = \frac{13{,}91}{15{,}4} \cdot 100 = 90{,}32\%$$

$$\eta = \frac{C_u}{C_t} \cdot 100 = 66{,}65\%$$

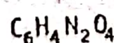
104°. Formula moleculară:

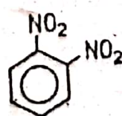
$$C: \frac{168 \cdot 42{,}85}{12 \cdot 100} = 6$$

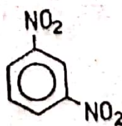
$$H: \frac{168 \cdot 2{,}38}{100} = 4$$

$$O: \frac{168 \cdot 38{,}06}{16 \cdot 100} = 4$$

$$N: \frac{168 \cdot 16{,}71}{14 \cdot 100} = 2$$

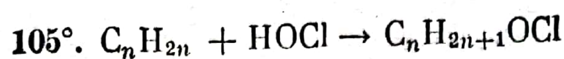

$C_6H_4N_2O_4$



;


;


Substanța A poate fi *p*-dinitrobenzen sau *m*-dinitrobenzen. Cel mai ușor se poate sintetiza *m*-dinitrobenzen (prin nitrare directă).



105°. $C_nH_{2n} + HOCl \rightarrow C_nH_{2n+1}OCl$

$$\begin{array}{l} 14\,n \text{ g alchenă} \;\ldots\ldots\ldots\ldots\; 2\,n \text{ g H} \\ 100 \;\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\; x_1 \end{array}$$

$$x_1 = \frac{200\,n}{14\,n} = 14{,}28\ \%\ \text{H}$$

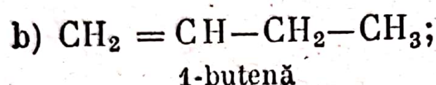
$$\begin{array}{l} (14\,n + 52{,}5)\text{g} \;\ldots\ldots\ldots\; (2n+1)\text{ g H} \\ 100 \;\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\; x_2 \end{array}$$

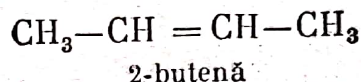
$$x_2 = \frac{200\,n + 100}{14\,n + 52{,}5}$$

$$\frac{200\,n + 100}{14\,n + 52{,}5} + 5{,}99 = 14{,}28 \Rightarrow n = 4$$

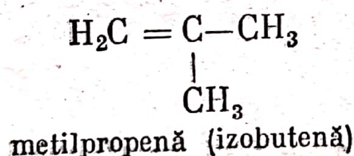


C_4H_8





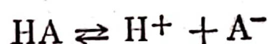
b) $CH_2=CH-CH_2-CH_3$; 1-butenă $CH_3-CH=CH-CH_3$ 2-butenă



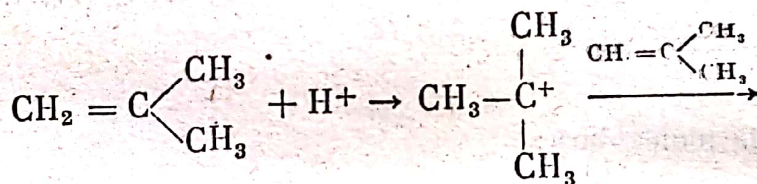
$H_2C=C(CH_3)-CH_3$

metilpropenă (izobutenă)

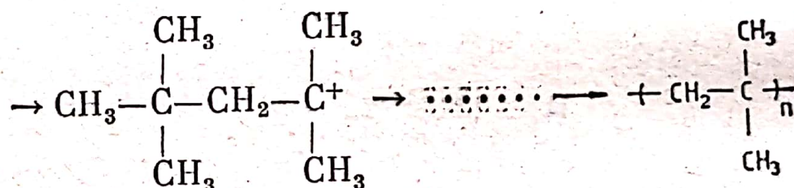
c) polimerizare cationică:



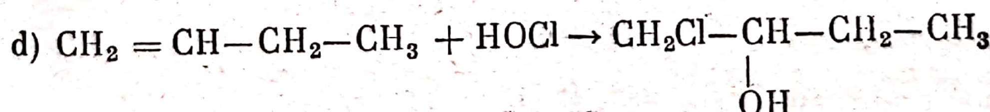
$HA \rightleftarrows H^+ + A^-$



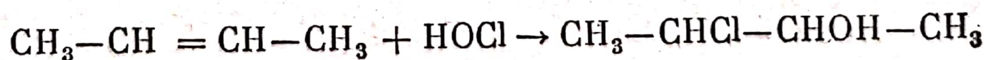
$CH_2=C(CH_3)_2 + H^+ \rightarrow CH_3-C^+(CH_3)-CH_3 \xrightarrow{CH_2=C(CH_3)_2}$



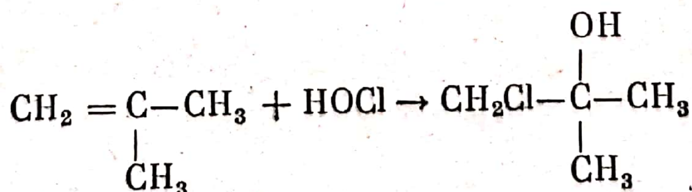
$\rightarrow CH_3-C(CH_3)_2-CH_2-C^+(CH_3)_2 \rightarrow \ldots\ldots \rightarrow -[CH_2-C(CH_3)_2]_n-$



d) $CH_2=CH-CH_2-CH_3 + HOCl \rightarrow CH_2Cl-CH(OH)-CH_2-CH_3$



$CH_3-CH=CH-CH_3 + HOCl \rightarrow CH_3-CHCl-CHOH-CH_3$



$CH_2=C(CH_3)-CH_3 + HOCl \rightarrow CH_2Cl-C(OH)(CH_3)-CH_3$

Temperaturile de fierbere ale produșilor rezultați la adiția acidului hipocloros sînt ridicate în comparație cu cele ale alcanilor corespunzători, datorită asocierii moleculelor prin legături de hidrogen.

106°. CH_3-CH_2-CHO; $CH_3-CO-CH_3$

propanol (A) — propanonă (acetonă) (B)

$$CH_2=CH-CH_2OH; \quad \begin{array}{c} H_2C-CH-OH \\ \diagdown \ \diagup \\ CH_2 \end{array}$$

alcool alilic — ciclopropanol

b) $$CH_3-CH_2-CH=\underset{\displaystyle CH_3}{\underset{|}{C}}-CH_3+O_3 \rightarrow CH_3-CH_2-CH\langle\begin{array}{c} O-O \\ \\ O \end{array}\rangle \underset{\displaystyle CH_3}{\underset{|}{C}}-CH_3 \rightarrow$$

$$\rightarrow CH_3-CH_2-CHO+CH_3-CO-CH_3$$

c) $$CH_3-CH_2-CHO+H_2 \xrightarrow{Ni} CH_3-CH_2-CH_2OH \xrightarrow[-H_2O]{(H_2SO_4)}$$

$$\rightarrow CH_3-CH=CH_2 \xrightarrow[(H_2SO_4)]{HOH} CH_3-\underset{\displaystyle OH}{\underset{|}{CH}}-CH_3 \xrightarrow[-H_2O]{[O]} CH_3-CO-CH_3$$

$$CH_3-CO-CH_3+H_2 \xrightarrow{Ni} CH_3-CHOH-CH_3 \xrightarrow[-H_2O]{(H_2SO_4)} CH_2=CH-CH_3$$

$$\xrightarrow[-HCl]{+Cl_2/500°C} CH_2=CH-CH_2Cl \xrightarrow[Ni]{H_2} CH_3-CH_2-CH_2Cl \xrightarrow[-HCl]{+HOH}$$

$$\xrightarrow[-HCl]{+HOH} CH_3-CH_2-CH_2OH \xrightarrow[-H_2O]{[O]} CH_3-CH_2-CHO$$

107°. a) $$HC\equiv C^-:Na^+ + Br-\underset{\displaystyle CH_3}{\underset{|}{CH}}-CH_3 \xrightarrow[-NaBr]{} HC\equiv C-\underset{\displaystyle CH_3}{\underset{|}{CH}}-CH_3 \rightarrow$$

$$\xrightarrow[(HgSO_4)]{HOH} CH_3-CO-\underset{\displaystyle CH_3}{\underset{|}{CH}}-CH_3$$

$$C_6H_5-CH_2-C\equiv CH+HOH \xrightarrow{(HgSO_4)} C_6H_5-CH_2-CO-CH_3$$

$$C_6H_5-CH_2-\underset{\displaystyle CH_3}{\underset{|}{C}}=\underset{\displaystyle CH_3}{\underset{|}{C}}-\underset{\displaystyle CH_3}{\underset{|}{CH}}-CH_3 \xrightarrow{2[O]} C_6H_5-CH_2-CO-CH_3 +$$

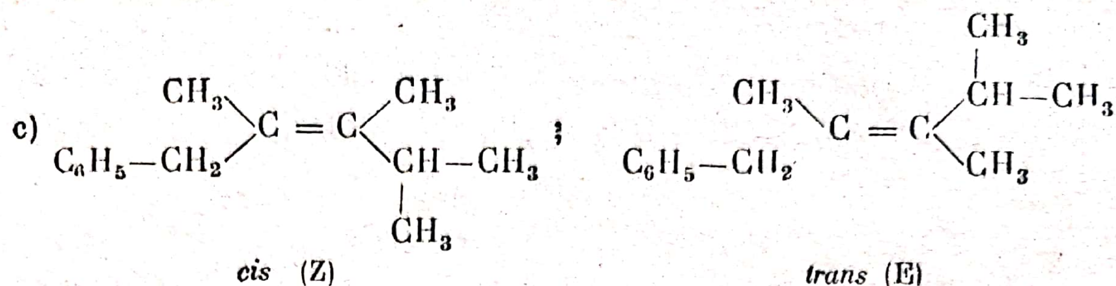
1-fenil-2,3,4-trimetil-2-pentina (A) — benzilmetilcetona (C)

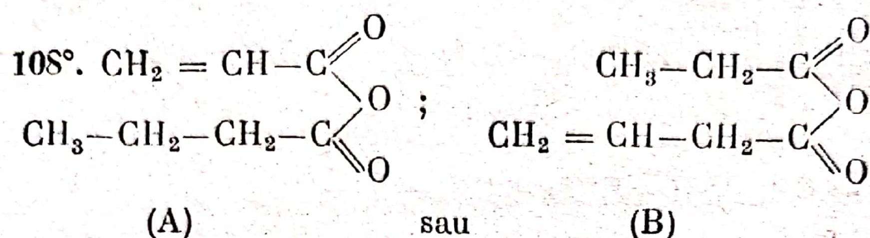
$$+CH_3-CO-\underset{\displaystyle CH_3}{\underset{|}{CH}}-CH_3$$

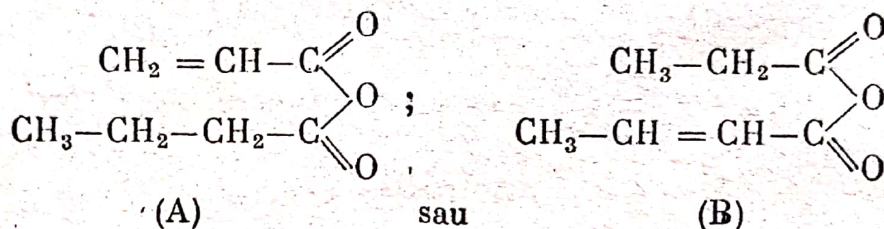
izopropilmetilcetona (B)

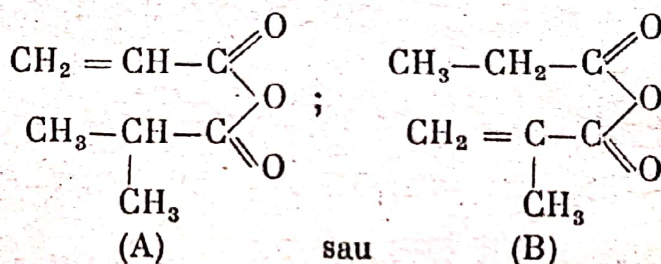
b) $$C\% = \frac{168 \cdot 100}{188} = 89{,}36\%$$

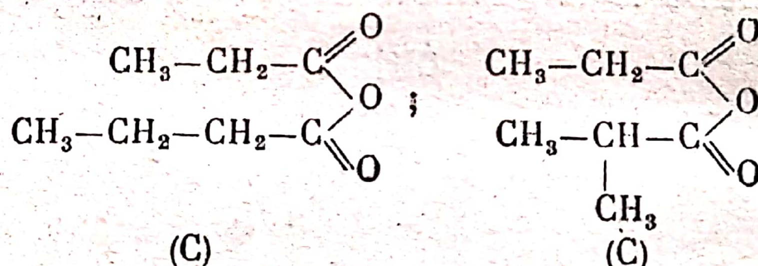
$$H\% = \frac{20 \cdot 100}{188} = 10{,}63\%$$

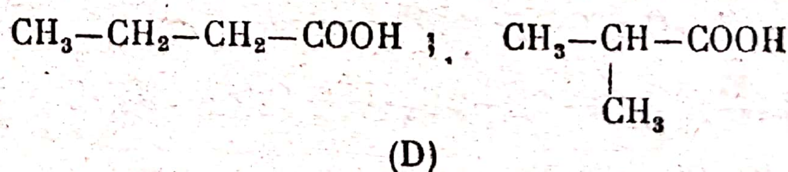


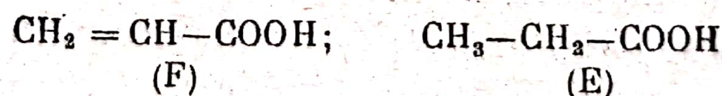


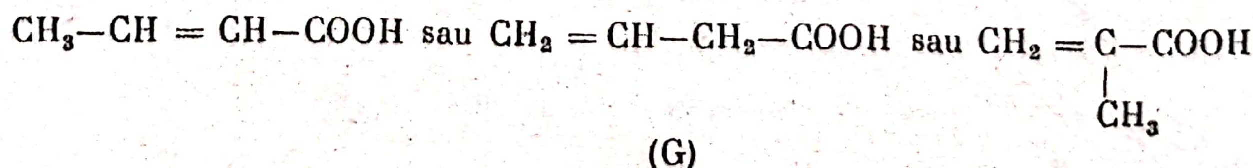


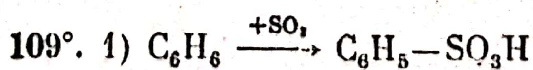


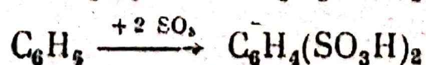












Se consideră x kmoli acid benzensulfonic și y kmoli acidbenzendisulfonic din amestec:

$$\frac{x}{y} = \frac{3}{1};\ x = 3y$$

$$x \cdot 158 + y \cdot 238 = 1424 \text{ kg}$$

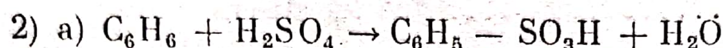
$$3y \cdot 158 + y \cdot 238 = 1424 \qquad y = 2;\ x = 6$$

Cantitatea de SO_3 consumată:

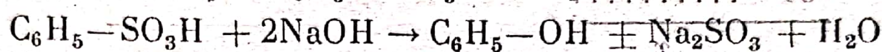
$$6 \cdot 80 + 2 \cdot 160 = 800 \text{ kg.}$$

Cantitatea de H_2SO_4 (cu 20% SO_3):

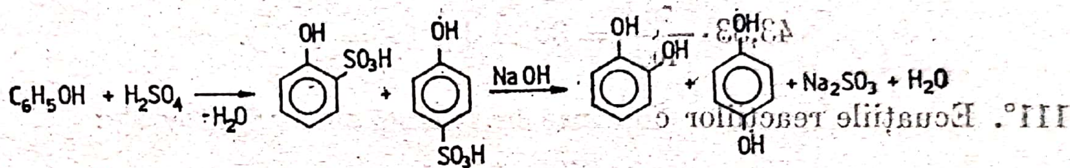
$$800 \cdot \frac{100}{20} = 4000 \text{ kg } H_2SO_4 \text{ oleum}$$

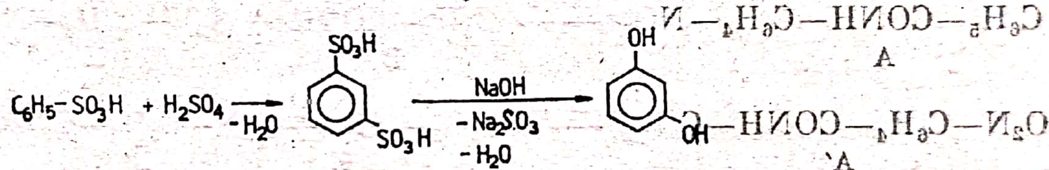


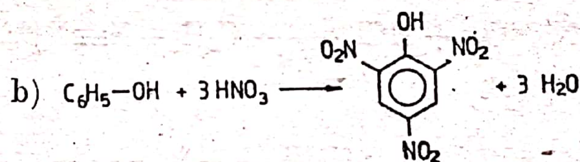
2) a) $C_6H_6 + H_2SO_4 \rightarrow C_6H_5-SO_3H + H_2O$



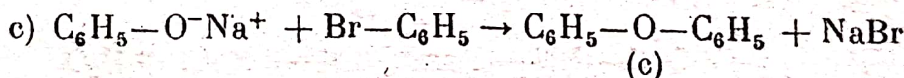
$C_6H_5-SO_3H + 2NaOH \rightarrow C_6H_5-OH + Na_2SO_3 + H_2O$



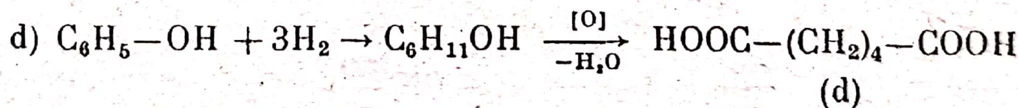




(b)

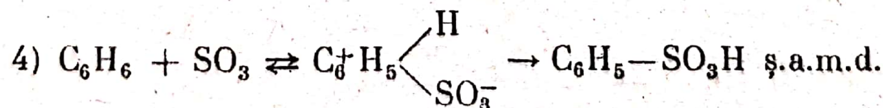


c) $C_6H_5-O^-Na^+ + Br-C_6H_5 \rightarrow C_6H_5-O-C_6H_5 + NaBr$
(c)

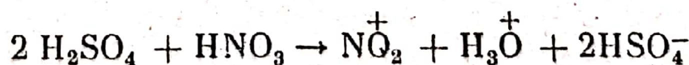


d) $C_6H_5-OH + 3H_2 \rightarrow C_6H_{11}OH \xrightarrow[-H_2O]{[O]} HOOC-(CH_2)_4-COOH$
(d)

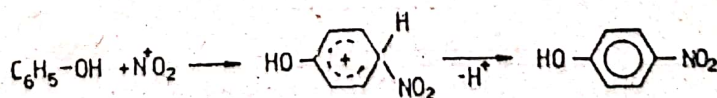
3) d > b > *m*-dihidroxibenzen > *p*-dihidroxibenzen > *o*-dihidroxibenzen > c

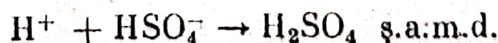


4) $C_6H_6 + SO_3 \rightleftarrows C_6^+H_5\langle^{H}_{SO_3^-} \rightarrow C_6H_5-SO_3H$ ș.a.m.d.



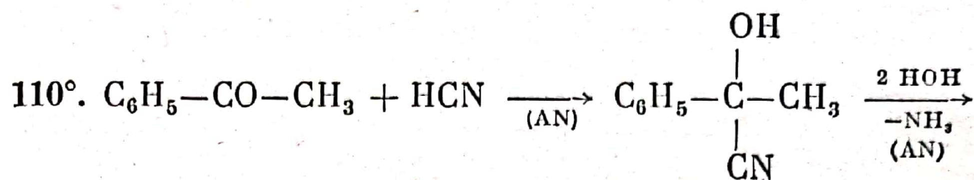
$$2\,H_2SO_4 + HNO_3 \rightarrow \overset{+}{N}O_2 + H_3\overset{+}{O} + 2HSO_4^-$$



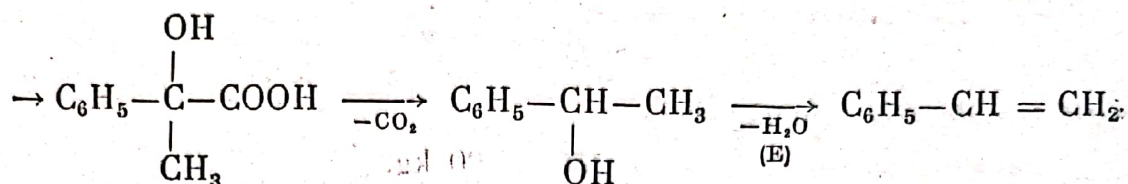


$$H^+ + HSO_4^- \rightarrow H_2SO_4 \text{ ș.a.m.d.}$$

110°.



$$C_6H_5-CO-CH_3 + HCN \xrightarrow[(AN)]{} C_6H_5-\underset{CN}{\overset{OH}{C}}-CH_3 \xrightarrow[-NH_3\ (AN)]{2\ HOH}$$



$$\rightarrow C_6H_5-\underset{CH_3}{\overset{OH}{C}}-COOH \xrightarrow[-CO_2]{} C_6H_5-\underset{OH}{CH}-CH_3 \xrightarrow[-H_2O]{} \underset{(E)}{C_6H_5-CH=CH_2}$$

$$100 \cdot \frac{50}{100} = 50 \text{ kg acetofenonă transformată}$$

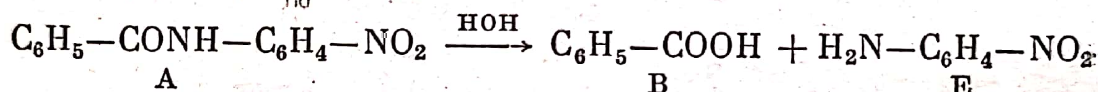
120 kg A .... 104 kg stiren

50 x

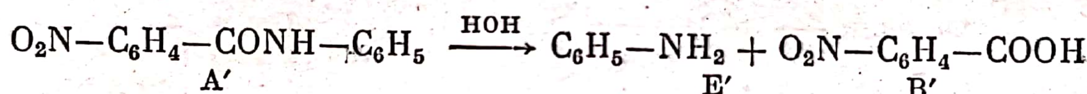
$$x = 43{,}33 \text{ kg } (\eta = 100\%)$$

$$43{,}33 \cdot \frac{70}{100} = 30{,}31 \text{ kg } (\eta = 70\%).$$

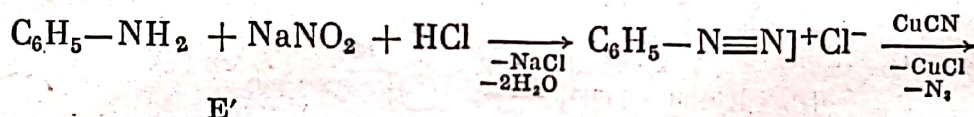
111°. Ecuațiile reacțiilor cuprinse în schemă sînt următoarele:



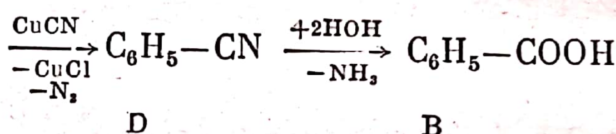
$$\underset{A}{C_6H_5-CONH-C_6H_4-NO_2} \xrightarrow{HOH} \underset{B}{C_6H_5-COOH} + \underset{E}{H_2N-C_6H_4-NO_2}$$



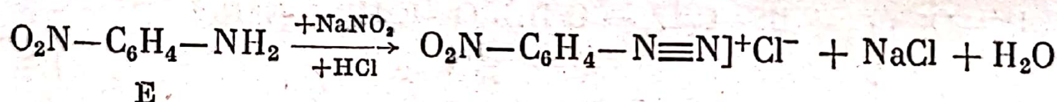
$$\underset{A'}{O_2N-C_6H_4-CONH-C_6H_5} \xrightarrow{HOH} \underset{E'}{C_6H_5-NH_2} + \underset{B'}{O_2N-C_6H_4-COOH}$$



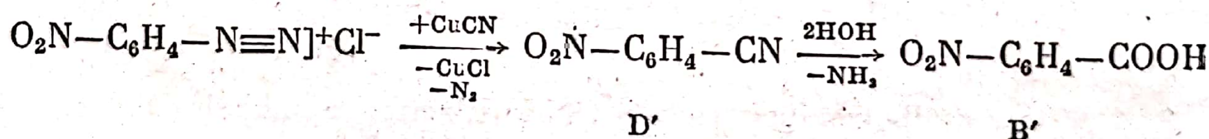
$$\underset{E'}{C_6H_5-NH_2} + NaNO_2 + HCl \xrightarrow[-NaCl\ -2H_2O]{} C_6H_5-N\equiv N]^+Cl^- \xrightarrow[-CuCl\ -N_2]{CuCN}$$



$$\xrightarrow[-CuCl\ -N_2]{CuCN} \underset{D}{C_6H_5-CN} \xrightarrow[-NH_3]{+2HOH} \underset{B}{C_6H_5-COOH}$$

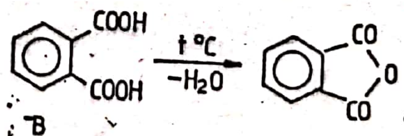


$$\underset{E}{O_2N-C_6H_4-NH_2} \xrightarrow[+HCl]{+NaNO_2} O_2N-C_6H_4-N\equiv N]^+Cl^- + NaCl + H_2O$$



$$O_2N-C_6H_4-N\equiv N]^+Cl^- \xrightarrow[-CuCl\ -N_2]{+CuCN} \underset{D'}{O_2N-C_6H_4-CN} \xrightarrow[-NH_3]{2HOH} \underset{B'}{O_2N-C_6H_4-COOH}$$

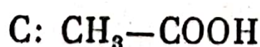
112°.



$C_nH_{2n}O_2$: $(14n + 32)$ .... $12n$ g C

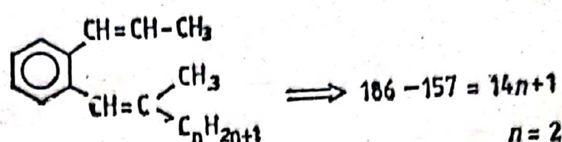
100 40

$$40(14n + 32) = 1200n \Rightarrow n = 2$$

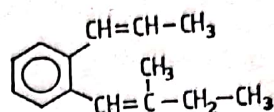


C: CH_3-COOH

D este o cetonă

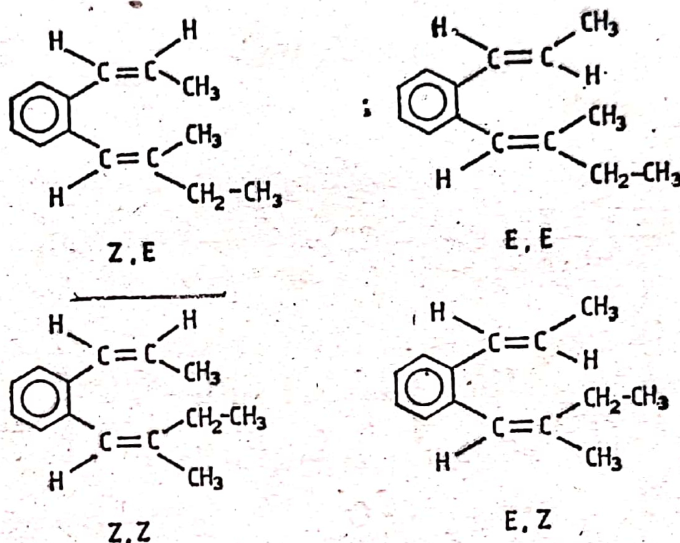


A:



b) Izomeri orto-, meta- şi para.

c) Fiecare dintre izomerii de poziţie prezintă 4 izomeri geometrici; de exemplu izomerul orto-:

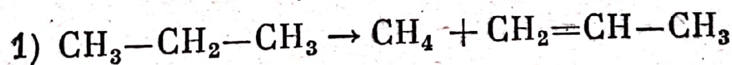


113°. *s*: C_xH_yO

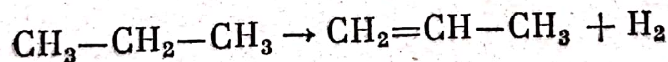
$$12\,x + y + 16 = 274$$

$$x = y + 2$$

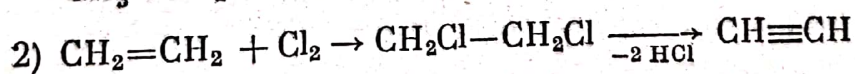
$$12\,x + x - 2 + 16 = 247; \qquad x = 20; \qquad y = 18.$$



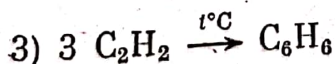
1) $CH_3-CH_2-CH_3 \rightarrow CH_4 + CH_2{=}CH-CH_3$



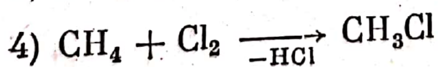
$CH_3-CH_2-CH_3 \rightarrow CH_2{=}CH-CH_3 + H_2$



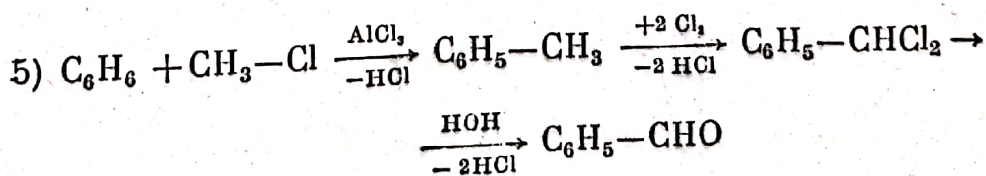
2) $CH_2{=}CH_2 + Cl_2 \rightarrow CH_2Cl-CH_2Cl \xrightarrow[-2\,HCl]{} CH{\equiv}CH$



3) $3\ C_2H_2 \xrightarrow{t°C} C_6H_6$

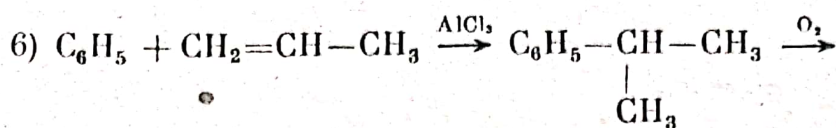


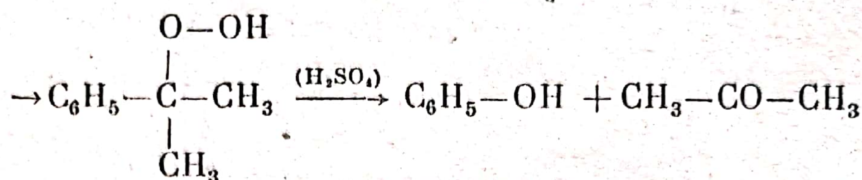
4) $CH_4 + Cl_2 \xrightarrow[-HCl]{} CH_3Cl$

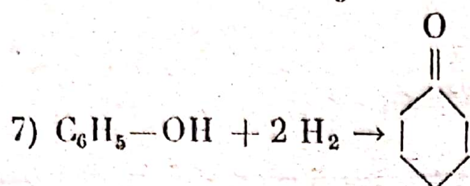


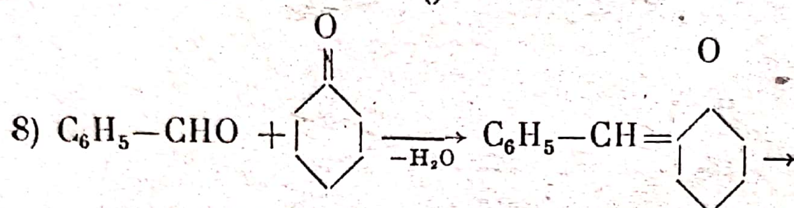
5) $C_6H_6 + CH_3-Cl \xrightarrow[-HCl]{AlCl_3} C_6H_5-CH_3 \xrightarrow[-2\,HCl]{+2\,Cl_2} C_6H_5-CHCl_2 \rightarrow$

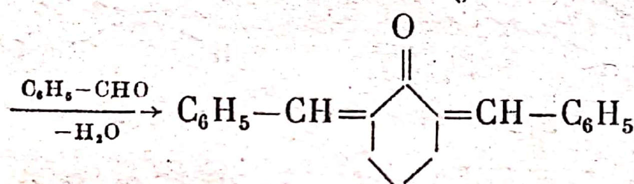
$\xrightarrow[-2HCl]{HOH} C_6H_5-CHO$

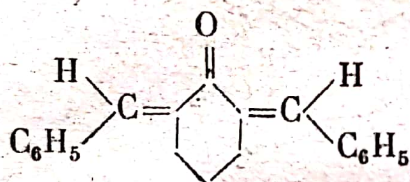


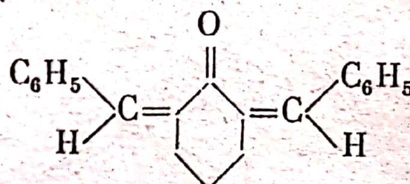


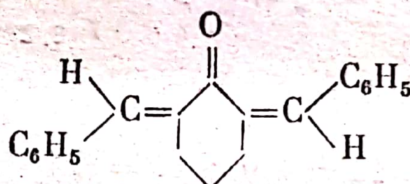


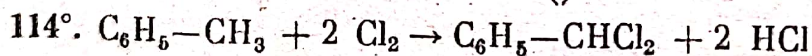




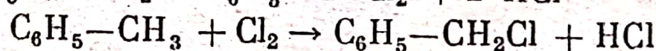




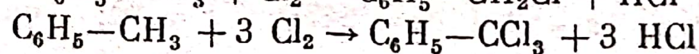


114°. 

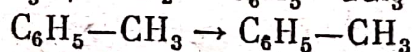
$$C_6H_5-CH_3 + 2\ Cl_2 \rightarrow C_6H_5-CHCl_2 + 2\ HCl$$



$$C_6H_5-CH_3 + Cl_2 \rightarrow C_6H_5-CH_2Cl + HCl$$



$$C_6H_5-CH_3 + 3\ Cl_2 \rightarrow C_6H_5-CCl_3 + 3\ HCl$$



$$C_6H_5-CH_3 \rightarrow C_6H_5-CH_3$$

Pentru a obține 100 kg masă de reacție cu 64,4 kg (0,4 kmoli) clorură de benziliden, 12,65 kg (0,1 kmoli) clorură de benzil, 19,55 kg (0,1 kmoli) feniltriclormetan și 3,4 kg (0,037 kmoli) toluen sînt necesari 0,637 kmoli toluen și 1,2 kmoli clor.

a) raportul molar clor: toluen $= \frac{1,2}{0,637} = 1,88$;

b) $\frac{0,037 \cdot 100}{0,637} = 5,80\%$;

c) $C_u = \frac{0,4}{0,637} \cdot 100 = 62,80\%$;

$$C_t = \frac{0,6}{0,637} \cdot 100 = 94,19\%;$$

$$\eta = \frac{0,4}{0,6} \cdot 100 = 66,66\%.$$

d) 322 : 161 = 2 kmoli

$$\text{vol. } Cl_2 = \frac{2 \cdot 1{,}2 \cdot 22{,}4}{0{,}4} = 134{,}4 \text{ m}^3$$

$$\text{masa de toluen} = \frac{2 \cdot 0{,}637 \cdot 92}{0{,}4} = 293{,}02 \text{ kg}$$

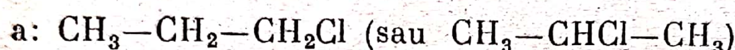
$$\text{vol. toluen} = \frac{293{,}02}{0{,}86} = 340{,}72 \text{ l}$$

115°. M g .... 35,5 g Cl

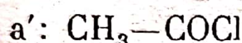
100 45,22

a: R—Cl; M = 78,5; $M_R = 78{,}5 - 35{,}5 = 43$

a′: R′—COCl; $M'_R = 78{,}5 - 63{,}5 = 15$



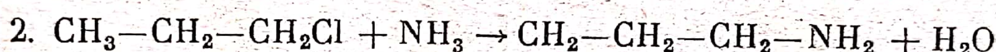
a: $CH_3-CH_2-CH_2Cl$ (sau $CH_3-CHCl-CH_3$)



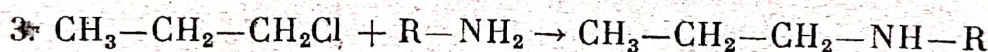
a′: CH_3-COCl



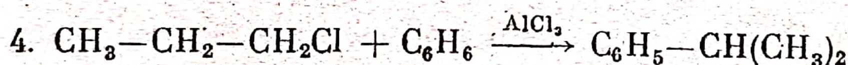
1. $CH_3-CH_2-CH_2Cl + H_2O \rightarrow CH_3-CH_2-CH_2-OH + HCl$



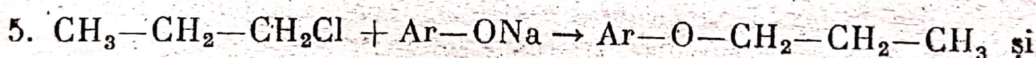
2. $CH_3-CH_2-CH_2Cl + NH_3 \rightarrow CH_2-CH_2-CH_2-NH_2 + H_2O$



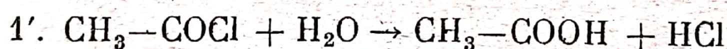
3. $CH_3-CH_2-CH_2Cl + R-NH_2 \rightarrow CH_3-CH_2-CH_2-NH-R$



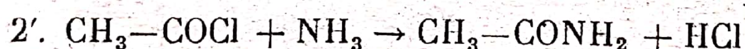
4. $CH_3-CH_2-CH_2Cl + C_6H_6 \xrightarrow{AlCl_3} C_6H_5-CH(CH_3)_2$



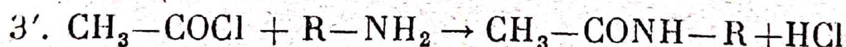
5. $CH_3-CH_2-CH_2Cl + Ar-ONa \rightarrow Ar-O-CH_2-CH_2-CH_3$ și



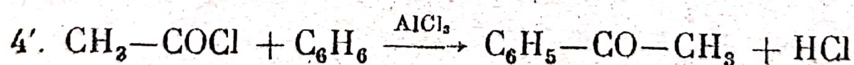
1′. $CH_3-COCl + H_2O \rightarrow CH_3-COOH + HCl$



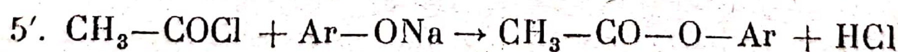
2′. $CH_3-COCl + NH_3 \rightarrow CH_3-CONH_2 + HCl$



3′. $CH_3-COCl + R-NH_2 \rightarrow CH_3-CONH-R + HCl$

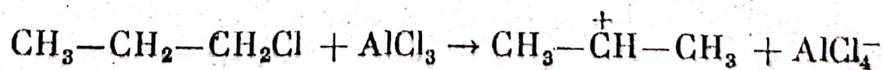


4′. $CH_3-COCl + C_6H_6 \xrightarrow{AlCl_3} C_6H_5-CO-CH_3 + HCl$

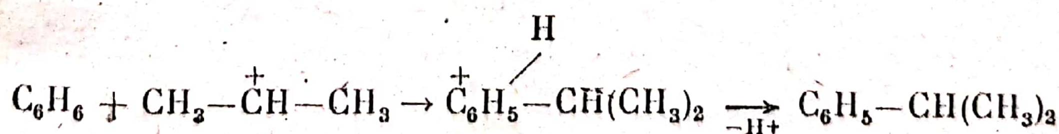


5′. $CH_3-COCl + Ar-ONa \rightarrow CH_3-CO-O-Ar + HCl$

Mecanismul reacției 4:



$$CH_3-CH_2-CH_2Cl + AlCl_3 \rightarrow CH_3-\overset{+}{C}H-CH_3 + AlCl_4^-$$

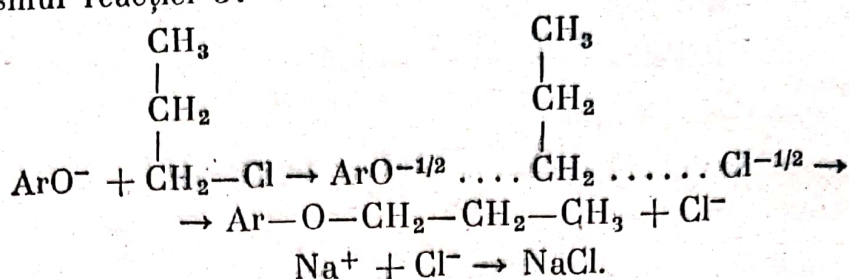


$$C_6H_6 + CH_3-\overset{+}{C}H-CH_3 \rightarrow \overset{+}{C_6}H_5(H)-CH(CH_3)_2 \xrightarrow[-H^+]{} C_6H_5-CH(CH_3)_2$$



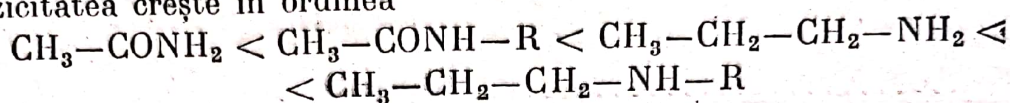
$$AlCl_4^- + H^+ \rightarrow AlCl_3 + HCl$$

Mecanismul reacţiei 5:

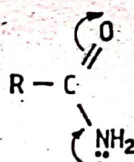


$$Na^+ + Cl^- \rightarrow NaCl.$$

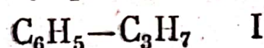
Bazicitatea creşte în ordinea

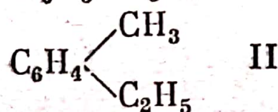


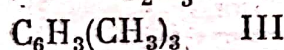
Aminele secundare sînt baze mai tari decît cele primare datorită efectului $+I_s$ a doi radicali alchil (care măresc densitatea de electroni la atomul de azot). Bazicitatea amidelor este foarte scăzută datorită efectului electromer $-E_s$ al grupei $>C=O$;



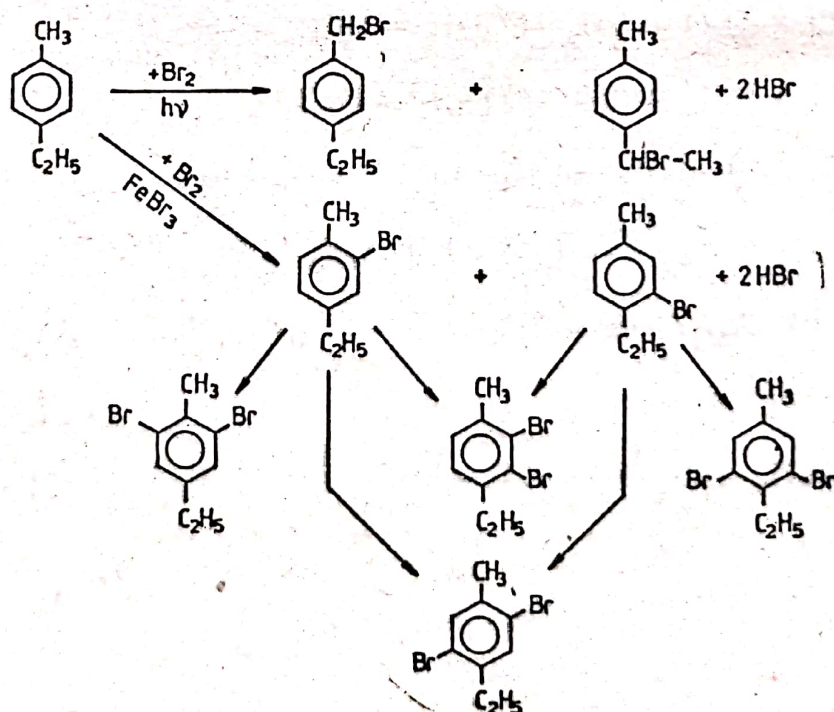
116°. Formulei moleculare C_9H_{12} îi poate corespunde unul dintre compuşii



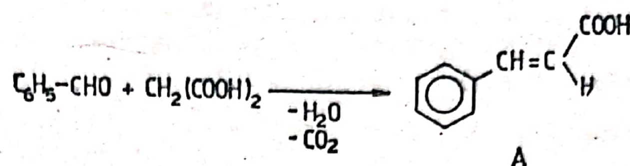


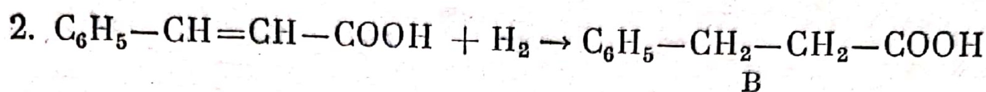


Ţinînd cont de datele problemei numai *p*-etilmetilbenzenul poate conduce la derivaţii bromuraţi respectivi, după următoarea schemă:



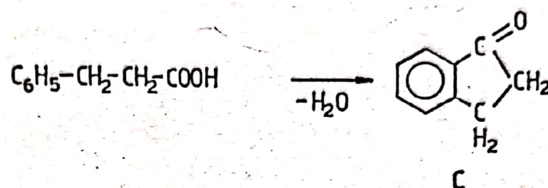
117°. 1.



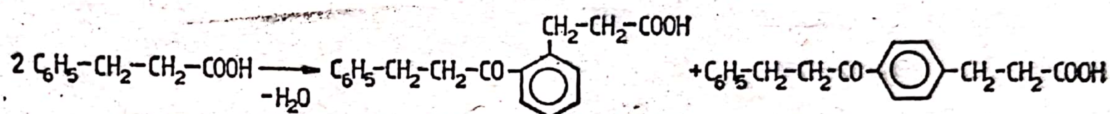
2. 

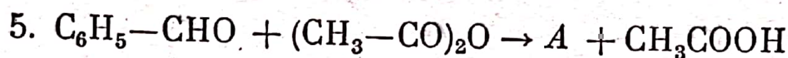
$$C_6H_5-CH=CH-COOH + H_2 \rightarrow \underset{B}{C_6H_5-CH_2-CH_2-COOH}$$

3.

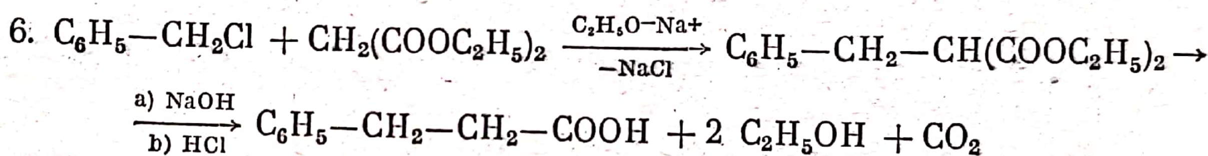


4.



5. 

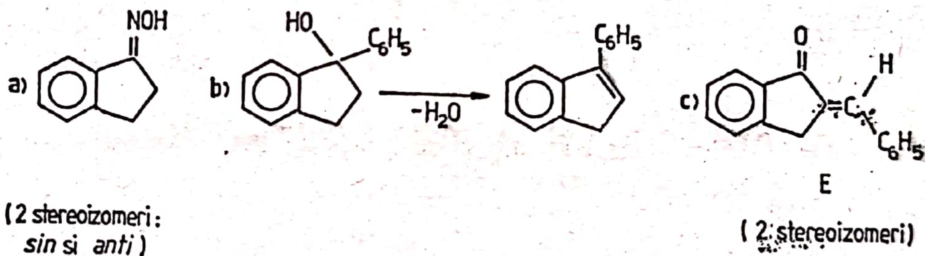
$$C_6H_5-CHO + (CH_3-CO)_2O \rightarrow A + CH_3COOH$$

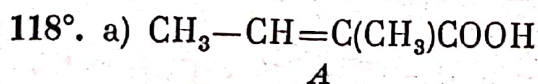
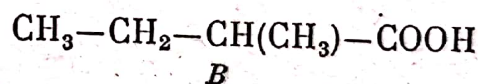
6. 

$$C_6H_5-CH_2Cl + CH_2(COOC_2H_5)_2 \xrightarrow[-NaCl]{C_2H_5O^-Na^+} C_6H_5-CH_2-CH(COOC_2H_5)_2 \rightarrow$$

$$\xrightarrow[b)\ HCl]{a)\ NaOH} C_6H_5-CH_2-CH_2-COOH + 2\ C_2H_5OH + CO_2$$

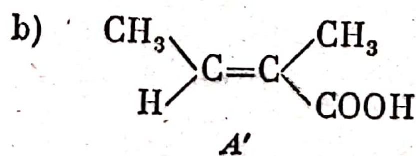
7.

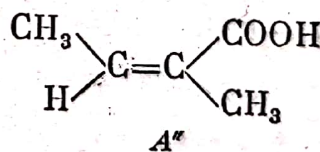


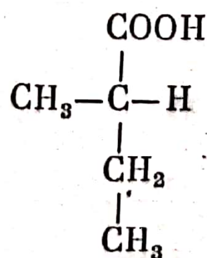
118°. a)  

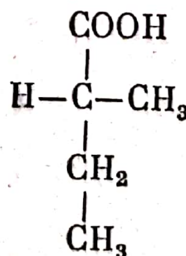
$$\underset{A}{CH_3-CH=C(CH_3)COOH} \qquad \underset{B}{CH_3-CH_2-CH(CH_3)-COOH}$$

b)







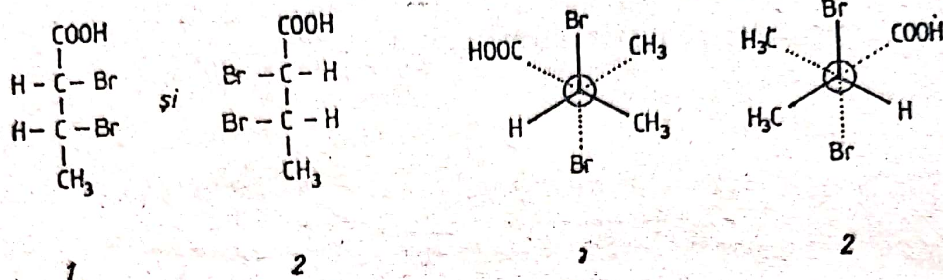


B

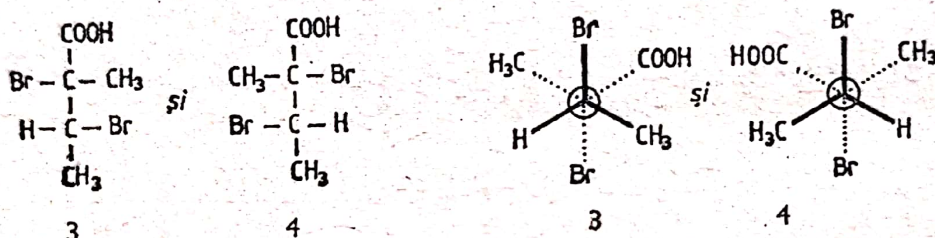
c) Întotdeauna doi (vezi e): *1* la *4*.

d) Adiția bromului la alchene conduce la izomerul *trans* în condițiile date. Dacă în urma adiției se formează doi atomi de carbon asimetrici (centri chirali) rezultă $2^2 = 4$ stereoizomeri (doi cîte doi enantiomeri).

e) Pentru *cis* — *A'*:

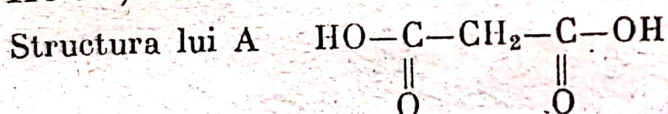


Pentru *trans* — *A"*:

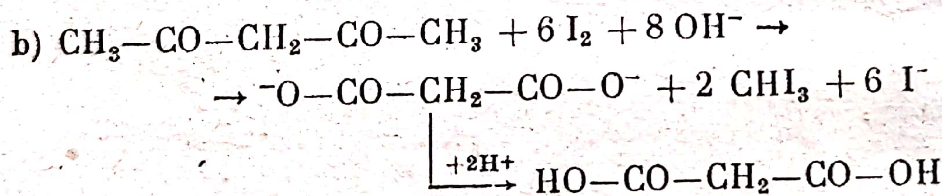


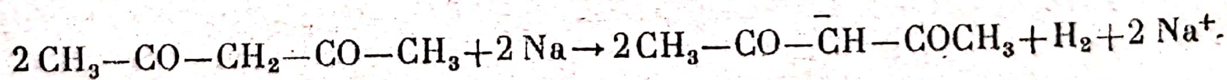
1 cu *2* sau *3* cu *4* sînt enantiomeri; *1* cu *3* și cu *4* și, respectiv, *2* cu *3* și cu sînt diastereoizomeri.

119°. a) Masa moleculară a lui A = 103 g/mol.

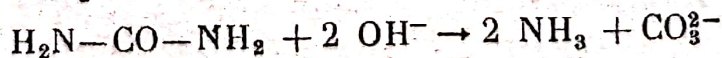


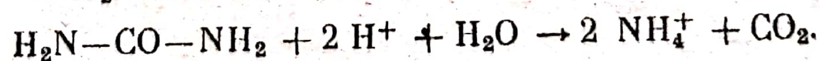
b) $CH_3—CO—CH_2—CO—CH_3 + 6\ I_2 + 8\ OH^- \rightarrow$



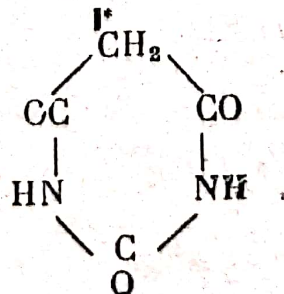


c) $H_2N—CO—NH_2$

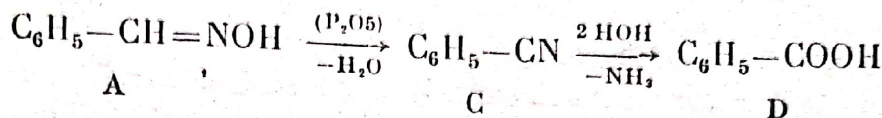


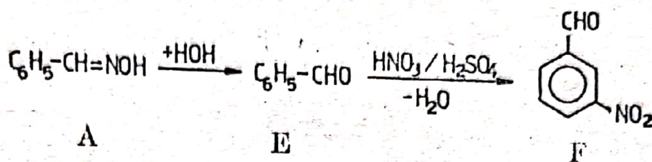


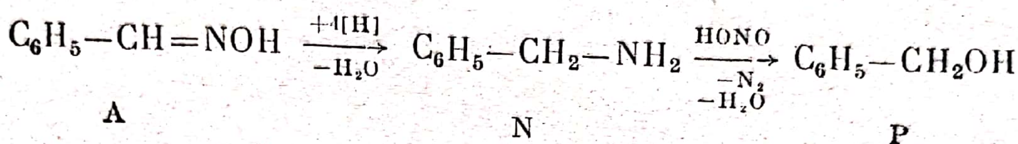
d)

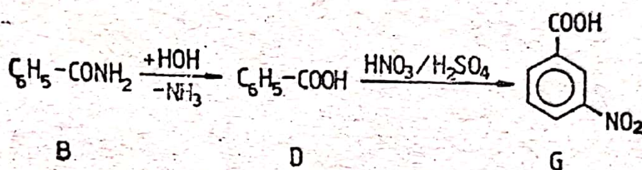


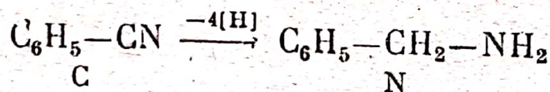
120°. Structura compuşilor de la A la R şi ecuaţiile reacţiilor din schemă sînt următoarele:

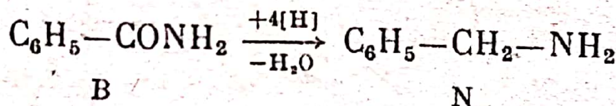


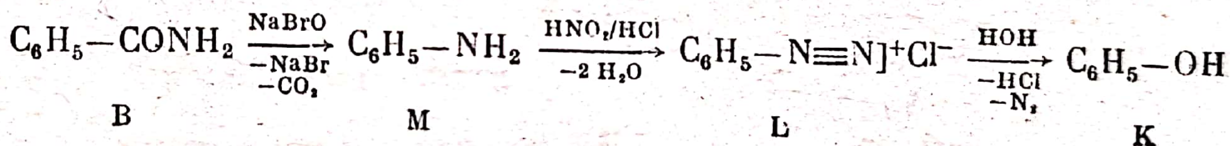


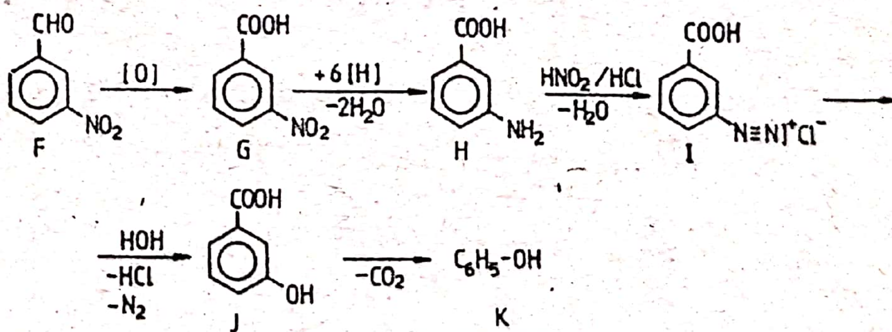


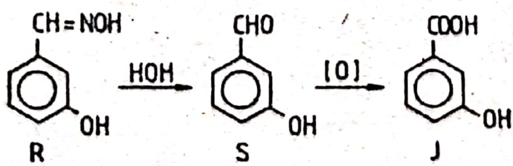










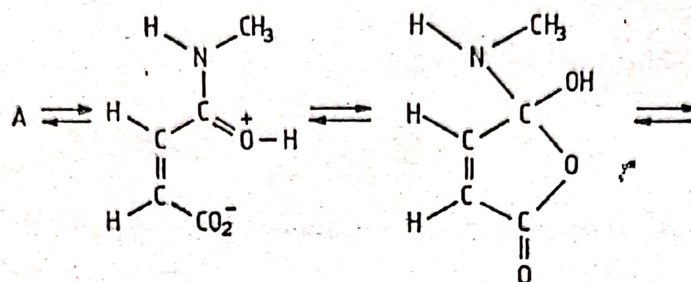


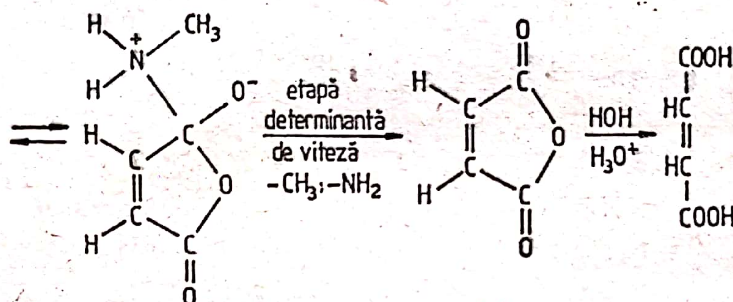
121°. 1. Viteza mare a reacţiei de hidroliză a lui A se datoreşte catalizei intramoleculare a grupei funcţionale carboxil situată în poziţia *cis*. În B grupa carboxil este situată în *trans* faţă de grupa amidă şi deci prea îndepărtat pentru a determina o cataliză acidă intramoleculară.

2. Între $pH = 0$ și $pH = 2$, funcțiunea carboxil nu este ionizată și deci poate participa la cataliza intramoleculară. Hidroliza în acest interval de pH este numai un rezultat al catalizei efectuate de grupa carboxil (și deci nu ca o concurentă a catalizei prin H_3O^+).

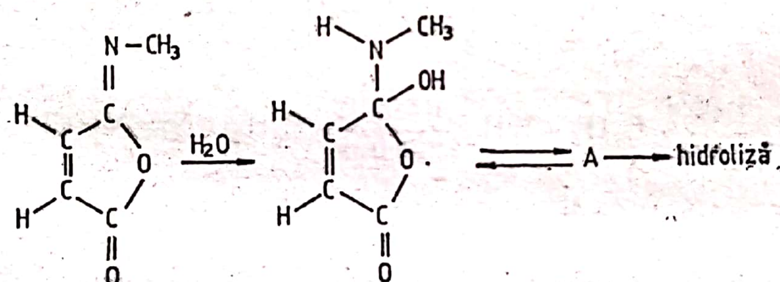
3. La $pH > 3$ grupa carboxil este ionizată și deci cataliza intramoleculară acidă în care transferul protonului joacă un rol important nu mai este posibilă.

4.

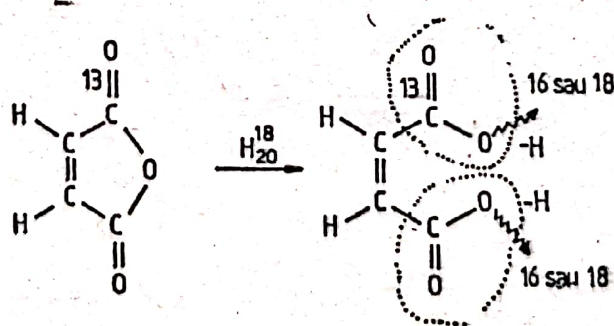




5.



Cu observațiile date mai jos. etapa determinantă de viteză poate fi ușor identificată.



$M = 47$ cînd ^{13}C și ^{18}O

$M = 45$ cînd ^{13}C și ^{16}O

$M = 46$ cînd ^{12}C și ^{18}O

$M = 44$ cînd ^{12}C și ^{16}O.

§ 4. GEOMETRIE ÎN SPAȚIU

§ 5. GEOMETRIE ANALITICĂ

§ 6. ANALIZĂ MATEMATICĂ

B. PROBLEME DATE LA CONCURSURILE DE ADMITERE ÎN ÎNVĂȚĂMÎNTUL SUPERIOR

FIZICĂ

CHIMIE